arXiv:2305.05934v2 [econ.EM] 7 Nov 2024

主成分分析能否保留因子载荷的稀疏性?

Jie Wei[a]，Yonghui Zhang[b*]

[a]华中科技大学经济学院，中国[b]中国人民大学经济学院，中国

2024年11月8日

Abstract

本文研究了具有稀疏载荷的弱因子模型的主成分分析（PCA）估计。我们揭示了主成分分析载荷估计量的一种内在近似稀疏性保持特性，该特性源于旋转矩阵的近似（分块）上三角结构。这表明因子之间存在一种非对称关系：较强因子的旋转载荷的稀疏性可能受到较弱因子载荷的干扰，而较弱因子的旋转载荷的稀疏性几乎不受较强因子载荷的影响。随后，我们提出了一种替代现有惩罚方法的简单方案，即直接筛除较小的主成分分析载荷估计量，以使载荷估计量稀疏化，并构造因子强度的一致估计量。

*我们衷心感谢副编辑和三位审稿人提出的诸多建设性意见，这些意见极大地提升了本文的质量。我们感谢 Simon Freyaldenhoven 和 Takashi Yamagata 提供的宝贵讨论，也感谢北京大学、中国人民大学、2023年 IAAE 和 2023年 IPDC 的研讨会及会议参与者。我们还感谢 Simon Freyaldenhoven、Cheng Yong Tang 和 Yoshimasa Uematsu 分享他们的代码。Wei 衷心感谢华中科技大学学术前沿青年团队计划（2017QYTD13）和中央高校基本科研业务费（HUST：2022年WKYXZX014）提供的经费支持。Zhang 衷心感谢国家自然科学基金（项目编号：71973141 和 71873033）提供的经费支持。通信地址：Yonghui Zhang，中国人民大学经济学院，中国北京；电子邮箱：yonghui.zhang@ruc.edu.cn。所有误差均由作者自行负责。本文的 Matlab 代码可按需索取。

通过一系列蒙特卡洛模拟，考察了所提出估计量的有限样本表现。对 FRED-QD 数据集的应用揭示了因子载荷的一般稀疏性模式及其动态特征。

关键词：因子强度、主成分、旋转矩阵、稀疏载荷、稀疏性保持、弱因子

JEL 分类：C12、C53、C55

1 引言

因子模型已广泛应用于经济学和金融领域。在因子模型中，

$$X_{it} = \lambda_i^{0\prime} F_t^0 + e_{it},\ i = 1, \ldots, N, t = 1, \ldots, T, \tag{1.1}$$

其中，X_{it} 表示时间 t第 i个个体的观测数据，F_t^0是一个 $r \times 1$ 维潜在因子向量，λ_i^0 是相应的 $r \times 1$ 维因子载荷向量，e_{it} 是特质误差，其可能在不同的 i之间和/或跨越 t 存在弱依赖。直到最近，大量关于因子模型的文献都建立在所有因子均为强因子的假设之上，即 $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} F_t^0 F_t^{0\prime}$和 $N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^0 \lambda_i^{0\prime}$均收敛于某些正定（p.d.）矩阵。Bai and Ng（2002）和Bai（2003）建立了在 N 和 T 均较大时主成分（PC）估计量的渐近理论。众所周知，通过主成分方法可以一致地估计线性因子空间，其收敛速率为 $\min\left(N^{1/2}, T^{1/2}\right)$，且估计得到的因子和载荷在某个旋转矩阵意义下均具有一致性。然而，由于载荷的稀疏性，或存在大量非零但较小的载荷，强因子假设可能不成立。在这种情况下，我们通常会得到一个弱因子模型，其中$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^0 \lambda_i^{0\prime}$趋于奇异，而 $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} F_t^0 F_t^{0\prime}$收敛于一个正定矩阵。本文重点研究具有稀疏载荷的弱因子模型。

许多实证研究支持稀疏因子载荷的广泛存在。例如，Stock and Watson（2002）以及 Ludvigson and Ng（2009）均发现，从大量宏观经济变量中提取的主成分因子只能较好地拟合其中若干变量的时间序列观测值，这表明载荷具有稀疏结构；另请参见 Kristensen（2017）、Freyaldenhoven（2022）以及 Uematsu and Yamagata（2023a、b，以下简称 UY）。此外，层次因子模型或组因子模型中，因子仅对某些特定横截面单位或组具有非零载荷，这也体现了载荷的稀疏性。

载荷。例如，石油供给冲击只影响工业生产部门，而不影响其他部门；按规模排序的投资组合受规模因子的影响，但按动量排序的投资组合可能不受其影响。此外，由于市场不完备性，弱因子可能表现为非系统性风险（Dello-Preite et al., 2024）。有关载荷稀疏性的更多示例，请参见 Ando and Bai (2017) 以及 Choi et al. (2021)。

当载荷足够稀疏时，我们所遇到的情形转变为弱因子模型。稀疏弱因子只影响一小部分个体，而具有稀疏弱因子的模型被称为“稀疏弱因子模型”。[1] 载荷中的稀疏结构吸引了大量研究兴趣。例如，Pelger 和 Xiong（2022年）研究了因子模型的稀疏近似，Freyaldenhoven（2023）以及 Despois 和 Doz（2023）基于稀疏性研究了因子模型的识别。在存在稀疏弱因子的情况下，Giglio等人（2023b）表明，基于因子增强回归（FAR）的预测是不一致的；因子增强向量自回归（FAVAR）中的不一致预测还可参见 Chao 和 Swanson（2022年）以及 Chao et al.（2022年）。Giglio 等（2023a）表明，在 Giglio 和 Xiu（2021）的风险溢价三步估计中，稀疏载荷会导致严重的衰减偏差。对于极弱因子模型，Onatski（2012）表明，主成分估计量是不一致的。[2] 对于一般的弱因子，Bai 和 Ng（2023）基于奇异值分解重新考察了主成分分析的渐近理论。在具有交互固定效应的线性回归框架中，例如 Bai（2009年）以及 Su 和 Chen（2013），当某些因子较弱时，Armstrong 等（2023）表明，先前提出的估计量和置信区间（CIs）可能存在严重偏差，并进一步提出了改进的估计量和能够感知偏差的置信区间，无论因子是否强，都具有一致有效性。

为避免稀疏弱因子所引发的问题，目前已提出两种主要解决方案。一种是通过惩罚项恢复载荷中的稀疏性。UY（2023a）提出了一种采用 ℓ_1-正则化的稀疏正交因子回归（SOFAR）估计量，而 UY（2023b）进一步提供了一种推断程序，在控制错误发现率（FDR）的同时，判断载荷的每个分量是否为零。另一种方案是通过筛选排除无关个体，以追求强因子模型。Giglio等人（2023a、b）提出了一种监督主成分分析方法，用于两个不同的目的：选择检验...

[1]我们在第 2 节正式定义稀疏弱因子模型。[2]在 Onatski（2012）中，因子极其弱，具体而言，对应因子的特征值与特异成分的特征值处于同一数量级。

利用资产评估新的因子，并选择预测变量来预测目标宏观经济变量。通过剔除缺乏对待评估因子暴露的资产，或删除与目标变量不相关的预测变量，可以使模型中的每个因子都具有较强的解释力。Chao and Swanson (2022) 以及 Chao et al. (2022) 在 FAVAR 中也采用了类似的思想。

基于正则化的方法通常比较复杂，并且由于需要搜索调节参数或涉及复杂的迭代算法，计算负担较重。相比之下，我们直接研究主成分分析方法的性质，并提出通过筛选载荷的主成分估计量来恢复载荷稀疏性。本文对现有文献有几方面的贡献。首先，我们证明载荷的主成分估计量几乎能够保持稀疏性。据我们所知，本文首次揭示了主成分分析估计量在因子模型中固有的稀疏性保持特征。这一结果与普遍认知形成鲜明对比：普遍认知认为，由于矩阵旋转，载荷的稀疏性无法保持；参见 Bailey 等（2021，以下简称 BKP）和 Freyaldenhoven（2023）。其次，鉴于稀疏性（几乎）不变且主成分估计量具有一致性，我们可以通过对载荷的主成分估计量进行适当筛选，轻松恢复载荷的稀疏性。揭示稀疏性十分重要，因为这有助于更好地解释和理解例如哪些因子对哪些个体相对重要。与基于正则化的程序相比，我们的方法还有一项颇具吸引力的优势，即计算负担几乎可以忽略不计。我们只需运行一次常规主成分分析，然后直接对估计载荷应用筛选方法。第三，基于稀疏化载荷估计量，我们可以直接估计不同的因子强度，并证明强度估计量的一致性。我们允许不同因子具有不同的因子强度，并进一步改进 BKP（2021）的工作；BKP（2021）仅识别最强潜在因子的强度，且未使用复杂的序贯程序。作为指标，估计因子强度能够为预测和政策制定提供更有价值的指引。第四，对于具有不同稀疏程度的稀疏弱因子模型，我们建立了因子、载荷和共同成分的主成分估计量的大样本性质。作为 Bai and Ng（2023）的补充，我们给出主成分估计的均匀收敛结果，这些结果有助于进一步分析，例如构建扩散指数和因子工具变量回归。最后，鉴于目前关于弱因子模型中因子数量确定的研究相对有限，例如……

与 Freyaldenhoven（2022）和 Guo 等人（2022年）类似，我们通过提供一种简单的方法来补充现有文献。对于弱因子，我们使用奇异值阈值化（SVT）来选择因子数量，这种方法更易于应用和计算，并且我们证明了该方法的有效性。

最后，我们需要提及 UY（2023a）的研究，该研究与我们的工作最为密切相关。与我们的研究类似，他们也旨在恢复载荷矩阵的稀疏性。具体而言，他们关注的参数或伪真参数是 Λ^0 和 F^0 的一种表示（但不一定是真实的数据生成过程），其中它们满足 $T^{-1}F^{0\prime}F^0 = I_r$ 和 $\Lambda^{0\prime}\Lambda^0$ 为对角矩阵。采用这样的表示等价于选择一种特定的旋转，使模型与通常的主成分分析估计量所采用的约束相一致。最近，Jiang 等人（2023）证明，这样的伪真参数始终存在，并进一步揭示了常规主成分方法实际估计的是什么。与 UY（2023a）不同，我们的研究聚焦于能够产生弱因子模型最稀疏表示的参数（Λ^0，F^0）。

本文其余部分安排如下。我们在第 2 节正式介绍稀疏弱因子模型，即由稀疏载荷引起的弱因子模型，以及主成分估计。在第 3 节中，我们研究弱因子框架下因子、因子载荷和共同成分的主成分估计量的渐近性质，包括一致性、渐近分布和一致收敛速率。基于第 3 节证明的旋转矩阵近似为（分块）上三角矩阵这一事实，我们在第 4 节提出一种筛选方法，以使估计的因子载荷稀疏化，并给出因子强度的一致估计量。第 5 节讨论稀疏弱因子模型中因子数量的确定。第 6 节和第 7 节分别报告蒙特卡洛模拟结果和一项实证应用。第 8 节总结全文。所有技术性证明和补充模拟结果均置于在线附录中。

记号。对于集合 S，令 $|S|$ 表示其基数。对于两个实数 a 和 b，令 $a \vee b =$ 表示 $\{a, b\}$ 和 $a \wedge b =$ 表示 $\{a, b\}$。对于两个随机序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，$a_n \lesssim_p b_n$ 表示 a_n/b_n 是随机有界的，$a_n \asymp_p b_n$ 表示 $a_n \lesssim_p b_n$ 和 $b_n \lesssim_p a_n.$。当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为确定性量时，$a_n \lesssim b_n$ 表示 a_n/b_n 有界，$a_n \asymp b_n$ 表示 $a_n \lesssim b_n$ 和 $b_n \lesssim a_n.$。对于方阵 A，$\mu_{\min}(A)$ 和 $\mu_{\max}(A)$ 分别表示 A 的最小特征值和最大特征值。令 $\|B\| = [\text{Tr}(BB')]^{1/2}$ 表示矩阵 B 的弗罗贝尼乌斯范数，$\|B\|_{sp} = \mu_{\max}^{1/2}(B'B)$ 表示其谱范数。对于一个 $n \times 1$

向量 a 的 ℓ_0-范数为 $\|a\|_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}(a_j \neq 0)$，其中 $\mathbf{1}(\cdot)$ 是通常的示性函数。

2 稀疏弱因子模型

2.1 稀疏弱因子模型的定义

本文中，我们考虑以下具有稀疏表示的因子模型。

$$X_{it} = \lambda_i^{0\prime} F_t^0 + e_{it} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}^0 F_{tk}^0 + e_{it}, \tag{2.1}$$

其中，$\lambda_i^0 = (\lambda_{i1}^0, \ldots, \lambda_{ir}^0)'$ 且 $F_t^0 = (F_{t1}^0, \ldots, F_{tr}^0)'$.[3]。将模型（2.1）写成矩阵形式，可得 $X = \Lambda^0 F^{0\prime} + e$，其中 X 和 e 均为 $N \times T$ 矩阵，分别满足$X(i,t) = X_{it}$和 $e(i,t) = e_{it}$，$\Lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0)'$，且 $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_T^0)'$。我们假设因子具有良好的性质，即当$T \to \infty$时，$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} F_t^0 F_t^{0\prime} \to_p \Sigma_F$，其中 Σ_F为某个正定有限矩阵。对于第 k 个因子，$k = 1, ..., r$，$N \times 1$ 个因子载荷 $\Lambda_{\cdot,k}^0 := (\lambda_{1k}^0, ..., \lambda_{Nk}^0)'$的 ℓ_0-范数阶为 N^{α_k}，其中 $\alpha_k \in [0,1]$，即，

$$\left\|\Lambda_{\cdot,k}^0\right\|_0 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}\left(\lambda_{ik}^0 \neq 0\right) \asymp N^{\alpha_k}. \tag{2.2}$$

根据（2.2），$\alpha_k = 1$ 定义了一个强因子，它影响几乎所有横截面单位；$\alpha_k = 0$ 产生一个极弱因子，最多只影响有限个单位；任意 $\alpha_k \in (0, 1)$ 都会使 N 载荷呈现稀疏结构。α_k 越大，因子就越强，影响的横截面单位也越多。因此，第 k个因子的强度或其载荷的稀疏程度可用 α_k 表示。按照 BKP（2021），我们将参数 α_k 定义为第 k个因子的因子强度。此外，我们按照因子强度对（2.1）中的 r个因子进行排序，使得

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{r-1} \geq \alpha_r.$$

[3]需要注意的是，尽管（2.1）中的模型是真实模型或结构模型的一种稀疏表示，但这并不意味着真实模型或结构因子模型必然具有最稀疏的载荷形式。实际上，真实模型的载荷结构既可能是稀疏的，也可能是非稀疏的（前提是存在一个强因子）。鉴于因子结构具有旋转等价性质，我们关注真实因子模型的最稀疏表示，并直接对其作出假设。

一个递减的 g 序列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{r}$ 能够刻画因子模型的稀疏结构 s.

对于任意有界且可逆的旋转矩阵 $R \in \mathbb{R}^{r\times r}$，我们将观测等价的因子和载荷记为：$F = F^0R$ 和 $\Lambda = \Lambda^0 (R')^{-1}$。因此，我们可以仿照式 (2.2)，将 F 的因子强度向量定义为 $\alpha(R) := (\alpha_1(R) ..., \alpha_r(R))'$，其中 $\alpha_j(R) \in [0,1]$，适用于 $j = 1, ..., r$，且 $\alpha_j(R) \geq \alpha_k(R)$ 适用于 $j < k$。由于模型 (2.1) 存在内在的识别不确定性，为了刻画具有定义明确的因子强度的稀疏弱因子模型，我们引入以下最稀疏表示定义。

定义 2.1（因子模型的最稀疏表示）如果旋转矩阵$R^* \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 能够给出因子载荷的最稀疏表示（顺序除外），则称其为因子载荷的最稀疏表示，前提是旋转后的因子 $F^* = F^0R^*$ 满足 $T^{-1}F^{*\prime}F^*$ 为正定且在极限下有限，并且因子强度向量 α（R^*）的每个元素对于任何其他旋转矩阵而言都无法进一步减小，即

$$\alpha_k(R^*) \leq \alpha_k(R), \text{ 对于任意可逆且有界的 } R \in \mathbb{R}^{r\times r} \text{ 以及 } k = 1, ..., r \quad .$$

最稀疏表示确实存在且定义明确。为说明这一点，考虑只有两个因子的情况。设 Λ 为 $N \times 2$ 载荷矩阵，它只是一个一般矩阵，尚不一定处于其最稀疏表示形式。假设 Λ 的因子强度满足 $\alpha_1 \geq \alpha_2$。根据因子1和因子2之间非零载荷的结构，可以直接看出：(i) 对于任意旋转矩阵 R，我们必须有 $\alpha_1(R) = \alpha_1$；(ii) 对于任意旋转矩阵 R，我们必须有 $\alpha_2(R) \leq \alpha_2$，并且可能存在一个旋转矩阵 R，使得 $\alpha_2(R) < \alpha_2$。我们可以寻找使 R^* 转动$\alpha_2(R)$尽可能小的旋转，并得到最稀疏表示对应的因子强度向量（$\alpha_1(R^*)$ $\alpha_2(R^*)$）。对于因子数量多于两个的情况（$r > 2$），同样的逻辑依然适用：我们始终从最弱的因子（由初始 α_k'衡量）开始，通过旋转使其尽可能稀疏，然后依次处理第二弱的因子，以此类推。[4] 最后，我们收集所有因子强度，按降序排列，并将其堆叠为 $r \times 1$ 向量 α。通过这种方式，我们可以得到最稀疏表示，其中每个 α_k 对于 $k = 1$、.....、 r 都无法进一步减小。最稀疏表示的因子强度向量可以被唯一确定，但最稀疏表示们.....

[4]对于强度相同的因子，我们可以任意排列它们，然后像之前一样继续处理其他因子。

具有相同强度向量的结果并非唯一。

注释1。（i）定义2.1唯一确定了最稀疏表示的因子强度，无论因子强度是相同的、不同的，还是两者兼有。我们将在第 4.3 节证明，所有因子强度均可得到一致估计。这里需要指出的是，最稀疏表示并不唯一，因为许多旋转都能得到相同的因子强度向量 α(R^*)。（ii）稀疏弱因子模型中一个或许更具雄心的目标，是准确恢复非零载荷的集合。但由于稀疏性可能受到微小扰动的影响，精确恢复通常既不可能实现，也没有太大意义。例如，考虑两个强因子载荷，使得$\Lambda^0_{i,j} \sim$ 在各个 $i = 1$上独立均匀分布，....., N 并且在 $j = 1$、2上也独立均匀分布，因此任一因子的载荷均严格为正。那么，我们总可以通过某种方式旋转($\Lambda^0_{\cdot,1}$,$\Lambda^0_{\cdot,2}$)，得到($\Lambda^a_{\cdot,1}$,$\Lambda^a_{\cdot,2}$)，使得 $\Lambda^a_{11} = 0$ 和 $\Lambda^a_{12} \neq 0$；或者，我们也可以通过另一种方式旋转它，得到($\Lambda^b_{\cdot,1}$,$\Lambda^b_{\cdot,2}$)，使得 $\Lambda^b_{11} \neq 0$ 和 $\Lambda^b_{12} = 0$。显然， Λ^0 的稀疏性与 Λ^a 或 Λ^b的稀疏性并不完全相同，但就因子强度而言，这种差异并不具有实质性影响。尽管如此，我们将在命题4.1中证明，相对于其因子强度（即非零载荷的总数），近似恢复非零载荷集合是可行的。

在本文的其余部分，我们假设潜在成分（F^0 和 Λ^0）具有由 $R^* = I_r$ 和因子强度 α （I_r）构成的最稀疏表示，其中 $I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是单位矩阵。换言之，不存在其他旋转矩阵能够进一步减小因子强度向量 α（I_r）中的任何元素。鉴于两个因子可能具有相同的强度，我们将 α_j 划分为 G 个组，使得： $\alpha^{[1]} \equiv\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1} \colon \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m_1}\}$，... $\alpha^{[G]} = \left\{\alpha_{m_{G-1}+1}, \ldots, \alpha_r \colon \alpha_{m_{G-1}+1} = \cdots = \alpha_r\right\}$，其中 $G \leq r$ 和 $\alpha_{m_1} > \alpha_{m_2} > \ldots > \alpha_{m_G}$，且当每个因子的强度均不同时， $G = r$。为简化符号表示，我们还将 $\alpha^{[g]}$ 的基数定义为 $r_g \equiv |\alpha^{[g]}|$，其中 $g = 1$，...， $G.$。显然， $r = \sum_{g=1}^{G} r_g$。此外，令 $\alpha_{[j]}$ 表示组 g 中共有的相同强度，即对于 $g = 1$，...， $G.$，有 $\alpha_{[g]} = \alpha_{m_g}$。

正如 BKP（2021）所指出的，对于信号极其微弱的因子，其 $\alpha_k \in (0, 1/2)$，在没有先验约束的情况下无法识别，并且在大多数金融和宏观经济应用中并不相关。此外，Freyaldenhoven（2022年）讨论了为什么只有影响比例超过 $\sqrt{N}$ 个体的因子才具有相关性。

[5]具体而言，($\Lambda^0_{\cdot,1}$,$\Lambda^0_{\cdot,2}$) 可以进行旋转，使得 $\Lambda^a_{\cdot,1} = \Lambda^0_{\cdot,1} - (\Lambda^0_{11}/\Lambda^0_{12})\Lambda^0_{\cdot,2}$ 和 $\Lambda^a_{\cdot,2} = \Lambda^0_{\cdot,2}$；或者$\Lambda^b_{\cdot,1} = \Lambda^0_{\cdot,1}$ 和 $\Lambda^b_{\cdot,2} = \Lambda^0_{\cdot,2} -(\Lambda^0_{12}/\Lambda^0_{11})\Lambda^0_{\cdot,1}$。

套利定价理论以及宏观经济学中的总体波动。因此，我们对因子强度施加限制，使得对于某些 $\underline{\alpha} > 1/2$，$\alpha_k \in [\underline{\alpha}, 1]$ for $k = 1$，……，r。诚然，对最弱因子的强度所施加的限制比 Bai and Ng（2023）和 UY（2023a，b）中的限制更为严格。

2.2 稀疏表示的实证相关性

与其他（在观测上等价的）表示形式相比，稀疏表示在实证应用中具有怎样的相关性？在此，我们通过两个重要的动机示例，说明利用 Λ^0 和 F^0 研究此类稀疏表示的意义。

例 2.2（实证资产定价）稀疏表示有助于在实证资产定价模型中稳健地识别观测因子或构造因子的强度。对于观测因子，例如 Fama 和 French（1993）提出的三因子，已有研究开发了 Fama-MacBeth 两步回归，以估计载荷和风险溢价。基于估计载荷，可以估计因子强度（BKP，2021），并为从“因子动物园”中识别有用因子提供重要信息（Cochrane，2011）。然而，由于遗漏了重要因子，这类模型很可能设定错误；参见 Giglio 和 Xiu （ 2021 ）以及 Kim 等人（ 2024 ）。相反，可以估计诸如（ 2.1 ）所示的稀疏潜在因子模型，并获得因子的估计量$\{\widehat{F}_t\}_{t=1}^T$ 以及稀疏化载荷估计量 $\widehat{\Lambda}$。然后，对于给定的观测因子 g_t，使用$\widehat{\ }$将 g_t 对 F_t作线性投影，可以估计 g_t 的因子强度，进而评估其风险溢价。

示例 2.3（识别个体的相关因子）稀疏表示可用于识别每个个体的冗余因子。为明确思路并简化问题，考虑带有 $r = 2$ 和因子载荷的模型（2.1）

$$\Lambda^\diamond = \begin{pmatrix} \Lambda_{\cdot,1} & a\Lambda_{\cdot,1} \\ b\Lambda_{\cdot,2} & \Lambda_{\cdot,2} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

其中 $ab \neq 0$，四个区块中的每一个都是一个$\frac{N}{2} \times 1$ 向量，并且假设 N 为偶数。对于给定的 i，只需用一个因子即可捕捉 X_{it} 的时间序列变化。

[6]强度参数大于 $1/2$ 的因子在 BKP（2021）中被称为“半强”因子。[7]这里使用的示例仅用于说明这一思想，因为严格来说，所涉及的两个因子根据我们之前的定义并不属于弱因子。

Th通过旋转， $\Lambda^{\diamond}$ 的稀疏表示清晰地表达了充分性。 :

$$\Lambda^0 = \begin{pmatrix} \Lambda_{\cdot,1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\cdot,2} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

显然，(2.4) 中的稀疏结构意味着每个单位只有一个相关因子。此外，识别某些个体的（无关）因子，可能对解决弱因子问题起到根本作用。正如 Giglio 等（2023a）提出的，了解因子相关性有助于针对给定的 $F_{\cdot,\ k}$ 筛选无关个体（测试资产），并且仅使用 $F_{\cdot,\ k}$ 具有广泛影响的相关个体来评估 $F_{\cdot,\ k}$ 。

2.3 主成分估计

首先，我们假设真实的因子数量 r 是已知的，并将 r 的确定留待第5节讨论。因子及其载荷的估计采用主成分（PC）方法，通过最小化

$$\min_{\Lambda,F} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \lambda_i' F_t\right)^2,$$

满足通常的识别约束，即 $F'F/T = I_r$ 和 $\Lambda'\Lambda$ 为对角矩阵。~已知主成分估计量 F 仅能在满秩旋转矩阵意义下识别，~因此，识别约束 $F'F/T = I_r$ 仅用于在估计中确定 F。估计得到的因子记为 $\widetilde{F}$，其为 $\sqrt{T}$ 乘以与 $T \times T$ 矩阵 $\frac{X'X}{NT}$ 中按降序排列的最大 r 个特征值对应的特征向量。于是~ ~ ~~Λ = XF/T，且 $\widetilde{e} = X - \Lambda F'$。此外，令

$$\widetilde{V} = \operatorname{diag}\left(\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_r\right)$$

是由按降序排列的$\frac{X'X}{NT}$ 最大 r 特征值构成的 $r \times r$ 对角矩阵。我们还将共同成分估计量 $C = \Lambda F'$ 定义为用于$C^0 = \Lambda^0 F^{0\prime}$.的估计量。

3 主成分估计量的大样本性质

3.1 主要假设

我们首先将尺度矩阵 A定义如下,

$$A = \operatorname{diag}\left(N^{\alpha_1}, \ldots, N^{\alpha_r}\right),$$

它将在本文中频繁使用，并将关于 $k = 1, \ldots, r$ 的 λ_{ik}^0 的非零集合定义为

$$\mathcal{L}_k^0 \equiv \{i : \lambda_{ik}^0 \neq 0, i = 1, \ldots, N\}. \tag{3.1}$$

假设1. $E\|F_t^0\|^4 < \infty$ 对于 $t = 1$， ...， T以及 $T^{-1}F^{0\prime}F^0 \to_p \Sigma_F$作为 $T \to \infty$，其中某个正定矩阵为 Σ_F。

假设2。对于因子载荷,

(i) 对于 $k = 1$， $0 < \underline{\lambda} \leq |\lambda_{ik}^0| \leq \overline{\lambda} < \infty, \forall i \in \mathcal{L}_k^0, \ldots, r$， 其中 $\underline{\lambda}$ 和 $\overline{\lambda}$ 是两个常数;

(ii) 对于第 k 个因子，非零因子载荷的数量为 $n_k \equiv \left\|\Lambda_{\cdot,\ k}^0\right\|_0 \asymp N^{\alpha_k}$对于 $\alpha_k \in [\underline{\alpha}, 1]$，其中 $\underline{\alpha} > 1/2$ 对于 $k = 1$， $\ldots, r$； $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)'$ 是该因子模型最稀疏表示的因子强度向量;

(iii) $A^{-1/2}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0 A^{-1/2} \to \Sigma_\Lambda^*$ 作为某个正定矩阵 Σ_Λ^*的 $N \to \infty$。

假设 n 3. 存在一个正数常数 $M \leq \infty$，使得对于所有 N 和 T,

(i) $E(e_{it}) = 0$ 和 $E(e_{it}^2) < M$ 对所有 i 和 t均成立; (ii) $E(e_s'e_t/N) = \gamma_N(s,t)$, $|\gamma_N(s,s)| \leq M$对所有 s均成立，且 $T^{-1}\sum_{s=1}^T\sum_{t=1}^T |\gamma_N(s,t)| \leq M$; (iii) $E(e_{it}e_{jt}) = \tau_{ij,t}$ 且 $|\tau_{ij,t}| \leq \tau_{ij}$ 对所有满足某个 $\tau_{ij} > 0$的 t 均成立。此外，对于 $\forall \mathcal{S} \subset \{1, \ldots, N\}$, $\sum_{j=1}^N \tau_{ij}\mathbf{1}(j \in \mathcal{S}) \leq M$且 $|\mathcal{S}|^{-1/2}T^{-1/2}\sum_{j=1}^N\sum_{t=1}^T (e_{it}e_{jt} - \tau_{ij,t})\mathbf{1}(j \in \mathcal{S}) = O_p(1)$; (iv) 对于每一个 (t,s)， $E\left|N^{-1/2}\sum_{i=1}^N [e_{is}e_{it} - E(e_{is}e_{it})]\right|^4 \leq M$; (v) $(n_kT)^{-1/2}\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^T F_t^0\lambda_{ik}^0 e_{it} = O_p(1)$ 对于 $k = 1, \ldots, r$;

(vi) $\max_s \sum_{t=1}^T \|\gamma_{N,\ F}(s,t)\|^2 \leq M$且 $\max_s E\|\varpi(s)\|^2 \leq M$， 其中 $\gamma_{N,\ F}(s,t) = N^{-1}E(F_t^0e_t'e_s)$ 且 $\varpi(s) = (NT)^{-1/2}\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^T [F_t^0e_{it}e_{is} - E(F_t^0e_{it}e_{is})]$;

(vii) $E\left(N^{-1}\sum_{i=1}^N \left\|T^{-1/2}\sum_{t=1}^T F_t^0e_{it}\right\|^2\right) \leq M$;

(viii) $\Sigma_\Lambda^*\Sigma_F$ 的特征值互不相同。

假设4。 $\|e\|_{sp}^2 = O_p(\text{最大值 } \{N,T\})$。

假设1对因子施加了一个矩条件，并要求 $T^{-1}F^{0\prime}F^{0}$存在一个正定的概率极限。假设2(i)-(ii)对非零载荷施加有界性条件，并规定载荷的最稀疏结构。假设2(ii)中的确定性载荷可以放宽为随机载荷，但需满足一些额外的矩条件。假设2(iii)要求矩阵 Σ_{Λ}^{*} 为正定，但不必是对角矩阵，因此并不构成限制。假设3(i)-(iii)对误差施加矩条件，并允许存在弱的截面依赖/序列依赖，与 Bai（2003）相同。注意，假设3(iii)弱于 Bai（2003），因此推广了强因子模型下的对应条件。假设3(vi)是面板因子模型中的标准条件；由于我们不假设 F_{t}^{0}和 e_{s} 相互独立，因此该条件并非冗余。假设4也被 Bai 和 Ng（2002，2023）采用。对于四阶矩一致有界的独立同分布（iid）数据，该条件显然成立；对于在 i和 t上弱依赖的数据，该条件也可能成立。

本文聚焦于稀疏载荷情形，其中载荷如假设2(i)所述，要么为零，要么与零保持一定距离。本文的设定不如 Bai 和 Ng（2023）一般；后者对$\frac{\Lambda^{0\prime}\Lambda^{0}}{N^{\alpha}}$ 的假设涵盖了两种情形——稀疏载荷和收缩载荷：前者有许多零载荷，其余载荷则非退化；后者虽然是稠密的，但所有载荷都趋于零。此外，在实际应用中，当然也可能包含这两种情形的混合。尽管如此，稀疏因子载荷在估计重要参数时更为相关，例如 Giglio 等（2023a），而且也常用于解释潜在因子（Ludvigson and Ng，2019）。

3.2 一致性和极限分布

我们首先介绍弱因子模型的主成分估计的一项关键且有趣的结果。回顾一下，$\widetilde{V}=\text{diag}\left(\widetilde{V}_{1},\ldots,\widetilde{V}_{r}\right)$ 是由$\frac{X'X}{NT}$ 中按降序排列的 r 个最大特征值构成的对角矩阵。我们证明，特征值矩阵 $\widetilde{V}$能够保持因子强度的大小，具体如下文的命题3.1所述。

~命题3.1 在假设1-4下，$V_{k}\asymp_{p}N^{\alpha_{k}-1}$对于 $k=1$，.....，$r.$

~注2。与强因子模型不同，矩阵 V 的对角元素以不同的速率趋于零，而这些速率由其对应的因子强度决定。这给我们后续的渐近理论带来了更多挑战~，尤其是涉及 V^{-1} 的项经常出现时，而在强因子模型中，所有这些项均为 O_{p}(1)。

接下来，我们将讨论主成分估计量的一致性和渐近分布。我们引入如下几个旋转矩阵。定义

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Lambda^{0\prime}\Lambda^0}{N}\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\widetilde{V}^{-1},\ H_1 = \Lambda^{0\prime}\Lambda^0(\widetilde{\Lambda}'\Lambda^0)^{-1},\ H_2 = \left(F^{0\prime}F^0\right)^{-1}F^{0\prime}\widetilde{F}, \\ H_3 &= Q^{-1} \text{ with } Q = \frac{\widetilde{F}'F^0}{T}, \text{ and } H_4 = \Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}(\widetilde{\Lambda}'\widetilde{\Lambda})^{-1}, \end{aligned}$$

其中，为了简化符号，我们省略了这些矩阵对样本量的依赖。引入不同的旋转矩阵，主要是为了便于证明不同的结果。我们将证明，当 $j = 1$ 分别取 2、3、4 时，矩阵 H 和 H_j 渐近等价；这也推广了 Bai 和 Ng （ 2023 ）的引理 3。这些旋转矩阵及其等价性结果，对于建立我们的主成分估计量的收敛速率和渐近分布至关重要。在此之前，我们想先介绍一个与上文定义的矩阵 Q 有关的有趣发现。还需要一个额外条件。

假设 5. $N^{1-\alpha_r}/T^{1/2} \to 0$。

值得一提的是，Bai 和 Ng（2023）采用了较弱的条件（$N^{1-\alpha_r}/T \to$0）来证明一致性。他们直到证明分布理论时才施加 $N^{1-\alpha_r}/T^{1/2} \to 0$。然而，为了证明命题 3.2，我们在较早阶段就施加了假设 5；该命题在第 4 节的稀疏性恢复中发挥着根本作用。此外，借助命题 3.2，我们可以得到更精确的收敛速度结果；参见后文的命题 3.4。还需注意，在 Freyaldenhoven（2022）中的 $N/T \to c \in$ (0, ∞) 条件下，假设 5 是平凡的。

~命题 3.2 在假设 1-5 下， $r \times r$ 矩阵 $Q = T^{-1}F'F^0$ 以趋近于 1 的概率为满秩矩阵，并

$$Q_{lk} \equiv Q\left(l,k\right)\begin{cases} \asymp_p N^{\alpha_l-\alpha_k} \ for\ 1 \le k \le l \le r, \\ = O_p(1)\ for\ 1 \le l < k \le r. \end{cases}$$

注 3. 命题 3.2 表明， Q 作为旋转矩阵具有一个非常重要的性质： Q 渐近地呈（分块）上三角形式（具有不同的因子强度）。[8] 这一性质有助于处理稀疏弱因子模型。更多

[8]在多个因子具有相同强度的特殊情况下， Q 不再是一个（分块）上三角矩阵。然而，这并不会改变本文的主要结论。

讨论请参见下一小节。

~下面的命题给出了 F的收敛速率。

命题 3.3 在假设 1-5 下，

$$\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}-F^{0}H\right\|^{2}=O_{p}\left(N^{\alpha_{1}-2\alpha_{r}}+N^{2(1-\alpha_{r})}T^{-2}\right)=o_{p}\left(1\right).$$

~注 4. Bai and Ng（2023）命题 6.i 中给出的 F相应收敛速率为 $O_{p}\left(N^{-\alpha_{r}}+N^{2(1-\alpha_{r})}T^{-2}\right)=o_{p}$(1)，略优于我们的结果。原因在于，他们使用的旋转矩阵与我们的 H略有不同，正如其命题 6 下方的注释所示。我们采用旋转矩阵 H ，因为它与 Q的关系更为密切，而后者将在后续分析中发挥重要作用。

下一个命题给出了因子载荷估计的收敛速率。

命题 3.4 在假设 1-5 下，

$$\frac{1}{N}\left\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda^{0}Q'\right\|^{2}=O_{p}\left(N^{-\alpha_{r}-1}+T^{-1}\right)=o_{p}\left(1\right).$$

注 5. 请注意，命题 3.4 中的收敛速率优于 Bai 和 Ng（2023）命题 6.ii 中给出的结果。原因在于，我们在证明中利用了旋转 Q 的上三角性质，从而收紧了估计误差的界。

在继续之前，我们给出 H和 H_{j}关于 $j=1$,2,3, 4 的等价性结果。定义 $\gamma_{NT}\equiv$ max $\left(N^{\frac{\alpha_{1}}{2}-\alpha_{r}}T^{-1/2},N^{1-\alpha_{r}}T^{-1},N^{\alpha_{1}-2\alpha_{r}}\right)$.

引理 3.5 在假设 1-5 下， $H_{j}=H+O_{p}$(${\gamma_{NT}}$) 对于 $j=1$, 2, 3, 4。

回顾 $H_{3}=Q^{-1}$。因此，引理 3.5 意味着 $Q^{-1}=H+O_{p}$(${\gamma_{NT}}$) 。这种~等价性将用于证明估计量 C 对共同成分的一致性。引理 3.5 将 Bai and Ng（2019）针对强因子模型的引理 1，以及 Bai 和 Ng（2023）针对具有共同因子强度的弱因子模型的引理 3 推广了。

命题 3.6 在假设 1–5 下，

$$\frac{1}{NT}\left\|\widetilde{C}-C^{0}\right\|^{2}=O_{p}\left(N^{2(\alpha_{1}-\alpha_{r})-1}+T^{-1}\right)=o_{p}\left(1\right).$$

~注 6。命题 3.6 指出， C 的收敛速率通常取决于弱因子强度，更准确地说，取决于最强因子与最弱因子之间的强度差异。只有当所有因子的强度相同时，收敛速率才达到最大值，并且与强因子模型下的收敛速率一致。还需注意，当所有因子具有相同的因子强度时，这一结果与 Bai 和 Ng（2023）的命题 3 一致。

以下假设用于建立弱因子模型的主成分估计量的极限分布。

假设 6. 对每个 i 和 t，当 $(N,T) \to \infty$ 时，以下条件均成立。

(i) $A^{-1/2}\Lambda^{0\prime}e_t \xrightarrow{d} N\left(0,\Gamma_t\right)$, where $\Gamma_t = \lim_{N\to\infty} A^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i^0\lambda_j^{0\prime}E\left(e_{it}e_{jt}\right)A^{-1/2}$.

(ii) $T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T}F_t^0 e_{it} \xrightarrow{d} N\left(0,\Phi_i\right)$, where $\Phi_i = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{s=1}^{T}\sum_{t=1}^{T}E\left(F_t^0F_s^{0\prime}e_{it}e_{is}\right)$.

为保证分布理论，还对样本量（N,T）和最弱因子强度 α_r 施加了一个正则性条件；Bai 和 Ng（2023）的假设 C'(iv) 也采用了该条件。

假设7。$N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}T^{-1} \to 0$。

定理 3.7 在假设 1-7 下，

$$A^{1/2}\left(\widetilde{F}_t - H_4'F_t^0\right) \xrightarrow{d} N\left(0,\Psi^0\Gamma_t\Psi^{0\prime}\right),$$

其中 $\Psi^0 = \text{plim}_{N,\ T\to\infty} N^{-1}A^{1/2}\widetilde{V}^{-1}QA^{1/2}$.

注 7.（i）如定理 3.7 的证明所示，矩阵 Ψ^0 是（分块）对角矩阵。特别地，如果任意两个因子的强度都不相同，即对于 $k \neq l$， $\alpha_k \neq \alpha_l$，那么 Ψ^0 就是一个精确的对角矩阵，因此 $\Psi^{0\prime} = \Psi^0$. （ii）定理 3.7 还表明，第 k 个因子 $\widetilde{F}_{tk}$ 渐近地服从正态分布，其收敛速率为 $N^{\alpha_k/2}$.

假设 8. $\sqrt{T}N^{\alpha_1-2\alpha_r} \to 0$.

假设 8 与 Bai 和 Ng（2023）的假设 C(ii) 类似， α_1 与 α_r 之间的差距越小，该假设就越有可能成立。

定理 3.8 在假设 1–6 和 8 下，

$$\sqrt{T}\left(\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0\right) \xrightarrow{d} N\left(0,Q'^{-1}\Phi_iQ^{-1}\right).$$

~注释 8. 定理 3.8 揭示，在强因子和弱因子两种情况下， λ_i 的渐近分布相同，且不受因子强度的影响。

~借助定理 3.7 和定理 3.8，我们可以得到 C_{it}. 的极限分布。为此，回顾 r_G 第 2.3 节中的内容，并定义 $r \times r$ 矩阵 $S^{\dagger} = \text{diag}(\underbrace{0 \ldots 0}_{r-r_G}, \underbrace{1 \ldots 1}_{r_G})$.

定理 3.9 在假设 1–8 下，

$$\frac{\widetilde{C}_{it} - C_{it}^{0}}{\sqrt{N^{-\alpha_r} V_{it} + T^{-1} U_{it}}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中 $V_{it} = \lambda_i^{0\prime} S^{\dagger} \Sigma_{\Lambda}^{*-1} \Gamma_t \Sigma_{\Lambda}^{*-1} S^{\dagger} \lambda_i^0$ 和 $U_{it} = F_t^{0\prime} \Sigma_F^{-1} \Phi_i \Sigma_F^{-1} F_t^0$.

注 9. 定理 3.9 意味着，对于 $\widetilde{C}_{it} - C_{it}^{0} = O_p\left(\max\left\{N^{-\alpha_r/2}, T^{-1/2}\right\}\right)$.，至于 ~ ~ 和 F_t 的渐近协方差矩阵，Bai 和 Ng（2023）在假设 $\{e_{it}\}$. 存在横截面独立或序列独立的情况下，提出了相合估计量。对于弱序列相关，Bai（2003）提出了一个相合的 Newey–West 异方差和自相关一致估计量，用于估计 λ_i. 的渐近协方差。对于在弱横截面（CS）独立条件下估计 F_t 的渐近协方差，Bai 和 Ng（2006）在协方差平稳性条件下提出了一个相合的 CS-HAC 估计量，其中 $E(e_{it}e_{jt}) = \sigma_{ij}$ 对所有 t 均成立。可以沿用上述方法，为 F_t 和 λ_i 的渐近协方差矩阵构造相合估计量，从而得到 C_{it} 的相合方差估计量。对于假设检验，例如在 F_t 的情况下，无需知道因子强度，因为 F_t 方差的可行估计量会自动纳入因子强度的影响，因此足以用于此目的。

3.3 一致收敛速率

~ ~ ~在本小节中，我们为 F_t、λ_i和 C_{it} 在i 或（和） t. 上建立一致收敛速率结果。这些结果可用于第 4 节中恢复模型稀疏性，也可用于因子增强预测回归，而且或许本身也具有独立的研究价值。

鉴于允许 i 和 t 之间均存在依赖关系，我们首先定义一个针对 i 和 t 进行推广的强混合条件，其形式类似于 Ma 等（2021）。假设横截面单位 i_{l_1}，…，i_{l_N} 存在某种标记方式，其通用索引记为 i^*，使得截面相关随距离 $|i^* - j^*|$. 的增加而减弱。随后，我们定义适用于随机场 $\{G_{i^*t}$ 的混合速率：$1 \le i^* \le N$，$1 \le t \le T\}$，其中 $G_{i^*t} \equiv (F_t^{0\prime}, e_{i^*t})'$。

[9]关于因子强度同质情形的讨论，请参见 Bai 和 Ng（2023）的命题 4 下方；不难证明，该论证在因子强度异质的情形下同样适用。

对于 S_1、$S_2 \subset [1,\ldots,N]\times[1,\ldots,T]$，令

$$\alpha(S_1,S_2)\equiv \sup\left\{\left|P(A)P(B)-P(A\cap B)\right| : A\in\sigma\left(G_{i^*t},(i^*,t)\in S_1\right), B\in\sigma\left(G_{i^*t},(i^*,t)\in S_2\right)\right\},$$

其中，$\sigma(\cdot)$ 表示一个 σ-代数。于是，$\{G_{i^*t}\}$ 的 α-混合系数定义为

$$\alpha(k)\equiv \sup\left\{\alpha(S_1,S_2) : d(S_1,S_2)\geq k\right\},$$

其中，$d(S_1,S_2)\equiv \min\left\{\sqrt{(t-s)^2+(i^*-j^*)^2} : (i^*,t)\in S_1,(j^*,s)\in S_2\right\}$.

$\alpha(k)$ 的定义推广了时间序列情境下通常采用的定义。特别是，当 $\alpha(k)$ 应用于单个时间序列或时间序列向量时，它与 Fan 等人（2011）等文献中给出的通常定义一致。就估计而言，我们无需知道真实的标记 $\{i^*\}$. Ma 等（2021）表明，只要误分配的索引数量为 $o\left(N^{1/2}\right)$.，他们的推断就是有效的。在进行推断时，即使完全不知道真实标记 $\{i^*\}$，我们的方法仍然有效，因此进一步放宽了 Ma 等（2021）的假设。

现在，我们给出建立一致收敛速率所需的附加假设。

假设 9. (i) $\{e_t\}_{t\geq1}$ 和 $\{F_t^0\}_{t\geq1}$ 均为平稳且遍历的；

(ii) 存在 $s_2>0$ 和 $K>0$，使得 $\forall t\in\mathbb{Z}^+$, $\alpha(t)\leq \exp(-Kt^{s_2})$；

(iii) 存在 $s_1>0$, $b_1>0$, $s_3>0$, $b_2>0$，满足 $3s_1^{-1}+s_2^{-1}>1$ 和 $3s_3^{-1}+s_2^{-1}>1$，使得 $\forall w>0$, $P(|e_{it}|>w)\leq \exp(-(w/b_1)^{s_1})$ 且 $P(|F_{tk}^0|>w)\leq \exp(-(w/b_2)^{s_3})$，其中 $k=1,...,r$；

假设 9 对混合速率衰减以及因子和误差的尾部界施加了限制，并对样本量 (N,T) 施加了温和的速率限制；Fan 等人（2011）也采用了这一限制。

~ ~从上一节可知，主成分估计量 F_t 和 λ_i 在某个旋转矩阵下均具有一致性。因此，为了更清晰地陈述一致收敛结果，我们分别将旋转因子和因子载荷定义为 $F_t^*=H_4'F_t^0$和 $\lambda_i^*\equiv Q\lambda_i^0$。

定理 3.10 在假设 1-9 下，

(i) $\sup_i\left|\widetilde{\lambda}_{ik}-\lambda_{ik}^*\right|=O_p\left(\sqrt{(\ln N)/T}\right)$ *for* $k=1,...,r$;

(ii) $\sup_t\left|\widetilde{F}_{tk}-F_{tk}^*\right|=O_p\left(N^{-\alpha_k/2}\sqrt{\ln T}\right)$ *for* $k=1,...,r$;

(iii) $\sup_{i,t}\left|\widetilde{C}_{it}-C_{it}^0\right|=O_p\left((\ln T)^{1/s_3}\sqrt{(\ln N)/T}+N^{-\alpha_r/2}\sqrt{\ln T}\right)$.

备注 10. 在定理 3.10 中，结果 (i) 表明，对于所有 i，因子载荷的估计误差均由 $\sqrt{(\ln N)/T}$ 主导。这一结果对于下一节研究载荷稀疏性和因子强度非常有用。对于每个因子，结果 (ii) 给出了一致收敛速率，该速率取决于因子强度。结果 (iii) 建立了共同成分估计量的一致收敛速率，该速率由最小因子强度 α_r 和参数 s_3 决定，其中参数 s_3 控制因子的概率尾界。

4 利用主成分估计量揭示稀疏性

众所周知，潜在因子模型存在旋转不确定性。这一识别问题不利于揭示载荷的稀疏结构。具体而言，第 3 节中主成分估计量的大样本性质表明，载荷只能在旋转矩阵的意义下被识别；人们普遍认为，旋转通常会妨碍稀疏性的揭示。因此，因子的解释变得令人望而生畏，而通常的做法是将因子与估计载荷非零的横截面单位联系起来。例如，Ludvigson and Ng（2009年）写道：

“此外，我们提醒读者，对因子的任何命名都并不完美，因为每个因子在某种程度上都受到我们大型数据集中的所有变量的影响，而且正交化意味着它们都不会与产出或失业这类明确的经济概念完全对应，因为这些概念之间存在自然相关性。”

然而，我们表明，即使存在主成分引入的旋转，因子载荷的稀疏性仍然可以保留。这为许多实证应用中对因子的权宜解释方式提供了依据：将因子视为仅与少数观测变量相关的主成分因子；参见 Pelger and Xiong（2022年）。

4.1 通过主成分旋转保持稀疏程度

主成分能否保持稀疏性，在很大程度上取决于旋转矩阵 Q 的性质。命题 3.2 表明，Q 是一个非严格的（分块）上三角矩阵

以概率满秩。[10] 特别是，

$$Q_{lk}\begin{cases}\asymp_p N^{\alpha_l-\alpha_k},\ \text{for } 1\le k<l\le r\\ \asymp_p 1,\ \text{for } 1\le k=l\le r\\ =O_p(1),\ \text{for } 1\le l<k\le r\end{cases}.$$

矩阵 Q 的特定形式使得随着 N 增大，稀疏性恢复得以实现。为说明这一点，考虑一个具有因子强度 $\alpha_1=0.9$ 和 $\alpha_2=0.7$ 的简单双因子模型。现在

$$Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix}\asymp_p\begin{pmatrix}1 & O_p(1)\\ N^{-0.2} & 1\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

根据命题 3.4，载荷矩阵的主成分估计量收敛于旋转后的Λ^0，当 $\Lambda^*=\Lambda^0Q$时，可写为

$$\Lambda^*=(\Lambda^*_{\cdot 1},\Lambda^*_{\cdot 2})=\left(\Lambda^0_{\cdot 1},\Lambda^0_{\cdot 2}\right)\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{21}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{pmatrix}=\left(Q_{11}\Lambda^0_{\cdot 1}+Q_{12}\Lambda^0_{\cdot 2},Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}+Q_{22}\Lambda^0_{\cdot 2}\right).$$

鉴于 Q 在（4.1）中具有近似的上三角结构，我们有

$$\|\Lambda^*_{\cdot 1}\|_0=\left\|Q_{11}\Lambda^0_{\cdot 1}+Q_{12}\Lambda^0_{\cdot 2}\right\|_0\asymp_p N^{0.9}+N^{0.7}\asymp_p N^{0.9}. \tag{4.2}$$

因此，旋转后的因子 1 载荷保留了其稀疏度。鉴于 $\Lambda^*_{\cdot 2}=Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}+Q_{22}\Lambda^0_{\cdot 2}$，因子 2 的稀疏度受到 $Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}$ 的污染。不过，由于 Q_{21} 递减，这种污染会消失。注意，$Q_{12}\Lambda^0_{\cdot 2}$ 中每个非零元素的阶为 $O_p(1)$，非零元素总数的阶为 $N^{0.7}$；$Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}$ 中非零元素总数的阶为 $N^{0.9}$，但每个非零元素的阶为 $O_p(N^{-0.2})$，且收敛于零。因此，第一分量 $Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}$ 渐近地趋于零向量。或者，我们为一般的 $n\times 1$ 向量 a 定义稀疏度的自适应度量为 $\|a\|_{\kappa_N,\,0}=\sum_{j=1}^n\mathbf{1}(|a_j|\ge\kappa_N)$，其中 $\kappa_N=N^{-\varrho}$ 对某个 $\varrho\in(0,0.2)$ 成立。然后

$$\|\Lambda^*_{\cdot 2}\|_{\kappa_N,0}=\left\|Q_{21}\Lambda^0_{\cdot 1}+Q_{22}\Lambda^0_{\cdot 2}\right\|_{\kappa_N,0}\asymp_p N^{0.7}. \tag{4.3}$$

该陈述　　在 (4.2) 中，如果将 ℓ_0-范数替换为 $\|\cdot\|_{\kappa_N,\,0}$，该结论也显然成立。这搭

[10]若一个（下、上）三角矩阵的对角元素均为零，则称其为严格（下、上）三角矩阵，见 Abadir 和 Magnus（2005 年，第 17 页）。

结果表明，主成分旋转可以在忽略可忽略项的情况下保持稀疏程度，从而使因子强度保持不变。

为了更好地理解主成分旋转如何作用于稀疏载荷Λ^0，我们通过模拟，采用上述双因子模型进行说明。数据生成过程与第 6 节类似。[11] 我们设定（N, T）$=$(200, 200)，并模拟 $r = 2$正相关因子。

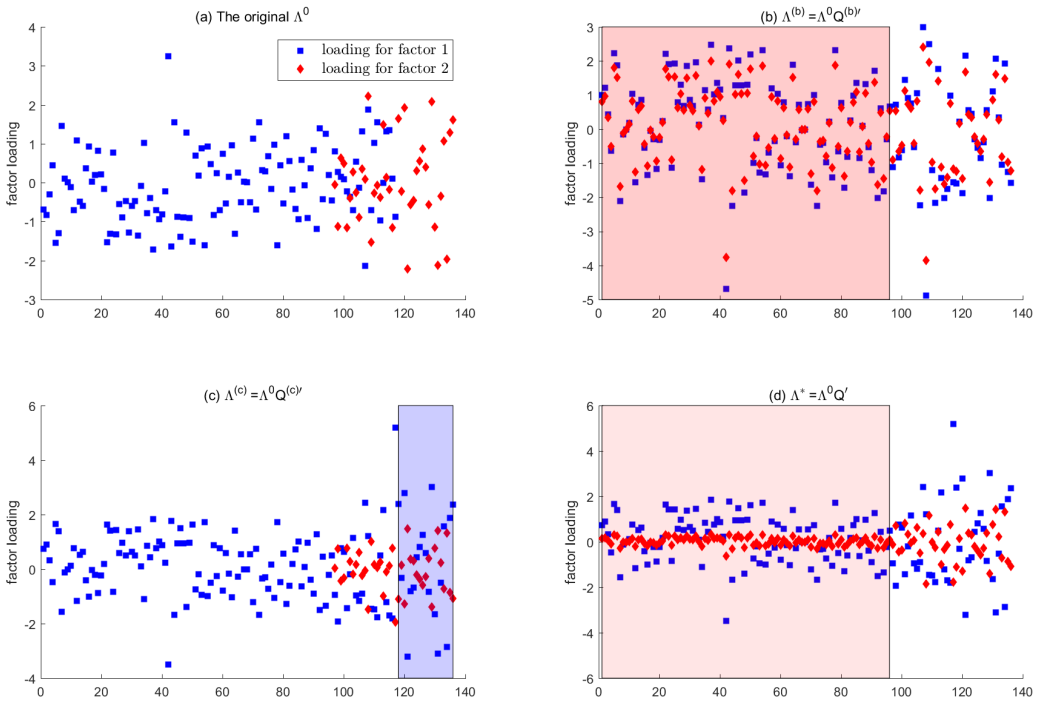

图 1：主成分旋转保持稀疏程度的示意图

图 1 的面板 (a) 展示了潜在的 Λ^0，其中 $\mathcal{L}_1^0 = \{i : \ i = 1, \ldots, 117\}$，以及 $\mathcal{L}_2^0 = \{i : i = 97, \ldots, 136\}$。旋转矩阵计算为 $Q = \begin{pmatrix} -1.07 & 1.46 \\ -0.19 & -0.67 \end{pmatrix}$。面板 (b) 说明了一个常见的担忧，即由任意非奇异矩阵（例如 $Q^{(b)}$）旋转后的 Λ^0 会变得更加不稀疏。为了清楚地展示这一点，我们将 $Q^{(b)}$ 的每个元素随机生成为 $\mathcal{N}(0, 1)$，使得 $Q^{(b)} = \begin{pmatrix} -1.44 & -0.98 \\ -1.16 & -0.75 \end{pmatrix}$。从面板 (b) 可以明显看出，$\mathcal{L}_2^0$ 显著地“膨胀”了（由阴影区域表示），以至于这两个因子

[11]唯一的例外是，第 6 节中的 $\mathcal{L}_k^0$ 是在 i 之间随机确定的，而此处为便于说明，按规定将其固定。

最终具有相同的强度。图 (c) 通过一个经过风格化处理的精确上三角矩阵 $Q^{(c)}$ 展示了旋转效应。这里的 $Q^{(c)}$ 与 Q 相同，除了 $Q_{21}^{(c)}=0$，即 $Q^{(c)}=\begin{pmatrix}-1.07 & 1.46\\ 0 & -0.67\end{pmatrix}$。

显然，上三角 $Q^{(c)}$ 解决了 $\mathcal{L}_2^0$ 的膨胀问题。另一方面，我们从图 (c) 中看到，由于因子 2 的非零载荷与 $\{i$ 上的载荷：$i=118$，.....，$136\}$（由阴影区域表示）发生混合，$\mathcal{L}_1^0$ 在一定程度上有所膨胀。尽管如此，相对于因子 1 的广泛性而言，因子 2 所导致的因子 1 中零载荷总数的扭曲可以忽略不计，因为因子 2 相对较弱。最后，图 (d) 展示了在模拟中经由真实 Q 旋转后的 Λ^*。正如有限样本（$Q_{21}\asymp_p 200^{-0.2}$）中的预期，$Q_{21}$ 的绝对值确实非常小，尽管它并不严格等于 0。得益于这一特征，$\Lambda^*_{\cdot,\,2}$ 中膨胀的部分（由阴影区域表示）在整体上都很小，并以一定速率趋于消失，因此可以将其与估计误差一并筛除，从而揭示稀疏性。我们将在下一小节中将这一思想形式化。

4.2 使用主成分估计量恢复稀疏性

我们在第4.1节中的先前分析，为 Λ^* rotated by Q 提供了一个正向识别结果。在实践中，Λ^* 是不可观测的，可用的是主成分估计量 Λ。在本小节中，我们将说明如何通过处理 Λ 来实现稀疏性的恢复，而不仅仅是恢复其程度。毫无疑问，我们需要考虑由 $\widetilde{\lambda}_i-\lambda_i^*=T^{-1}H'F^{0\prime}e_i+T^{-1}(F-F^0H)'e_i$ 组成的估计误差。定理 3.10 (i) 指出估计误差也一致趋于零，从而证明通过筛选主成分估计量 $\widetilde{\lambda}_i$ 来恢复稀疏性是合理的。

我们将说明，刻画因子 k 稀疏性的集合 $\mathcal{L}_k^0$ 可以通过受约束的主成分估计量近似良好地恢复。当 λ_{ik} 的绝对值较小时，我们可以将因子载荷设为 0。因此，我们选取非零因子载荷，并采用阈值 $c_{\lambda,\,NT}$：

$$\widehat{\lambda}_{ik}=\widetilde{\lambda}_{ik}\mathbf{1}\left\{\left|\widetilde{\lambda}_{ik}\right|>c_{\lambda,NT}\right\}\ \text{where}\ c_{\lambda,NT}=\frac{1}{\sqrt{\ln(NT)}}. \tag{4.4}$$

我们将第 k 个因子载荷的估计支撑集定义为 $\widehat{\mathcal{L}}_k=\{i:\ \widehat{\lambda}_{ik}\neq 0\}$. 为了评估 $\widehat{\mathcal{L}}_k$ 的稀疏性恢复准确性，我们将真实非零集合 $\mathcal{L}_k^0$ 与其估计量 $\widehat{\mathcal{L}}_k$ 之间的对称差记为

$$\mathcal{L}_k^0\triangle\widehat{\mathcal{L}}_k=\left(\mathcal{L}_k^0\backslash\widehat{\mathcal{L}}_k\right)\cup\left(\widehat{\mathcal{L}}_k\backslash\mathcal{L}_k^0\right),$$

其中， $\mathcal{L}_k^0 \backslash \widehat{\mathcal{L}}_k$ 为假阴性集合， $\widehat{\mathcal{L}}_k \backslash \mathcal{L}_k^0$ 为假阳性集合。显然， $\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k$概括了两种类型的误差。

为兼容强度相同的因子，我们定义一个集合

$$\omega(k) = \{l : \alpha_l = \alpha_k, 1 \leq l \leq r\}. \tag{4.5}$$

对于任意 $l \in \omega(k)$， $\alpha_l = \alpha_k$。

命题4.1 在假设1–5和8–9下，对于 $k = 1, \ldots, r$，我们有：

(i)如果 α_k 唯一，则 $\frac{|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k|}{N^{\alpha_k}} = o_p(1)$；(ii) 如果 $|\omega(k)| \geq 2$ 不唯一，使得 $\frac{|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k|}{N^{\alpha_k}} = o_p(1)$，那么如果 $\frac{|\cup_{k' \in \omega(k)} \mathcal{L}_{k'}^0 \backslash \mathcal{L}_k^0|}{N^{\alpha_k}} = o_p(1)$，则 $\frac{|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k|}{N^{\alpha_k}} = o_p(1)$；否则， $\frac{|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k|}{N^{\alpha_k}} = O_p(1)$。

注释 11. 一般而言，我们无法按照 $|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k| = o_p(1)$ 的意义精确恢复集合 $\mathcal{L}_k^0$。根据 α_k 是否唯一，或者同一强度组中载荷支持集的重叠程度，我们得到 $|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k| = O_p(N^{\alpha_k})$ 或 $o_p(N^{\alpha_k})$。一般而言，基于主成分估计得到的恢复稀疏性，对于因子 k 而言，可能不如真实的潜在稀疏性那么稀疏。这些结果看起来较弱，但其一般性足以识别因子强度。对于嵌套稀疏性的特殊情形，即 $\mathcal{L}_k^0 \supseteq (\cup_{l \geq k} \mathcal{L}_l^0) \cup \left(\cup_{k' \in \omega(k)} \mathcal{L}_{k'}^0\right)$，我们可以证明，按照 $|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k| = O_p(1)$ 的意义，恢复结果几乎是精确的。

注 12. (i) 在稀疏性恢复中，$c_{\lambda,NT}$ 发挥着关键作用，用于筛除由旋转和估计误差引起的噪声。我们证明这些噪声为 $O_p\left(N^{-\zeta} + [\ln(N)/T]^{1/2}\right)$ 统一地，其中 ζ 是不同因子强度之间的最小差异，即 $\zeta = \min_{1 \leq k \leq G-1} \left(\alpha_{[k]} - \alpha_{[k+1]}\right)$。因此，我们设定 $c_{\lambda,NT} = [\ln(NT)]^{-1/2}$ 以压制噪声。(ii) 或者，可以使用阈值 $\widetilde{c}_{\lambda,NT} = c[\ln(NT)]^{-1/2}$，其中带有调节参数 c。我们在范围 $[0.5, 1.5]$ 内尝试了 c，发现结果对调节参数具有稳健性；此外， c 可以通过交叉验证等自适应方法确定。鉴于数据均按照 Bai and Ng（2002）的方式进行了标准化，我们重点采用简单阈值 $c_{\lambda,NT}$。在模拟和实证应用中，我们的无调节参数阈值 $c_{\lambda,NT}$ 均表现良好。请注意，Fan 等（2015）也采用了一个简单的阈值。

注 13. 请注意，噪声的统一阶数取决于不同因子强度之间的最小差异；参见上一条注释。因此，因子强度之间的差距越大，载荷稀疏性的恢复效果越好。当因子

例如，当 α_j 和 α_k 的强度变得非常接近时，我们的方法可能会为两个因子载荷得出相同的稀疏性，因此在区分二者时可能表现不佳。尽管如此，这或许不会造成太大影响，因为因子 j 和 k 的真实载荷稀疏性可能本来就非常相似。还需注意，在这种情况下，对于与 α_j 和 α_k 相距较远的 l 和 α_l 因子，采用该方法也不会产生问题。

^注释14。（i）鉴于已有稀疏化载荷估计量 λ_{ik}，进一步更新因子的估计量是很自然的考虑。然而，容易证明，更新后的因子估计量与简单的主成分估计量具有相同的收敛速率和渐近分布。比较它们的有限样本表现，并进一步研究其高阶渐近理论，可能会很有意义。我们将其留待进一步研究。（ii）由于载荷在许多实证应用中都具有重要意义，因此可以考虑进一步改进主成分估计，以减少其污染，从而实现更精确的估计和稀疏性恢复。当某些因子的强度较为接近时，这种考虑尤其合理，因为这两组因子的载荷向量更容易相互混杂。这可能需要采用更复杂的程序，例如在特定旋转假设下进一步结合SOFAR，同时也会带来相当大的理论挑战。我们同样将其留待进一步研究。

在结束第4.2节之前，我们想提及，UY（2023a）的 SOFAR 估计量通过 ℓ_1 正则化以另一种方式实现了稀疏性恢复。有趣的是，如果我们对比其经验结果中基于主成分（PC）得到的因子载荷估计（图2和图7）与基于 SOFAR 得到的估计（图9和图11），便会立即发现，主成分（PC）和 SOFAR 的估计几乎完全相同，唯一的区别在于主成分（PC）引入了许多微小噪声。这一观察结果表明，将主成分估计与适当的筛选相结合以恢复稀疏性是有效的，而这实际上也正是本文所采用方法的核心依据。

4.3 因子强度估计

BKP（2021）使用估计因子强度来衡量未观测到的宏观经济冲击的广泛性。他们重点关注最大因子强度的识别与估计。原因在于，主成分方法只能在一个非奇异旋转矩阵意义下识别潜在因子，因此被认为只能恢复最强因子的强度。为进一步识别和估计较弱因子的强度，他们提出了若干使用加权横截面平均的序贯程序；更多讨论见 BKP（2021）第 4 节。然而，凭借稀疏性这一性质.....

对于主成分方法的稀疏性保持，我们可以对具有不同强度的所有因子强度进行一致估计，从而完整揭示所有因子的广泛性。我们希望，所提出的因子强度估计量本身也具有独立的研究价值。

我们可以通过研究每个因子的强度来了解其影响力。回想一下，α_k满足 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ik}^{0\prime}\lambda_{ik}^{0} \asymp N^{\alpha_k}$.现在，对于 $k=1$，.....， r，定义

$$\widehat{D}_k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}\left\{\left|\widetilde{\lambda}_{ik}\right| > c_{\lambda,NT}\right\},$$

其中 $c_{\lambda,NT} = [\ln(NT)]^{-1/2}$。我们的 α_k估计量简单地表示为

$$\widehat{\alpha}_k = \frac{\ln \widehat{D}_k}{\ln N}. \tag{4.6}$$

请注意，UY（2023a）也将上述估计量 $\widehat{\alpha}_k$ （4.6）用于潜在因子，而 BKP（2021）主要将其用于观测因子。

为了深入了解 $\widehat{\alpha}_k$的有效性，不难看出，命题4.1意味着，恢复得到的集合 $\widehat{\mathcal{L}}_k$ 也近似于 $\mathcal{L}_k^0$和 $\mathcal{L}_l^0$的并集，其中因子$F_{\cdot,\,l}^0$比$F_{\cdot,\,k}^0$更弱。因此，例如，当 α_k 唯一时，在命题4.1中允许 $|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle (\cup_{l=k,\ldots,r}\mathcal{L}_l^0)|/N^{\alpha_k} = o_p(1)$是合理的。结合命题4.1(i)，这一推论在 α_k 唯一时给出了如下界:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}\left\{\lambda_{ik}^0 \neq 0\right\} + o_p(N^{\alpha_k}) \leq \widehat{D}_k \leq \sum_{l=k}^{r}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}\left\{\lambda_{il}^0 \neq 0\right\} + o_p(N^{\alpha_k}), \tag{4.7}$$

这保证了 $\widehat{\alpha}_k$ 的一致性。当 α_k 不唯一时，可在（4.7）中用 $O_p(N^{\alpha_k})$ 替换 $o_p(N^{\alpha_k})$，这足以保证 $\widehat{\alpha}_k$ 的一致性。下面的定理给出了因子强度估计量的一致性。

定理4.2 在假设1–5和8–9下，对于 $k = 1, ..., r$, $\widehat{\alpha}_k \xrightarrow{p} \alpha_k$.

备注15。（i）定理4.2表明，我们提出的估计量能够一致地估计所有因子的强度。这一一致性结果背后的直觉与命题4.1相似。同样，关键在于认识到旋转载荷矩阵$\Lambda_{\cdot,\,k}^{*}$ 能够保留强度 α_k ，直至给定阈值$c_{\lambda,\,NT}$；同时，估计所引入的误差也一致地受$c_{\lambda,\,NT}$支配。（ii）上述

定理仅给出了因子强度估计量的一致性结果。遵循BKP（2021），在更复杂的条件下，我们还可以进一步建立强度估计量的收敛速度和极限分布。（iii）在实践中，可以根据估计的因子强度来判断某个潜在因子是强因子还是弱因子。正如BKP（2021）所指出的，精确估计因子强度需要较大的截面样本量 N。因此，我们遵循BKP（2021），建议采取保守做法：将（估计）强度高于0.95的因子视为足够强，而将强度低于0.90的因子视为足够弱。

5 因子数量的确定

因子数量的确定一直是因子模型文献中备受关注的问题。针对强因子模型，已有研究提出了多种选择准则，例如 Bai and Ng（2002）、Onatski（2010）、Ahn and Horenstein（2013）、Lu and Su（2017）、Wei and Chen（2020）以及 Fan 等人（2022）。至于弱因子模型中因子数量的一致性选择，UY（2023a）证明，Onatski（2010）提出的边缘分布（ED）估计量具有一致性；Onatski（2015）则提出，在强因子和弱因子渐近框架下，根据共同成分最小二乘估计量的平方误差近似值来选择因子数量。Freyaldenhoven（2022）设计了一种统计量，将协方差矩阵的特征值与特征向量结合起来，以增强其区分能力，从而识别强度超过特定阈值的因子，并假设 N 和 T 成比例增长。Guo 等人（ 2022 ）利用因子强度的数据驱动自适应惩罚项构建信息准则，以选择弱因子，同时避免过度拟合。

我们提出一种基于奇异值阈值化的方法来确定因子数量，正如 Bai and Ng（ 2019）和 Freyaldenhoven（2022）所讨论的那样。该程序非常简单，其思路与 Bai and Ng（2002）相同。为确定 F^0 中的因子数量，我们使用以下 r 估计量，

$$\widehat{r} = \max\left\{k : \widetilde{V}_k^{r_{\max}} \geq \widehat{\sigma}^2 N^{-1/2}\left(\ln\ln N\right)^{1/2}\right\}, \tag{5.1}$$

其中， $\widehat{\sigma}^2$ 是 $(NT)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}E(e_{it}^2)$ 的一致估计量， $r_{\max}$ 是一个较大的有界量。

~ ~正整数，使得 $r \le r_{\max}$，且 $V_k^{r_{\max}}$是 $V^{r_{\max}} \equiv \text{diag}\left(\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_{r_{\max}}\right)$的第 k个对角元素，其中 $r \times r$是一个对角矩阵，由 $X'X/(NT)$ 中按降序排列的 $r_{\max}$个最大特征值构成。对于实践中的 $\widehat{\sigma}^2$，我们采用与 Bai and Ng（2002）类似的方法计算，即 $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \widetilde{\lambda}_i^{r_{\max}\prime}\widetilde{F}_t^{r_{\max}}\right)^2$，其中上标 $r_{\max}$ 表示在估计中允许存在 $r_{\max}$ 个因子。我们在数值研究中设定 $r_{\max} = 8$。为检验 $r_{\max}$的稳健性，我们还在在线附录中报告了 $r_{\max}$ 取不同值时的结果。

注释16。(5.1)中提出的估计量与 Freyaldenhoven（2022）方程（16）中提出的“$BN_{\sqrt{N}}$”估计量非常相似。具体而言，他们定义的由奇异值阈值化构成的 $g(N)$ 在我们的设定下等于 $(\ln \ln N)^{1/2}$。

定理5.1 在假设1–5和8–9下，$\widehat{r} \xrightarrow{p} r.$

注释17。证明定理5.1需要验证以下两个条件以概率成立：(i) $\widehat{r} \ge r$ 以及(ii) $\widehat{r} \le r.$ 。条件(i)实际上由命题3.1推出。我们通过反证法证明条件(ii)，这依赖于在假设4施加的 $\|e\|_{sp}^2 = O_p(\max\{N, T\})$下得到的更精确界。即使在强因子模型中，通过信息准则确定因子数量时，Bai and Ng（2002）也需要这一假设。

注释18。Onatski（2010）提出的 ED估计量基于这样一个事实：所有“系统性”特征值都发散至无穷大，而任意有限个最大的“特质性”特征值则聚集在同一点附近。Onatski（2010）通过用楔形参数 δ 分离发散的特征值来确定因子数量，并证明只需满足 $\min_{1 \le k \le r} \alpha_k > 0$，ED估计量便具有一致性。然而，ED估计量依赖于特质项服从高斯分布；若其不服从高斯分布，则要求这些项在截面上或时间上相互独立，因此在宏观经济学和金融领域的应用中存在局限。至于如何选择 δ，Onatski（2010）用普通最小二乘估计近似特征值差的上界，然后将其加倍以构造 δ。给定 δ 后，通过迭代得到其最终的 r 估计量。相比之下，我们的 r 估计量使用起来更加直接。

注19. 到目前为止，本文中的稀疏性指的是精确稀疏性。我们也可以考虑近似稀疏性，在这种情况下，载荷中可能包含相当数量的非零但较小的元素。Lettau 和 Pelger（2020）以及 Bai 和 Ng（2023）均考虑并允许了此类设定。如果这些较小的

条目衰减得足够快。例如，不难证明，如果我们将精确的稀疏载荷 λ_{ik}^0 替换为近似的稀疏载荷 $\lambda_{ik}^{\triangle}$，则该扩展仍然有效：$=\lambda_{ik}^0 \mathbf{1}\left\{\lambda_{ik}^0 \neq 0\right\}+N^{-\beta} \mathbf{1}\left\{\lambda_{ik}^0=0\right\}$，其中 $\beta>1/2$。

6 蒙特卡洛模拟

在本节中，我们研究了所提出的稀疏性诱导的弱因子模型估计量的有限样本表现。其中包括比较简单的主成分估计量与各种正则化估计量在因子、载荷、共同成分、因子数量以及因子强度估计方面的表现。

6.1 数据生成过程

我们考虑以下数据生成过程（DGP）：

$$\begin{aligned} X_{it} &= \lambda_i^{0\prime} F_t^0+e_{it},\ i=1,...,N,\ t=1,...,T, \\ F_{1t}^0 &= 0.5 F_{1,t-1}^0+u_{1t},\ \text{and}\ F_{kt}^0=(-0.8)^k F_{1t}^0+u_{kt},\ k=2,...,r. \end{aligned}$$

模拟因子之间存在不同程度的相关性。我们令 u_{kt} 相互不相关，且服从 $N(0,1)$ 分布，其中 $k=1,...,r$。为指定因子载荷 λ_{ik}^0，对于每个$k=1,...,r$，我们首先从 $\{\lambda_{ik}^0\}_{i=1}^N$ 中随机选取 $\lfloor N^{\alpha_k} \rfloor$ 个，并将其设定为独立同分布的 $N(0,1)$，然后将其余的 $\{\lambda_{ik}^0\}_{i=1}^N$ 设为零。

对于 $N\times 1$ 向量 e_t，我们将 e_{it} 的（边际）分布设定为学生-t(5)，以允许出现重尾。通过以下方式引入 e_{it} 之间的截面依赖：$N\times N$ 协方差矩阵 Σ_e。$\Sigma_e=\text{diag}\left\{\Sigma_1,...,\Sigma_{N/4}\right\}$ 为一个块对角矩阵，其主对角线上有 4×4 个块。初始时，假设每个 Σ_i 均为I_4。然后，我们从中随机选择 $\lfloor N^{0.3} \rfloor$ 个块，并通过设定 $\Sigma_i(m,n)=0.5^{|m-n|}$使它们变为非对角。截面依赖的设计遵循 Fan 等（2015），但这里的依赖性更强。

我们尝试了因子数量为 $r=3$ 和 5 的模拟。对于 $r=3$，我们设置 $\alpha=(0.9, 0.75, 0.6)$；而对于 $r=5$，我们设置 $\alpha=(1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6)$。为节省篇幅，正文中仅包含 $r=3$ 下的结果，而将 $r=5$ 下的结果放在在线附录中。模拟的重复次数设为 2000 次。

6.2 模拟结果

我们首先将我们的方法（WZ）与不同的因子数量确定方法进行比较。其他选择规则包括 Bai and Ng（2002，BN）、Guo 等人（2022，GCT）、Freyaldenhoven（2022，FR）、Onatski（2010）的 ED，以及 Ahn and Horenstein（2013，AH）提出的方法，范围从 IC_{p1} 。必要时将 $r_{\max}$ 设为 8。表1报告了各方法估计的因子数量的均方根误差（RMSE）和偏差。显然，在存在弱因子的情况下，GCT、FR 和 AH 都会低估 r 。ED 和 BN 的表现不算太差，但仍不及我们提出的方法，因为它们分别倾向于高估和低估 r。ED估计量在弱因子模型中的效果不如以往研究所发现的那样好，例如 UY（2023a）的研究结果，这表明 ED 的表现可能对楔形参数 δ 的选择较为敏感，正如第5节所述。我们提出的因子数量估计量在几乎所有样本量下都优于所有其他方法。

表 1：当 $r=3$ 时的因子数量估计

		RMSE						Bias					
N	T	WZ	BN	GCT	FR	ED	AH	WZ	BN	GCT	FR	ED	AH
100	100	0.291	0.676	0.939	1.962	0.415	1.998	0.078	-0.446	-0.882	-1.944	0.034	-1.998
	200	0.213	0.425	0.867	1.967	0.412	2.000	-0.028	-0.174	-0.752	-1.950	0.083	-2.000
	400	0.269	0.311	0.782	1.972	0.952	1.999	-0.070	-0.094	-0.608	-1.959	0.322	-1.998
200	100	0.183	0.594	0.912	1.968	0.282	2.000	0.028	-0.347	-0.832	-1.944	0.058	-2.000
	200	0.143	0.224	0.722	1.949	0.289	2.000	-0.015	-0.046	-0.519	-1.904	0.063	-2.000
	400	0.180	0.092	0.454	1.961	0.397	2.000	-0.033	-0.008	-0.199	-1.927	0.075	-2.000
400	100	0.140	0.676	0.928	1.950	0.225	2.000	0.018	-0.455	-0.862	-1.902	0.048	-2.000
	200	0.077	0.217	0.632	1.795	0.288	2.000	-0.004	-0.045	-0.397	-1.609	0.064	-2.000
	400	0.102	0.032	0.225	1.583	0.261	1.999	-0.010	0.000	-0.012	-1.253	0.055	-1.998

为了研究弱因子模型下主成分估计量的有限样本表现，在假设真实因子数量已知的前提下，我们将主成分回归与 UY（2023a，b）提出的稀疏正交因子回归（SOFAR）进行比较。UY（2023a）基于针对因子载荷稀疏性的 Lasso 惩罚，提出了自适应（Ada）SOFAR估计量。随后，他们通过引入去偏（Deb）SOFAR估计量来恢复其渐近正态性，并据此进行推断。此外，他们还针对载荷稀疏性的多重检验问题，构造了再稀疏化（Res）SOFAR估计量，以实现错误发现率控制。值得注意的是，UY（2023b）中的各种 SOFAR 估计量均源自惩罚回归，该方法明确以稀疏性为目标。因此，似乎很自然会认为，处理弱因子模型时，采用他们的方法会比使用主成分更有优势。然而，正如我们之前提到的，简单的主成分.....

估计量具备自动稀疏性识别的优良特性，因此主成分甚至可能优于复杂的 SOFAR。

为了衡量因子和载荷估计量的表现（其渐近性质已在前面的第 3 节中得到充分研究），我们遵循 Doz等（2012），采用迹统计量：[12]

$$TR^F = \frac{\mathrm{Tr}\left(F^{0\prime}\widetilde{F}\left(\widetilde{F}'\widetilde{F}\right)^{-1}\widetilde{F}'F^0\right)}{\mathrm{Tr}\left(F^{0\prime}F^0\right)}, \quad TR^\Lambda = \frac{\mathrm{Tr}\left(\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\left(\widetilde{\Lambda}'\widetilde{\Lambda}\right)^{-1}\widetilde{\Lambda}'\Lambda^0\right)}{\mathrm{Tr}\left(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\right)}.$$

我们还报告了共同成分 C_{it} 的估计均方根误差（RMSE^C）。所有结果均列于表2中。Res估计量采用的错误发现率为 $q = 0.1$。[13] 有趣的是，因子和共同成分的主成分估计量几乎总是优于任何SOFAR类型的估计量。尽管在较大的样本量下，再稀疏化SOFAR估计量在 Λ 方面优于主成分估计量，但其优势幅度很小。SOFAR估计量是在伪真载荷具有稀疏性、同时伪真因子相互正交的条件下构建的。正如Bai and Ng（2023，第1906页）所指出的，这种方法依赖于一个相对较强的限制。然而，该限制与我们具有相关因子和稀疏载荷的数据生成过程（DGP）并不一致，这或许可以解释SOFAR估计量表现较差的原因。在一项未在此报告结果的补充实验中，我们对DGP进行了修改，使因子确实相互正交，同时保持其余条件不变。结果发现，按照 TR^F评估因子估计效果时，SOFAR估计量的表现与主成分估计量更加接近，甚至优于后者，尽管总体而言，其 $RMSE^C$仍然较大。因此，考虑到基于主成分的回归（结合筛选）具有较强的稳健性且易于实施，似乎是更好的选择。另一方面，值得指出的是，本文中主成分估计量所要求的 $\alpha_r > 1/2$ 限制，比UY（2023a，b）中SOFAR估计量所要求的限制更强。

虽然 r　　表2中报告的结果是在已知因子数量的情况下得出的，我们还

[12]Uematsu和Yamagata（2023a）通过 ℓ_2–范数损失评估估计量的性能：$\left\|\sum_{k=1}^r N_k^{-1/2}\left[\text{绝对值}\left(\widehat{\Lambda}_{\cdot,k}\right)-\text{绝对值}\left(\Lambda^0_{\cdot,k}\right)\right]\right\|_2$和 $\left\|\sum_{k=1}^r T^{-1/2}\left[\text{绝对值}\left(\widehat{F}_{\cdot,k}\right)-\text{绝对值}\left(F^0_{\cdot,k}\right)\right]\right\|_2$。当因子和载荷仅在逐列符号不确定性下得到识别，而不仅仅是在旋转不确定性下得到识别时，此类范数损失更具相关性，并且需要施加额外的限制，正如我们接下来将解释的那样。相反，我们采用其有效性不依赖于此类限制的迹统计量，它们能够表明因子（载荷）的估计量在多大程度上张成了与潜在因子（载荷）相同的空间。

[13]我们计算了 $q = 0.05$时的Res估计量，其结果与此处报告的结果非常接近。

使用每种所提出的方法估计因子数量进行实验，这样更贴近实际，也能更准确地反映因子数量的估计可能如何影响后续估计量，结果见附录 E.2。结果表明，除在 N 和 T 均相对较小时对均方根误差 ^{C} 的比较之外，上述结论基本仍然成立。

表 2：当 $r = 3$ 时因子模型的估计

		TR^F				TR^Λ				$RMSE^C$			
N	T	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res
100	100	**0.924**	0.898	0.909	0.909	**0.718**	0.622	0.709	0.713	**0.973**	1.020	1.005	1.005
	200	**0.936**	0.918	0.924	0.924	0.786	0.720	0.783	**0.788**	**0.953**	0.988	0.967	0.967
	400	**0.943**	0.935	0.938	0.938	0.830	0.806	0.833	**0.837**	**0.948**	0.970	0.958	0.957
200	100	**0.955**	0.934	0.942	0.942	0.745	0.647	0.765	**0.786**	**0.886**	0.941	0.894	0.893
	200	**0.964**	0.953	0.957	0.957	0.811	0.752	0.826	**0.841**	0.881	0.910	0.879	**0.879**
	400	**0.969**	0.964	0.966	0.966	0.852	0.838	0.861	**0.871**	**0.872**	0.892	0.877	0.877
400	100	**0.969**	0.951	0.956	0.956	0.750	0.660	0.767	**0.803**	**0.813**	0.866	0.820	0.818
	200	**0.976**	0.966	0.970	0.970	0.816	0.764	0.828	**0.853**	**0.806**	0.844	0.812	0.812
	400	**0.980**	0.975	0.977	0.977	0.858	0.846	0.864	**0.879**	**0.802**	0.822	0.805	0.804

鉴于本文着重关注稀疏性恢复，我们也想了解基于主成分分析能否很好地恢复稀疏性。为此，我们参照 UY（2023b），考察载荷矩阵稀疏性恢复的错误发现率（FDR）和检验功效。为定义这两个术语，令 $\mathcal{S}$ 表示非零元素的指标集（例如，$\mathcal{L}_k^0$），令 $\widehat{\mathcal{S}}$ 表示某种方法发现的集合（例如，$\widehat{\mathcal{L}}_k$）。那么，

$$\text{FDR} = \mathbb{E}[\text{FDP}] \quad \text{with} \quad \text{FDP} = \frac{\left|\mathcal{S}^c \cap \widehat{\mathcal{S}}\right|}{|\widehat{\mathcal{S}}| \vee 1},$$

and

$$\text{Power} = \mathbb{E}\left[\frac{|\mathcal{S} \cap \widehat{\mathcal{S}}|}{|\mathcal{S}| \vee 1}\right].$$

具体而言，FDR_k 和检验功效$_k$ 表示因子 k 的载荷稀疏性的结果，而错误发现率和检验功效则表示总体因子载荷的结果。[14] 表3显示，无论采用基于主成分还是基于 SOFAR 的方法，较强因子的错误发现率和检验功效结果都更好。诚然，在样本量相对较小或中等时，基于主成分的方法不如基于 SOFAR 的方法。这是预期之中的，因为基于 SOFAR 的方法通过额外采用正则化或错误发现率控制来明确追求稀疏性，而简单的

[14]就我们的具体目的而言，FDR_k 和检验功效$_k$ 或许比 Freyaldenhoven（2023）中的“最大余弦相似度”更相关；后者衡量的是每个因子的估计载荷与真实载荷之间的相关性。

主成分估计量不可避免地受到第4.1节中讨论的污染扭曲的影响。尽管如此，令人有些意外的是，对于 SOFAR，当 N 或 T 较大时，错误发现率（FDR）会异常偏高，而对于主成分（PC），错误发现率则随着样本量的增加而下降。[15]

表3： $r = 3$下的错误发现率和检验功效

N	T	FDR_1	FDR_2	FDR_3	$\overline{\mathrm{FDR}}$	Power_1	Power_2	Power_3	$\overline{\mathrm{Power}}$
面板 A：主成分+筛选									
100	100	0.208	0.412	0.448	0.295	0.806	0.434	0.492	0.657
	200	0.212	0.403	0.431	0.292	0.845	0.445	0.532	0.688
	400	0.201	0.396	0.416	0.281	0.887	0.462	0.556	0.721
200	100	0.215	0.430	0.438	0.297	0.838	0.450	0.535	0.694
	200	0.213	0.399	0.369	0.280	0.872	0.474	0.579	0.727
	400	0.206	0.390	0.358	0.271	0.909	0.497	0.612	0.760
400	100	0.209	0.419	0.355	0.277	0.852	0.492	0.623	0.734
	200	0.205	0.404	0.255	0.257	0.893	0.507	0.677	0.770
	400	0.201	0.405	0.245	0.254	0.923	0.517	0.687	0.793
面板B：SOFAR自适应									
100	100	0.018	0.085	0.252	0.080	0.737	0.729	0.723	0.733
	200	0.011	0.084	0.267	0.079	0.801	0.790	0.776	0.794
	400	0.203	0.483	0.687	0.403	0.908	0.736	0.675	0.827
200	100	0.017	0.064	0.188	0.056	0.730	0.709	0.717	0.723
	200	0.010	0.054	0.170	0.046	0.803	0.786	0.781	0.795
	400	0.208	0.511	0.635	0.396	0.905	0.755	0.771	0.848
400	100	0.202	0.361	0.348	0.249	0.785	0.408	0.543	0.662
	200	0.202	0.456	0.470	0.307	0.856	0.623	0.660	0.775
	400	0.204	0.543	0.578	0.374	0.897	0.757	0.786	0.849
面板C：SOFAR重新稀疏化									
100	100	0.046	0.177	0.338	0.142	0.785	0.774	0.781	0.781
	200	0.036	0.129	0.317	0.115	0.851	0.843	0.826	0.845
	400	0.212	0.532	0.712	0.435	0.930	0.787	0.717	0.860
200	100	0.063	0.211	0.346	0.157	0.764	0.727	0.756	0.753
	200	0.035	0.126	0.273	0.099	0.849	0.843	0.843	0.847
	400	0.218	0.558	0.665	0.435	0.925	0.792	0.826	0.876
400	100	0.221	0.588	0.690	0.416	0.838	0.493	0.613	0.725
	200	0.216	0.605	0.721	0.440	0.886	0.509	0.648	0.764
	400	0.215	0.610	0.739	0.463	0.920	0.613	0.760	0.824

此外，在额外的模拟中，我们尝试使用非常小的因子强度差距，并在表13中展示稀疏性恢复的错误发现率和检验功效结果。

[15]我们还将其与去偏 SOFAR 以及 Freyaldenhoven（2023）提出的方法进行了比较。这两种方法的错误发现率都极高。

在线附录，与论文中的表3进行比较，$\alpha =$（0.9、0.75、0.6）的间隔更大。结果表明，在因子强度间隔较小时，因子1的错误发现率从约0.2上升至约0.3，不过其检验功效相当稳健；因子2的错误发现率和检验功效仅略有下降；最弱的因子3受间隔缩小的影响最大。因此，面对一个强度接近其他因子的极弱因子时，我们或许需要谨慎处理。

我们进一步通过表4中的各种方法考察估计因子强度。正如预期，随着真实强度程度的降低，所有估计结果的准确性均有所下降。需要承认的是，当因子相当弱时，例如强度为 $\alpha_k = 0.6$ 的情况，我们提出的强度估计方法（PC+Screening）存在较为明显的高估现象。这可能归因于第4.1节中讨论的污染问题，也与表3中的发现相呼应。除此之外，我们的估计结果与 SOFAR 的估计结果相当，有时甚至更好，尤其是在强度为 $\alpha_k \in [0.7, 0.9]$ 时。SOFAR 是专门为稀疏性恢复而设计的。这里再次表明，我们的因子强度估计量具有实用价值：它能够取得合理的估计效果，同时避免像 SOFAR 那样涉及大量计算。此外，根据备注12中的讨论，我们还将筛选值$c_{\lambda,NT}$ 替换为$\widetilde{c}_{\lambda,NT} = c[\ln(NT)]^{-1/2}$，并在附录E.2中报告了使用 $c = 0.8$ 和 1.2 得到的因子强度估计结果，结果并未发生太大变化。

7 实证应用

我们将所提出的方法应用于宏观经济指标，以探究潜在的弱因子。我们使用 FRED-QD 数据库中的数据，该数据库是用于宏观经济研究的季度数据库（McCracken 和 Ng，2021）。原始数据集包含 248 个季度频率序列，最早可追溯至 1959 年第二季度。剔除存在缺失观测值的序列后，最终得到 $N = 181$ 个序列。这些序列分为 13 组：国民收入与生产账户（NIPA）；工业生产；就业与失业；住房、库存、订单与销售；价格；收入与生产率；利率；货币与信贷；家庭资产负债表；汇率；股票市场；以及非家庭资产负债表。[16]

对于样本中使用的每个序列，在确定该序列应以水平值还是对数水平值处理后，变换代码首先和其次

[16]原始 FRED-QD 数据还包含一个名为“其他”的组，其中只有两个序列。然而，这两个序列均因观测值缺失而被剔除，因此最终使用了 13 组。

表 4：当 $r = 3$ 具有 $\alpha = (0.9, 0.75, 0.6)$ 时的因子强度估计

		RMSE			Bias		
N	T	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
		面板 A：主成分+筛选					
100	100	**0.014**	**0.047**	0.138	**0.000**	**0.006**	0.100
	200	**0.014**	**0.048**	0.169	**0.002**	**0.003**	0.073
	400	**0.014**	**0.049**	0.208	**0.003**	**0.007**	**0.048**
200	100	**0.010**	**0.048**	0.126	0.002	**0.028**	0.111
	200	**0.009**	**0.045**	0.138	**0.002**	**0.023**	0.091
	400	**0.009**	**0.045**	0.166	**0.004**	**0.026**	**0.075**
400	100	**0.007**	**0.053**	0.114	**0.002**	**0.044**	0.101
	200	**0.006**	0.048	0.103	**0.002**	0.040	0.079
	400	**0.006**	**0.052**	0.115	**0.003**	**0.042**	**0.065**
		面板 B：SOFAR去偏					
100	100	0.017	0.094	**0.085**	0.004	-0.060	**-0.019**
	200	0.023	0.065	**0.106**	0.019	0.028	**0.067**
	400	0.030	0.103	**0.162**	0.028	0.096	0.146
200	100	0.012	0.095	**0.059**	**0.000**	-0.071	**-0.021**
	200	0.017	0.052	**0.084**	0.014	0.025	**0.062**
	400	0.025	0.095	**0.148**	0.024	0.091	0.138
400	100	0.010	0.102	**0.050**	-0.004	-0.085	**-0.033**
	200	0.013	**0.043**	**0.054**	0.011	**0.023**	**0.036**
	400	0.020	0.088	**0.114**	0.019	0.086	0.105
		面板C：SOFAR重新稀疏化					
100	100	0.024	0.067	0.095	0.020	0.044	0.064
	200	0.030	0.103	0.130	0.028	0.095	0.106
	400	0.036	0.137	0.179	0.035	0.135	0.164
200	100	0.017	0.062	0.096	0.015	0.057	0.085
	200	0.025	0.099	0.129	0.024	0.098	0.121
	400	0.031	0.130	0.162	0.031	0.129	0.157
400	100	0.013	0.057	0.090	0.012	0.054	0.081
	200	0.021	0.093	0.104	0.020	0.092	0.098
	400	0.027	0.123	0.140	0.026	0.123	0.136

根据 McCracken 和 Ng (2021) 的建议，差异化处理取决于序列是 $I(0)$、$I(1)$ 还是 $I(2)$。由于进行了转换，每个序列的前两个观测值被舍弃，因此均从 1959:$Q4$ 开始。我们还对每个序列进行标准化，使其均值为零、方差为单位方差。

我们在图 2 中描绘了由我们的方法（简称 WZ）、Bai and Ng（2002）的 IC_{p1}（简称 BN）以及 Onatski（2010）的边缘分布（ED）估计量所估计的弱因子数量。估计采用滚动窗口方案，窗口固定长度为 120。x 轴上的时间表示窗口区间的右端点。对于 WZ，在大多数时期，大面板包含五个因子。有少数窗口包含四个因子，在这些窗口中，BN 也报告了相同的数量。另一方面，BN 在前半段滚动窗口中仅估计出三个因子。在后半段，BN 仅在少数窗口区间中发现五个因子。Onatski（2010）认为，ED 方法有望很好地检测出当前存在的弱因子。然而，结果似乎并不支持这一点：ED 大多数时候输出三个因子，而在某些时期，数量会降至两个甚至一个，并且出现大幅振荡。ED 报告估计因子数量大于三个的情况仅有三次。

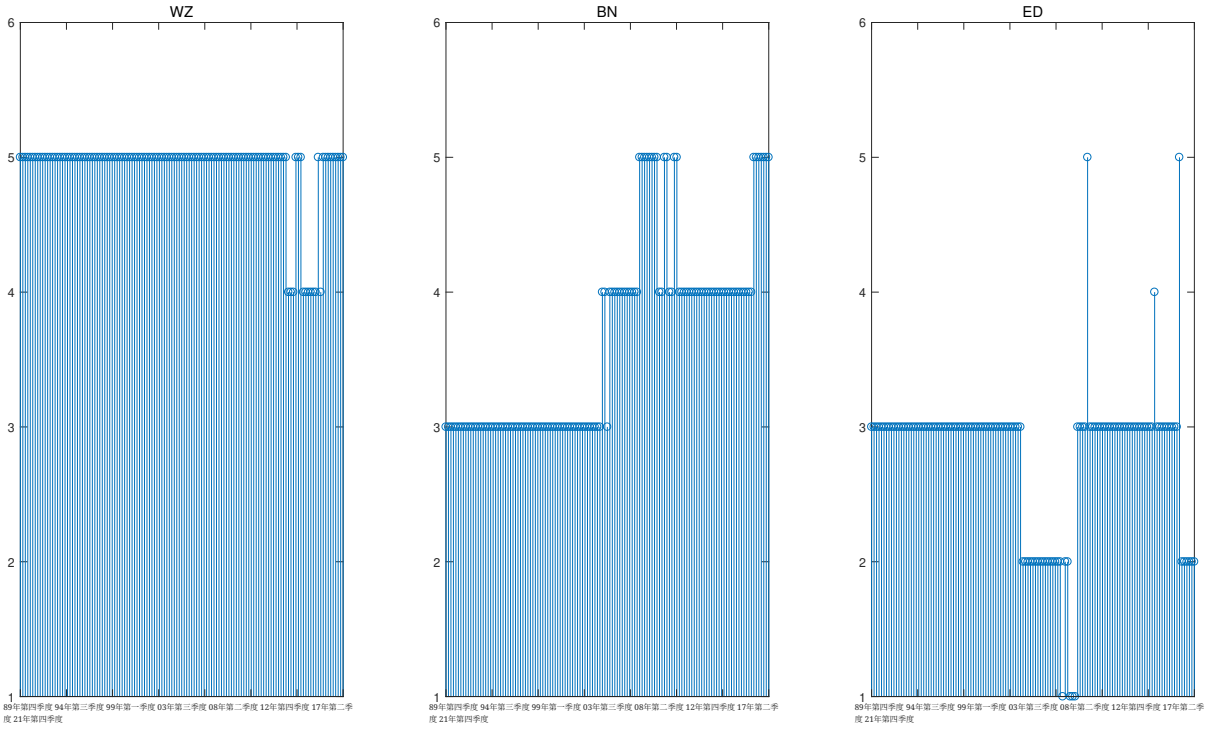

图 2：滚动窗口估计的因子数量

接下来，为了解估计因子强度，对于每个已识别的弱因子，我们进一步在图 3 中绘制其在滚动窗口上的估计因子强度。这样，我们便可以研究因子强度的动态变化，因为近期研究发现，因子模型的载荷参数可能表现出时变性；参见 Ma and Su（2018）、Ma et al.（2020）和 Fu et al.（2023）。对于结束于 1989:Q4 至 2021:Q4 的大多数窗口区间，我们都有五个弱因子。图 3 展示了潜在因子明显的稀疏结构。前两个最强因子的强度大多数时候似乎都非常接近 0.8，尽管 $\widehat{\alpha}_1$ 有几次可能会急剧上升至接近 0.9。 $\widehat{\alpha}_3$ 的范围为 0.7 至 0.8。$\widehat{\alpha}_4$ 在 0.6 至 0.7 之间波动，有趣的是，它似乎与$\widehat{\alpha}_1$同时达到峰值，同时与 $\widehat{\alpha}_3$同时触底。 $\widehat{\alpha}_5$ 约为 0.6，并且直到 2014 年都接近 $\widehat{\alpha}_4$ 。然而，在最后 6 年期间， $\widehat{\alpha}_5$ 甚至降至 0（一个弱化因子）。因子强度在识别和估计风险溢价（Pesaran and Smith，2019）以及因子增强回归（Chao et al.，2022）中发挥着关键作用。BKP（2021）还指出：“宏观经济冲击的第一强度也特别值得关注，因为

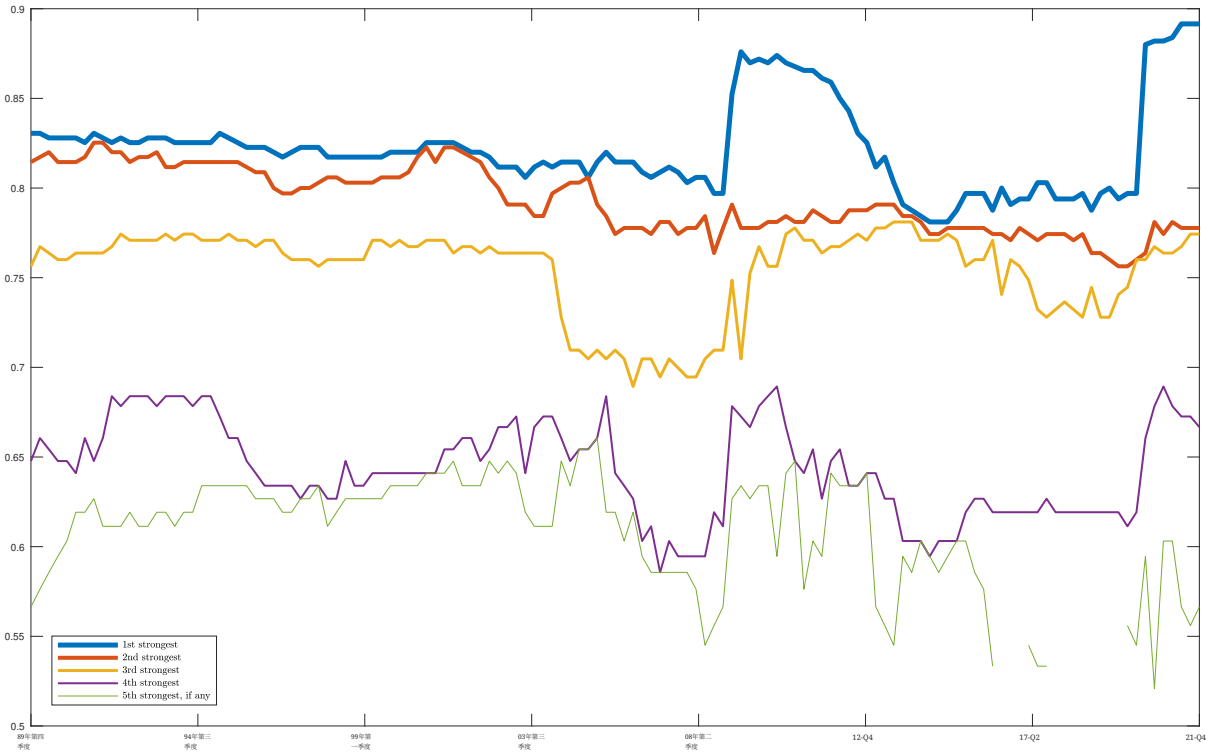

图 3：按滚动窗口划分的估计因子强度

我们也关注横截面维度上的因子广泛性，也就是说，

哪些具体序列受到某个给定弱因子的影响，以及各因子对不同领域的相对影响力。根据命题4.1的含义，我们可以通过观察$\widehat{\ }$ λ_{ik} 在 i中的稀疏性，大致推断其影响程度。我们用图4的热力图表示 $|\lambda_{ik}|$ 的分布$\widehat{\ }$。我们考察两个长度大致相同的子时段：1959:Q4-1989:Q2 和 1989:Q3-2021:Q4。每个子时段中，我们都检测到 5 个弱因子。每行（i）代表一个序列，并在其名称前加上对应的组编号（#1 –#13）。每列（k）代表一个提取为潜在因子的主成分，我们还用因子强度标示其排名。具体而言，1959:Q3-1989:Q2 的估计因子强度分别为 0.831、0.815、0.756、0.648 和 0.566；1989:Q3-2021:Q4 的估计因子强度分别为 0.888、0.784、0.771、0.654 和 0.576，如括号中所示。每个$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$单元格的深浅表示 λ_{ik}的绝对值。鉴于 $|\lambda_{ik}| \leq 3$ 主要分布在 i 和 k中，我们将 λ_{ik} 在 3 处右删失，以便更清晰地呈现热力图$\widehat{\ }$。

一些有趣的结果如下。(i) 第1个主成分因子不一定是最强的因子，因为后者仅取决于载荷的支撑集，而前者同时取决于（非零）载荷的支撑集和大小。(ii) 在第一个子时期，前两个因子强度较为接近；而在第二个子时期，两者的差距逐渐拉大。其余三个因子强度在两个子时期内相当稳定。(iii) 在后半段时期，许多新的序列加载到第2个主成分因子上，其中大多数属于第6组（价格）；第3个主成分因子也获得了额外影响，主要来自第1、2、3组（NIPA；工业生产；就业与失业），从而使其强度有所增加，不过它对属于第8组（利率）和第10组（家庭资产负债表）的少数序列的影响有所减弱。另一方面，第1个主成分因子在后半段的广泛性有所下降。这些变化表明，从长期来看，对潜在因子的解释可能会随时间发生变化。(iv) 还有一点值得注意：虽然在子时期1中，一些序列不受任何弱因子的影响，例如许多来自第6组的序列，但在子时期2中，它们开始加载到某些因子上。

我们还可以从图4中得到另一个启示：将其与 Giglio 等（2023a）提出的弱因子问题解决方案联系起来。恢复出的稀疏性虽然在一定程度上受到污染，但仍可能为他们基于筛选的方法$\widehat{\ }$提供有价值的信息。具体而言，按照 Giglio 等（2023a）的思路，我们可以剔除满足$\lambda_{ik} = 0$ 的单位 i，以处理弱因子 k；我们的理论表明，$\{i: \lambda_{ik} = 0\} \subseteq \{i: \lambda_{ik}^0 = 0\}$ 的可能性更大。

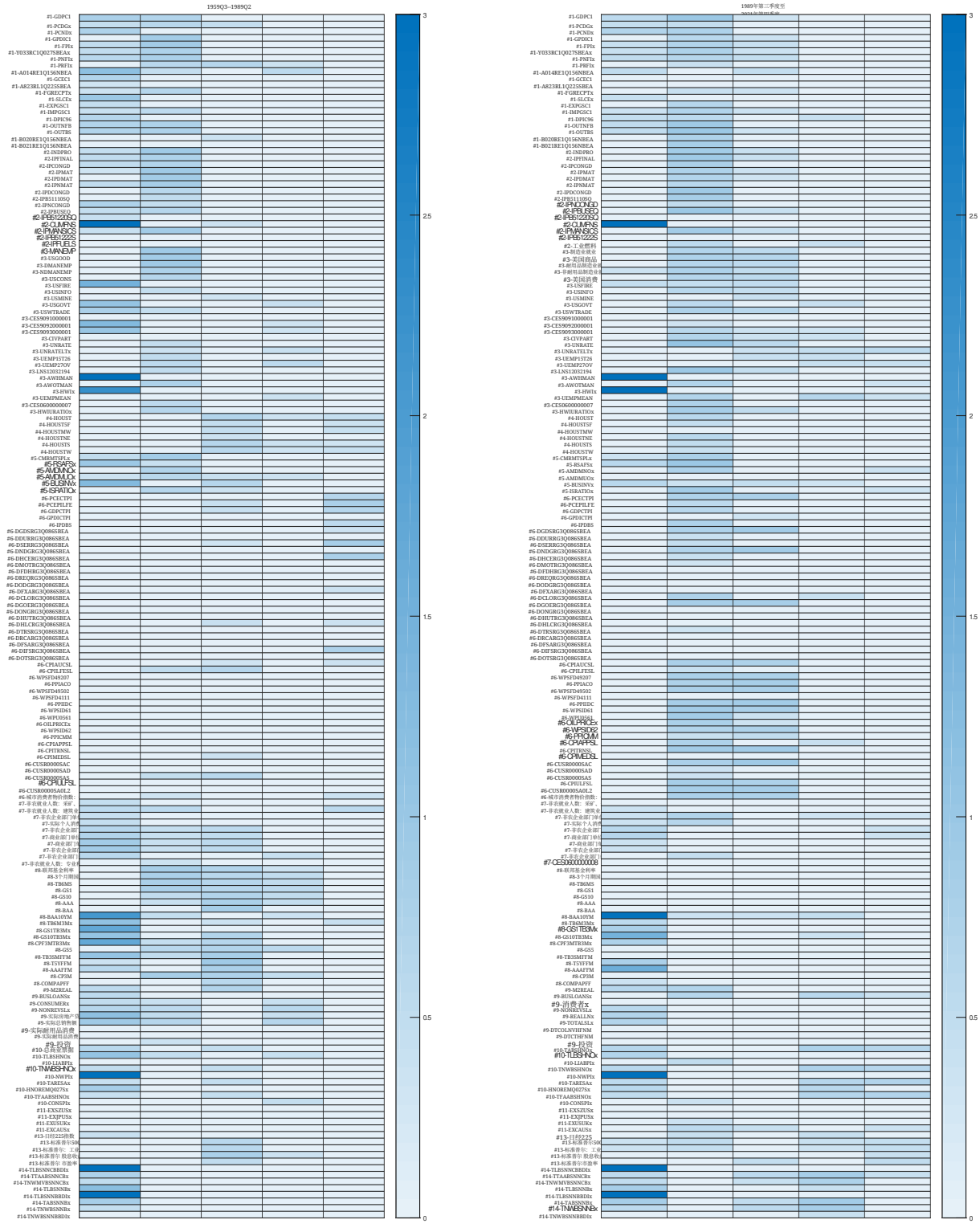

图4：恢复的因子载荷稀疏性热力图

8 结论

本文分析了广为人知的主成分分析方法，并推导出该方法的若干新颖性质，以处理具有稀疏因子载荷的弱潜在因子模型。本文揭示了一个有趣且重要的事实：对于稀疏性诱导的弱因子模型，主成分估计量能够保留估计所得因子载荷的稀疏性。这一事实有助于推导主成分估计量的渐近性质，使我们能够恢复载荷的稀疏性，并估计各因子的强度。此外，本文还研究了弱因子模型中因子数量的确定问题。数值研究证实，我们提出的方法在有限样本下表现良好；对 FRED-QD 数据集的实证应用则表明，该方法有助于检测因子强度、载荷稀疏性及其动态变化。

我们基于主成分分析的弱因子模型估计量属于无监督主成分分析。从概念上讲，可以将监督主成分分析（例如 Huang等人，2022年）应用于弱因子模型，从而获得更有效的估计和推断。我们认为，通过主成分分析进行监督能够更充分地利用可用信息，进一步提升所提估计量的表现，但也会增加额外的复杂性。因此，我们将这一问题留待未来研究。

References

Abadir, K. & J. Magnus (2005) M *atrix Algebra*. Cambridge University P

进展。Ahn, S.C. & A. R. Horenstein (2013) 因子数量的特征值比率检验。《计量经济学》81(3), 1203–1227。Armstrong, T.B., M. Weidner, & A. Zeleneev (2023) 具有交互固定效应的面板数据中的稳健估计与推断。南加州大学工作论文。Ando, T. & J. Bai (2017) 金融时间序列的大规模聚类：一种结合高维预测变量与因子结构的面板数据方法。《美国统计学会会刊》112(519), 1182–1198。Bai, J. (2003) 大维度因子模型的推断理论。《计量经济学》71(1), 135–171。Bai, J. (2009) 具有交互固定效应的面板数据模型。《计量经济学》77(4), 1229–1279。Bai, J. & S. Ng (2002) 确定近似因子模型中的因子数量。《计量经济学》70(1), 191–221。

Fu, Z., L. Su, & X. Wang（2023）时变因子增强向量自回归模型的估计与推断。《商业与经济统计杂志》42(2)，533–547。Giglio, S. & D. Xiu（2021）遗漏因子条件下的资产定价。《政治经济学杂志》129(7)，1947–1990。Giglio, S., D. Xiu, & D. Zhang（2023a）测试资产与弱因子。即将发表于《金融学杂志》。Giglio, S., D. Xiu, & D. Zhang（2023b）因子较弱时的预测。NBER 工作论文。Guo, X., Y. Chen, & C.Y. Tang（2023）潜在因子模型的信息准则：因子广泛性与适应性研究。《计量经济学杂志》233(1)，237–250。Huang, D., F. Jiang, K. Li, G. Tong, & G. Zhou（2022）尺度化主成分分析：一种新的降维方法。《管理科学》68(3)，1678–1695。Jiang, P., Y. Uematsu, & T. Yamagata（2023）重新审视近似因子模型主成分估计量的渐近理论。工作论文，一桥大学。参见 arXiv:2311.00625v1。Kim, S., V. Raponi, & P. Zaffaroni（2024）资产定价中的弱因子检验。工作论文，帝国理工学院商学院。参见 SSRN 4819759。Kristensen, J.T.（2017）具有稀疏载荷的扩散指数。《商业与经济统计杂志》35(3)，434–451。Lettau, M. & M. Pelger（2020）拟合股票收益时间序列与横截面的因子。《金融研究评论》33(5)，2274–2325。Lu, X. & L. Su（2017）潜在面板结构中组数的确定及其在收入与民主问题中的应用。《计量经济学》8，729–760。Ludvigson, S.C. & S. Ng（2009）债券风险溢价中的宏观因子。《金融研究评论》22(12)，5027–5067。Ma, S., W. Lan, L. Su, & C. Tsai（2020）高维资产条件下时变因子模型中的阿尔法检验。《商业与经济统计杂志》38(1)，214–227。Ma, S., O. Linton, & J. Gao（2021）半参数分位数因子模型中的估计与推断。《计量经济学杂志》222(1)，295–323。Ma, S. & L. Su（2018）未知断点数量的大维因子模型估计。《计量经济学杂志》207(1)，1–29。McCracken, M. & S. Ng（2021）。FRED-QD：用于宏观经济研究的季度数据库。《圣路易斯联邦储备银行评论》103(1)，1–44。Onatski, A.（2010）根据特征值的经验分布确定因子数量。《经济学与统计学评论》92(4)，1004–1016。

Onatski, A.（2012）弱影响因子大型因子模型中主成分估计量的渐近性质。《计量经济学杂志》168(2)，244–258。Onatski, A.（2015）模型设定错误的因子模型中平方估计误差的渐近分析。《计量经济学杂志》186(2)，388–406。Pelger, M. & R. Xiong（2022）高维情形下可解释的稀疏近似因子。《商业与经济统计学杂志》40(4)，1642–1664。Pesaran, M.H. & R. Smith（2019）因子强度和定价误差在资产定价模型估计与推断中的作用。CESifo 工作论文第7919号，南加州大学。Rapach, D. & G. Zhou.（2021）稀疏宏观因子。工作论文，圣路易斯华盛顿大学。Stock, J. H. & M.W. Watson（2002）利用扩散指数进行宏观经济预测。《商业与经济统计学杂志》20(2)，147–162。Su, L. & Q. Chen（2013）含交互固定效应的面板数据模型中的同质性检验。《计量经济学理论》29，1079–1135。Uematsu, Y. & T. Yamagata（2023a）稀疏性诱导的弱因子模型的估计。《商业与经济统计学杂志》41(1)，126–139。Uematsu, Y. & T. Yamagata（2023b）稀疏性诱导的弱因子模型中的推断。《商业与经济统计学杂志》41(1)，213–227。Wei, J. & H. Chen（2020）通过两次 K 折交叉验证确定近似因子模型中的因子数量。《经济学快报》191，109149。

《主成分分析能否保留因子载荷的稀疏性? 》在线附录 Ji

e Wei[a], Yonghui Zhang[b]
[a]华中科技大学经济学院，中国[b]中国人民大学经济学院，中国

A 第 3 节主要结果的证明

首先，我们给出若干有用的引理，这些引理将在主要结果的证明中被频繁使用。它们的证明可见附录 D。在证明过程中，我们将在多个地方使用以下事实：$\|B\|_{sp} \leq \|B\|_F \leq \|B\|_{sp}\text{rank}(B)^{1/2}$ 。

引理 A.1 在假设 1–5 下，$\Lambda^{0\prime} e\widetilde{F} = O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2} + N^{\alpha_1-\alpha_r}T + N^{1+\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}\right)$.

~引理 A.2 在假设 1-5 下，$\Xi = V^{-1}QAN^{-1}$ 是一个满秩（分块）下三角矩阵，并且 $\Xi = O_p$(1)。

引理 A.3 在假设 1–5 下，$\frac{1}{NT}\left\|e'\Lambda^0 F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}\right\| = O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}T^{\frac{1}{2}}\right)$.

引理A.4 在假设1-5下，$\frac{1}{NT}ee'\Lambda^0 F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1} = A^{-\frac{1}{2}}O_p(N+T)$。

~引理 A.5 在假设 1-5 下，$r \times r$ 矩阵 $Q \equiv F'F^0/T$ 为满秩 r，其概率趋近于 1。

接下来，我们将给出主成分估计量主要结果的证明。

命题3.1的证明。给定 $X = \Lambda^0 F^{0\prime} + e$，我们得到

$$\frac{1}{NT}X'X = \frac{1}{NT}F^0\Lambda^{0\prime}\Lambda^0 F^{0\prime} + \frac{1}{NT}F^0\Lambda^{0\prime}e + \frac{1}{NT}e'\Lambda^0 F^{0\prime} + \frac{1}{NT}e'e.$$

将两边同时乘以 N/N^{α_r}，

$$\frac{1}{N^{\alpha_r}T}X'X = \frac{1}{N^{\alpha_r}T}F^{0\prime}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0 F^{0\prime} + \frac{1}{N^{\alpha_r}T}F^0\Lambda^{0\prime}e + \frac{1}{N^{\alpha_r}T}e'\Lambda^0 F^{0\prime} + \frac{1}{N^{\alpha_r}T}e'e.$$

注意，等式右侧第二项和第三项的弗罗贝尼乌斯范数为 o_p(1)，因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^{\alpha_r}T}\left\|F^0\Lambda^{0\prime}e\right\| &\leqslant \frac{1}{N^{\alpha_r}T}\left\|F^0\right\|\left\|\Lambda^{0\prime}e\right\| = \frac{1}{N^{\alpha_r}T}O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}\right) = o_p(1).\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{N^{\alpha_r}T}\left\|F^0\Lambda^{0\prime}e\right\|_{sp} = \frac{1}{N^{\alpha_r}T}\left\|e'\Lambda^0 F^{0\prime}\right\|_{sp} = o_p(1).$$

对于第四项,

$$\frac{1}{N^{\alpha_r}T}\left\|e'e\right\|_{sp}=\frac{1}{N^{\alpha_r}T}O_p(N+T)=O_p\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right)=o_p(1).$$

因此，$\frac{1}{N^{\alpha_r}T}X'X$ 的 r 特征值在概率意义下渐近等于$\frac{1}{N^{\alpha_r}T}F^0\Lambda^{0\prime}\Lambda^0F^{0\prime}$的 r 特征值。鉴于矩阵 AB的特征值与BA 的特征值相同， $\frac{1}{N^{\alpha_r}T}X'X$ 的 r 特征值在概率意义下由

$$\left(\frac{1}{N^{\alpha_r}}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\right)\left(\frac{1}{T}F^{0\prime}F^0\right)=\frac{1}{N^{\alpha_r}}A^{1/2}\left(A^{-1/2}\Lambda^0\Lambda^0A^{-1/2}\right)A^{1/2}\left(\frac{1}{T}F^{0\prime}F^0\right).$$

根据假设 1–2， $A^{-1/2}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0A^{-1/2}$和 $T^{-1}F^{0\prime}F^0$均收敛到某个正定矩阵。因此， $\frac{1}{N^{\alpha_r}T}X'X$ 的第 k 个特征值满足

$$\mu_k\left(\frac{1}{N^{\alpha_r}T}X'X\right)\asymp_p N^{-\alpha_r}A_k=N^{-\alpha_r}N^{\alpha_k},\ \text{for } k=1,\cdots,r.$$

因此,

$$\widetilde{V}_k=\mu_k\left(\frac{1}{NT}X'X\right)\asymp_p N^{\alpha_r-1}N^{-\alpha_r}A_k=N^{\alpha_k-1},\ \text{for } k=1,\cdots,r.\ \blacksquare$$

命题 3.2 的证明。我们首先定义

$$\Sigma_{N,\Lambda}=\frac{\Lambda^{0\prime}\Lambda^0}{N},$$

由此可得 $\Sigma_{N,\ \Lambda}(k,k)\ \asymp\ N^{\alpha_k-1}$。此外，很容易看出 $\Sigma_{N,\ \Lambda}(l,k)\ =O\left(N^{\alpha_l\wedge\alpha_k-1}\right)$。回想一下，在证明引理 A.5 时，我们已经证明：(a) H 以~概率 r 满秩，且 (b) $H=O_p(1)$。还要回想一下， $V_k\asymp_p N^{\alpha_k-1}$。因此，~要使 $H=\Sigma_{N,\ \Lambda}Q'V^{-1}$ 满足上述渐近性质 (a) 和 (b)， $r\times r$ 矩阵 Q 必须满足

$$Q(l,k)=O_p\left(N^{\alpha_l-\alpha_k}\right),\ \text{for } 1\le k<l\le r. \tag{A.1}$$

为了解释为什么 (A.1) 必须成立，考虑 $1 \leq k < l \leq r$，于是我们有

$$\begin{aligned} H(k,l) &= \sum_{j=1}^{r} \Sigma_{N,\Lambda}(k,j) Q(l,j) (\widetilde{V}(l,l))^{-1} \\ &\asymp_p \Sigma_{N,\Lambda}(k,k) Q(l,k) N^{1-\alpha_l} \\ &\asymp_p N^{\alpha_k - 1} N^{1-\alpha_l} Q(l,k). \end{aligned}$$

为了使 $H(k,l) = O_p(1)$，必须满足 (A.1)。

这清楚地表明，矩阵 Q 是一个（分块）概率上三角矩阵。具体而言，对于满足 $\alpha_l < \alpha_k$ 的 $1 \leq k < l \leq r$，必有 $Q(l,k) = O_p(N^{\alpha_l - \alpha_k}) = o_p(1)$。此外，由于已由引理 A.5 证明，$Q$ 渐近地也是 r 的满秩矩阵，因此我们还可以得到 $Q(k,k) \asymp_p 1$。同时，整个 $\widetilde{}$ 矩阵 $Q \equiv F'F^0/T = O_p(1)$。因此，$Q$ 是一个非严格的（分块）上三角矩阵。 ∎

命题 3.3 的证明。注意

$$\widetilde{F} - F^0 H = \left(\frac{F^0 \Lambda^{0\prime} e \widetilde{F}}{NT} + \frac{e' \Lambda^0 F^{0\prime} \widetilde{F}}{NT} + \frac{e' e \widetilde{F}}{NT} \right) \widetilde{V}^{-1}.$$

这意味着

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \left\| \widetilde{F} - F^0 H \right\| &\leq \left\{ \left(\frac{\|F^0\| \, \|\widetilde{F}\|}{T} \right) \left(\frac{\|\Lambda^{0\prime} e\|}{\sqrt{T} N} \right) \left\| \widetilde{V}^{-1} \right\| + \frac{\left\| e' \Lambda^0 F^{0\prime} \widetilde{F} \widetilde{V}^{-1} \right\|}{NT\sqrt{T}} + \frac{\left\| e' e \widetilde{F} \right\|}{NT^{3/2}} \left\| \widetilde{V}^{-1} \right\| \right\} \\ &= O_p \left(\frac{\|\Lambda^{0\prime} e\|}{\sqrt{T} N} \left\| \widetilde{V}^{-1} \right\| \right) + O_p \left(\frac{\left\| e' \Lambda^0 F^{0\prime} \widetilde{F} \widetilde{V}^{-1} \right\|}{NT\sqrt{T}} \right) + O_p \left(\frac{\left\| e' e \widetilde{F} \right\|}{NT^{3/2}} \left\| \widetilde{V}^{-1} \right\| \right). \end{aligned}$$

注意 $\frac{1}{\sqrt{T}N} \|\Lambda^{0\prime} e\| = O_p\left(N^{\alpha_1/2 - 1}\right)$. 此外，$\frac{\left\| ee' \widetilde{F} \right\|}{NT^{3/2}} \leq \frac{\|ee'\|_{sp} \|\widetilde{F}\|}{NT^{3/2}} = O_p\left(\frac{1}{N}\right) + O_p(\frac{1}{T})$。结合引理 A.3 和命题3.1，可得

$$\frac{1}{T} \left\| \widetilde{F} - F^0 H \right\|^2 = O_p\left(N^{2(1-\alpha_r)}\right) O_p\left(N^{\alpha_1 - 2} + T^{-2}\right) = O_p\left(N^{\alpha_1 - 2\alpha_r} + N^{2(1-\alpha_r)} T^{-2}\right). \quad ∎$$

命题 3.4 的证明。首先，注意到

$$\widetilde{\Lambda} - \Lambda^0 Q' = \frac{1}{T} e \left(\widetilde{F} - F^0 H \right) + \frac{1}{T} e F^0 H.$$

然后令

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{T}e\left(\widetilde{F}-F^0H\right) \\ &= \left(\frac{1}{NT}ee'\Lambda^0\right)\left(\frac{1}{T}F^{0\prime}\widetilde{F}\right)\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT^2}eF^0\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT^2}ee'e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1} \\ &\equiv L_{11}+L_{12}+L_{13}. \end{aligned}$$

Note

$$L_{11}=\frac{1}{NT}\left(ee'\right)\Lambda^0Q'\widetilde{V}^{-1}=\frac{1}{NT}O_p(N+T)\left(\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}\right)\left(A^{-\frac{1}{2}}N\right)\left(AN^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1}\right).$$

根据假设2, $\left\|\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}\right\|=O(1)$。根据引理 A.2, $AN^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1}=O_p(1)$。因此,

$$\|L_{11}\|\leq\frac{1}{NT}O_p(N+T)O_p\left(A^{-\frac{1}{2}}N\right)=O_p\left(N^{-\alpha_r}+N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}\right).$$

接下来，对于 L_{12}, $L_{12}=\frac{1}{NT^2}(eF^0)$
$\left(\Lambda^{0\prime}eF^0H\right)\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT^2}eF^0\Lambda^{0\prime}e\left(\widetilde{F}-F^0H\right)\widetilde{V}^{-1}$，因此

$$\|L_{12}\|=\frac{1}{NT^2}O_p(\sqrt{NT})O_p\left(\sqrt{N^{\alpha_1}T}\right)O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right)\left[1+O_p\|\widetilde{F}-F^0H\|\right]$$

鉴于根据命题 3.3，有 $\left\|\widetilde{F}-F^0H\right\|=O_p\left(\sqrt{TN^{\alpha_1-2\alpha_r}}+\sqrt{N^{2(1-2\alpha_r)}T^{-1}}\right)$，我们得到

$$\|L_{12}\|=O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r+\frac{1}{2}}T^{-1}+N^{\alpha_1-2\alpha_r+\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right).$$

最后，对于 L_{13},

$$\|L_{13}\|=\frac{1}{NT^2}\|e\|_{sp}^3O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right)=O_p\left(T^{-\frac{3}{2}}N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}+N^{-\alpha_r}\right).$$

给定假设 5, $N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}T^{-\frac{3}{2}}\ll N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}$.此外，很容易看出 $N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}\gg N^{\alpha_1-2\alpha_r+\frac{1}{2}}$.因此可得

$$L_1=O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}+N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}+N^{\alpha_1-2\alpha_r+\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{A.2}$$

与此同时，正如假设3 (vii) 所暗示的，以及正如引理 A.5 中所证明的 (1),

$$\left\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q'\right\|=O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}+N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}+N^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)=O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}+N^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right).$$

因此，我们有 $N^{-1}\left\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0 Q'\right\|^2=O_p(N^{-\alpha_r-1}+T^{-1})$。∎

引理 3.5 的证明。首先，注意到由 $\frac{1}{NT}X'X\widetilde{F}=\widetilde{F}\widetilde{V}$，我们有 $\frac{1}{NT}(\Lambda^0F^{0\prime}+e)'(\Lambda^0F^{0\prime}+\sim\quad\sim e)F=FV$. 也就是说，

$$\widetilde{F}\widetilde{V}=\frac{1}{NT}F^0\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\widetilde{F}+\frac{1}{NT}F^0\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}+\frac{1}{NT}e'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}+\frac{1}{NT}e'e\widetilde{F}.$$

~因此，在上述等式两边乘以 F'/T 可得

$$\widetilde{V}=\frac{1}{T}\widetilde{F}'F^0\frac{1}{N}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\frac{1}{T}F^{0\prime}\widetilde{F}+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'F^{0\prime}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'e'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'e'e\widetilde{F},$$

由此得到

$$\begin{aligned}I_r&=QH+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'F^{0\prime}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'e'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT^2}\widetilde{F}'e'e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}\\&\equiv QH+b_1+b_2+b_3,\ \text{say.}\end{aligned}$$

根据引理 A.1，容易看出

$$\begin{aligned}b_1&=(NT)^{-1}N^{1-\alpha_r}O_p\left(\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\right)\\&=N^{-\alpha_r}T^{-1}O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2}+N^{\alpha_1-\alpha_r}T+N^{1+\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}\right)\\&=O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}T^{-1/2}+N^{\alpha_1-2\alpha_r}+N^{1+\frac{\alpha_1}{2}-2\alpha_r}T^{-1}\right)\\&=O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}T^{-1/2}+N^{\alpha_1-2\alpha_r}\right),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式源于假设 5。对于 b_2.，同样的结果也成立。与此同时，

$$b_3=O_p(1)\frac{1}{NT}\|e'e\|_{sp}\widetilde{V}^{-1}=O_p\left(N^{-1}+T^{-1}\right)O_p\left(N^{1-a_r}\right)=O_p\left(N^{-a_r}+N^{1-a_r}T^{-1}\right).$$

因此可得

$$I_r=QH+O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-a_r}T^{-1/2}+N^{-a_r}+N^{1-a_r}T^{-1}\right)=QH+O_p(\gamma_{NT}),\qquad(A.3)$$

这意味着 $Q=H^{-1}+O_p(\gamma_{NT})$。

其次，注意到 (A.3) 还意味着 $H=Q^{-1}+O_p(\gamma_{NT})\ =H_3+O_p(\gamma_{NT})$。

第三，根据定义，$\widetilde{\Lambda} = \frac{1}{T}\Lambda^0 F^{0\prime}\widetilde{F} + \frac{1}{T}e\widetilde{F}$. 因此，我们有

$$\frac{\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}}{N} = \frac{\Lambda^{0\prime}\Lambda^0}{N}\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T} + \frac{\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}}{NT}.$$

因此，接下来是

$$\left(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\right)^{-1}\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda} = F^{0\prime}\widetilde{F}/T + \left(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\right)^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}/T = F^{0\prime}\widetilde{F}/T + \mathcal{R}_1,$$

其中 $\mathcal{R}_1 \equiv \left(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0\right)^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}/T = (\Lambda^{0\prime}\Lambda^0 A^{-1})^{-1} A^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}/T.$。我们进一步注意到，根据引理 A.1，$A^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}/T = O_p\left(N^{-\alpha_r}T^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\right) = O_p(\gamma_{NT})$。上述结果意味着 $T^{-1}\widetilde{F}'F^0 = \widetilde{\Lambda}'\Lambda^0(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0)^{-1} + O_p(\gamma_{NT})$。再次回顾定义 $Q = T^{-1}\widetilde{F}'F^0$ 和 $H_1 = (\Lambda^{0\prime}\Lambda^0)^{-1}\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}$，结合此前已证明的 $Q = H^{-1} + O_p(\gamma_{NT})$，我们得到 $H_1 = H + O_p(\gamma_{NT})$。

第四，立即注意到 $\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}/N = (\Lambda^{0\prime}\Lambda/N)\left(F^{0\prime}\widetilde{F}/T\right) + \frac{1}{NT}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}$，并且我们将（$\Lambda'\Lambda/N$）$^{-1}$ 右乘到等式两边，利用 $\Lambda'\Lambda/N = V$，得到

$$\begin{aligned} H_4 &\equiv \left(\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\right)\left(\widetilde{\Lambda}'\widetilde{\Lambda}\right)^{-1} \\ &= H + \frac{1}{NT}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\left(\frac{1}{N}\widetilde{\Lambda}'\widetilde{\Lambda}\right)^{-1} \\ &= H + O_p\left(A^{-1}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}/T\right) \\ &= H + O_p\left(\gamma_{NT}\right), \end{aligned}$$

最后一个等号由引理 A.1 得出。

最后，为了处理 H_2，我们再次从定义出发

$$\widetilde{F} = \frac{1}{N}X'\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1} = \frac{1}{N}F^0\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1} + \frac{1}{N}e'\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1}.$$

现在，如果我们在两边左乘 $\frac{1}{T}F^{0\prime}$，就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}F^{0\prime}\widetilde{F} &= \frac{1}{T}F^{0\prime}F^0\left(\frac{1}{N}\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\right)\widetilde{V}^{-1} + \frac{1}{NT}F^{0\prime}e'\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{T}F^{0\prime}F^0\right)\left(\frac{1}{N}\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\right)\widetilde{V}^{-1} + \mathcal{R}_2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &\equiv \frac{1}{NT}F^{0\prime}e'\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q'\right)\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{NT}F^{0\prime}e'\Lambda^0Q'\widetilde{V}^{-1}\\ &= \frac{1}{NT}F^{0\prime}e'\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q'\right)\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{T}F^{0\prime}e'\Lambda^0A^{-1}\left(AN^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1}\right)\\ &= O_p\left(N^{-\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}+N^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right)+O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= O_p\left(N^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\alpha_r}T^{-\frac{1}{2}}+N^{1-\alpha_r}T^{-1}\right)+O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)=O_p\left(\gamma_{NT}\right),\end{aligned}$$

第三个等式由定理 3.4、引理 A.2 和假设3 (v) 得出。因此,

$$\underbrace{\left(F^{0\prime}F^0\right)^{-1}F^{0\prime}\widetilde{F}}_{:=H_2}=\underbrace{\left(\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\right)\left(\widetilde{\Lambda}'\widetilde{\Lambda}\right)^{-1}}_{:=H_4}+O_p\left(\gamma_{NT}\right).$$

综合以上结果，我们证明了 (i) $H=H_3+O_P(\gamma_{NT})$，(ii) $H_1=H+O_p(\gamma_{NT})$，(iii) $H_4=H+O_p(\gamma_{NT})$，(iv) $H_2=H_4+O_p(\gamma_{NT})$。总之，我们得出结论：$H_l=H+O_p(\gamma_{NT})\quad l=1,\cdots,4$.

命题 3.6 的证明。现在我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{NT}\left\|\widetilde{C}-C^0\right\|^2 &= \frac{1}{NT}\left\|\widetilde{\Lambda}\widetilde{F}'-\Lambda^0H'^{-1}H'F^{0\prime}\right\|^2\\ &= \frac{1}{NT}\left\|\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0H'^{-1}+\Lambda^0H'^{-1}\right)\widetilde{F}'-\Lambda^0H'^{-1}H'F^{0\prime}\right\|^2\\ &\le \frac{2}{NT}\left\|\Lambda^0H'^{-1}\left(\widetilde{F}-F^0H\right)'\right\|^2+\frac{2}{NT}\left\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0H'^{-1}\right\|^2\|\widetilde{F}\|^2\\ &= O_p\left(\frac{1}{N}\left\|\Lambda^0\right\|^2\right)O_p\left(\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}-F^0H\right\|^2\right)\\ &\quad +O_p\left(\frac{1}{N}\left\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q'\right\|^2\right)+O_p\left(\left\|Q-H^{-1}\right\|^2\right)\\ &= O_p\left(N^{\alpha_1-1}\right)O_p\left(N^{\alpha_1-2\alpha_r}+N^{2(1-\alpha_r)}T^{-2}\right)\\ &\quad +O_p\left(N^{-\alpha_r-1}+T^{-1}\right)+O_p\left(N^{\alpha_1-2\alpha_r}T^{-1}+N^{2(1-\alpha_r)}T^{-2}+N^{-2\alpha_r}\right)\\ &= O_p\left(N^{2(\alpha_1-\alpha_r)-1}+T^{-1}\right).\end{aligned}$$

倒数第二个等式由命题 3.3、命题 3.4 和引理 3.5 得出。最后一个等式则由假设 5 得出。

定理 3.7 的证明。我们从定义开始，$\widetilde{F}=\frac{1}{N}X'\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1}$.然后代入 $X=\Lambda^0F^{0\prime}+e$，得到 $\widetilde{F}=\frac{1}{N}F^0\Lambda^{0\prime}\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1}+\frac{1}{N}e'\widetilde{\Lambda}\widetilde{V}^{-1}$. 也就是说，$\widetilde{F}_t=H_4'F_t^0+\sim\quad\sim V^{-1}\frac{1}{N}\Lambda'e_t$。因此

$$\widetilde{F}_t-H_4'F_t^0=\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q\right)'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}Q\Lambda^{0\prime}e_t.$$

我们首先考虑上述等式右侧的第一项。

$$\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q\right)'e_t=\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left[\frac{1}{T}e\left(\widetilde{F}-F^0H\right)\right]'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{T}eF^0H\right)'e_t\equiv W_t+Z_t,\text{ say.}$$

对于 W_t，我们可以进一步分解为

$$\begin{aligned}W_t &= \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\frac{eF^0\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right)'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\frac{ee'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right)'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\frac{ee'e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right)'e_t\\ &\equiv W_t^{(a)}+W_t^{(b)}+W_t^{(c)},\text{ say.}\end{aligned}$$

对于 $W_{(a}_{t}=\frac{1}{N^2T^2}\widetilde{V}^{-2}\widetilde{F}'e'\Lambda^0F^{0\prime}e'e_t^{)}$，根据假设3 (vi)，我们首先有 $\frac{1}{NT}F^{0\prime}e'e_t=O_p\Big((NT)^{-1/2}+T^{-1}\Big)$。另外回顾 $\|e'\Lambda^0\|=O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2}\right)$. 因此,

$$\begin{aligned}W_t^{(a)} &= \frac{1}{NT}\widetilde{V}^{-2}O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{NT}}+\frac{1}{T}\right)\\ &= \widetilde{V}^{-2}O_p\left(N^{\frac{\alpha_1-3}{2}}T^{-\frac{1}{2}}+N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}T^{-1}\right).\end{aligned}$$

对于 $W_t^{(b)}$，根据引理A.4,

$$W_t^{(b)}=\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{NT}A^{-\frac{1}{2}}O_p(N+T)O_p(\sqrt{N})=A^{-\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}O_p\left(N^{-\frac{1}{2}}+N^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right).$$

对于 $W_t^{(c)}$,

$$\begin{aligned}W_t^{(c)} &= \widetilde{V}^{-2}\frac{1}{N^2T^2}\left\|\widetilde{F}\right\|\|e\|_{sp}^3\|e_t\|=\widetilde{V}^{-2}\frac{1}{N^2T^2}O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{\frac{3}{2}}+T^{\frac{3}{2}}\right)O_p\left(N^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \widetilde{V}^{-2}O_p\left(N^{-\frac{3}{2}}+T^{-\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}$$

转而考虑 Z_t，鉴于 $(NT)^{-1}F^{0\prime}e'e_t=O_p\left((NT)^{-1/2}+T^{-1}\right)$ 且 $H=O_p(1)$，可得 $Z_t=\widetilde{V}^{-1}O_p\left((NT)^{-1/2}+T^{-1}\right)$. 因此,

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}}Z_t &= O_p\left(N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}\right)O_p\left(\frac{1}{\sqrt{NT}}+\frac{1}{T}\right)\\ &= O_p\left(N^{\frac{1-\alpha_r}{2}}T^{-\frac{1}{2}}\right)+O_p\left(N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}\right)=o_p(1),\end{aligned}$$

根据假设 5 所蕴含的 $N^{1-\alpha_r}T^{-1}\to 0$条件，$N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1}\to 0$并且

$N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}T^{-1} \to 0$假设7 所蕴含的内容。

接下来，我们通过证明 $A^{\frac{1}{2}}W_{(k)t} = o_p(1)$（其中 $k = a$、b、$c.$）来证明 $A^{\frac{1}{2}}W_t = o_p(1)$。首先，

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}}W_t^{(a)} &= O_P\left(A\widetilde{V}^{-2}\right)O_P\left(N^{\frac{\alpha_1-3}{2}}T^{-\frac{1}{2}} + N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}T^{-1}\right) \\ &= O_p\left(N^{2-\frac{3}{2}\alpha_r}\right)O_p\left(N^{\frac{\alpha_1-3}{2}}T^{-\frac{1}{2}} + N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}T^{-1}\right) \\ &= O_p\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_r}T^{-\frac{1}{2}}\right) + O_p\left(N^{1+\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_r}T^{-1}\right) \\ &= O_p\left(N^{\frac{1-\alpha_r}{2}}T^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_r}\right) + O_p\left(N^{\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_r}N^{1-\frac{1}{2}\alpha_r}T^{-1}\right) \\ &= o_p(1), \end{aligned}$$

其中我们用到了 $N^{1-\alpha_r}T^{-1} \to 0$ 和 $N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}T^{-1} \to 0$。其次，

$$A^{\frac{1}{2}}W_t^{(b)} = O_p\left(\widetilde{V}^{-1}\right)O_p\left(N^{-\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right) = O_p\left(N^{\frac{1}{2}-\alpha_r}\right) + O_p\left(N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}T^{-1}\right) = o_p\left(1\right),$$

根据假设7。第三，

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}}W_t^{(c)} &= O_p\left(A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-2}\right)O_p\left(T^{-\frac{3}{2}} + N^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= O_p\left(N^{2-\frac{3}{2}\alpha_r}\right)O_p\left(T^{-\frac{3}{2}} + N^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= O_p\left(N^{2-\frac{3}{2}\alpha_r}T^{-\frac{3}{2}} + N^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\alpha_r}\right) \\ &= O_p\left[\left(N^{\frac{3}{2}-\alpha_r}T^{-1}\right)\left(N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_r}T^{-\frac{1}{2}}\right)\right] + O_p\left(N^{\frac{1}{2}(1-3\alpha_r)}\right) = o_p(1). \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{F}_t - H_4'F_t^0\right) &= A^{\frac{1}{2}}\left(W_t + Z_t\right) + A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}Q\Lambda^{0\prime}e_t \\ &= A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}Q\Lambda^{0\prime}e_t + o_p(1). \end{aligned} \tag{A.4}$$

至于项 $\psi_t \equiv A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}Q\frac{1}{N}\Lambda^{0\prime}e_t = \underbrace{A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}Q\frac{1}{N}A^{\frac{1}{2}}}_{:=\Psi}\left(A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{0\prime}e_t\right)$，根据假设8，我们得到 $\psi_t \xrightarrow{d} \Psi \times N(0, \Gamma_t)$。

此处探究 $r \times r$ 矩阵 Ψ 可能会很有意思。请注意，$\widetilde{V}/N \asymp_p \text{diag}\left(N^{-\frac{\alpha_1}{2}}, \cdots, N^{-\frac{\alpha_r}{2}}\right)$。还要记得，$Q$ 是一个（分块）上三角矩阵（在概率意义下），满足

$$Q(l,k) \asymp_p N^{\alpha_l - \alpha_k} \text{ for } 1 \le k \le l \le r,$$

且对于 $r \geq k > l \geq 1.$， $Q(l,k) = O_p(1)$。由此可得 $\Psi(l,k) \asymp_p N^{-\frac{\alpha_l}{2}} Q(l,k) N^{\frac{\alpha_k}{2}} = N^{\frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}} Q(l,k)$。因此，

$$\Psi(l,k) \begin{cases} \asymp_p N^{\frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}} N^{\alpha_l - \alpha_k} = N^{\frac{\alpha_l - \alpha_k}{2}}, \text{ for } 1 \leq k \leq l \leq r, \\ \asymp_p 1, \text{ for } 1 \leq k = l \leq r, \\ = O_p\left(N^{\frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}}\right), \text{ for } r \geq k > l \geq 1. \end{cases}$$

因此，显然，Ψ 是一个渐近地（分块）对角且满秩的矩阵。

最后，我们得出结论：$A^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{F}_t - H_4' F_t^0\right) \xrightarrow{d} N(0, \Psi^0 \Gamma_t \Psi^{0\prime})$。 ∎

定理 3.8 的证明。回顾 $\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0 = T^{-1} H' F^{0\prime} e_i + T^{-1}\left(\widetilde{F} - F^0 H\right)' e_i$. 至于第二项，

$$\frac{1}{T}\left(\widetilde{F} - F^0 H\right)' e_i = \widetilde{V}^{-1}\left(\frac{1}{T}\widetilde{F}' F^0\right)\frac{\Lambda^{0\prime} e e_i}{NT} + \widetilde{V}^{-1}\widetilde{F}' e' \frac{\Lambda^0 F^{0\prime} e_i}{NT^2} + \widetilde{V}^{-1}\widetilde{F}' e' \frac{e e_i}{NT^2}.$$

The first term on the RHS is

$$\left(\widetilde{V}^{-1} Q A N^{-1}\right)\left(A^{-1}\frac{\Lambda^{0\prime} e e_i}{T}\right) = O_p(1)\left(A^{-1}\frac{\Lambda^{0\prime} e e_i}{T}\right) = O_p\left(N^{-\alpha_r} + N^{-\alpha_r/2} T^{-1/2}\right),$$

其中，第一个等式由引理 A.2 得出，第二个等式则由假设2和假设3(iii)得出。因此，我们有

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{T}\left(\widetilde{F} - F^0 H\right)' e_i\right\| &= O_p\left(N^{-\alpha_r} + N^{-\alpha_r/2} T^{-1/2}\right) + O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right) O_p\left(\sqrt{T}\right) O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}\right) O_p\left(\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &\quad + O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right) O_p\left(\sqrt{T}\right) O_p\left(\frac{N+T}{NT}\right)\frac{1}{T} O_p\left(\sqrt{T}\right) \\ &= O_p\left(N^{-\alpha_r} + N^{-\alpha_r/2} T^{-1/2}\right) + O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_r} T^{-1}\right) + O_p\left(N^{-\alpha_r} + N^{1-\alpha_r} T^{-1}\right). \end{aligned}$$

结合假设 8，我们得到 $\sqrt{T}\left(\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0\right) = H' T^{-1/2} \sum_{t=1}^T F_t^0 e_{it} + o_p(1)$。根据假设 6.(ii) 以及已证明的结果 $H' = (Q')^{-1} + o_p(1)$，我们得出 $\sqrt{T}\left(\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0\right) \xrightarrow{d} N(0, Q'^{-1}\Phi_i Q^{-1})$。 ∎

定理 3.9 的证明。根据 C_{it}的定义，我们有如下分解：

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_{it} - C_{it}^0 &= \left(\widetilde{F}_t - H' F_t^0\right)' H^{-1}\lambda_i^0 + F_t^{0\prime} H\left(\widetilde{\lambda}_i - H^{-1}\lambda_i^0\right) + \left(\widetilde{F}_t - H' F_t^0\right)'\left(\widetilde{\lambda}_i - H^{-1}\lambda_i^0\right) \\ &\equiv a_{it} + b_{it} + \varphi_{it}, \text{ say.} \end{aligned}$$

对于 a_{it}，定义 $d_t \equiv N^{-1}\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0 Q'\right)' e_t$，于是

$$a_{it}=\left(\widetilde{V}^{-1}Q\frac{\Lambda^{0\prime}e_t}{N}\right)' H^{-1}\lambda_i^0+\left(\widetilde{V}^{-1}d_t\right)' H^{-1}\lambda_i^0=\frac{e_t'\Lambda^0}{N}Q'\widetilde{V}^{-1}H^{-1}\lambda_i^0+\left(\widetilde{V}^{-1}d_t\right)' H^{-1}\lambda_i^0.$$

注意到 $Q'\widetilde{V}^{-1}H^{-1}=Q'\widetilde{V}^{-1}\widetilde{V}(Q')^{-1}(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0/N)^{-1}=\left(\frac{\Lambda^{0'}\Lambda^0}{N}\right)^{-1}$.因此,

$$\begin{aligned} a_{it} &= \frac{e_t'\Lambda^0}{N}\left(\Lambda^{0\prime}\Lambda^0/N\right)^{-1}\lambda_i^0+\left(\widetilde{V}^{-1}d_t\right)' H^{-1}\lambda_i^0 \\ &= \lambda_i^{0\prime}A^{-1/2}\left(A^{-1/2}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0A^{-1/2}\right)^{-1}\left(A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{0\prime}e_t\right)+\lambda_i^{0\prime}H'^{-1}\widetilde{V}^{-1}d_t. \end{aligned}$$

考虑

$$N^{\frac{\alpha_r}{2}}a_{it}=\lambda_i^{0\prime}\left(N^{\frac{\alpha_r}{2}}A^{-1/2}\right)\left(A^{-1/2}\Lambda^{0\prime}\Lambda^0A^{-1/2}\right)^{-1}\left(A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{0\prime}e_t\right)+\lambda_i^{0\prime}H'^{-1}N^{\frac{\alpha_r}{2}}\widetilde{V}^{-1}d_{t.}$$

注意到 $N^{\frac{\alpha_r}{2}}A^{-1/2}\to S^\dagger\equiv \mathrm{diag}(0,\underbrace{\ldots,0,1}_{r-r_G}\underbrace{\ldots,1}_{r_G})$。还要注意,

$$\lambda_i^{0\prime}H'^{-1}N^{\frac{\alpha_r}{2}}\widetilde{V}^{-1}d_t\le\left\|\lambda_i^{0\prime}H'^{-1}\right\|N^{1-\frac{\alpha_r}{2}}\left\|d_t\right\|=o_p(1),$$

其中，最后一个等号是由于 $\widetilde{V}^{-1}d_t=W_t+Z_t$，且 $A^{1/2}(W_t+Z_t)=o_p(1)$；在证明 3.7 时已按 (A.4) 证明了这一点。因此可得 $N^{\frac{\alpha_r}{2}}a_{it}\xrightarrow{d}N\left(0,\lambda_i^{0\prime}S^\dagger\Sigma_\Lambda^{*-1}\Gamma_t\Sigma_\Lambda^{*-1}S^\dagger\lambda_i^0\right)$.对于 b_{it},

$$\begin{aligned} b_{it} &= F_t^{0\prime}H\left(\widetilde{\lambda}_i-H^{-1}\lambda_i^0\right) \\ &= F_t^{0\prime}H\left(\widetilde{\lambda}_i-Q\lambda_i^0\right)+F_t^{0\prime}H\left(Q-H^{-1}\right)\lambda_i^0 \\ &= F_t^{0\prime}H\frac{1}{T}H'F^{0\prime}e_i+F_t^{0\prime}H\frac{1}{T}\left(\widetilde{F}-F^0H\right)' e_i+F_t^{0\prime}H\left(Q-H^{-1}\right)\lambda_i^0 \\ &\equiv F_t^{0\prime}HH'\frac{1}{T}F^{0\prime}e_i+\nu_{it}+\zeta_{it},\ \text{say.} \end{aligned}$$

鉴于我们已证明 (a) $\sqrt{T}\left\|\frac{1}{T}\left(\widetilde{F}-F^0H\right)' e_i\right\|=o_p(1)$，(b) $\|Q-H^{-1}\|=O_p(\gamma_{NT})$ =

$o_p\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)$，和 (c)

$$\begin{aligned} HH^{'} &= (H-H_3+H_3)(H-H_2+H_2)' \\ &= H_3H_2' + H_3(H-H_2)' + (H-H_3)H_2' + (H-H_3)(H-H_2)' \\ &= \left(\frac{\widetilde{F}'F^0}{T}\right)^{-1}\frac{\widetilde{F}'F^0}{T}\left(\frac{F^{0\prime}F^0}{T}\right)^{-1} + O_p(\gamma_{NT}) \\ &= \Sigma_F^{-1} + O_p(\gamma_{NT}) = \Sigma_F^{-1} + o_p\left(T^{-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

由此可得 $\sqrt{T}b_{it} = F_t^{0\prime}\Sigma_F^{-1}\left(T^{-1/2}F^{0\prime}e_i\right) + o_p(1) \xrightarrow{d} N\left(0, F_t^{0\prime}\Sigma_F^{-1}\Phi_i\Sigma_F^{-1}F_t^0\right)$.

φ_{it} 的第三项很容易处理，因为根据引理 3.5、定理 3.7 和定理 3.8，显然有 $\varphi_{it} = o_p(a_{it})$ 和 $\varphi_{it} = o_p(b_{it})$。因此，对于 C_{it} 的渐近分布而言， φ_{it} 相对~可以忽略。

最后，在对 i 和 t 的弱依赖假设下， $N^{\frac{\alpha_r}{2}}a_{it}$ 和 $\sqrt{T}b_{it}$ 渐近地独立。因此，通过类似于证明 Bai（2003）定理 3 的论证，我们得出 that

$$\frac{\widetilde{C}_{it} - C_{it}^0}{\sqrt{N^{-\alpha_r}V_{it} + T^{-1}U_{it}}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中 $V_{it} = \lambda_i^{0\prime}S^{\dagger}\Sigma_{\Lambda}^{*-1}\Gamma_t\Sigma_{\Lambda}^{*-1}S^{\dagger}\lambda_i^0$ 和 $U_{it} = F_t^{0\prime}\Sigma_F^{-1}\Phi_i\Sigma_F^{-1}F_t^0$. ∎

~定理 3.10 的证明。(1) 我们首先证明 λ_i的一致收敛速率。回顾一下

$$\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0 = H'\frac{1}{T}F^{0\prime}e_i + \frac{1}{T}\left(\widetilde{F} - F^0H\right)'e_i$$

至于第二项,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\left(\widetilde{F} - F^0H\right)'e_i &= \widetilde{V}^{-1}\left(\frac{1}{T}\widetilde{F}'F^0\right)\frac{\Lambda^{0\prime}ee_i}{NT} + \widetilde{V}^{-1}\widetilde{F}'\frac{e'\Lambda^0F^{0\prime}e_i}{NT^2} + \widetilde{V}^{-1}\frac{\widetilde{F}'e'ee_i}{NT^2} \\ &\equiv \varkappa_{1i} + \varkappa_{2i} + \varkappa_{3i}. \end{aligned}$$

对于 $\varkappa_{1i}$,

$$\begin{aligned} \varkappa_{1i} &= \widetilde{V}^{-1}\left(\frac{1}{T}\widetilde{F}'F^0\right)\frac{1}{NT}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_j^0e_{jt}e_{it} \\ &= \widetilde{V}^{-1}\frac{\widetilde{F}'F^0}{T}\frac{1}{NT}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_j^0\left[e_{jt}e_{it} - E(e_{jt}e_{it})\right] + \widetilde{V}^{-1}\frac{\widetilde{F}'F^0}{T}\frac{1}{NT}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_j^0E(e_{jt}e_{it}) \\ &\equiv \varkappa_{1i,a} + \varkappa_{1i,b}, \text{ say.} \end{aligned}$$

假设 5 意味着，对于 $k = 1, ..., r$，有 $(\ln N)^{\frac{2}{\gamma_2}-1} = o(N^{\alpha_k}T)$，因此根据 Fan 等人（2011）的引理 A.3，存在一个 $C > 0$，使得

$$P\left(\max_i \left|\frac{1}{N^{\alpha_k}T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_{jk}^0\left[e_{jt}e_{it} - E\left(e_{jt}e_{it}\right)\right]\right| > C\sqrt{\frac{\ln N}{N^{\alpha_k}T}}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

现在定义 $A =$diag（$N^{1-a_1}, ..., N^{1-a_r}$），然后

$$\varkappa_{1i,a} = \widetilde{V}^{-1}Q\widetilde{A}^{-1}A^{-1}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_j^0\left[e_{jt}e_{it} - E\left(e_{jt}e_{it}\right)\right].$$

对于 $\Xi = V^{-1}QA^{-1}$，根据引理 A.2，Ξ 是一个满秩（分块）下三角矩阵。由此可得，对于 $r \times 1$ 向量 $\varkappa_{1i,\ a}$，$\max_i |\varkappa_{1i,\ a}(k)| = O_p\left(\sqrt{\ln\frac{N}{N^{\alpha_k}T}}\right)$对于 $k = 1, ..., r$.类似地，我们有

$$\varkappa_{1i,b} = \widetilde{V}^{-1}Q\widetilde{A}^{-1}A^{-1}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\lambda_j^0\tau_{ij,t},$$

并且对于 $k = 1, ..., r$，由假设3 (iii) 可知，$\max_i |\varkappa_{1i,b}(k)| = O_p(N^{-\alpha_k})$。因此，

$$\max_i |\varkappa_{1i}(k)| = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N^{\alpha_k}T}} + N^{-\alpha_k}\right).$$

接下来对于 $\varkappa_{2i}$,

$$\|\varkappa_{2i}\| = O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right)O_p(\sqrt{T})O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}\right)\frac{1}{T}\left\|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}F_t^0e_{it}\right\|.$$

根据假设 9，存在一个 $C_1 > 0$，使得

$$P\left(\max_i\left\|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}F_t^0e_{it}\right\| > C_1\sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

根据 Fan 等人（2011）的引理B.1。因此,

$$\max_i ||\varkappa_{2i}\| = O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}T^{-1}\sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right).$$

第三，对于 $\varkappa_{3i}$,

$$\begin{aligned}\|\varkappa_{3i}\| &= O_p\left(N^{1-\alpha_r}\right) O_p(\sqrt{T}) O_P\left(\frac{N+T}{NT}\right) \times \frac{1}{T^{1/2}}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_{it}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O_P\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right) \times \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[e_{it}^2 - E\left(e_{it}^2\right)\right] + E\left(e_{it}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= O_P\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right)\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E\left(e_{it}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ O_P\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right) \times \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[e_{it}^2 - E\left(e_{it}^2\right)\right]\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

现在，给定 $\max_i E(e_{it}^2) < \infty$ and

$$P\left(\max_i \left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[e_{it}^2 - E\left(e_{it}^2\right)\right]\right| > \sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{A.5}$$

根据 Fan 等人（2011）的引理 A.3，我们得到

$$\begin{aligned}\max_i ||\varkappa_{3i}\| &= O_p\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right) + O_p\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right) O_p\left(T^{-\frac{1}{4}}(\ln N)^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= O_p\left(N^{1-\alpha_r}T^{-1}+N^{-\alpha_r}\right).\end{aligned}$$

综合以上结果，并根据先前证明的结果 $\max_i \|F^{0\prime}e_i/T\| = O_p\left(\sqrt{T^{-1}\ln\ N}\right)$,~，可得，对于 $\varkappa_i := \lambda_i - Q\lambda_i^0$,

$$\max_i ||\varkappa_i\| = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right),$$

由假设 8 隐含的 $\sqrt{T}N^{-\alpha_k} \to 0$。

~(2) 接下来，我们证明 F_t 的一致收敛速率。由F_t的线性展开,

$$\widetilde{F}_t - H_4' F_t^0 = \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\widetilde{\Lambda} - \Lambda^0 Q'\right)e_t + \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}Q\Lambda^0 e_t.$$

回顾一下，在证明定理 3.7 时，我们定义了 W_t 和 Z_t，使得 ，

$$\begin{aligned}\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q\right)'e_t &= \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left[\frac{1}{T}e\left(\widetilde{F}-F^0H\right)\right]'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{T}eF^0H\right)'e_t \\ &\equiv W_t+Z_t.\end{aligned}$$

另外还记得，

$$\begin{aligned}W_t &= \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left[\frac{eF^0\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right]'e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left[\frac{ee'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right]e_t+\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left[\frac{ee'e\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}}{NT^2}\right]'e_t \\ &\equiv W_t^{(a)}+W_t^{(b)}+W_t^{(c)}.\end{aligned}$$

我们的目的是证明下文中的 $\max_t A^{1/2}W_t=o_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$ 和 $\max_t A^{1/2}Z_t=o_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$。为此，我们首先研究

$$\frac{1}{NT}F^{0\prime}e'e_t=\frac{1}{NT}\sum_{s=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left[F_s^0e_{is}e_{it}-E\left(F_s^0e_{is}e_{it}\right)\right]+\frac{1}{NT}\sum_{s=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}E\left(F_s^0e_{is}e_{it}\right)\equiv d_{t,2a}+d_{t,2b}.$$

对于项 $F_s^0e_{is}e_{it}$，根据 Fan 等人（2011）的引理 A.2，在给定假设 9 的情况下，它满足指数尾部条件 $\frac{2s_1s_3}{3s_1+9s_3}$，同时还满足参数为 s_2 的强混合条件。因此，我们可以应用 Merlevede 等人（2011）的定理 1 来证明

$$\max_t\|d_{t,2a}\|=O_p\left(\sqrt{\frac{\ln T}{NT}}\right).$$

同时，由假设3 (vi)，$\max_t\|d_{t,2b}\|=O_p(T^{-1})$。因此 $\max_t\|F^{0\prime}e'e_t/(NT)\|=O_p\left(\sqrt{\ln\ T/(NT)+T^{-1}}\right)$.同时，鉴于 $\max_i E(e_{it}^2)<\infty$ 且 (A.5)，可得 $N^{-1/2}\max_t\|e_t\|=O_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$.接着，沿用定理 3.7 证明中的相同论证，只需分别将 $\|F^{0\prime}e'e_t/(NT)\|=O_p\left((NT)^{-1/2}+T^{-1}\right)$ 和 $N^{-1/2}\|e_t\|=O_p(1)$ 替换为 $\max_t\|F^{0\prime}e'e_t/(NT)\|=O_p\left(\sqrt{\ln\ T/(NT)+T^{-1}}\right)$和 $N^{-1/2}\max_t\|e_t\|=O_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$，即可验证 $\max_t A^{1/2}W_t=o_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$ 和 $\max_t A^{1/2}Z_t=o_p\left(\sqrt{\ln\ T}\right)$.这意味着，对于 $r\times1$向量

$$\vartheta_t\equiv\widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}\left(\widetilde{\Lambda}-\Lambda^0Q'\right)e_t,$$

我们有 $\max_t |\vartheta_t(k)| = O_p\left(N^{-\frac{\alpha_k}{2}}\sqrt{\ln T}\right)$.

最后，对于 $r \times 1$ 向量 $\pi_t \equiv \widetilde{V}^{-1}\frac{1}{N}Q\Lambda^0 e_t$，我们有

$$A^{\frac{1}{2}}\pi_t = A^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^{-1}Q\frac{1}{N}A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^0 e_t\right) = \Psi\left(A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{0\prime}e_t\right).$$

在证明定理 3.7 时，我们已证明 $r \times r$ 矩阵 Ψ 渐近地为一个（分块）对角矩阵；同时，我们可以证明

$$\max_t \left\|A^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{0\prime}e_t\right\| = O_p\left(\sqrt{\ln T}\right)$$

利用指数不等式。因此，对于 $r \times 1$ 向量 π_t，可得

$$\max_t |\pi_t(k)| = O_p\left(A_{kk}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ln T}\right) = O_p\left(N^{-\frac{\alpha_k}{2}}\sqrt{\ln T}\right).$$

因此，对于 $F_t^* = H_4' F_t^0$，有 $\max_t \left|\widetilde{F}_{t,\ k} - F_{t,\ k}^*\right| = O_P\left(N^{-\frac{\alpha_k}{2}}\sqrt{\ln T}\right)$。

(3) 最后得到 C_{it}的一致收敛结果。这很容易，因为

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_{it} - C_{it}^0 &= \widetilde{\lambda}_i'\widetilde{F}_t - \lambda_i^{0\prime}F_t^0 = \widetilde{\lambda}_i'\widetilde{F}_t - \left(H^{-1}\lambda_i^0\right)'H'F_t^0 \\ &= \left(\widetilde{\lambda}_i - H^{-1}\lambda_i^0\right)'H'F_t^0 + \left(H^{-1}\lambda_i^0\right)'\left(\widetilde{F}_t - H'F_t^0\right) + \left(\widetilde{\lambda}_i - H'\lambda_i^0\right)'\left(\widetilde{F}_t - H'F_t^0\right) \\ &\equiv \Delta_{1,it} + \Delta_{2,it} + \Delta_{3,it}, \text{ say.}\end{aligned}$$

鉴于 (a)

$$\begin{aligned}\max_i \left\|\widetilde{\lambda}_i - H^{-1}\lambda_i^0\right\| &\leqq \max_i \left\|\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0\right\| + \left\|Q - H^{-1}\right\| \max_i \left\|\lambda_i^0\right\| \\ &= O_p\left(\sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right) + O_p\left(\gamma_{NT}\right) = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln N}{T}}\right),\end{aligned}$$

（b）根据针对 F_t^0 的指数不等式，$\max_t \|H'F_t^0\| = O_p\left((\ln T)^{s_3^{-1}}\right)$，以及（c）$\max_t \left\|\widetilde{F}_t - H'F_t^0\right\| = O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}\sqrt{\ln T}\right)$，可得

$$\max_{i,t}\left|\widetilde{C}_{it} - C_{it}^0\right| = O_p\left(\sqrt{\frac{\ln N}{T}}(\log T)^{\frac{1}{s_3}} + N^{-\frac{\alpha_r}{2}}\sqrt{\ln T}\right). \quad \blacksquare$$

B 第4节主要结果的证明

命题4.1的证明。我们将合并（i）和（ii）的证明。回顾一下， $\lambda_i^* = Q\lambda_i^0$. 首先，定义

$$\mathcal{L}_k^*(c) = \{i : |\lambda_{ik}^*| > c\}.$$

我们首先研究 $|\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,\ NT})\ \triangle \mathcal{L}_k^0|$，以便正式描述因子 k.的稀疏性

令 $\zeta = \min_{1\le k\le G-1}\left(\alpha_{[k]} - \alpha_{[k+1]}\right)$，即不同因子强度之间的最小差异。我们考虑以下 3 种情形。证明过程中陈述的结果均隐含地以概率趋近于 1 成立。

情形 (a)： $1 \notin \omega(k)$ 且 $r \notin \omega(k)$。那么

$$\lambda_{ik}^* = \sum_{l\le \min\omega(k)-1} Q(k,l)\lambda_{il}^0 + \sum_{l\in\omega(k)} Q(k,l)\lambda_{il}^0 + \sum_{l\ge \max\omega(k)+1} Q(k,l)\lambda_{il}^0 \tag{B.1}$$

$$= S_{ik}^\dagger(a) + S_{ik}^\dagger(b) + S_{ik}^\dagger(c). \tag{B.2}$$

显然， $S_{ik}^\dagger(a)$ 表示相对较强因子传递给 λ_{ik}^* 的影响，而 $S_{ik}^\dagger(c)$ 表示来自相对较弱因子的影响。此外， $S_{ik}^\dagger(b)$ 表示来自因子 k 本身以及（若存在）与其强度相同的因子的影响。一个有用的事实是，根据命题 3.2,

$$S_{ik}^\dagger(a) = O_p(\zeta) = o_p\left(c_{\lambda,NT}\right),\ \text{uniformly over } i. \tag{B.3}$$

接下来，我们考察以下定义的两个集合的大小

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_k^a &= \left\{i : i\in\mathcal{L}_k^0,\ i\notin\mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right)\right\},\\ \mathcal{T}_k^b &= \left\{i : i\notin\mathcal{L}_k^0,\ i\in\mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right)\right\},\end{aligned}$$

根据下面两个子情形。

- 情形 (a1)： α_k 在 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$中是唯一的。因此，我们可以稍微简化 λ_{ik}^* a y

$$\lambda_{ik}^* = S_{ik}^\dagger(a) + Q(k,k)\lambda_{ik}^0 + S_{ik}^\dagger(c).$$

首先，对于 $i\in\mathcal{L}_k^0$，存在一个常数$\underline{\lambda}_k > 0$，使得 $|\lambda_{ik}^0| > \underline{\lambda}_k$，这是由假设2得出的。此外， $Q(k,k) \neq 0$ 可由 Q.的满秩和上三角矩阵性质推出。因此，

$$\left|\left\{i : i\in\mathcal{L}_k^0,\ \text{and } Q(k,k)\lambda_{ik}^0 > c_{\lambda,NT}\right\}\right| = \left|\mathcal{L}_k^0\right|. \tag{B.4}$$

至于 $S_i^\dagger\ {}_k(c) = \sum_{l\ge\text{最大值}\,\omega(k)+1} Q(k,l)\lambda_{il}^0$，注意，对于 $l \ge \max\ \omega(k)\ + 1$，我们有

$\|\Lambda_{\cdot l}^0\|_0 \ll N^{\alpha_k}$. 因此，随着概率趋近于 1,

$$\sum_{i\in\mathcal{L}_k^0} \mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^\dagger(c)\right| > c_{\lambda,NT}\right] \leq \sum_{i\in\mathcal{L}_k^0} \mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^\dagger(c)\right| > 0\right] = o_p\left(N^{\alpha_k}\right). \tag{B.5}$$

结合 (B.3) 和 (B.5)，可得

$$\left|\mathcal{T}_k^a\right| = o_p\left(N^{\alpha_k}\right).$$

其次，对于 $i \notin \mathcal{L}_k^0$，由此可得 $S_{ik}^\dagger(b) = 0$.

$$\left|\mathcal{T}_k^b\right| = o_p\left(N^{\alpha_k}\right).$$

因此可得

$$\left|\mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right) \triangle \mathcal{L}_k^0\right| = o_p\left(N^{\alpha_k}\right), \text{ if } \alpha_k \text{ is unique;} \tag{B.6}$$

• 情形 (a2)： α_k 在 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ 中并非唯一。与情形 (a1) 的差异仅在于 (B.2) 中定义的 $S_{ik}^\dagger(b)$。具体而言，对于 $i \in \mathcal{L}_k^0$，我们必有，以概率趋近于 1,

$$\left|\{i : i \in \mathcal{L}_k^0, \text{ and } \left|S_{ik}^\dagger(b)\right| > c_{\lambda,NT}\}\right| = \left|\{i : i \in \mathcal{L}_k^0, \text{ and } \left|S_{ik}^\dagger(b)\right| > 0\}\right| \asymp \left|\mathcal{L}_k^0\right|. \tag{B.7}$$

否则，这将违反我们在定义 2.1 中对 Λ^0 是具有 $R^* = I_r$ 的最稀疏表示的定义。因此,

$$\left|\mathcal{T}_k^a\right| = o_p\left(N^{\alpha_k}\right).$$

对于 $i \notin \mathcal{L}_k^0$，若 $\frac{\left|\cup_{k'\in\omega(k)}\mathcal{L}_{k'}^0 \setminus \mathcal{L}_k^0\right|}{N^{\alpha_k}} = o(1)$ 成立，则有 $\left(\bigcup_{k'\in\omega}^{(k)} \mathcal{L}_{k'}^0\right) \setminus \mathcal{L}_k^0 \ll N^{\alpha_k} = |\mathcal{L}_k^0|$，由此可得，以概率趋近于 1,

$$\left|\{i : i \notin \mathcal{L}_k^0, \text{ and } \left|S_{ik}^\dagger(b)\right| > c_{\lambda,NT}\}\right| = \left|\{i : i \notin \mathcal{L}_k^0, \text{ and } \left|S_{ik}^\dagger(b)\right| > 0\}\right| \ll \left|\mathcal{L}_k^0\right|. \tag{B.8}$$

因此,

$$\left|\mathcal{T}_k^b\right| = o_p\left(N^{\alpha_k}\right).$$

另一方面，如果 $\frac{\left|\cup_{k'\in\omega(k)}\mathcal{L}_{k'}^0 \setminus \mathcal{L}_k^0\right|}{N^{\alpha_k}} = o(1)$ 不成立，那么结果就会变成 (B.8)

$$\left|\{i : i \notin \mathcal{L}_k^0, \text{ and } \left|S_{ik}^\dagger(b)\right| > c_{\lambda,NT}\}\right| \asymp \left|\mathcal{L}_k^0\right|. \tag{B.9}$$

因此，

$$\left|\mathcal{T}_k^b\right| = O_p\left(N^{\alpha_k}\right).$$

综上所述，根据定义，$\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,NT}) \triangle \mathcal{L}_k^0 = \mathcal{T}_k^a \cup \mathcal{T}_k^b$，我们有

$$\left|\mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right) \triangle \mathcal{L}_k^0\right| = \begin{cases} o_p\left(N^{\alpha_k}\right), \text{ if } \alpha_k \text{ is not unique and } \frac{\left|\cup_{k' \in \omega(k)} \mathcal{L}_{k'}^0 \backslash \mathcal{L}_k^0\right|}{N^{\alpha_k}} = o(1); \\ O_p\left(N^{\alpha_k}\right), \text{ if } \alpha_k \text{ is not unique and } \frac{\left|\cup_{k' \in \omega(k)} \mathcal{L}_{k'}^0 \backslash \mathcal{L}_k^0\right|}{N^{\alpha_k}} \neq o(1). \end{cases} \tag{B.10}$$

情形（b）：$1 \in \omega(k)$，即因子 k 是最强的。由此可得 $S_{ik}^{\dagger}(a) = 0$，且 $\lambda_{ik}^* = S_{ik}^{\dagger}(b) + S_{ik}^{\dagger}(c)$。与情形（a）相同的证明表明，（B.10）仍然成立。

情形 (c)：$r \in \omega(k)$，即因子 k 是最弱的。于是可得 $S_{ik}^{\dagger}(c) = 0$，且 $\lambda_{ik}^* = S_{ik}^{\dagger}(a) + S_{ik}^{\dagger}(b)$。情形 (a) 中的相同证明表明 (B.10) 仍然成立。

只剩下界定 $\left|\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,\ NT}) \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k\right|$。为此，我们进一步定义两个集合。

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k^a &= \left\{i : i \in \mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right), i \notin \widehat{\mathcal{L}}_k\right\} \text{ and} \\ \mathcal{W}_k^b &= \left\{i : i \notin \mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right), i \in \widehat{\mathcal{L}}_k\right\}. \end{aligned}$$

还要注意，根据（B.1），对 i，我们有一致地：要么（i）λ_{ik}^* 有正的下界，要么（ii）$|\lambda_{ik}^*| = O_p(\zeta) = o_p(c_{\lambda,\ NT})$。

定义 $\widetilde{\mathcal{W}}_k^a = \left\{i :\ i \in \mathcal{L}_k^*(2c_{\lambda,NT}),\ \ i \notin \widehat{\mathcal{L}}_k\right\}$，由此可得 $\left|\mathcal{W}_k^a \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^a\right| = \left|\mathcal{W}_k^a \backslash \widetilde{\mathcal{W}}_k^a\right| = o_p(1)$。与此同时，根据定理 3.10 (i) 中的 $\sup_i \left|\widetilde{\lambda}_{ik} - \lambda_{ik}^*\right| = O_p\left(\sqrt{(\ln\ N)/T}\right) = o_p(c_{\lambda,NT})$，还有 $\left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^a\right| = o_p(1)$。因此，$\left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \mathcal{W}_k^a\right| \leq \left|\mathcal{W}_k^a \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^a\right| + \left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^a\right| = o_p(1)$。

类似地，定义 $\widetilde{\mathcal{W}}_k^b = \left\{i :\ \ i \notin \mathcal{L}_k^*(0.5c_{\lambda,\ NT}) \quad i \in \widehat{\mathcal{L}}_k\right\}$，于是可得 $\left|\mathcal{W}_k^b \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^b\right| = \left|\mathcal{W}_k^b \backslash \widetilde{\mathcal{W}}_k^b\right| = o_p(1)$。与此同时，根据定理 3.10 (i) 中的 $\sup_i \left|\widetilde{\lambda}_{ik} - \lambda_{ik}^*\right| = O_p\left(\sqrt{(\ln\ N)/T}\right) = o_p(c_{\lambda,\ NT})$，还有 $\left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^b\right| = o_p(1)$ 成立。因此，$\left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \mathcal{W}_k^b\right| \leq \left|\mathcal{W}_k^b \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^b\right| + \left|\widehat{\mathcal{L}}_k \triangle \widetilde{\mathcal{W}}_k^b\right| = o_p(1)$。

根据 $\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,\ NT}) \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k = \mathcal{W}_k^a \cup \mathcal{W}_k^b$ 的定义，我们有

$$\left|\mathcal{L}_k^*\left(c_{\lambda,NT}\right) \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k\right| = o_p(1). \tag{B.11}$$

最后，由于（B.6）、（B.10）、（B.11），以及 $\left|\mathcal{L}_k^0 \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k\right| \leq |\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,NT}) \triangle \mathcal{L}_k^0| + \left|\mathcal{L}_k^*(c_{\lambda,NT}) \triangle \widehat{\mathcal{L}}_k\right|$ 这一事实，(i) 和 (ii) 的证明完毕。 ∎

定理4.2的证明。回想一下，$\widetilde{\lambda}_i - Q\lambda_i^0 = H'F^{0\prime}e_i/T + T^{-1}\left(\widetilde{F} - F^0H\right)' e_i$.还要回想一下，我们之前已经证明，对于 $k = 1, ..., r$，有 $\max_i \left|\widetilde{\lambda}_{ik} - \lambda_{ik}^*\right| = O_p\left(\sqrt{(\ln N)/T}\right)$，其中 $\lambda_{ik}^* = \sum_{l=1}^r Q(k,l)\ \lambda_{il}^0$.。为了兼顾多个强度相同的因子这一可能情形，回想一下我们在证明命题4.1时的定义：$\zeta = \min_{1\le k\le G-1}\left(\alpha_{[k]} - \alpha_{[k+1]}\right)$. 对于给定的指标 $k \in \{1, ..., r\}$，我们考虑以下 3 种情形。

情形（a）：$1 \notin \omega(k)$ 和 $r \notin \omega(k)$。于是

$$\begin{aligned}\lambda_{ik}^* &= \sum_{l\le \min\omega(k)-1} Q(k,l)\lambda_{il}^0 + \sum_{l\in\omega(k)} Q(k,l)\lambda_{il}^0 + \sum_{l\ge \max\omega(k)+1} Q(k,l)\lambda_{il}^0 \\ &\equiv S_{ik}^\dagger(a) + S_{ik}^\dagger(b) + S_{ik}^\dagger(c).\end{aligned}$$

首先，对于 $S_{ik}^\dagger(a)$，由 Q 的（分块）上三角矩阵可知，

$$Q(k,l) = O_p\left(N^{\alpha_k - \alpha_l}\right) = O_p\left(N^{-\zeta}\right), \text{ for } l \le \min\omega(k) - 1. \tag{B.12}$$

因此，对 $i.$，$S_{ik}^\dagger(a) = O_p\left(N^{-\zeta}\right)$ 一致成立

其次，对于 $S_{ik}^\dagger(c)$，注意到相对于第 k 个因子，第 l 个因子较弱，这意味着

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(c) \ne 0\right) \le \sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(\lambda_{il}^0 \ne 0\right) \asymp N^{\alpha_l} \ll N^{\alpha_k}, \text{ for } l \ge \max\omega(k) + 1. \tag{B.13}$$

第三，对于 $S_{ik}^\dagger(b)$，我们将证明一个稍后会在本证明中用到的结论：对于任意递减序列 $\widetilde{c}_{NT} = o(1)$，

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(b) > \widetilde{c}_{NT}\right) \asymp_p N^{\alpha_k}. \tag{B.14}$$

为证明这一点，首先注意到显然有

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(b) > \widetilde{c}_{NT}\right) \le \sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(b) \ne 0\right) = O_p\left(N^{\alpha_k}\right), \text{ for } l \in \omega(k).$$

此外，我们可以排除 $\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(b) > \widetilde{c}_{NT}\right) = o_p(N^{\alpha_k})$。要理解原因，假设 $\sum_{i=1}^N \mathbf{1}\left(S_{ik}^\dagger(b) > \widetilde{c}_{NT}\right) = o_p(N^{\alpha_k})$，那么根据 (B.12) 和 (B.13)，只能有 $\|\Lambda_k^*\|_0 = o_p(N^{\alpha_k})$，这违反了最稀疏的 $\Lambda^0 \text{with} R^* = I_r$ 的定义 2.1。因此，(B.14) 必须成立。

现在有了 $c_{\lambda,NT}=\frac{1}{\sqrt{\ln(NT)}}$'，我们可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left(|\lambda_{ik}^{*}|>c_{\lambda,NT}\right) &\leq \sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left(\left|S_{ik}^{\dagger}(a)\right|>\frac{1}{3}c_{\lambda,NT}\right)+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left(\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>\frac{1}{3}c_{\lambda,NT}\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left(\left|S_{ik}^{\dagger}(c)\right|>\frac{1}{3}c_{\lambda,NT}\right)\\ &=o_p(1)+O_p\left(N^{\alpha_k}\right)+o_p\left(N^{\alpha_k}\right)=O_p\left(N^{\alpha_k}\right).\end{aligned}$$

与此同时，我们还有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[|\lambda_{ik}^{*}|>c_{\lambda,NT}\right]\\ \geq\ &\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|-\left|S_{ik}^{\dagger}(a)+S_{ik}^{\dagger}(c)\right|>c_{\lambda,NT}\right]\\ \geq\ &\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\text{ and }\left|S_{ik}^{\dagger}(a)+S_{ik}^{\dagger}(c)\right|<c_{\lambda,NT}\right]\\ =\ &\sum_{i=1}^{N}\left\{\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\right]-\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\text{ and }\left|S_{ik}^{\dagger}(a)+S_{ik}^{\dagger}(c)\right|\geq c_{\lambda,NT}\right]\right\}\\ \geq\ &\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\right]-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(a)+S_{ik}^{\dagger}(c)\right|\geq c_{\lambda,NT}\right]\\ \geq\ &\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\right]-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(a)\right|>\frac{1}{2}c_{\lambda,NT}\right]-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(c)\right|>\frac{1}{2}c_{\lambda,NT}\right]\\ =\ &\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}\left[\left|S_{ik}^{\dagger}(b)\right|>2c_{\lambda,NT}\right]-o_p(1)-o_p\left(N^{\alpha_k}\right).\end{aligned}$$

现在，由（B.14）可得，因而，

$$\sum_{i=1}^{N}1\left[|\lambda_{ik}^{*}|>c_{\lambda,NT}\right]\asymp_p N^{\alpha_k}. \tag{B.15}$$

情况（b）： $1\in\omega(k)$。由此可得 $S_{ik}^{\dagger}(a)=0$，且 $\lambda_{ik}^{*}=S_{ik}^{\dagger}(b)+S_{ik}^{\dagger}(c)$。情况（a）中的相同证明表明 $\sum_{i=1}^{N}1\left[|\lambda_{ik}^{*}|>c_{\lambda,NT}\right]\asymp_p N^{\alpha_k}$.

情况（c）： $r\in\omega(k)$。由此可得 $S_{ik}^{\dagger}(c)=0$，且 $\lambda_{ik}^{*}=S_{ik}^{\dagger}(a)+S_{ik}^{\dagger}(b)$。与情况（a）相同的证明表明， $\sum_{i=1}^{N}1\left[|\lambda_{ik}^{*}|>c_{\lambda,NT}\right]\asymp_p N^{\alpha_k}$.

最后，请记住:

$$\widehat{D}_k = \sum_{i=1}^{N} 1\left(\left|\widetilde{\lambda}_{ik}\right| > c_{\lambda,NT}\right) = \sum_{i=1}^{N} 1\left[\left|\widetilde{\lambda}_{ik} - \lambda_{ik}^* + \lambda_{ik}^*\right| > c_{\lambda,NT}\right].$$

鉴于 $\max_i \left|\widetilde{\lambda}_{ik} - \lambda_{ik}^*\right| = O_p\left(\sqrt{(\ln\ N)/T}\right) = o_p(c_{\lambda,\ NT})$，可得

$$\widehat{D}_k \asymp_p \sum_{i=1}^{N} 1\left[|\lambda_{ik}^*| > c_{\lambda,NT}\right] \asymp_p N^{\alpha_k}.$$

但这仅意味着存在常数 $c^\dagger > 0$ 和 $C^\dagger > 0$，二者均与 N 和 T 无关，使得以概率趋近于 1，

$$c^\dagger N^{\alpha_k} \leq \widehat{D}_k \leq C^\dagger N^{\alpha_k},$$

也就是说，

$$\alpha_k + \frac{\ln c^\dagger}{\ln N} \leq \frac{\ln \widehat{D}_k}{\ln N} \leq \alpha_k + \frac{\ln C^\dagger}{\ln N}.$$

因此我们得到

$$\widehat{\alpha}_k \equiv \frac{\ln \widehat{D}_k}{\ln N} \xrightarrow{p} \alpha_k,$$

对于 $k = 1,\ ...,\ r.$ ∎

C 第 5 节主要结果的证明

定理5.1的证明。通过证明(a) $\widehat{r} \geq r$ 和(b)$\widehat{r} \leq r$ 均依概率成立来完成证明。

~首先，回顾一下，我们已经证明，对于 $k = 1,\ V_k \asymp N^{\alpha_k - 1}$ 依概率收敛，其中 r，并且还要回顾的是，

$$\widehat{r} = \max\left\{k : \widetilde{V}_k^{r_{\max}} \geq \widehat{\sigma}^2 N^{-1/2}\left(\ln\ln N\right)^{1/2}\right\}.$$

容易证明，$\widehat{\sigma}^2$ 是$(NT)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} E(e_{it}^2)$的一致估计量，且该量远离零并且有限。因此，$\widetilde{V}_r \asymp_p N^{\alpha_r - 1} \gg N^{-1/2}(\ln\ln\ N)^{1/2} \asymp_p \widehat{\sigma}^2 N^{-1/2}(\ln\ln\ N)^{1/2}$，这意味着 $r \leq \widehat{r}$。所以(a)成立。

其次，假设（b）不成立，即存在某个 $\dot{r}$，使得 $r_{\max} \geq \dot{r} \geq r+1$，并且...

$$\dot{r} = \max\left\{k : \widetilde{V}_k^{r_{\max}} \geq \widehat{\sigma}^2 N^{-1/2}\left(\ln\ln N\right)^{1/2}\right\}$$

在概率意义下不趋近于 0。我们将证明这会导致矛盾。

为此，我们首先考察 $T^{-1}\|$ 的速率 $\widetilde{F} - F^0 H\|^2$ 在不知道真实数量的情况下

因子 r。这意味着，先前推导的一些假设 r 已知的结果（例如，引理 A.5）无法应用于此处。因此，预计下文推导出的收敛速率将慢于命题 3.3 中所述的速率。

回顾一下，

$$\widetilde{F}-F^0H=\left[\frac{1}{N}\left(e'\Lambda^0\right)\left(\frac{1}{T}F^{0\prime}\widetilde{F}\right)+\frac{1}{NT}F^0\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F}+\frac{1}{NT}e'e\widetilde{F}\right]\widetilde{V}^{-1}\equiv\left(a_1+a_2+a_3\right)\widetilde{V}^{-1}.$$

或者，$\left(\widetilde{F}-F^0H\right)\widetilde{V}=a_1+a_2+a_3$. 由此可得。

$$\begin{aligned}\|a_1+a_2\| &\leqslant \|a_1\|+\|a_2\|\leqslant\frac{2}{T}\|F\|\|\widetilde{F}\|\frac{1}{N}\left\|\Lambda^{0\prime}e\right\| \\ &= O_p(1)\left[\sum_{p=1}^{r}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ip}^{0\prime}e_{it}\right)^2\right]^{1/2}=O_p\left(T^{\frac{1}{2}}N^{\frac{\alpha_1}{2}-1}\right).\end{aligned}$$

与此同时，

$$\|a_3\|\leq\frac{1}{NT}\left\|e'e\right\|_{sp}\left\|\widetilde{F}\right\|=O_p(\frac{1}{NT})O_p(N+T)O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)=O_P\left(T^{-\frac{1}{2}}+N^{-1}T^{\frac{1}{2}}\right).$$

So

$$\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}-F^0H\right\|^2\leqslant\|\widetilde{V}\|^{-2}O_p\left(N^{\alpha_1-2}+T^{-2}+N^{-2}\right)=\|\widetilde{V}\|^{-2}O_p\left(N^{\alpha_1-2}+T^{-2}\right). \quad \text{(C.1)}$$

回到含有 $\dot{r}\geq r+1$ 的 (b)，现在定义 $\dot{H}=(\Lambda'\Lambda/N)\left(F'\widetilde{F}^{\dot{r}}/T\right)\widetilde{V}^{\dot{r}-1}$，其中 $\widetilde{F}^{\dot{r}}$ 和 $\widetilde{V}^{\dot{r}}$ 分别类似于 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{V}$，是在 $\dot{r}$ 个因子下的估计量。根据 (C.1)，我们立即得到，

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}^{\dot{r}}-F^0\dot{H}\right\|^2 &\leq\left(\min_{1\leq k\leq r}\widetilde{V}_k\right)^{-2}O_p\left(N^{\alpha_1-2}+T^{-2}\right) \\ &\leq O_P(N)O_P\left(N^{\alpha_1-2}+T^{-2}\right)=O_p\left(N^{\alpha_1-1}+NT^{-2}\right)=o_p(1),\end{aligned}$$

鉴于 $N/T^2\to 0$ 由假设7推出。这意味着我们可以按照证明引理 A.5 的方法来证明 that

$$\frac{\dot{H}'F^{0\prime}\widetilde{F}^{\dot{r}}}{T}=\frac{1}{T}\widetilde{F}^{\dot{r}\prime}\widetilde{F}^{\dot{r}}+o_p\left(1\right)=I_{\dot{r}}+o_p\left(1\right).$$

但这是一个矛盾，因为 rank $\left(\dot{H}'F^{0\prime}\widetilde{F}^{\dot{r}}/T\right)\leq r$ given $\dot{H}$ is $r\times\dot{r}$，而 rank $(I_{\dot{r}})$ $=\dot{r}\geq r+1$.

∎

D 辅助引理的证明

在本节中，我们给出本文中所用辅助引理的证明。引理 A.1 的证明。根据命题 3.3，我们有

$$\begin{aligned}\Lambda^{0\prime}e\widetilde{F} &= \Lambda^{0\prime}eFH + \Lambda^{0\prime}e\left(\widetilde{F} - FH\right) \\ &= O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2}\right) + O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2}\right)\sqrt{T}O_p\left(N^{\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r} + N^{1-\alpha_r}T^{-1}\right) \\ &= O_p\left(N^{\alpha_1/2}T^{1/2} + N^{\alpha_1-\alpha_r}T + N^{1+\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_r}\right). \blacksquare\end{aligned}$$

引理 A.2 的证明。回顾 $Q(l,k) \asymp_p N^{\alpha_l-\alpha_k}$，对于 $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant r$，由命题 3.2 可知。然后，根据命题3.1的结果，我们有

$$\Xi(l,k)\begin{cases}\asymp_p N^{1-\alpha_l}N^{\alpha_l-\alpha_k}N^{\alpha_k-1} \asymp_p 1, \text{ for } 1 \leqslant k < l \leqslant r, \\ = O_p\left(N^{1-\alpha_l}\right)O_p\left(N^{\alpha_k-1}\right) = O_p\left(N^{\alpha_k-\alpha_l}\right) = o_p(1), \text{ for } r \geqslant k > l > 1. \blacksquare\end{cases}$$

引理 A.3 的证明。设

$$\begin{aligned}\frac{1}{NT}e'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1} &= \left(\frac{1}{N}e'\Lambda^0\right)\left(\frac{1}{T}F^{0\prime}\widetilde{F}\right)\widetilde{V}^{-1} = e'\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}N^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1} \\ &= \left(e'\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}\right)A^{-\frac{1}{2}}\left(AN^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1}\right).\end{aligned}$$

根据假设 2-3，对于每个 $t.$，我们有 $E(N^{-\frac{\alpha_k}{2}}\sum_{i=1}^N\lambda_{ik}^0e_{it})^2 < M$。因此，$\left\|e'\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}\right\| = O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)$. 此外，由引理 A.2 可得

$$\frac{1}{NT}\left\|e'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1}\right\| = O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)A^{-\frac{1}{2}}O_p(1) = O_p\left(T^{\frac{1}{2}}\right)O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}\right) = O_p\left(N^{-\frac{\alpha_r}{2}}T^{\frac{1}{2}}\right). \blacksquare$$

引理A.4的证明。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{NT}ee'\Lambda^0F^{0\prime}\widetilde{F}\widetilde{V}^{-1} &= (ee')\Lambda^0A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}\left(AN^{-1}Q'\widetilde{V}^{-1}\right) = O_p(N+T)O(1)A^{-\frac{1}{2}}O_p(1) \\ &= A^{-\frac{1}{2}}O_p(N+T). \blacksquare\end{aligned}$$

引理 A.5 的证明。根据上述定义的矩阵 $H = (\Lambda^{0\prime}\Lambda^0/N)\left(F^{0\prime}\widetilde{F}/T\right)\widetilde{V}^{-1}$，我们

have

$$I_r = \frac{\widetilde{F}'\widetilde{F}}{T} = \frac{\left(\widetilde{F} - F^0H + F^0H\right)'\widetilde{F}}{T} = \frac{\left(\widetilde{F} - F^0H\right)'\widetilde{F}}{T} + \frac{H'F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}.$$

这里，

$$\frac{1}{T}\left\|\left(\widetilde{F} - F^0H\right)'\widetilde{F}\right\| \leq \left(\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F} - F^0H\right\|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}\right\|^2\right)^{1/2} = O_p\left(\left[\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F} - F^0H\right\|^2\right]^{1/2}\right).$$

~至于 $F - F^0H$，我们这里只给出一个粗略的上界，以便将其分解为

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_t - H'F_t &= \widetilde{V}^{-1}\left(\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\widetilde{F}_s\gamma_N(s,t) + \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\widetilde{F}_s\zeta_{s,t} + \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\widetilde{F}_s\eta_{st} + \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\widetilde{F}_s\xi_{st}\right)\\ &\equiv \widetilde{V}^{-1}\left(I_t + II_t + III_t + IV_t\right),\end{aligned}$$

其中 $\zeta_{s,\ t} \equiv e_s'e_t/N - \gamma_N(s,t)$、 $\eta_{st} \equiv F_s^{0\prime}\Lambda^{0\prime}e_t/N$ 和 $\xi_{st} \equiv F_t^{0\prime}\Lambda^{0\prime}e_s/N$。Bai and Ng（2002）在其定理 1 中证明了， $T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(\|I_t\|^2+\|II_t\|^2+\|III_t\|^2+\|IV_t\|^2) = O_p(N^{-1}+T^{-1})$，并指出该结果在强因子或弱因子条件下均成立。因此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F} - F^0H\right\|^2 &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|\widetilde{V}^{-1}\left(I_t + II_t + III_t + IV_t\right)\right\|^2\\ &\leq \left\|\widetilde{V}^{-1}\right\|^2\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|I_t + II_t + III_t + IV_t\right\|^2\\ &= O_p\left(N^{2(1-\alpha_r)}\right)\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|I_t + II_t + III_t + IV_t\right\|^2,\\ &= O_p\left(N^{2(1-\alpha_r)}\right)O_p\left(T^{-1}+N^{-1}\right) = o_p(1),\end{aligned} \tag{D.1}$$

~其中，第二个等号是由于 V 为对角矩阵，且根据命题3.1；最后一个等号是由于 $\alpha_k \in$（1/2、 1] 和$N^{1-\alpha_r}/T^{1/2} \to 0$根据假设 5。

接下来我们将证明，结果 $T^{-1}\left\|\widetilde{F} - F^0H\right\|^2 = o_p(1)$ 意味着两个有用的条件：(a) $H = O_p(1)$，以及 (b) H 是满秩的 r。

对于 (a)，回顾 $H = \frac{\Lambda^{0\prime}\Lambda^0}{N}\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\widetilde{V}^{-1} = \Sigma_{N,\Lambda}\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\widetilde{V}^{-1}$，并注意到 $\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T} = O_p(1)$，以及 $\Sigma_{N,\Lambda}(j,k) = O(N^{\alpha_j\wedge\alpha_k-1})$，根据 Λ^0 的定义即可轻松验证这一点

并且 α_k。因此，

$$\begin{aligned} H(j,k) &= \sum_{l=1}^{r} \Sigma_{N,\Lambda}(j,l) Q(k,l) \widetilde{V}^{-1}(k,k) \\ &= \sum_{l=1}^{r} O(N^{\alpha_j \wedge \alpha_l - 1}) O_p(1) O_p(N^{1-\alpha_k}). \end{aligned}$$

我们看到，对于 $H(j,k) \neq O_p(1)$，只有在 $j < k$ 的情况下， $H(j,k) \neq O_p(1)$ 才可能成立。然而，我们将在下文通过反证法证明，这种情况绝不可能成立。

令我们考虑 $\widetilde{F}_{\cdot,k}^*$，其中 $F^* = F^0 H$。注意 $T^{-1} \left\| \widetilde{F}_{\cdot,k} - F_{\cdot,k}^* \right\|^2 \leq T^{-1} \left\| \widetilde{F} - F^0 H \right\|^2 = o_p(1)$。根据闵可夫斯基不等式，这意味着 $\left| T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \widetilde{F}_{tk}^2 - T^{-1} \sum_{t=1}^{T} F_{tk}^{*2} \right| = o_p(1)$，由此得到

$$T^{-1} \sum_{t=1}^{T} F_{tk}^{*2} \xrightarrow{p} 1. \tag{D.2}$$

假设对于某些 j 和 k，满足 $j < k$，有 $H(j,k) \neq O_p(1)$。这意味着存在 $\forall M > 0$、$\exists$ 一个常数 $\nu > 0$ 和一个子序列 $T_m (m = 1, 2, \ldots)$，使得在一个具有正概率的事件 $\mathcal{A}_m$ 上，$P(\mathcal{A}_m) > \nu$，从而有 $|H(j,k)| > M$。同时，回顾由假设1可知，$T^{-1} F^{0\prime} F^0 \to_p \Sigma_F$ 当 $T \to \infty$ 时，对于某个正定矩阵 Σ_F，这意味着 $T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (F_{tj}^0)^2 \to_p \Sigma_F(j,j)$，其中 $\Sigma_F(j,j)$ 与 0 保持正距离， $j = 1$、.....、r。这进一步意味着

$$T_m^{-1} \sum_{t=1}^{T_m} (F_{tj}^0)^2 \to_p \Sigma_F(j,j) > 0. \tag{D.3}$$

鉴于由假设1推出的 $F_t^0 = O_p(1)$，以及 $F_{tk}^* = \sum_{j=1}^{r} F_{tj}^0 H(j,k)$ 这一事实，由（D.3）可知，存在 $\exists a$、$b > 0$，其中 a 与 0 保持正距离，使得在事件 $\mathcal{A}_m$ 上必有 $T_m^{-1} \sum_{t=1}^{T_m} F_{tk}^{*2} > aM^2 + b$。但这与（D.2）矛盾，因为 M 可以任意大。因此（a）得证。

对于 (b)，当 $r = 1$ 时显然成立。我们将详细证明当 $r = 2$ 时的情形，并在后文将其推广至 $r > 2$。

当 $r = 2$,

$$\begin{aligned} o_p(1) &= \frac{1}{T} \left\| \widetilde{F} - F^0 H \right\|^2 \\ &= \frac{1}{T} \left\| \widetilde{F}_{\cdot,1} - F_{\cdot,1}^* \right\|^2 + \frac{1}{T} \left\| \widetilde{F}_{\cdot,2} - F_{\cdot,2}^* \right\|^2. \end{aligned} \tag{D.4}$$

假设 H 不是满秩的。那么对于某个 $a \neq 0.$，我们有 $F_{\cdot,\,2}^* = aF_{\cdot,\,1}^*$。因此，根据 (D.4)，必有 $\frac{1}{T} \left\| a\widetilde{F}_{\cdot,\,1} - aF_{\cdot,\,1}^* \right\|^2 = o_p(1)$ 和 $\frac{1}{T} \left\| \widetilde{F}_{\cdot,\,2} - F_{\cdot,\,2}^* \right\|^2 = o_p(1)$。然后根据 the

闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}_{\cdot,2}-a\widetilde{F}_{\cdot,1}\right\|^2 &= \frac{1}{T}\left\|\left(F^*_{\cdot,2}-\widetilde{F}_{\cdot,2}\right)+\left(a\widetilde{F}_{\cdot,1}-aF^*_{\cdot,1}\right)\right\|^2\\ &\leq \frac{1}{T}\left\|F^*_{\cdot,2}-\widetilde{F}_{\cdot,2}\right\|^2+\frac{1}{T}\left\|a\widetilde{F}_{\cdot,1}-aF^*_{\cdot,1}\right\|^2\\ &= o_p(1).\end{aligned}$$

~ ~但鉴于 $F_{\cdot,1}$ 与 $F_{\cdot,2}$之间的正交性,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left\|\widetilde{F}_{\cdot,2}-a\widetilde{F}_{\cdot,1}\right\|^2 &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\widetilde{F}_{t2}-a\widetilde{F}_{t1}\right)^2\\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widetilde{F}_{t2}^2+\frac{a^2}{T}\sum_{t=1}^{T}\widetilde{F}_{t1}^2\\ &= 1+a^2,\end{aligned}$$

这显然是矛盾的。因此，当 $r=2$ 时，(b) 成立。

对于 $r>2$ 的情形，论证几乎完全相同。我们只需将 $F^*_{\cdot,1}$替换为所有的 $\left(F^*_{\cdot,1}, F^*_{\cdot,3}, ..., F^*_{\cdot,r}\right)$，并将 $aF^*_{\cdot,1}$ 替换为 $\left(F^*_{\cdot,1}, F^*_{\cdot,3}, ..., F^*_{\cdot,r}\right)\times a$，对于一个 $(r-1)\times 1$~非零向量 a（ aF_{t1} 的情形同理）。因此，(b) 的证明完成。

最后，注意到 (D.1) 还推出了 $T^{-1}\left\|\left(\widetilde{F}-F^0H\right)'\widetilde{F}\right\| = o_p(1)$，这意味着 $H'\left(F^{0\prime}\widetilde{F}/T\right)=I_r+o_p(1)$。现在我们有，以概率趋近于 1,

$$\operatorname{rank}\left(H'\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\right)=r \Longrightarrow \operatorname{rank}\left(\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\right)\geq r \Longrightarrow \operatorname{rank}\left(\frac{F^{0\prime}\widetilde{F}}{T}\right)=r,$$

~ ~注意到 $F^{0\prime}F/T$是一个 $r\times r$矩阵。因此，矩阵 $Q=F'F^0/T$以概率趋近于 1 的方式达到所需的满秩 r。

References

Bai, J. (2003) 高维因子模型的推断理论。《计量经济学》71(1), 135–171。

Bai, J. & S. Ng (2002) 确定近似因子模型中的因子数量。《计量经济学》70(1), 191–221。

Fan, J., Y. Liao, & M. Mincheva (2011) 近似因子模型中的高维协方差矩阵估计。The Annals of Statistics 39(6), 3320–3356。

Merlevede, F., M. Peligrad, & E. Rio (2011) 弱相依序列的伯恩斯坦型不等式与中等偏差。Probability Theory and Related Fields 151,435–474.

E 附加模拟结果

E.1 $r = 5$ 下的模拟结果

表5：当 $r = 5$ 时的因子数量估计

		RMSE						Bias					
N	T	WZ	BN	GCT	FR	ED	AH	WZ	BN	GCT	FR	ED	AH
100	100	0.240	0.720	2.721	3.972	0.508	4.000	0.029	-0.482	-2.668	-3.956	-0.054	-4.000
	200	0.249	0.432	2.431	3.978	0.318	4.000	-0.052	-0.176	-2.341	-3.963	0.048	-4.000
	400	0.285	0.274	2.101	3.982	0.830	4.000	-0.080	-0.074	-1.993	-3.971	0.249	-4.000
200	100	0.177	0.590	2.494	3.947	0.246	4.000	0.023	-0.334	-2.421	-3.898	0.046	-4.000
	200	0.134	0.221	1.840	3.907	0.274	4.000	-0.014	-0.046	-1.748	-3.819	0.057	-4.000
	400	0.167	0.100	1.386	3.927	0.320	4.000	-0.025	-0.007	-1.303	-3.856	0.062	-4.000
400	100	0.157	0.638	2.292	3.811	0.231	4.000	0.024	-0.399	-2.217	-3.629	0.049	-4.000
	200	0.055	0.166	1.544	3.313	0.225	4.000	-0.003	-0.028	-1.457	-2.744	0.044	-4.000
	400	0.097	0.045	1.048	2.898	0.225	3.997	-0.010	-0.002	-1.029	-2.100	0.046	-3.994

表 6：当 $r = 5$ 时因子模型的估计

		TR^F				TR^Λ				$RMSE^C$			
N	T	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res
100	100	**0.946**	0.919	0.922	0.922	**0.774**	0.685	0.769	0.766	**1.612**	1.653	1.620	1.622
	200	**0.953**	0.938	0.941	0.941	**0.820**	0.761	0.818	0.817	**1.599**	1.633	1.610	1.611
	400	**0.956**	0.948	0.950	0.950	0.844	0.814	**0.845**	**0.845**	**1.594**	1.615	1.603	1.603
200	100	**0.969**	0.947	0.949	0.949	0.794	0.699	0.796	**0.800**	**1.500**	1.574	1.527	1.529
	200	**0.973**	0.960	0.963	0.963	0.837	0.777	0.839	**0.843**	**1.496**	1.541	1.513	1.514
	400	**0.976**	0.969	0.971	0.971	0.860	0.829	0.862	**0.864**	**1.497**	1.516	1.500	1.501
400	100	**0.980**	0.961	0.963	0.963	0.798	0.704	0.804	**0.816**	**1.438**	1.497	1.444	1.446
	200	**0.983**	0.972	0.974	0.974	0.841	0.780	0.844	**0.852**	**1.430**	1.467	1.434	1.435
	400	**0.985**	0.979	0.980	0.980	0.866	0.833	0.867	**0.872**	**1.425**	1.447	1.428	1.429

E.2 因子强度估计的稳健性检验

下面两个表分别报告了当 $r = 3$ 或 5 时因子强度的估计结果，其中 $\widetilde{c}_{\lambda,\ NT} = c[\ln(NT)]^{-1/2}$ 取值为 $c = 0.8$ 和 1.2。

表 7: $r = 5$ 下的错误发现率和检验功效

N	T	FDR_1	FDR_2	FDR错误发现率	错误发现率	错误发现率 P	ower_1	Power_2	Power_3	Power_4	Power_5	$\overline{\text{Power}}$
					面板 A：主成分+筛选							
100	100	0	0.239	0.371	0.558	0.520	0.222	0.802	0.522	0.530	0.363	0.427	0.617
	200	0	0.241	0.376	0.538	0.496	0.221	0.817	0.540	0.544	0.386	0.452	0.633
	400	0	0.242	0.370	0.529	0.467	0.218	0.834	0.549	0.569	0.396	0.486	0.650
200	100	0	0.265	0.383	0.532	0.456	0.209	0.813	0.531	0.538	0.412	0.497	0.645
	200	0	0.255	0.393	0.488	0.440	0.205	0.832	0.547	0.555	0.444	0.509	0.664
	400	0	0.256	0.388	0.471	0.401	0.202	0.837	0.566	0.578	0.473	0.563	0.680
400	100	0	0.278	0.376	0.471	0.327	0.189	0.820	0.551	0.565	0.489	0.618	0.679
	200	0	0.273	0.375	0.432	0.229	0.178	0.836	0.558	0.595	0.531	0.667	0.698
	400	0	0.265	0.384	0.412	0.192	0.175	0.849	0.576	0.604	0.557	0.721	0.715
					面板B：SOFAR自适应							
100	100	0	0.076	0.153	0.279	0.401	0.117	0.741	0.729	0.712	0.674	0.664	0.722
	200	0	0.087	0.197	0.313	0.418	0.138	0.812	0.799	0.760	0.724	0.738	0.787
	400	0	0.305	0.507	0.597	0.691	0.349	0.939	0.766	0.771	0.703	0.682	0.827
200	100	0	0.040	0.091	0.179	0.301	0.065	0.744	0.733	0.720	0.705	0.694	0.731
	200	0	0.036	0.088	0.189	0.285	0.064	0.808	0.794	0.786	0.759	0.753	0.793
	400	0	0.343	0.544	0.581	0.653	0.342	0.937	0.772	0.769	0.731	0.712	0.838
400	100	0	0.295	0.367	0.445	0.472	0.189	0.859	0.536	0.549	0.473	0.531	0.687
	200	0	0.335	0.476	0.502	0.487	0.251	0.903	0.661	0.675	0.616	0.665	0.775
	400	0	0.383	0.543	0.586	0.553	0.320	0.931	0.767	0.782	0.751	0.778	0.846
					面板C：SOFAR重新稀疏化							
100	100	0	0.075	0.172	0.302	0.456	0.130	0.800	0.806	0.783	0.746	0.733	0.789
	200	0	0.071	0.169	0.298	0.435	0.125	0.862	0.858	0.822	0.778	0.802	0.842
	400	0	0.306	0.518	0.647	0.705	0.377	0.950	0.831	0.849	0.737	0.767	0.869
200	100	0	0.060	0.148	0.291	0.423	0.106	0.804	0.808	0.804	0.766	0.764	0.800
	200	0	0.052	0.128	0.251	0.380	0.091	0.859	0.860	0.854	0.832	0.829	0.854
	400	0	0.343	0.534	0.651	0.659	0.365	0.946	0.847	0.860	0.761	0.795	0.883
400	100	0	0.373	0.546	0.687	0.699	0.342	0.884	0.540	0.541	0.545	0.597	0.707
	200	0	0.362	0.480	0.589	0.591	0.303	0.919	0.761	0.754	0.711	0.764	0.831
	400	0	0.388	0.497	0.620	0.579	0.329	0.941	0.843	0.876	0.842	0.867	0.895

表 8：当 $r = 5$ 为 $\alpha =$（1、0.9、0.8、0.7、0.6）时的因子强度估计)

		RMSE					Bias				
N	T	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_4$	$\widehat{\alpha}_5$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_4$	$\widehat{\alpha}_5$
面板 A：主成分+筛选											
100	100	0.036	0.045	**0.041**	0.076	0.156	-0.034	-0.035	0.020	0.050	0.111
	200	0.034	0.043	**0.043**	**0.076**	0.187	-0.033	-0.034	**0.021**	**0.047**	**0.081**
	400	0.033	0.040	**0.043**	**0.078**	0.223	-0.032	**-0.030**	0.023	**0.045**	**0.058**
200	100	0.031	0.032	0.047	0.083	0.139	-0.030	-0.023	0.035	0.065	0.115
	200	0.030	0.030	**0.047**	0.076	0.159	-0.029	-0.021	**0.035**	**0.052**	0.095
	400	0.029	**0.027**	**0.049**	**0.076**	0.172	-0.028	**-0.018**	**0.037**	**0.053**	**0.079**
400	100	0.027	0.020	0.053	0.089	0.117	-0.027	**-0.009**	0.045	0.077	0.101
	200	0.026	0.018	0.052	0.084	0.107	-0.026	-0.008	0.042	0.070	0.065
	400	0.025	**0.015**	**0.053**	**0.082**	0.124	-0.025	**-0.006**	**0.044**	**0.067**	**0.051**
面板 B：SOFAR去偏											
100	100	0.029	0.056	0.045	**0.055**	**0.062**	-0.027	-0.045	**-0.009**	**0.003**	**0.021**
	200	0.020	**0.024**	0.061	0.089	**0.106**	-0.019	**0.000**	0.050	0.077	0.088
	400	0.015	**0.037**	0.097	0.142	**0.157**	-0.013	0.033	0.093	0.136	0.144
200	100	0.027	0.055	**0.041**	**0.046**	**0.046**	-0.026	-0.047	**-0.013**	**-0.016**	**0.018**
	200	0.019	**0.020**	0.059	**0.070**	**0.089**	-0.018	**0.002**	0.048	0.058	**0.076**
	400	0.013	0.037	0.097	0.127	**0.136**	-0.013	0.035	0.094	0.123	0.127
400	100	0.027	0.053	**0.039**	**0.045**	**0.031**	-0.026	-0.048	**-0.023**	**-0.031**	**-0.002**
	200	0.018	**0.017**	**0.051**	**0.051**	**0.061**	-0.017	**0.002**	**0.041**	**0.040**	**0.046**
	400	0.012	0.039	0.095	0.107	**0.103**	-0.012	0.037	0.092	0.103	0.095
面板C：SOFAR重新稀疏化											
100	100	**0.024**	**0.021**	0.053	0.092	0.100	**-0.023**	**0.003**	0.043	0.080	0.084
	200	**0.017**	0.036	0.087	0.136	0.135	**-0.016**	0.033	0.082	0.130	0.122
	400	**0.012**	0.056	0.121	0.181	0.179	**-0.011**	0.055	0.119	0.178	0.168
200	100	**0.022**	**0.018**	0.048	0.081	0.098	**-0.022**	**0.010**	0.040	0.074	0.092
	200	**0.016**	0.039	0.076	0.116	0.115	**-0.015**	0.038	0.071	0.111	0.110
	400	**0.011**	0.058	0.111	0.163	0.153	**-0.011**	0.058	0.108	0.160	0.148
400	100	**0.021**	**0.019**	0.041	0.068	0.087	**-0.021**	0.016	0.034	0.063	0.085
	200	**0.015**	0.042	0.066	0.095	0.098	**-0.014**	0.041	0.062	0.092	0.095
	400	**0.010**	0.060	0.097	0.139	0.123	**-0.010**	0.059	0.095	0.137	0.121

Table 9: 当 $r = 3$ with $\widetilde{c}_{\lambda,\ NT} = c[\ln(NT)]^{-1/2}$ 时的因子强度估计

		RMSE			Bias		
N	T	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
				面板 A: $c = 0.8$			
100	100	0.018	0.067	0.183	0.012	0.050	0.161
	200	0.017	0.063	0.200	0.011	0.043	0.125
	400	0.018	0.064	0.233	0.013	0.042	0.102
200	100	0.016	0.074	0.183	0.013	0.066	0.172
	200	0.013	0.070	0.182	0.011	0.061	0.136
	400	0.014	0.069	0.197	0.011	0.059	0.128
400	100	0.014	0.085	0.171	0.013	0.081	0.167
	200	0.011	0.078	0.150	0.010	0.074	0.134
	400	0.011	0.076	0.159	0.010	0.072	0.120
				面板 B: $c = 1.2$			
100	100	0.019	0.065	0.097	-0.010	-0.034	0.041
	200	0.016	0.062	0.150	-0.008	-0.033	0.016
	400	0.016	0.057	0.175	-0.007	-0.029	0.018
200	100	0.013	0.041	0.086	-0.008	-0.010	0.053
	200	0.012	0.040	0.105	-0.007	-0.010	0.042
	400	0.010	0.036	0.140	-0.005	-0.005	0.029
400	100	0.010	0.035	0.073	-0.007	0.007	0.046
	200	0.009	0.029	0.080	-0.006	0.008	0.026
	400	0.007	0.028	0.095	-0.004	0.010	0.023

Table 10：当 $r=5$ 使用 $\widetilde{c}_{\text{入时}NT}=c[\ln(NT)]^{-1/2}$ 估计因子强度

		RMSE					Bias				
N	T	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_4$	$\widehat{\alpha}_5$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_4$	$\widehat{\alpha}_5$
面板 A： $c=0.8$											
100	100	0.028	0.027	0.064	0.118	0.205	-0.027	-0.009	0.055	0.107	0.171
	200	0.027	0.027	0.065	0.108	0.238	-0.026	-0.009	0.055	0.092	0.136
	400	0.026	0.027	0.066	0.110	0.269	-0.025	-0.008	0.055	0.091	0.099
200	100	0.025	0.020	0.074	0.121	0.193	-0.024	0.002	0.068	0.111	0.184
	200	0.024	0.018	0.073	0.112	0.198	-0.023	0.002	0.066	0.098	0.159
	400	0.023	0.019	0.072	0.111	0.210	-0.022	0.004	0.064	0.095	0.136
400	100	0.022	0.021	0.081	0.133	0.173	-0.021	0.012	0.076	0.127	0.165
	200	0.021	0.020	0.078	0.123	0.158	-0.020	0.014	0.072	0.113	0.135
	400	0.020	0.019	0.079	0.125	0.151	-0.020	0.014	0.074	0.115	0.107
面板 B： $c=1.2$											
100	100	0.043	0.069	0.041	0.064	0.123	-0.042	-0.061	-0.014	-0.001	0.036
	200	0.042	0.067	0.040	0.061	0.183	-0.041	-0.059	-0.010	-0.003	0.010
	400	0.039	0.060	0.039	0.058	0.192	-0.038	-0.053	-0.008	0.001	0.011
200	100	0.037	0.053	0.031	0.053	0.095	-0.037	-0.047	0.004	0.016	0.056
	200	0.035	0.047	0.031	0.054	0.116	-0.035	-0.042	0.005	0.011	0.036
	400	0.035	0.043	0.031	0.050	0.142	-0.034	-0.038	0.007	0.012	0.029
400	100	0.033	0.037	0.034	0.056	0.074	-0.033	-0.031	0.014	0.035	0.039
	200	0.032	0.033	0.032	0.050	0.073	-0.032	-0.029	0.014	0.024	0.017
	400	0.031	0.030	0.032	0.052	0.082	-0.031	-0.026	0.018	0.026	0.005

E.3 使用不同 $r_{\max}$估计因子数量

表 11：在不同 $r = 3$下使用不同 r_{max} 估计因子数量

		$r_{\max}$=7		$r_{\max}$=9	
N	T	RMSE	Bias	RMSE	Bias
100	100	0.248	0.046	0.391	0.140
	200	0.238	-0.043	0.200	-0.020
	400	0.309	-0.092	0.258	-0.061
200	100	0.177	0.026	0.184	0.031
	200	0.158	-0.019	0.140	-0.010
	400	0.200	-0.040	0.179	-0.028
400	100	0.128	0.017	0.155	0.023
	200	0.071	-0.003	0.071	0.000
	400	0.105	-0.011	0.087	-0.007

表 12：在不同 $r = 5$下使用不同 r_{max} 估计因子数量

		$r_{\max}$=7		$r_{\max}$=9	
N	T	RMSE	Bias	RMSE	Bias
100	100	0.252	0.014	0.272	0.056
	200	0.280	-0.071	0.219	-0.037
	400	0.346	-0.115	0.294	-0.084
200	100	0.163	0.011	0.177	0.024
	200	0.170	-0.022	0.107	-0.010
	400	0.212	-0.043	0.166	-0.025
400	100	0.124	0.014	0.150	0.023
	200	0.084	-0.004	0.059	-0.002
	400	0.120	-0.015	0.100	-0.009

E.4 因子强度差距较小时的错误发现率与检验功效

表13： $r = 3$下， $\alpha = (0.8, 0.75, 0.7)$时的错误发现率与检验功效

N	T	FDR_1	FDR_2	FDR_3	$\overline{\mathrm{FDR}}$	Power_1	Power_2	Power_3	$\overline{\mathrm{Power}}$
100	100	0.331	0.454	0.606	0.407	0.802	0.411	0.332	0.592
	200	0.322	0.443	0.587	0.397	0.836	0.421	0.370	0.619
	400	0.318	0.440	0.591	0.393	0.873	0.440	0.374	0.644
200	100	0.337	0.458	0.606	0.409	0.829	0.422	0.365	0.622
	200	0.331	0.462	0.570	0.400	0.856	0.418	0.394	0.640
	400	0.328	0.443	0.593	0.397	0.891	0.442	0.398	0.666
400	100	0.338	0.470	0.578	0.406	0.846	0.428	0.422	0.653
	200	0.331	0.457	0.590	0.400	0.878	0.433	0.427	0.672
	400	0.328	0.463	0.580	0.397	0.916	0.438	0.446	0.698

E.5 r 未知时主成分估计量的估计结果

表2和表6报告的结果是在因子数量已知的情况下得到的，我们也采用各个提出的方法对因子数量进行估计，这更符合实际情况，也能更准确地反映因子数量的估计可能对后续估计量产生的影响；相关结果见表14和表15。结果表明，主要结论基本仍然成立，但当 N 和 T 都相对较小时，均方根误差^C 的比较除外。

表14： $r = 3$ 未知时因子模型的估计

		TR^F				TR^Λ				RMS				E^C			
N	T	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res
100	100	**0.922**	0.896	0.903	0.903	0.715	0.897	0.873	**0.899**	0.956	0.647	0.625	**0.620**				
	200	**0.935**	0.904	0.906	0.906	0.789	0.920	0.907	**0.921**	0.941	0.617	0.599	**0.596**				
	400	**0.941**	0.934	0.926	0.926	**0.825**	0.796	0.805	0.809	**0.935**	0.969	0.953	0.953				
200	100	**0.955**	0.936	0.935	0.935	0.743	**0.908**	0.867	0.902	0.883	0.588	0.565	**0.558**				
	200	**0.965**	0.944	0.946	0.946	0.810	**0.926**	0.904	0.924	0.874	0.562	0.549	**0.544**				
	400	**0.969**	0.962	0.965	0.965	0.852	0.836	0.863	**0.872**	0.871	0.883	**0.866**	**0.866**				
400	100	**0.969**	0.929	0.857	0.857	**0.749**	0.616	0.597	0.617	**0.812**	0.892	0.871	0.870				
	200	**0.976**	0.960	0.966	0.966	0.815	0.751	0.823	**0.848**	**0.804**	0.843	0.809	0.808				
	400	**0.980**	0.975	0.977	0.977	0.858	0.842	0.865	**0.880**	**0.797**	0.815	0.798	0.798				

表 15: $r = 5$ 未知时因子模型的估计

		TR^F				TR^Λ				$RMSE^C$			
N	T	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res	PC	Ada	Deb	Res
100	100	**0.946**	0.912	0.914	0.914	0.774	0.890	0.895	**0.905**	1.585	0.995	**0.950**	**0.950**
	200	**0.953**	0.922	0.924	0.924	0.819	0.913	0.917	**0.923**	1.586	0.963	**0.937**	**0.937**
	400	**0.956**	0.945	0.952	0.952	0.844	0.808	**0.849**	**0.849**	**1.588**	1.608	1.590	1.590
200	100	**0.968**	0.945	0.947	0.947	0.792	0.898	0.893	**0.908**	1.495	0.940	0.897	**0.895**
	200	**0.973**	0.953	0.954	0.954	0.835	0.921	0.918	**0.927**	1.498	0.907	0.883	**0.882**
	400	**0.976**	0.969	0.970	0.970	0.860	0.830	0.862	**0.864**	1.497	1.514	**1.496**	1.497
400	100	**0.980**	0.953	0.961	0.961	0.800	0.689	0.803	**0.815**	**1.420**	1.493	1.434	1.436
	200	**0.983**	0.971	0.972	0.972	0.842	0.773	0.844	**0.851**	**1.418**	1.482	1.442	1.443
	400	**0.985**	0.979	0.980	0.980	0.865	0.833	0.867	**0.872**	1.422	1.439	**1.420**	**1.420**