圆形区域上一类偏泛函微分方程的等变 Hopf 分岔

Yaqi Chen

哈尔滨工业大学数学系，

中国山东省威海市，邮编*264209*。

曾显义

美国宾夕法尼亚州伯利恒市利哈伊大学数学系，邮编 *18015*。

Ben Niu *

哈尔滨工业大学数学系，

中国山东省威海市，邮编 *264209*。

(*niu@hit.edu.cn.)

（日期：2023年5月11日）

arXiv:2305.05979v1 [math.DS] 10 May 2023

摘要

圆形区域常见于生态学、生物学和化学领域。本文研究二维圆盘上满足诺伊曼边界条件的偏泛函微分方程的等变 Hopf 分岔。通过研究等变正规形，我们严格分析了平衡态附近这些分岔的性质。我们选取两个具有离散时滞的反应扩散系统作为数值示例，以验证理论结果。在分岔点附近，我们发现了空间非均匀周期解（包括驻波和旋转波）以及空间均匀周期解。

Keywords: Circular domain, Partial functional differential equations, Equivariant Hopf bifurcation, Standing waves, Rotating waves

一、引言

反应扩散方程的研究在物理学、化学、医学、生物学和生态学中发挥着重要作用。在 [1–5]中，人们提出了许多数学问题，例如解和行波的存在性、有界性、正则性与稳定性。近年来，时滞的影响引起了广泛关注，Hopf分岔分析成为解释反应扩散系统乃至更一般的偏泛函微分方程（PFDEs）中复杂现象的有效工具。Wu [6] 通过将系统限制在拉普拉斯算子的特征空间上，为偏泛函微分方程提出了一个一般的Hopf分岔定理。Faria [7] 给出了一个直接计算带参数偏泛函微分方程正规形的框架。基于这些理论，人们在局部Hopf分岔 [8–14] 或其他余维二分岔 [15–18]的研究中取得了许多成果。

对称性现象在现实世界的模型中十分常见，这通常会导致重特征值的出现，而泛函微分方程的标准 Hopf 分岔理论无法应用于解决此类问题。Golubitsky 等人 [19] 利用群论刻画了对称系统中的跃迁，并建立了针对多种对称群的分岔理论。基于这些理论，随后出现了许多关于对称性的研究。首先，一些研究人员关注非线性光学系统，这类系统能够有效地描述圆形衍射等光学问题 [20–22]。此外，由n 个相同元素组成的Hopfield-Cohen-Grossberg网络也具有一定的对称性，相关研究见 [23–25]。此外，针对建立模型时具有$O(2)$对称性的区域，也已有大量研究。例如，Gils 和 Mallet-Paret [26] 研究了$O(2)$对称性存在时的 Hopf分岔，并将正规形的相图区分为六种情况。在 [27], 中，Schley 研究了具有 Neumann 边界条件的圆盘上的时滞抛物型方程，并利用特征函数方法证明了旋转波的存在性。

近年来，关于中立型泛函微分方程 [28, 29] 和混合型泛函微分方程 [30] 中的等变 Hopf 分岔，已有一系列研究成果。特别是，Guo [31] 应用等变 Hopf 分岔定理，研究了二维圆盘上具有齐次 Dirichlet 边界条件的时滞金兹堡-朗道方程的 Hopf分岔。最近，Qu 和 Guo 应用 Lyapunov-Schmidt约化，研究了单位圆盘 [32],上非齐次稳态解的存在性；与此同时，具有对称性的各种时空解也已被发现，正如文中所述，

研究这些方程的各向同性子群 [19, 23, 33, 34]。

事实上，圆盘是一个具有 $O(2)$ 对称性的典型区域，通常用于描述许多现实问题。例如，在物理学中，人们经常在圆形孔径 [35–37]的情形下观察到旋转波。在化学实验中，人们通常在圆形培养皿中研究化学反应，其尺寸可能会影响螺旋波的存在性及其形态 [38, 39]。在生态学领域，一些湖泊可以抽象为圆形区域，用于研究捕食者与猎物之间的相互作用；圆形区域上捕食者-猎物系统的数学建模已在 [40, 41]中进行了总结。我们发现，对于二维圆形区域上的一般偏泛函微分方程，完整的正规形推导和分岔分析仍然缺乏。因此，本文旨在研究定义于圆盘上、具有齐次 Neumann 边界条件的一般偏泛函微分方程，并改进 [7, 42, 43] 中建立的中心流形约化技术，将其用于圆形区域上偏泛函微分方程的正规形推导，以填补这一空白。

与 [6], 中由于 $O(2)$ 对称性导致出现多个纯虚特征值的结果相比，拉普拉斯算子的特征空间有时是二维的，这使得分岔点处平衡态的中心子空间维数更高。通过引入与 [7], 中类似的算子，我们以显式公式推导出圆盘上一般偏泛函微分方程的等变 Hopf 分岔正规形，这些公式可直接应用于一些具有实际意义的模型，或其他类型圆形区域上的模型，例如环形区域或圆形扇区。借助正规形，我们在一个时滞捕食者—猎物模型中找到了驻波解和旋转波解。为此，我们显式计算了正规形中的所有系数。

本文结构如下。第二节回顾圆形区域上拉普拉斯算子的特征值问题，并探讨 Hopf 分岔的存在性。第三节研究中心流形上等变 Hopf 分岔的性质，并在本节严格推导正规形。第四节选取两类具有离散时滞的反应扩散方程，并通过数值求解验证理论结果。

II. 预备知识

A. 圆形区域上的拉普拉斯算子的特征值问题

圆形区域上与拉普拉斯算子相关的特征值问题可按标准方式给出，参见 [44, 45]。为便于研究，我们采用类似的方法处理该特征值问题，并在此陈述主要结果。考虑如下圆盘

$$\mathbb{D} = \{(r,\theta) : 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

用笛卡尔坐标定义的拉普拉斯算子为 $\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi$。令 $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, 则可将其转换为极坐标形式 $\Delta_{r\theta}\varphi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\varphi + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varphi$。

需要考虑以下特征值问题，并计算圆盘上的特征向量。

$$\begin{cases} \Delta_{r\theta}\phi = -\lambda\phi, \\ \phi_r'(R,\theta) = 0, \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{1}$$

利用分离变量法，并令 $\phi(r\ \theta) = P(r)\Phi(\theta)$，可得对应于 λ_{mn} 的特征函数为

$$\phi_{nm}(r,\theta) = J_n\left(\sqrt{\lambda_{nm}}r\right)\Phi_n(\theta), \tag{2}$$

with

$$\Phi_n(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta, \tag{3}$$

and

$$J_n(\rho) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2m}. \tag{4}$$

选择λ_{nm} 使其满足边界条件$P'(R) = 0$。

注释 II.1. 考虑到 *Neumann*边界条件，我们有 $J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nm}}R\right) = 0$，这表明 $\sqrt{\lambda_{nm}}R$ 是$J_n'(\sqrt{\lambda}r)$ 的根。我们用 α_{nm} 表示这些非零根，并假设它们按递增顺序编号，即 $J_n'(\alpha_{nm}) = 0$, $\alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \alpha_{n3} < \cdots$，其中 $n \ge 0$ 表示贝塞尔函数的指标，$m \ge 1$ 表示这些根的指标。因此， $\lambda_{nm} = (\alpha_{nm}/R)^2$。为方便起见，我们使用 $\alpha_{00} = 0, \lambda_{00} = 0$。

注 II.2. 根据标准的斯图姆-刘维尔定理，我们知道，对于任意给定的非负整数 n，J_n（$\alpha_{nm}r$）在区间 $[0,R]$，上关于权函数 r 构成正交集，其中 J_n'（α_{nm}）$=0$。也就是说，对于任意给定的 m、k，我们有

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\right)J_n\left(\frac{\alpha_{nk}}{R}r\right)\mathrm{d}r=\begin{cases}0, & m\neq k,\\ \frac{R^2}{2}\left[1-\left(\frac{n}{\alpha_{nm}}\right)^2\right]J_n^2(\alpha_{nm}), & m=k.\end{cases}$$

此外，对于任意给定的非负整数 n，包含 α_{00} 的函数系$\{J_n\left(^{\alpha_{nm}}R\,r\right)\}$ 在带权函数 r 的 $\mathbb{L}^2$ 范数下，在空间 $\mathbb{L}^2[0,R]$ 中是完备的。此外，三角函数系在区间 $[0,2\pi]$ 上是正交的，并且在空间 $\mathbb{L}^2[0,2\pi]$ 中是完备的。因此，对于 $n=0$、1、2、$\cdots$、$m=1$、2、$\cdots$，我们使用该空间的复化以及函数系统。

$$\phi_0,\ \phi_{nm}^c,\ \phi_{nm}^s,$$

在 $\mathbb{L}^2\{0\le\theta\le2\pi,0\le r\le R\}$ 空间中构成以 r 为权函数的正交基。

$$\phi_0=J_0\left(\frac{\alpha_{00}}{R}r\right)=1,\ \phi_{nm}^c=J_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \phi_{nm}^s=\overline{\phi_{nm}^c}=J_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}.$$

根据上述分析，我们可以得出以下结论。

定理 II.3. 在 $\mathbb{D}$ 上满足齐次诺伊曼条件（$r=R$）的拉普拉斯方程的解可表示为

$$\varphi(r,\theta)=\phi_0(r,\theta)+A_{nm}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\phi_{nm}^c(r,\theta)+B_{nm}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\phi_{nm}^s(r,\theta),$$

where

$$A_{nm}=\frac{\delta_n}{R^2\pi\left[1-\left(\frac{n}{\alpha_{nm}}\right)^2\right]J_n^2(\alpha_{nm})}\int_0^R\int_0^{2\pi}r\varphi(r,\theta)J_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$B_{nm}=\frac{2}{R^2\pi\left[1-\left(\frac{n}{\alpha_{nm}}\right)^2\right]J_n^2(\alpha_{nm})}\int_0^R\int_0^{2\pi}r\varphi(r,\theta)J_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{R}r\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

$$\delta_n=\begin{cases}1,n=0,\\ 2,n\neq0.\end{cases}$$

这意味着，对于 $n=0$，对应于特征值 λ_{0m} 的特征空间由 ϕ_{0m}^c, $m=0$、1、$\cdots$张成。对于 $n>0$，对应于特征值 λ_{nm} 的特征空间由 ϕcnm 和ϕsnm，$m=1$、2、$\cdots$张成。

注 II.4. 上述特征值问题可以直接应用于环形区域

$$\tilde{\mathbb{D}} = \{(r,\theta):\ R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

区别在于，齐次诺伊曼条件分别施加于 $r = R_1$ 和 $r = R_2$处。此外，P（r）变为

$$P_n(\sigma_{nm}, r) = A_n J_n(\frac{\sigma_{nm}}{R_2} r) + B_n N_n(\frac{\sigma_{nm}}{R_2} r),$$

其中 $N_n(\rho) = J_n(\rho)\cos n\pi - J_{-n}(\rho)\sin n\pi$。于是，$P^n(\sigma_{nm}, r)\|P_n(\sigma_{nm}, r)\|_2, 2$ 构成空间 $\mathbb{L}^2\{R_1 \le r \le R_2\}$ 的标准正交基。下文的分岔分析过程中不会有显著差异。

事实上，在圆扇形域中的上述特征值分析

$$\hat{\mathbb{D}} = \{(r,\theta):\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \Theta,\ \Theta < \pi\},$$

也类似。区别在于，齐次诺伊曼条件使 Φ（θ）变为Φ_n（θ）$= \cos n \frac{\pi}{\Theta}\theta$。后续的计算过程甚至更简单，它是对一维区间情形的直接推广。

B. Hopf分岔的存在性

我们考虑如下定义在圆盘上、满足齐次诺伊曼边界条件的一般偏泛函微分方程:

$$\frac{\partial U(t,x,y)}{\partial t} = D(\nu)\Delta U(t,x,y) + L(\nu)U_t(x,y) + F\left(U_t(x,y),\nu\right), \tag{5}$$

其中 $t \in [0,+\infty)$ $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < R^2\right\}$,

$$U(t,x,y) = \begin{pmatrix} u_1(t,x,y) \\ u_2(t,x,y) \\ \vdots \\ u_n(t,x,y) \end{pmatrix},\ U_t(\vartheta)(x,y) = \begin{pmatrix} u_t^1(\vartheta)(x,y) \\ u_t^2(\vartheta)(x,y) \\ \vdots \\ u_t^n(\vartheta)(x,y) \end{pmatrix},\ D(\nu) = \begin{pmatrix} d_1(\nu) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\nu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n(\nu) \end{pmatrix},$$

$\mathrm{d}_i(\nu) > 0, \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}$ $\nu \in \mathbb{R}, \mathrm{U}_t(\vartheta)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{U}(\mathrm{t} + \vartheta, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ $\vartheta \in [-\tau, 0], \mathrm{U}_t(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \tilde{\mathscr{C}} := \mathrm{C}([-\tau, 0], \tilde{\mathscr{X}}_{\mathbb{C}})$, $\mathrm{L}: \mathbb{R} \times \tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$是一个有界线性算子，而 $\mathrm{F}: \tilde{\mathscr{C}} \times \mathbb{R} \to \mathscr{X}_{\tilde{\mathscr{C}}}$是一个 $\mathrm{C}^k(\mathrm{k} \ge 3)$ 函数，满足 $\mathrm{F}(0,\nu) = 0$，$\mathrm{D}\varphi\mathrm{F}(0,\nu) = 0$，其中该符号表示 $\mathrm{F}(\varphi,\nu)$ 关于 φ 在 $\varphi = 0$处的 Fréchet导数。

$$\tilde{\mathscr{X}}_{\mathbb{C}} = \left\{\tilde{U}(x,y) \in W^{2,2}(\Omega) : \nabla\tilde{U}(x,y)\cdot\eta = 0, (x,y) \in \partial\Omega\right\},$$

~其中 η 是外法向单位向量。这里我们使用复化空间 $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$，因为在正规形推导中，复形式的特征向量更便于缩短表达式。

现在我们基于系统 (5) 探讨 Hopf分岔 的存在条件。再次令 $x = r\cos\ \theta, y = r\sin\ \theta$，则区域 Ω变换为 $\mathbb{D} = \{(r\ \theta) :\ 0 \le r < R\ 0 \le \theta < 2\pi\}$。为简便起见，我们仍使用 (5) 中的符号。系统 (5) 可转换为极坐标下的

$$\frac{\partial U(t,r,\theta)}{\partial t} = D(\nu)\Delta_{r\theta}U(t,r,\theta) + L(\nu)U_t(r,\theta) + F\left(U_t(r,\theta),\nu\right), \tag{6}$$

类似地，定义相空间

$$\mathscr{C} := C([-\tau,0],\mathscr{X}_{\mathbb{C}}),$$

其中

$$\mathscr{X}_{\mathbb{C}} = \left\{\tilde{U}(r,\theta) \in W^{2,2}(\mathbb{D}) : \partial_r\tilde{U}(R,\theta) = 0,\ \theta \in [0,2\pi)\right\},$$

其内积为 $\langle u(r\ \theta), v(r\ \theta)\rangle = \iint_{\mathbb{D}} ru(r\ \theta)\ \bar{}v(r\ \theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中权函数为 r，适用于 $u(r\ \theta), v(r\ \theta) \in \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$。然后，$U_t(r\ \theta) \in \mathscr{C}$。

在原点处对系统 (6) 进行线性化，得到

$$\frac{\partial U(t,r,\theta)}{\partial t} = D(\nu)\Delta_{r\theta}U(t,r,\theta) + L(\nu)U_t(r,\theta). \tag{7}$$

(7) 的特征方程为

$$\gamma\varphi - D(\nu)\Delta_{r\theta}\varphi - L(\nu)(\mathrm{e}^{\gamma\cdot}\varphi) = 0, \tag{8}$$

其中，对于 $\vartheta \in [-\tau,0]$，$\mathrm{e}^{\gamma\cdot}(\vartheta)\varphi = \mathrm{e}^{\gamma\vartheta}\varphi$，且 γ是方程（7）的一个特征值。根据定理 II.3，我们发现，求解（8）等价于求解以下两组特征方程。第一组为

$$\det\left[\gamma I + \lambda_{0m}D(\nu) - L(\nu)(\mathrm{e}^{\gamma\cdot}I)\right] = 0,\ m = 0,1,2,\cdots. \tag{9}$$

第二组方程具有多个根，因为 λ_{nm}，$n = 1$，2，$\cdots$，m =1，2，$\cdots$的特征空间是二维的。它们是

$$\det\left[\gamma I + \lambda_{nm}D(\nu) - L(\nu)(\mathrm{e}^{\gamma\cdot}I)\right]^2 = 0,\ n = 1,2,\cdots,\ m = 1,2,\cdots. \tag{10}$$

为了研究Hopf分岔，我们假设对于某个$\nu_{\hat{\lambda}}$，$\lambda=\lambda_{0m}$ 或 λ_{nm}，以下条件成立。

$\hat{}$ (H_1) 存在 $\nu_{\hat{\lambda}}$, $\lambda=\lambda_{0m}$ 的一个邻域 $\mathscr{U}_1$，使得对于 $\nu\in\mathscr{U}_1$，系统 (7) 有一对复单共轭特征值 $\alpha_{\hat{\lambda}}(\nu)\pm i\omega_{\hat{\lambda}}(\nu)$，且当 $\nu\in\mathscr{U}_1$ 时，(7) 的其余特征值的实部均非零。

$\hat{}$ (H_2) 存在 $\nu_{\hat{\lambda}}$, $\lambda=\lambda_{nm}$ 的一个邻域 $\mathscr{U}_2$，使得对于 $\nu\in\mathscr{U}_2$，系统 (7) 有一对复重共轭特征值 $\alpha_{\hat{\lambda}}(\nu)\pm i\omega_{\hat{\lambda}}(\nu)$，且当 $\nu\in\mathscr{U}_2$ 时，(7) 的其余特征值的实部均非零。

(H_3) $\alpha_{\hat{\lambda}}(\nu)\pm i\omega_{\hat{\lambda}}(\nu)$ 在 ν 中关于 $\alpha_{\hat{\lambda}}(\nu_{\hat{\lambda}})=0$, $\omega_{\hat{\lambda}}(\nu_{\hat{\lambda}})=\omega_{\hat{\lambda}}>$ 连续可微 0.

注释 II.5. 根据 *[19],*，问题 *(6)* 在空间维数上具有 Γ 等变性，并具有 $\Gamma=O(2)$对称性。例如，将系统 *(6)* 的右端写作 $\mathscr{F}(U(t,r\ \theta))$，则有

$$\mathscr{F}(\kappa U(t,r,\theta))=\kappa\mathscr{F}(U(t,r,\theta)),\forall\kappa\in\Gamma.$$

因此，在下文中，经过该群作用后的任意解仍然是该方程的解。

由 [19, 24, 42, 46] 和注释 II.5 可知，若 (H_1) 和 (H_3) 或 (H_2) 和 (H_3) 成立，并注意到 $\hat{\nu}=\min\{\nu_{\hat{\lambda}}\}$，则 Hopf 分岔发生在临界值 $\nu=\hat{}\nu$ 处。当 $\hat{}$ $\lambda=\lambda_{0m},m=0,1,2,\cdots$ 时，平衡态的中心子空间是二维的，因此称之为标准 $\hat{}$ Hopf分岔。当 $\lambda=\lambda_{nm},n=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots$ 时，平衡态的中心子空间是四维的，我们称之为（实）等变 Hopf 分岔。在接下来的章节中，我们将计算E^*附近的等变 Hopf 分岔。

III. Hopf 分岔分析

A. PFDE 的正规形

本节将利用 [6, 7, 26, 33, 42] 中的理论，研究 E^* 附近等变 Hopf 分岔的性质。

令 $\nu=\hat{}\nu+\mu$，其中 ν 在 II B 小节中给出，且 $\mu\in\mathbb{R}$，按照 [7], 中提出的方法，并使用 μ 作为新变量，$L(\hat{}\nu+\mu)$ 和 $D(\hat{}\nu+\mu)$ 的泰勒展开如下

$$L(\hat{\nu}+\mu)=\tilde{L}_0+\mu\tilde{L}_1+\frac{1}{2}\mu^2\tilde{L}_2+\cdots,$$

$$D(\hat{\nu}+\mu)=\tilde{D}_0+\mu\tilde{D}_1+\frac{1}{2}\mu^2\tilde{D}_2+\cdots,$$

其中 $\tilde{D}_0=D(\hat{\nu})$ $\tilde{L}_0(\cdot)=L(\hat{\nu})(\cdot)$ 是一个从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ 的线性算子。现在，在空间 $\mathscr{C}$ 中，系统 (6) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=\tilde{D}_0\Delta_{r\theta}U(t)+\tilde{L}_0U_t+\tilde{F}\left(U_t,\mu\right), \tag{11}$$

其中 $\tilde{F}(\varphi,\mu)=[D(\hat{\nu}+\mu)-\tilde{D}_0]\Delta_{r\theta}\varphi(0)+[L(\hat{\nu}+\mu)-\tilde{L}_0](\varphi)+F(\varphi,\hat{\nu}+\mu)$，并由此得到 (11) 的线性化系统如下。

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=\tilde{D}_0\Delta_{r\theta}U(t)+\tilde{L}_0U_t. \tag{12}$$

1. $\mathscr{C}$的分解

令$A:\ \mathscr{C}\to\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ 表示由（12）的解所诱导的半群的无穷小生成元，且A^* 是A的伴随算子，它们满足

$$A\varphi(\vartheta)=\begin{cases}\varphi'(\vartheta), & \vartheta\in[-\tau,0),\\ \tilde{D}_0\Delta_{r\theta}\varphi(0)+\tilde{L}_0\varphi, & \vartheta=0,\end{cases} \tag{13}$$

$$A^*\psi(\rho)=\begin{cases}-\psi'(\rho), & \rho\in(0,\tau],\\ -\tilde{D}_0\Delta_{r\theta}\psi(0)-\tilde{L}_0\psi, & \rho=0.\end{cases} \tag{14}$$

此外，定义一个双线性配对

$$(\psi,\varphi)=\langle\varphi(0),\psi(0)\rangle-\int_{-\tau}^{0}\langle\varphi(\xi),\tilde{L}_0\psi(\xi+\tau)\rangle\mathrm{d}\xi. \tag{15}$$

根据IIB小节中的讨论，我们知道A 具有一对重纯虚特征值 $\pm\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}$ ，它们也是A^*的特征值。设中心子空间P 和P^* 分别为A 和A^* 关于 $\Lambda_0=\{\pm\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}},\pm\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\}$的广义特征空间。$P^*$ 是P的伴随空间。一项重要任务是通过P和P^*中基之间的关系，将空间 $\mathscr{C}$ 分解为$P_{CN}\oplus Q_S$，其中P_{CN} 是中心子空间，Q_S 是其补空间。

Define

$$\hat{\phi}^c_{nm}=\frac{\phi^c_{nm}}{\|\phi^c_{nm}\|_{2,2}},\ \hat{\phi}^s_{nm}=\frac{\phi^s_{nm}}{\|\phi^s_{nm}\|_{2,2}}.$$

引理 III.1。 设 P 的基为

$$\Phi_{r\theta}(\vartheta)=\left(\Phi^1_{r\theta}(\vartheta),\Phi^2_{r\theta}(\vartheta)\right)=\left(\Phi^1(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^c_{nm},\Phi^2(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^s_{nm}\right),\ \vartheta\in[-\tau,0], \tag{16}$$

with

$$\Phi^1_{r\theta}(\vartheta)=\left(\Phi_1(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^c_{nm},\Phi_2(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^c_{nm}\right)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\xi\hat{\phi}^c_{nm},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\bar{\xi}\hat{\phi}^c_{nm}\right),$$

$$\Phi^2_{r\theta}(\vartheta)=\left(\Phi_3(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^s_{nm},\Phi_4(\vartheta)\cdot\hat{\phi}^s_{nm}\right)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\xi\hat{\phi}^s_{nm},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\bar{\xi}\hat{\phi}^s_{nm}\right),$$

其中，ξ可记为 $\xi=(p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n})^{\mathrm{T}}$。伴随空间 P^* 的一个基为

$$\Psi_{r\theta}(\rho)=\left(\Psi^1_{r\theta}(\rho),\Psi^2_{r\theta}(\rho)\right)^{\mathrm{T}}=\left(\Psi^1(\rho)\cdot\hat{\phi}^c_{nm},\Psi^2(\rho)\cdot\hat{\phi}^s_{nm}\right)^{\mathrm{T}},\ \rho\in[0,\tau], \tag{17}$$

with

$$\Psi^1_{r\theta}(\rho)=\left(\Psi_1(\rho)\cdot\hat{\phi}^c_{nm},\Psi_2(\rho)\cdot\hat{\phi}^c_{nm}\right)^{\mathrm{T}}=\left(q^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\rho}\xi^{\mathrm{T}}\hat{\phi}^c_{nm},\bar{q}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\rho}\bar{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{\phi}^c_{nm}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi^2_{r\theta}(\rho)=\left(\Psi_3(\rho)\cdot\hat{\phi}^s_{nm},\Psi_4(\rho)\cdot\hat{\phi}^s_{nm}\right)^{\mathrm{T}}=\left(q^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\rho}\xi^{\mathrm{T}}\hat{\phi}^s_{nm},\bar{q}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\rho}\bar{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{\phi}^s_{nm}\right)^{\mathrm{T}},$$

根据式 *(15)* 定义的伴随双线性型，q 可由 $(\Psi_{r\theta},\Phi_{r\theta})=I$ 得到。

可以将U_t 分解为两部分:

$$U_t=U_t^P+U_t^Q=\sum_{k=1}^{2}\Phi^k_{r\theta}\left(\Psi^k_{r\theta},U_t\right)+U_t^Q=\sum_{k=1}^{2}\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y_t, \tag{18}$$

其中 $z^k_{r\theta}=\left(\Psi^k_{r\theta},U_t\right),y_t\in Q_s$。定义$z=(z^1_{r\theta},z^2_{r\theta})\equiv(z_1,z_2,z_3,z_4)^{\mathrm{T}}$为四维中心流形上的局部坐标系，该坐标系由基 $\Phi_{r\theta}$ 诱导。

于是，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=\tilde{B}z(t)+\begin{pmatrix}\left\langle\tilde{F}(\sum_{k=1}^{2}\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu),\Psi^1_{r\theta}(0)\right\rangle\\ \left\langle\tilde{F}(\sum_{k=1}^{2}\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu),\Psi^2_{r\theta}(0)\right\rangle\end{pmatrix},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=A_Qy+(I-\pi)X_0\tilde{F}\left(\sum_{k=1}^{2}\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu\right),\end{aligned} \tag{19}$$

其中，A_Q 是Q_s上的A 的限制，$A_Q\varphi=A\varphi$ 适用于 $\varphi\in Q_s$, $\pi\colon\mathscr{C}\to P_{CN}$ 是投影，并且

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}&0&0&0\\0&-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}&0&0\\0&0&\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\end{pmatrix}.$$

根据形式泰勒展开 $\tilde{F}(\varphi,\mu)=\sum_{j\geq2}\frac{1}{j!}\tilde{F}j(\varphi,\mu)$，(19) 可写为

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=\tilde{B}z(t)+\sum_{j\geq2}\frac{1}{j!}f^1_j(z,y,\mu),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=A_Qy+\sum_{j\geq2}\frac{1}{j!}f^2_j(z,y,\mu),\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$f_j=(f^1_j,f^2_j)$，$j\geq 2$定义为

$$\begin{aligned} f_j^1(z,y,\mu)&=\begin{pmatrix}\langle \tilde{F}(\sum_{k=1}^2\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu),\Psi^1_{r\theta}(0)\rangle\\ \langle \tilde{F}(\sum_{k=1}^2\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu),\Psi^2_{r\theta}(0)\rangle\end{pmatrix},\\ f_j^2(z,y,\mu)&=(I-\pi)X_0\tilde{F}_j\left(\sum_{k=1}^2\Phi^k_{r\theta}z^k_{r\theta}+y,\mu\right).\end{aligned} \tag{21}$$

根据 [7], ，我们得到原点处中心流形上的正规形为

$$\begin{aligned} \dot{z}(t)&=\tilde{B}z(t)+\frac{1}{2}g_2^1(z,y,\mu)+\frac{1}{6}g_3^1(z,y,\mu)+h.o.t.,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=A_Qy+\frac{1}{2}g_2^2(z,y,\mu)+\frac{1}{6}g_3^2(z,y,\mu)+h.o.t.,\end{aligned} \tag{22}$$

其中，$g=(g^1_j、g^2_j)、j\geq 2$由下式给出。

$$g_j(z,y,\mu)=\bar{f}_j(z,y,\mu)-M_jU_j(z,\mu),$$

其中，$\bar{f}^1_j$表示在完成截至$j-1$阶的正规形计算后，(z,y)中j阶的项；$U_j=(U^1_j,U^2_j)$表示将g_j变换为f_j的变量变换，而算子$M_j=(M^1_j,M^2_j)$定义为

$$\begin{aligned} M_j^1&:\mathbb{V}_j^5(\mathscr{C}^4)\to\mathbb{V}_j^5(\mathscr{C}^4),\\ M_j^1U_j^1&=D_zU_j^1(z,\mu)\tilde{B}z-\tilde{B}U_j^1(z,\mu),\\ M_j^2&:\mathbb{V}_j^5(Q_s)\to\mathbb{V}_j^5(\mathrm{Ker}\pi),\\ M_j^2U_j^2&=D_zU_j^2(z,\mu)\tilde{B}z-A_QU_j^2(z,\mu),\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\mathbb{V}_j^5(Y)$ 表示由$z=(z_1,z_2,z_3,z_4)^{\mathrm{T}}$构成的齐次多项式空间，且其系数属于 $\mathscr{C}^4$。

很容易验证，

$$M_j^1(\mu z^pe_k)=\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\mu\left(p_1-p_2+p_3-p_4+(-1)^k\right)z^pe_k,\ |p|=j-1, \tag{24}$$

其中$j\geq 2$，$k=1$，2，3，4，以及 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$是 $\mathscr{C}^4$ 的标准基。

2. 计算 $g_2^1(z0,\mu)$

对于 $j=2$，与 [22, 33], 中的结果类似，我们有

$$\mathrm{Ker}(M_2^1)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\mu z_1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\mu z_2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\mu z_3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\mu z_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mu z_3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\mu z_4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\mu z_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\mu z_2\end{pmatrix}\right\},$$

then

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(M_2^1)\cap\mathrm{span}\left\{\mu z^p e_k;|p|=1,k=1,2,3,4\right\}\\=&\mathrm{span}\left\{\mu x_1e_1,\mu x_3e_1,\mu x_2e_2,\mu x_4e_2,\mu x_1e_3,\mu x_3e_3,\mu x_2e_4,\mu x_4e_4\right\}.\end{aligned}$$

因此，$\tilde{F}(U_t,\mu)$ 的二阶项为

$$\tilde{F}_2(U_t,\mu)=\mu\tilde{D}_1\Delta U_t(0)+\mu\tilde{L}_1U_t+F_2(U_t,\mu),\tag{25}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2(z,y,\mu)&=\tilde{F}(\Phi_{r\theta}z+y,\mu)\\&=\mu\tilde{D}_1\Delta(\Phi_{r\theta}(0)z+y(0))+\mu\tilde{L}_1(\Phi_{r\theta}z+y)+F_2(\Phi_{r\theta}z+y,\mu).\end{aligned}\tag{26}$$

由于$F(0,\mu)=0, DF(0,\mu)=0$, $F_2(\Phi_{r\theta}z+y\ \mu)$ 可写为

$$\begin{aligned}F_2(\Phi_{r\theta}z+y,\mu)&=F_2(\Phi_{r\theta}z+y,0)\\&=\sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=2}A_{p_1p_2p_3p_4}\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4}z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}+S_2(\Phi_{r\theta}z,y)+o(|y|^2),\end{aligned}\tag{27}$$

其中，S_2 表示y的线性项，可通过$DF_2(\Phi_{r\theta}z+y,0)|_{y=0}(y)$计算得到。

根据式 (20)-(27)，注意到这一事实

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}r\hat{\phi}_{nm}^c\hat{\phi}_{nm}^s\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=1,$$

以及 $\Phi_{r\theta}$ 和 $\Psi_{r\theta}$之间的关系，我们得到

$$\frac{1}{2}g_2^1(z,0,\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_2^1)}f_2^1(z,0,\mu)=\begin{pmatrix}B_{11}\mu z_1\\\overline{B_{11}}\mu z_2\\B_{11}\mu z_3\\\overline{B_{11}}\mu z_4\end{pmatrix},\tag{28}$$

with

$$B_{11}=\frac{1}{2}\overline{\Psi_1(0)}(-\lambda_{nm}\tilde{D}_1\Phi_1(0)+\tilde{L}_1\Phi_1).\tag{29}$$

3. g_3^1（$z0,\mu$） 的计算

对于 $j=3$，我们有

$$\mathrm{Ker}(M_3^1)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}z_1^2z_2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_1^2z_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1^2z_4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_1^2z_4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_3^2z_2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_3^2z_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_3^2z_4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_3^2z_4\\0\end{pmatrix},\right.$$
$$\begin{pmatrix}0\\z_2^2z_1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_2^2z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\z_2^2z_3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_2^2z_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\z_4^2z_1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_4^2z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\z_4^2z_3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_4^2z_3\end{pmatrix},$$
$$\left.\begin{pmatrix}z_1z_2z_3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_1z_2z_3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1z_3z_4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\z_1z_3z_4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\z_1z_2z_4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_1z_2z_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\z_2z_3z_4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z_2z_3z_4\end{pmatrix}\right\},$$

再次见到 [22, 33]。然后

$$\mathrm{Ker}(M_3^1)\cap\mathrm{span}\left\{\mu z^p e_k;|p|=2,k=1,2,3,4\right\}=\emptyset.$$

We define

$$\bar{f}_3^1(z,0,\mu)=f_3^1(z,0,\mu)+\frac{3}{2}\left[D_zf_2^1(z,0,\mu)U_2^1(z,\mu)+D_yf_2^1(z,0,\mu)U_2^2(z,\mu)-D_zU_2^1(z,\mu)g_2^1(z,0,\mu)\right]. \tag{30}$$

根据 [7],三阶正规形为

$$\begin{aligned}g_3^1(z,0,\mu)&=\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\bar{f}_3^1(z,0,\mu)\\&=\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\bar{f}_3^1(z,0,0)+o(\mu^2|x|).\end{aligned}$$

由于$g_2^1(z,0,0)=0$，我们只需计算三个部分

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}f_3^1(z,0,0),$$

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\left(D_zf_2^1(z,0,0)U_2^1(z,0)\right),$$

and

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\left(D_yf_2^1(z,0,0)U_2^2(z,0)\right).$$

经过计算，我们得出以下主要结果。具体计算过程请参阅附录A。

$$\frac{1}{3!}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)} f_3^1(z,0,0) = \begin{pmatrix} C_{2001}z_1^2 z_4 + C_{1110}z_1 z_2 z_3 \\ \overline{C_{2001}} z_2^2 z_3 + \overline{C_{1110}} z_1 z_2 z_4 \\ C_{2001}z_3^2 z_2 + C_{1110}z_1 z_3 z_4 \\ \overline{C_{2001}} z_4^2 z_1 + \overline{C_{1110}} z_2 z_3 z_4 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

where

$$C_{2001} = \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)} A_{2001}\mathrm{M}_{22},\ C_{1110} = \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)} A_{1110}\mathrm{M}_{22}. \tag{32}$$

$$\frac{1}{3!}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{M}_3^1)} \left(D_z f_2^1(z,0,0)U_2^1(z,0)\right) = \mathbf{0}. \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3!}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{M}_3^1)} \left(D_y f_2^1(z,0,0)U_2^2(z,0)\right) \\ &= \begin{pmatrix} E_{2100}z_1^2 z_2 + E_{2001}z_1^2 z_4 + E_{0120}z_3^2 z_2 + E_{0021}z_3^2 z_4 + E_{1110}z_1 z_2 z_3 + E_{1011}z_1 z_3 z_4 \\ \overline{E_{2100}} z_1 z_2^2 + \overline{E_{2001}} z_2^2 z_3 + \overline{E_{0120}} z_4^2 z_1 + \overline{E_{0021}} z_4^2 z_3 + \overline{E_{1110}} z_1 z_2 z_4 + \overline{E_{1011}} z_2 z_3 z_4 \\ E_{2100}z_3^2 z_4 + E_{2001}z_3^2 z_2 + E_{0120}z_1^2 z_4 + E_{0021}z_1^2 z_2 + E_{1110}z_1 z_3 z_4 + E_{1011}z_1 z_2 z_3 \\ \overline{E_{2100}} z_3 z_4^2 + \overline{E_{2001}} z_4^2 z_1 + \overline{E_{0120}} z_2^2 z_3 + \overline{E_{0021}} z_1^2 z_2 + \overline{E_{1110}} z_2 z_3 z_4 + \overline{E_{1011}} z_1 z_2 z_4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{34}$$

where

$$\begin{aligned} E_{2100} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{0kcs}^c\left(S_{yz_1}(h_{0k1100}^{ccs}) + S_{yz_2}(h_{0k2000}^{ccs})\right)\right], \\ E_{2001} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{0kcs}^c S_{yz_1}(h_{0k1001}^{ccs}) + \mathrm{M}_{2nkss}^c S_{yz_4}(h_{2nk2000}^{css})\right], \\ E_{0120} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{0kcs}^c S_{yz_2}(h_{0k0020})^{ccs}) + \mathrm{M}_{2nkss}^c S_{yz_3}(h_{2nk0110}^{css})\right], \\ E_{0021} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{2nkss}^c\left(S_{yz_3}(h_{2nk0011}^{css}) + S_{yz_4}(h_{2nk0020}^{css})\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{1110} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{0kcs}^c\left(S_{yz_1}(h_{0k0110}^{ccs}) + S_{yz_2}(h_{0k1010}^{ccs})\right) + \mathrm{M}_{2nkss}^c S_{yz_3}(h_{2nk1100}^{css})\right], \\ E_{1011} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}_{0kcs}^c S_{yz_1}(h_{0k0011}^{ccs}) + \mathrm{M}_{2nkss}^c\left(S_{yz_3}(h_{2nk1001}^{css}) + S_{yz_4}(h_{2nk1010}^{css})\right)\right]. \end{aligned}$$

因此，由式（30）、（31）、（33）和（34），我们得到

$$\frac{1}{3!}g_3^1(z,0,0)=\frac{1}{3!}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{M}_3^1)}\bar{f}_3^1(z,0,0)$$
$$=\begin{pmatrix} B_{2100}z_1^2z_2+B_{2001}z_1^2z_4+B_{0120}z_3^2z_2+B_{0021}z_3^2z_4+B_{1110}z_1z_2z_3+B_{1011}z_1z_3z_4 \\ \overline{B_{2100}}z_1z_2^2+\overline{B_{2001}}z_2^2z_3+\overline{B_{0120}}z_4^2z_1+\overline{B_{0021}}z_4^2z_3+\overline{B_{1110}}z_1z_2z_4+\overline{B_{1011}}z_2z_3z_4 \\ B_{2100}z_3^2z_4+B_{2001}z_3^2z_2+B_{0120}z_1^2z_4+B_{0021}z_1^2z_2+B_{1110}z_1z_3z_4+B_{1011}z_1z_2z_3 \\ \overline{B_{2100}}z_3z_4^2+\overline{B_{2001}}z_4^2z_1+\overline{B_{0120}}z_2^2z_3+\overline{B_{0021}}z_1^2z_2+\overline{B_{1110}}z_2z_3z_4+\overline{B_{1011}}z_1z_2z_4 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

with

$$B_{p_1p_2p_3p_4}=C_{p_1p_2p_3p_4}+\frac{3}{2}(D_{p_1p_2p_3p_4}+E_{p_1p_2p_3p_4}).$$

4. 正规形

基于上述分析，中心流形上的三阶截断正规形可概括如下。

$$\dot{z}_1=i\omega_{\hat{\lambda}}z_1+B_{11}z_1\mu+B_{2100}z_1^2z_2+B_{2001}z_1^2z_4+B_{0120}z_3^2z_2+B_{0021}z_3^2z_4+B_{1110}z_1z_2z_3+B_{1011}z_1z_3z_4,\dot{z}_2=-i\omega_{\hat{\lambda}}z_2+B_{11}z_2\mu+B_{2100}z_1z_2^2+B_{2001}z_2^2z_3+B_{0120}z_4^2z_1+B_{0021}z_4^2z_3+B_{1110}z_1z_2z_4+B_{1011}z_2z_3z_4,\dot{z}_3=i\omega_{\hat{\lambda}}z_3+B_{11}z_3\mu+B_{2100}z_3^2z_4+B_{2001}z_3^2z_2+B_{0120}z_1^2z_4+B_{0021}z_1^2z_2+B_{1110}z_1z_3z_4+B_{1011}z_1z_2z_3,\dot{z}_4=-i\omega_{\hat{\lambda}}z_4+B_{11}z_4\mu+B_{2100}z_3z_4^2+B_{2001}z_4^2z_1+B_{0120}z_2^2z_3+B_{0021}z_1^2z_2+B_{1110}z_2z_3z_4+B_{1011}z_1z_2z_4.$$

(36)

引理 III.2. 由 *[26],* 三阶截断的正规形可化简为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1&=\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_1+B_{11}z_1\mu+B_{2001}z_1^2z_4+B_{1110}z_1z_2z_3, \\ \dot{z}_2&=-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_2+\overline{B_{11}}z_2\mu+\overline{B_{2001}}z_3z_2^2+\overline{B_{1110}}z_1z_2z_4, \\ \dot{z}_3&=\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_3+B_{11}z_3\mu+B_{2001}z_3^2z_2+B_{1110}z_1z_3z_4, \\ \dot{z}_4&=-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_4+\overline{B_{11}}z_4\mu+\overline{B_{2001}}z_1z_4^2+\overline{B_{1110}}z_2z_3z_4. \end{aligned} \tag{37}$$

证明见附录 B。

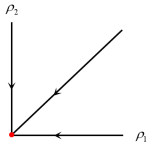
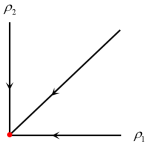
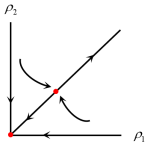
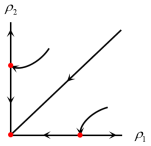
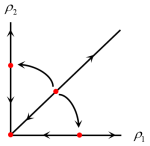
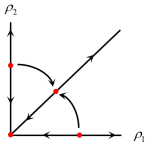
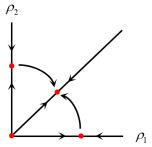
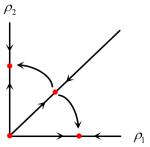
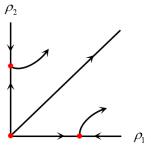
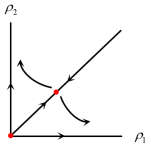
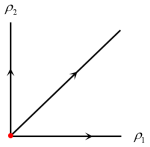
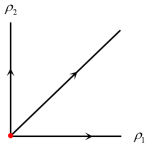
引入两组极坐标

$$\begin{aligned} z_1&=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_1},\ z_4=\rho_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_1}, \\ z_3&=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_2},\ z_2=\rho_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_2}, \end{aligned} \tag{38}$$

TABLE I. The six unfoldings of system (39).

Case	1	2	3	4	5	6
a_2	−	−	−	+	+	+
a_2+a_3	−	−	+	−	+	+
a_2-a_3	−	+	−	+	+	−

TABLE II. The dynamical classifications of system (39) in each case.

	Case 1	Case 2	情形 3	情形 4	情形 5	情形 6
$a_1\mu<0$						
$a_1\mu>0$						

我们可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_1 &= (a_1\mu + a_2\rho_1^2 + a_3\rho_2^2)\rho_1,\\
\dot{\chi}_1 &= \omega_{\hat{\lambda}},\\
\dot{\rho}_2 &= (a_1\mu + a_2\rho_2^2 + a_3\rho_1^2)\rho_2,\\
\dot{\chi}_2 &= \omega_{\hat{\lambda}},
\end{aligned} \tag{39}$$

with

$$a_1 = \mathrm{Re}\{B_{11}\},\ a_2 = \mathrm{Re}\{B_{2001}\},\ a_3 = \mathrm{Re}\{B_{1110}\}.$$

基于上述分析，由 [26, 47], 我们得到，当$a_1\mu < 0(> 0)$时，系统 (39) 有六种展开（见表 I），其动力学分类见表 II。

因此，我们可以得出以下结论。

定理 III.3. 我们主要关注与 *(39)* 的以下四个平衡点相对应的性质。

(i) $(\rho_1,\rho_2) = (0,0)$ 对应于四维相空间中的原点，并经历一个空间均匀的稳态解。

(ii) $(\rho_1,\rho_2) = (0,\sqrt{\frac{-a_1\mu}{2}}a)$ 对应于(z_2,z_3)平面上的一个周期解，该解是空间非均匀的。此时，限制在中心子空间上的周期解具有

以下近似形式

$$U_t(\vartheta)(r,\theta)\approx\sum_{i=1}^{n}2|p_{1i}|\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}}J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r)\cos(\mathrm{Arg}(p_{1i})+\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta+\omega_{\hat{\lambda}}t+n\theta)e_i,$$

其中，e_i 是 $\mathbb{R}^n$的第 i 个单位坐标向量。当 $a_1\mu>0(<0)$、$a_2<0(>0)$时，系统会呈现旋转波。只有当 $a_1\mu>0$、$a_2+a_3<0$、$a_2-a_3>0$时，等变 *Hopf* 分岔的周期解才是轨道渐近稳定的。

(iii) $(\rho_1,\rho_2)=(\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}},0)$对应于平面$(z_1,z_4)$中的一个周期解，该解是空间非均匀的。此时，限制在中心子空间上的周期解具有以下近似形式

$$U_t(\vartheta)(r,\theta)\approx\sum_{i=1}^{n}2|p_{1i}|\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}}J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r)\cos(\mathrm{Arg}(p_{1i})+\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta+\omega_{\hat{\lambda}}t-n\theta)e_i.$$

当$a_1\mu>0(<0)$、$a_2<0(>0)$时，系统发生的旋转波方向与（*ii*）中的相反。其稳定性条件与(ii)相同。

(iv) $(\rho_1,\rho_2)=(\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}},\sqrt{\frac{-a_1\mu a_2}{a_2+a_3}})$对应于一个周期解，该解是空间非均匀的。此时，限制在中心子空间上的周期解具有以下近似形式

$$U_t(\vartheta)(r,\theta)\approx\sum_{i=1}^{n}4|p_{1i}|\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}}J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r)\cos(\mathrm{Arg}(p_{1i})+\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta+\omega_{\hat{\lambda}}t)\cos(n\theta)e_i.$$

当$a_1\mu>0(<0)$、$a_2+a_3<0(>0)$时，系统发生驻波。只有当$a_1\mu>0$、$a_2+a_3<0$、$a_2-a_3<0$时，等变 *Hopf* 分岔产生的周期解才是轨道渐近稳定的。

证明见附录 C。

推论 III.4. 对于 λ_{0m}，$m=0$，1，2，$\cdots$，相应的特征函数为 $\phi c0m$。定义$\hat{\phi}c0m=\frac{\phi_{c0m}}{\|\phi^c_{0m}\|_{2,2}}$。根据 *[7],*，经过与上文所示类似的计算过程，可得中心流形上的正规形，

$$\dot{z}_1=\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_1+B^*_{11}z_1\mu+B^*_{2100}z_1^2z_2+\cdots,$$
$$\dot{z}_2=-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}z_2+\overline{B^*_{11}}z_2\mu+\overline{B^*_{2100}}z_1z_2^2+\cdots.$$

引入一组极坐标，我们可以得到

$$\dot{\rho}=(a_1^*\mu+a_2^*\rho^2)\rho+o(\mu^2\rho+|(\rho,\mu)|^4),$$

with

$$a_1^* = \mathrm{Re}\{B_{11}^*\},\ a_2^* = \mathrm{Re}\{B_{2100}^*\},$$

其中，B_{11}^* 和B_{2100}^* 的具体表达式见 *[7]*。

此外，我们得到

(i) 当 $a_2^* < 0 (> 0)$ 时，周期解轨道渐近稳定（不稳定）。(ii) 当 $a_1^* a_2^* < 0 (> 0)$ 时，分岔是超临界（次临界）的。

B. 一类具有离散时滞的反应-扩散模型的显式公式

在一个具体模型中，需要计算 $A_{p_1p_2p_3p_4}, S^{y(0)z_k}$、$S^{y(-1)z_k}$、$k = 1$、2、3、4，以确定正规形中的 $B_{p_1p_2p_3p_4}$的显式表达式。因此，为了给出更一般的符号表达式，我们将考虑如下定义在圆盘上的一类具有离散时滞的反应-扩散系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial t} = d_1 \Delta_{r\theta} u(t,r,\theta) + F^{(1)}(u(t,r,\theta), v(t,r,\theta)),\ (r,\theta) \in \mathbb{D},\ t > 0, \\ \frac{\partial v(t,r,\theta)}{\partial t} = d_2 \Delta_{r\theta} v(t,r,\theta) + F^{(2)}(u(t,r,\theta), v(t,r,\theta), u(t-\tau,r,\theta), v(t-\tau,r,\theta)),\ (r,\theta) \in \mathbb{D},\ t > 0, \\ \partial_r u(\cdot, R, \theta) = \partial_r v(\cdot, R, \theta) = 0,\ \theta \in [0, 2\pi). \end{cases} \tag{40}$$

这类模型涵盖了一些捕食者-猎物系统和化学反应模型等。尽管在实际应用中引入时滞 τ 的方法有很多，为简单起见，我们通过将 τ 纳入第二个方程来展示分析的关键方法。其他类型的系统也可以参考这一过程进行计算。

假设该模型具有一个正平衡点 $\mathrm{E}^*(\mathrm{u}^*, \mathrm{v}^*)$，并选取时滞 τ 作为分岔参数。令 $\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{t}, \mathrm{r}\ \theta) = \mathrm{u}(\tau\mathrm{t}, \mathrm{r}\ \theta) - \mathrm{u}^*$, $\bar{\mathrm{v}}(\mathrm{t}, \mathrm{r}\ \theta) = \mathrm{v}(\tau\mathrm{t}, \mathrm{r}\ \theta) - \mathrm{v}^*$，为简便起见，省略上方横线。于是，系统 (40) 可转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial t} = \tau d_1 \Delta_{r\theta} u(t,r,\theta) + \tau \left[a_{11} \left(u(t,r,\theta) + u^* \right) + a_{12} \left(v(t,r,\theta) + v^* \right) \right] \\ \qquad\qquad + \tau \sum_{i+j \geq 2} \frac{1}{i!\,j!} F_{ij}^{(1)}(0,0) u^i(t,r,\theta) v^j(t,r,\theta), \\ \frac{\partial v(t,r,\theta)}{\partial t} = \tau d_2 \Delta_{r\theta} v(t,r,\theta) + \tau \left[a_{21} \left(u(t,r,\theta) + u^* \right) + a_{22} \left(v(t,r,\theta) + v^* \right) \right] \\ \qquad\qquad + \tau \left[b_{21} \left(u(t-1,r,\theta) + u^* \right) + b_{22} \left(v(t-1,r,\theta) + v^* \right) \right] \\ \qquad\qquad + \tau \sum_{i+j+l+k \geq 2} \frac{1}{i!\,j!\,k!\,l!} F_{ijkl}^{(2)}(0,0,0,0) u^i(t,r,\theta) v^j(t,r,\theta) u^k(t-1,r,\theta) v^l(t-1,r,\theta), \end{cases} \tag{41}$$

with

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^{(1)}(u^*,v^*)}{\partial u(t)} & \frac{\partial F^{(1)}(u^*,v^*)}{\partial v(t)} \\ \frac{\partial F^{(2)}(u^*,v^*,u^*,v^*)}{\partial u(t)} & \frac{\partial F^{(2)}(u^*,v^*,u^*,v^*)}{\partial v(t)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial F^{(2)}(u^*,v^*,u^*,v^*)}{\partial u(t-\tau)} & \frac{\partial F^{(2)}(u^*,v^*,u^*,v^*)}{\partial v(t-\tau)} \end{pmatrix},$$

$$F_{ij}^{(1)} = \frac{\partial^{i+j} F^{(1)}}{\partial u^i \partial v^j}(0,0),$$

$$F_{ijkl}^{(2)} = \frac{\partial^{i+j+k+l} F^{(2)}}{\partial u^i \partial v^j \partial u^k(t-\tau) \partial v^l(t-\tau)}(0,0,0,0).$$

令 $\tau = \hat{\tau} + \mu$，其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\hat{\tau}$ 是发生 Hopf分岔的临界值，~那么系统 (41) 可写成类似于 (11) 的抽象形式，其中算子 L_0 和 F 分别由下式给出。

$$L_0(\varphi) = (\hat{\tau}+\mu) \begin{pmatrix} a_{11}\varphi_1(0) + a_{12}\varphi_2(0) \\ b_{21}\varphi_1(-1) + b_{22}\varphi_2(-1) + a_{21}\varphi_1(0) + a_{22}\varphi_2(0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F}(\varphi,\mu) = (\hat{\tau}+\mu) \begin{pmatrix} \sum_{i+j\geq 2} \frac{1}{i!j!} F_{ij}^{(1)}(0,0)\varphi_1^i(0)\varphi_2^j(0) \\ \sum_{i+j+k+l\geq 2} \frac{1}{i!j!k!l!} F_{ijkl}^{(2)}(0,0,0,0)\varphi_1^i(0)\varphi_2^j(0)\varphi_1^k(-1)\varphi_2^l(-1) \end{pmatrix},$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{C}.$$

选择 $\xi = (1,\ p_0)^T$，其中 $p_0 = \mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + d_1\lambda_{nm} - a_{11}$ ，我们得到 P 的基为

$$\Phi_{r\theta}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^c & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^c & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^s & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^s \\ p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^c & \bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^c & p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^s & \bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}\vartheta}\hat{\phi}_{nm}^s \end{pmatrix},$$

以及P^*的基也可以得到。正规形计算中$A_{p_1p_2p_3p_4}, S^{y(0)z_k}, S^{y(-1)z_k}, k = 1,2,3,4$以及$h_{jp_1p_2p_3p_4}$的显式公式见附录D、E和F。

IV. 数值模拟

A. 数值示例1：具有时滞反馈的扩散型 Brusselator 模型

在 [48], 中，Zuo和Wei研究了具有延迟反馈的扩散Brusselator模型。我们将该模型置于带有Neumann边界条件的圆盘上，并进行了一些数值模拟。

该模型的极坐标形式现在变为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial t} = d_1\Delta_{r\theta}u(t,r,\theta) + a - (b+1)u(t,r,\theta) + u^2(t,r,\theta)v(t,r,\theta), \\ \frac{\partial v(t,r,\theta)}{\partial t} = d_2\Delta_{r\theta}v(t,r,\theta) + bu(t,r,\theta) - u^2(t,r,\theta)v(t,r,\theta) + g(v(t-\tau,r,\theta) - v(t,r,\theta)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r,\theta) \in \mathbb{D},\ t > 0, \\ \partial_r u(\cdot,R,\theta) = \partial_r v(\cdot,R,\theta) = 0,\ \theta \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{42}$$

固定$a = 1, b = 1.5, g = 2, d_1 = 2, d_2 = 5, R = 10$，可得该模型唯一的正平衡解为(1,1.5)。当 $\lambda = \lambda_{00}, \omega \approx 0.6166$ and $\hat{\tau} \approx 0.7128$。根据标准 Hopf 分岔的常规分析，可得当 $\tau \in [0, 0.7128)$ 时，E^* 局部渐近稳定。当 τ 从零开始增大并越过临界值 $\hat{\tau} \approx 0.7128$时，一族周期解从$E^*$处分岔出来，该解为空间均匀解（见 $\tau = 2$处的图 1）。根据推论 III.4, Hopf分岔为超临界分岔，且周期解稳定，因为$a_1^* a_2^* \approx -0.8264, a_2^* \approx -0.6920$。

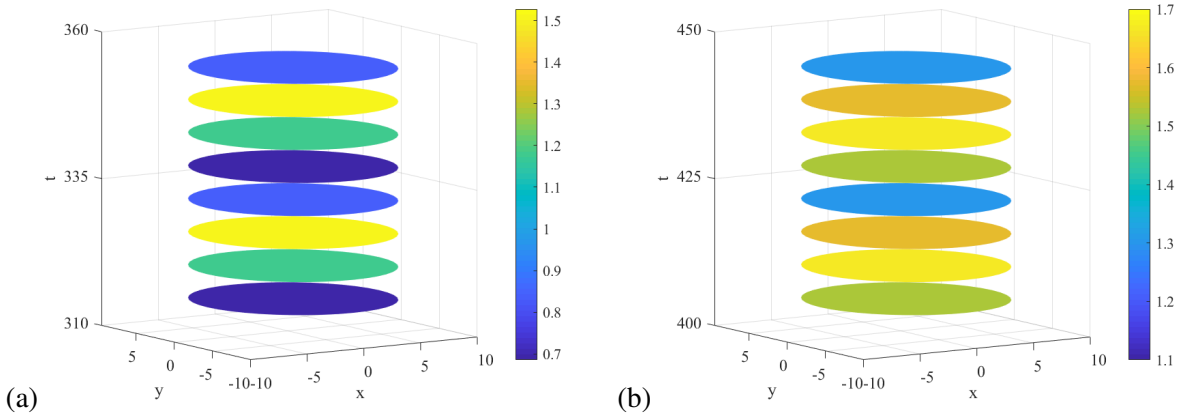


图 1. 参数为：$a = 1, b = 1.5, g = 2, d_1 = 2, d_2 =5, R = 10, \tau = 2$. (a)：u, (b)：v。

B. 数值例 2：具有群体防御和非局部竞争的时滞捕食者—猎物模型

在 [49], 中，作者研究了一个具有群体防御和非局部竞争的捕食者—猎物模型。在这里，我们使用上述建立的方法来研究这种模型在一个圆盘上的动力学。

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial t} = d_1\Delta_{r\theta}u(t,r,\theta) + bu(t,r,\theta)\left(1-\frac{\hat{u}(t,r,\theta)}{K}\right) - au^{\alpha}(t,r,\theta)v(t,r,\theta),\ (r,\theta)\in\mathbb{D},\ t>0, \\ \frac{\partial v(t,r,\theta)}{\partial t} = d_2\Delta_{r\theta}v(t,r,\theta) - dv(t,r,\theta) + aeu^{\alpha}(t-\tau,r,\theta)v(t,r,\theta),\ (r,\theta)\in\mathbb{D},\ t>0, \\ \partial_r u(\cdot,R,\theta) = \partial_r v(\cdot,R,\theta) = 0,\ \theta\in[0,2\pi), \end{cases} \tag{43}$$

其中状态u、v和参数定义于 [49]。特别是，$\hat{u}(r\ \theta,t)$ 描述了以下形式的非局部竞争。

$$\hat{u}(r,\theta,t) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \bar{r}u\left(\bar{r},\bar{\theta},t\right)\mathrm{d}\bar{\theta}\mathrm{d}\bar{r}.$$

根据 II B 小节，系统 (43) 在正平衡点E^* 处的线性化方程的特征方程为

$$\begin{cases} \gamma^2 + P_{0m}\gamma + Q_{0m} - a_{12}b_{21}\mathrm{e}^{-\gamma\tau} = 0,\ m = 0,1,2,\cdots, \\ \left(\gamma^2 + \bar{P}_{nm}\gamma + \bar{Q}_{nm} - a_{12}b_{21}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\right)^2 = 0,\ n = 1,2,\cdots,\ m = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{44}$$

with

$$P_{0m} = (d_1+d_2)\lambda_{0m}^2 - a_{11} - c_{11},\ Q_{0m} = (d_1\lambda_{0m}^2 - a_{11} - c_{11})d_2\lambda_{0m}^2\ m = 0,1,2,\cdots;$$
$$\bar{P}_{nm} = (d_1+d_2)\lambda_{nm}^2 - a_{11},\ \bar{Q}_{nm} = (d_1\lambda_{nm}^2 - a_{11})d_2\lambda_{nm}^2,\ n = 1,2,\cdots,\ m = 1,2,\cdots,$$

其中$a_{11}, a_{12}, b_{21}, c_{11}$ 的表达式见 [49]。

固定 b $=0.25$、K $=20$、a $=0.3$、d $=0.7$、e $=0.5$、$\mathrm{d}_1=0.3$、$\mathrm{d}_2=0.75$、R $=6$, 在唯一正常数稳态解处应用 [46, 49], 中提到的相同数学分析方法， $\alpha-\tau$ 平面上的前两条分岔曲线如图2所示。我们在 $\alpha-\tau$平面上选取$\alpha=0.6$。当 $\hat{}\ \lambda=\lambda_{11}$时，在 $\hat{}$ $\tau=\tau^0_{\lambda_{11}}\approx 1.7825$处发生 Hopf 分岔。我们知道，当 $\tau<1.7825$时，E^* 局部渐近稳定；当 $\tau>1.7825$时，E^* 不稳定。此时产生的分岔是等变 Hopf 分岔。通过数值计算可得 $\mu=1.2175$、$\mathrm{B}_{11}\approx 0.0021-0.0911\mathrm{i}$、$\mathrm{B}_{2001}\approx -0.1075+0.0745\mathrm{i}$、B $_{1110}\approx -0.1813+0.1620\mathrm{i}$。因此，$\mathrm{a}_1\mu\approx 0.0026$、$\mathrm{a}_2\approx -0.1075$、$\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_3\approx -0.2888$、$\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_3\approx 0.0738$, 这对应于表 II 中 $\mathrm{a}_1\mu>0$时的情形 2。根据定理 III.3，我们知道系统具有一个不稳定驻波（见图 3-5）和两个稳定旋转波（见图6-7）。

注IV.1。 从图*2*可以看出，随着 α 变化，会出现一个双*Hopf*点*HH*。下方曲线以下是系统的稳定区域，其中 $\tau<min\left\{\tau_{\lambda_{00}^0},\tau_{\lambda_{11}^0}\right\}$。而在

下方曲线以上，当 $\tau > \left\{\tau_{\lambda_{00}^0}, \tau_{\lambda_{11}^0}\right\}$ 时，系统可能产生空间均匀或非均匀周期解。要研究详细的分岔集，可能需要考察一个至少六维的中心流形。

注释 IV.2。 我们可以发现，只有当限制在中心子空间上的初值满足 $\rho_1 = \rho_2$ 时，空间非均匀周期解才呈现驻波的形式。例如，我们选取初值为 $u(t, r\ \theta) = u^* + \varsigma_1(t, r) \cdot \cos(\theta + \hat{}\theta), t \in [-\tau, 0)$；$v(t, r\ \theta) = v^* + \varsigma_2(t, r) \cdot \cos(\theta + \hat{}\theta), t \in [-\tau, 0)$，其限制在中心流形上的近似形式如下

$$U_0(\vartheta)(r,\theta) \approx 4(\mathrm{Re}\{\varsigma_1(\vartheta, r)\}, \mathrm{Re}\{p_0 \cdot \varsigma_2(\vartheta, r)\})^{\mathrm{T}} \cos(\theta + \hat{\theta}),$$

其中 $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$。因此，图 *3-5*^中的空间非均匀周期解呈现驻波的形式。无论 θ 取何值，模拟结果都是驻波解，这反映了 $O(2)$等变性的作用。然而，当 u 和 v 的初值选取为其他形式时，系统的解会被吸引至两个共存的稳定旋转波之一（见图*6-7*），它们可能是顺时针的（图 *7*），也可能是逆时针的（图 *6*）。

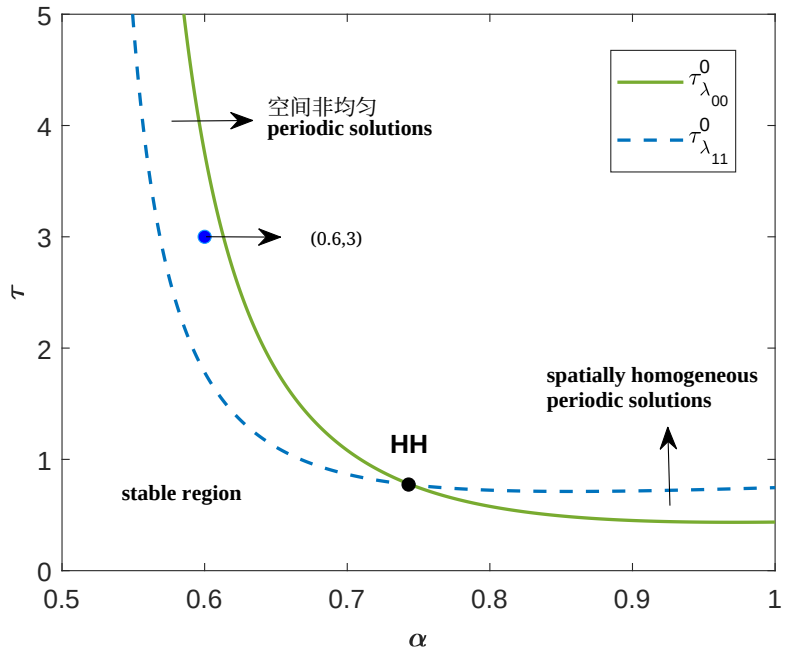
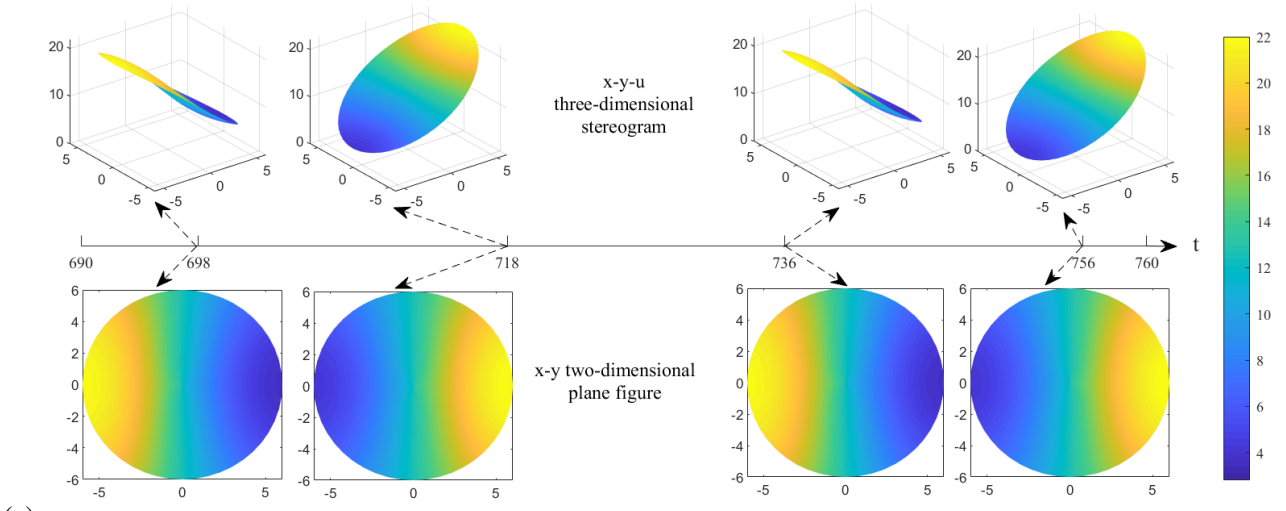
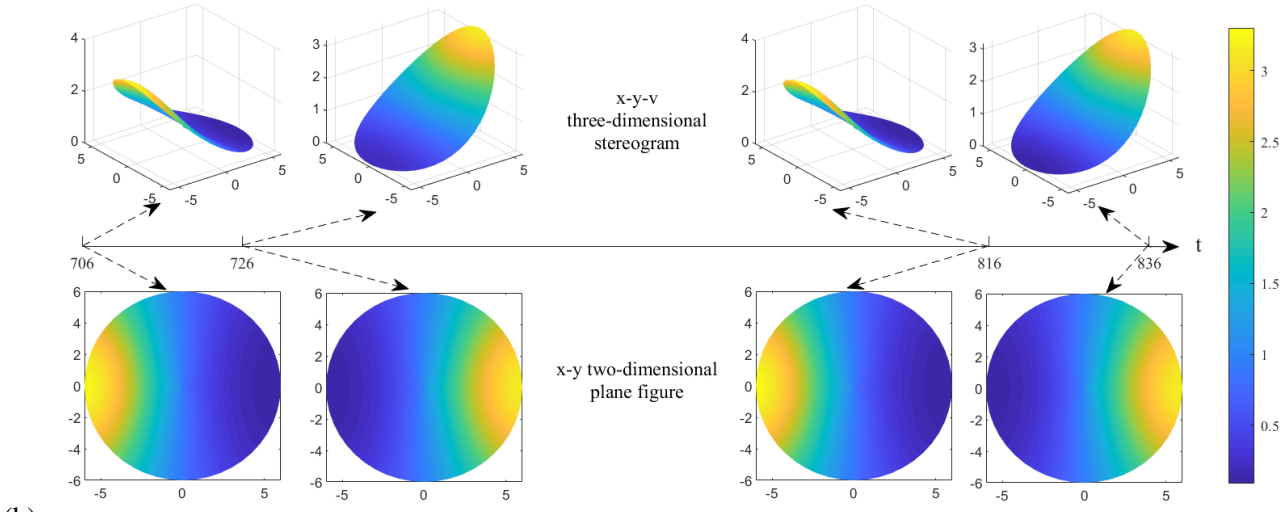


图 2. $\alpha - \tau$平面上的部分分岔曲线。



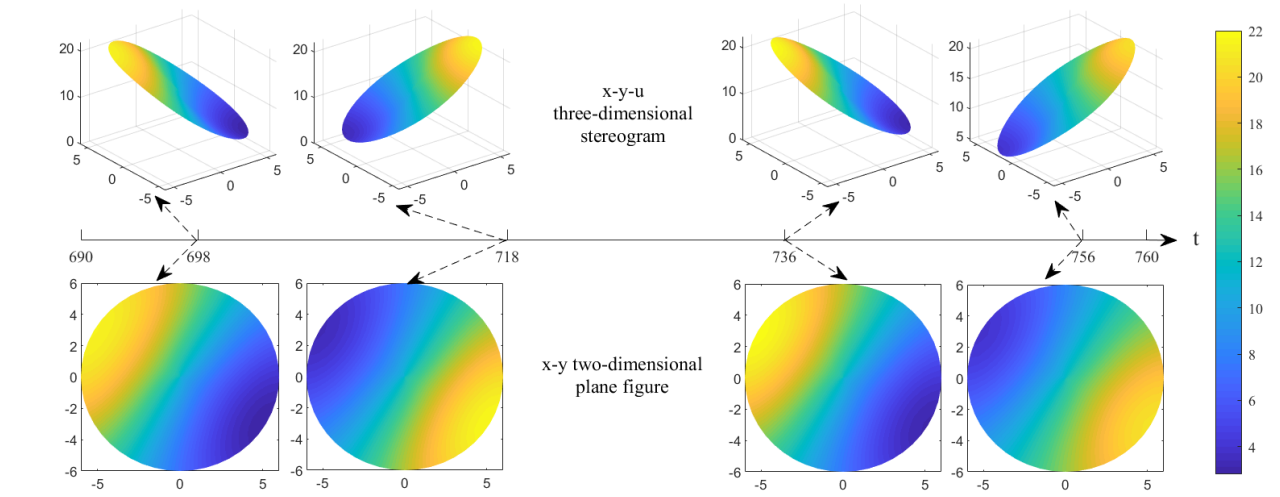
(a)



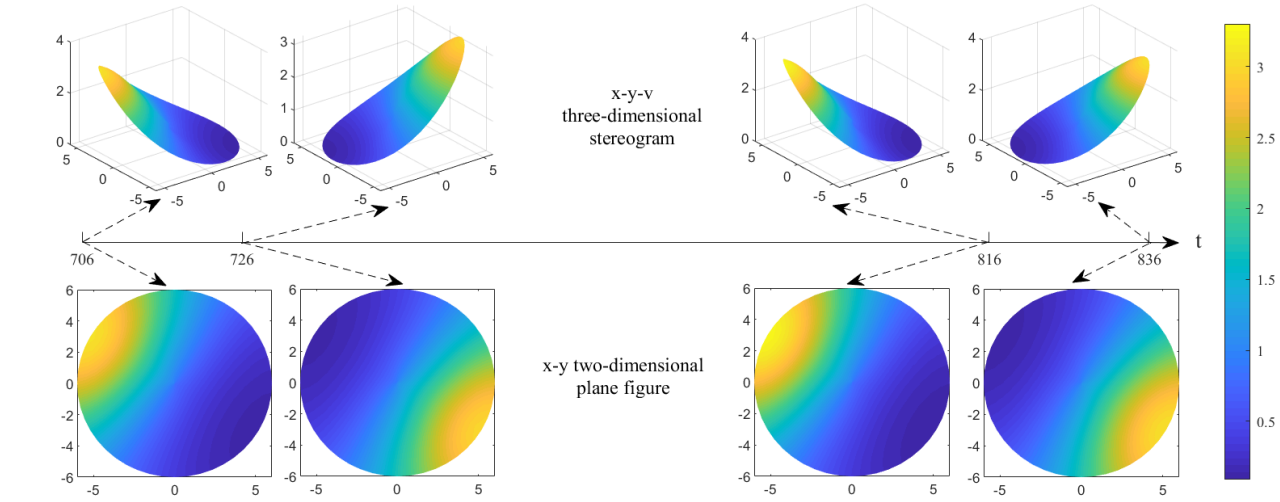
(b)

图3. 系统在以下参数下产生驻波：b $=0.25$, K $=20$, a $=0.3$, d $=0.7$, e $=0.5, \alpha=0.6$, $d_1=0.3$, $d_2=0.75$, R $=6$, $\tau=3$. 初始值为 u(t,r θ) $=13.0320+0.01\cdot\cos$ t $\cdot\cos$ r $\cdot\cos$ θ, v(t, r θ) $=0.8108+0.01\cdot\cos$ t $\cdot\cos$ r $\cdot\cos$ θ, t $\in[-\tau,0)$. (a)：u，(b)：v。

[1] M. Wang 和 Y. Wang，《应用科学中的数学方法》**19**，1141 (1996)。[2] Z. Wang 和 J. Wu，《微分方程杂志》**250**，3196 (2011)。[3] N. N. Nefedov 和 E. I. Nikulin，《信息系统建模与分析》**23**，342 (2016)。[4] C. Hsu、T. Yang 和 Z. Yu，《非线性》**31**，838 (2018)。[5] H. Jin、S. Shi 和 Z. Wang，《微分方程杂志》**269**，6758 (2020)。[6] J. Wu，《偏泛函微分方程理论及其应用 （施普林格出版社，纽约



(a)

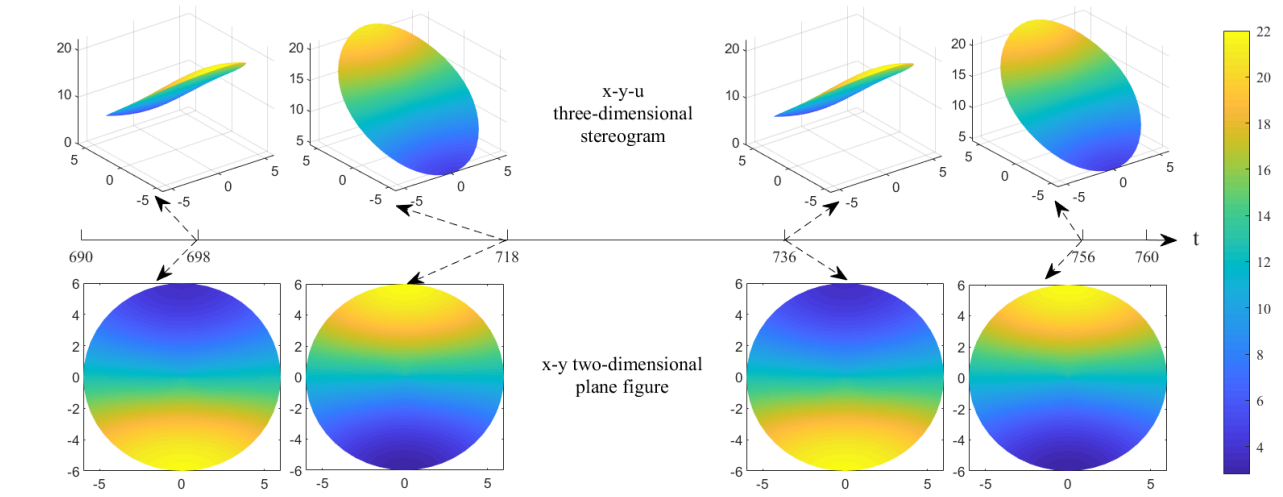


(b)

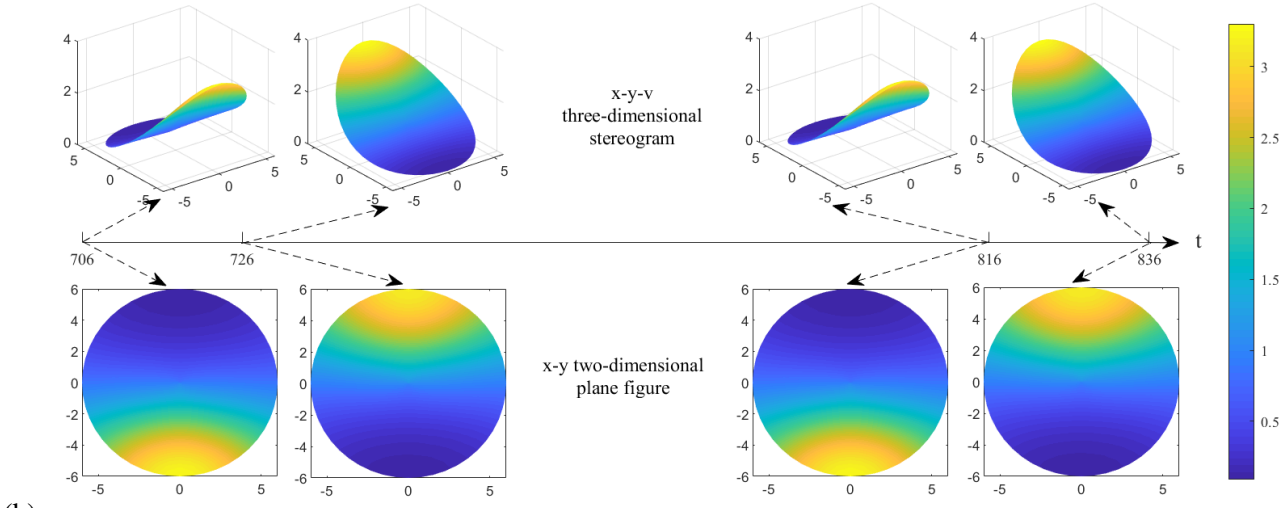
图4. 系统产生驻波，其参数为：b $=0.25$, K $=20$, a $=0.3$, d $=0.7$, e $=0.5$, $\alpha=0.6$, $d_1=0.3$, $d_2=0.75$, R $=6$, $\tau=3$。初始值为 $u(t,r\ \theta)=13.0320+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$, $v(t,r\ \theta)=0.8108+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$, $t\in[-\tau,0)$。(a)：u，(b)：v。

York，1996）。

[7] T. Faria，美国数学会**352**，2217（2000）。[8] F. Yi、J. Wei 和 J. Shi，微分方程杂志**246**，1944（2009）。[9] R. Hu 和 Y. Yuan，微分方程杂志**250**，2779（2011）。[10] S. Chen、J. Shi 和 J. Wei，非线性科学杂志**23**，1（2013）。[11] S. Guo，微分方程杂志**259**，1409（2015）。[12] R. Yang、F. Wang 和 D. Jin，应用科学中的数学方法**45**，9967（2022）。[13] Y. Song、Y. Peng 和 T. Zhang，微分方程杂志**300**，597（2021）。



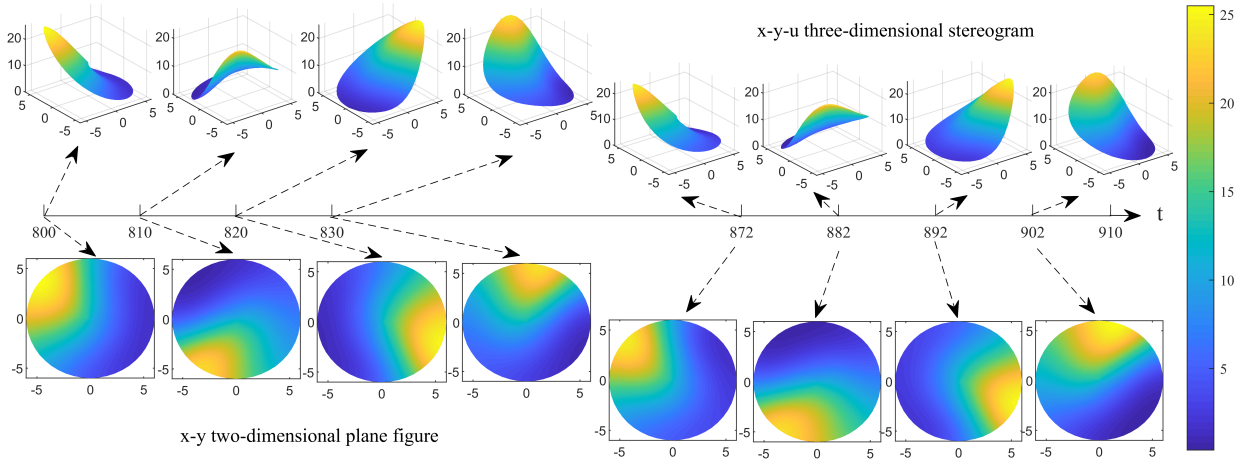
(a)



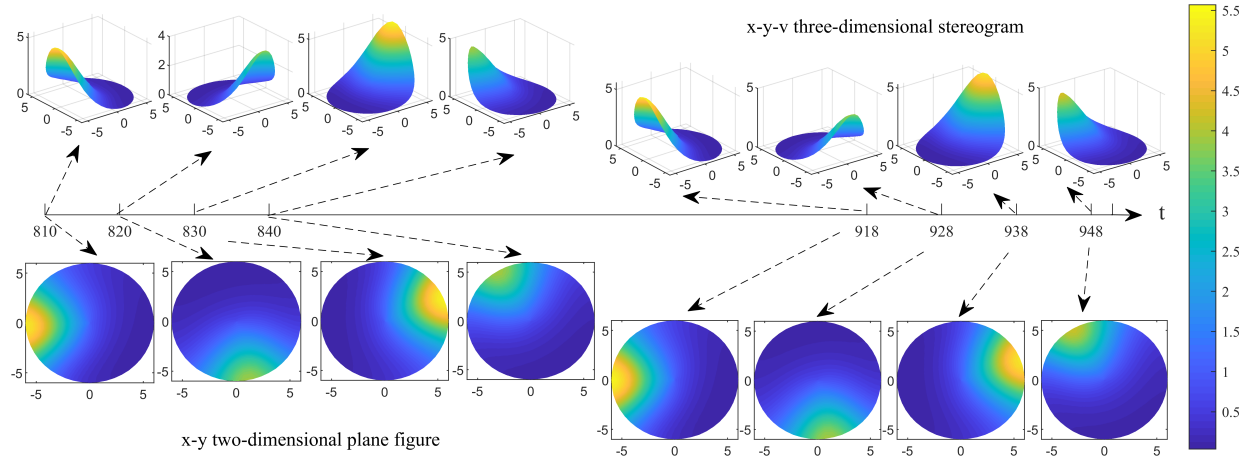
(b)

图 5. 系统在以下参数下产生驻波：b $=0.25$，K $=20$，a $=0.3$，d $=0.7$，e $=0.5$，$\alpha=0.6$，$d_1=0.3$，$d_2=0.75$，R $=6$，$\tau=3$。初始值为 u(t,r θ) $=13.0320+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$，v(t, r θ) $=0.8108+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$，t $\in[-\tau,0)$。(a)：u，(b)：v。

[14] Y. Song、J. Shi 和 H. Wang，《应用数学研究》**148**，1（2021）。[15] X. Cao 和 W. Jiang，《非线性分析：现实世界应用》**43**，428（2018）。[16] Y. Du、B. Niu、Y. Guo 和 J. Wei，《动力系统与微分方程杂志》**32**，313（2020）。[17] W. Jiang、Q. An 和 J. Shi，《微分方程杂志》**268**，6067（2020）。[18] D. Geng 和 H. Wang，《微分方程杂志》**309**，741（2022）。[19] M. Golubitsky、I. Stewart 和 D. G. Schaeffer，分岔理论中的奇点与群：第二卷（施普林格出版社，纽约，1989）。[20] A. Razgulin 和 T. Romanenko，《计算数学与数理物理》**53**，1626



(a)



(b)

图6. 系统在以下参数下产生旋转波：b $=0.25$，K $=20$，a $=0.3$，d $=0.7$，e $=0.5, \alpha=0.6$，$d_1=0.3$，$d_2=0.75$，R $=6$，$\tau=3$。初始值为 u(t,r θ) $=13.0320+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\sin\theta$，v(t, r θ) $=0.8108+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos\theta$，t $\in[-\tau,0)$。（a）：u，（b）：v。

（2013）。

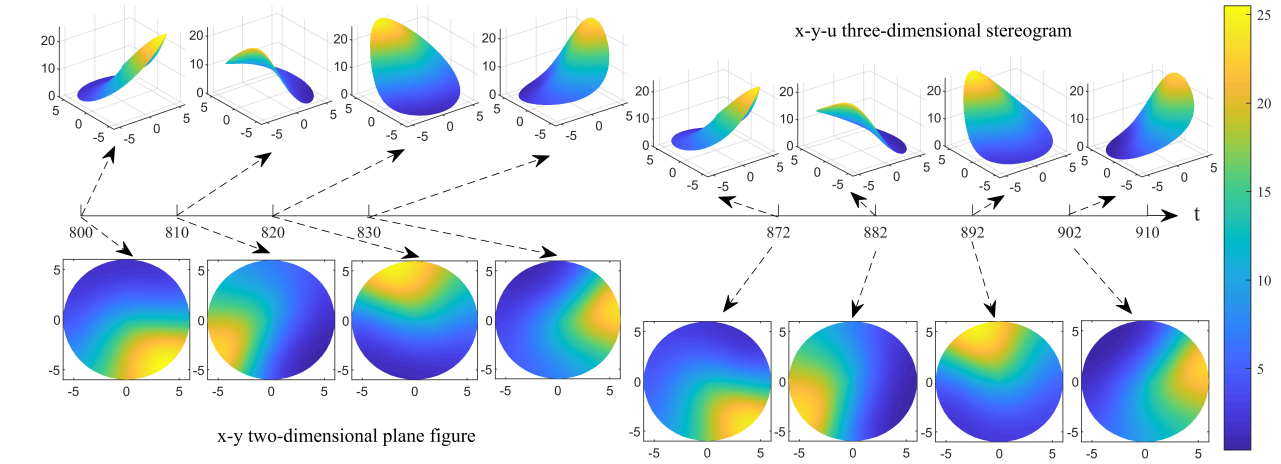
[21] T. Romanenko，微分方程**50**，264（2014）。

[22] S. S. Budzinskiy 和 A. V. Razgulin，《非线性科学与数值模拟通讯》**49**，17（2017）。

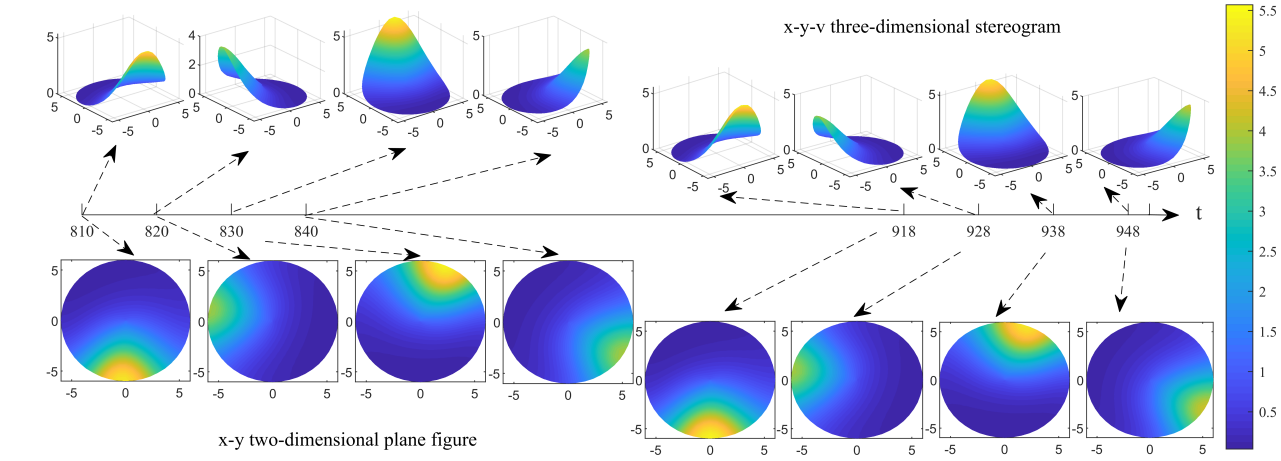
[23] J. Wu，美国数学会**350**，4799（1998）。

[24] S. Guo 和 J. Wu，泛函微分方程分岔理论（施普林格出版社，纽约，2013 年）。

[25] S. A. Campbell、Y. Yuan 和 S. D. Bungay，《非线性》**18**，2827（2005）。



(a)



(b)

图7. 系统在以下参数下产生反向传播波：b $=0.25$，K $=20$，a $=0.3$，d $=0.7$，e $=0.5, \alpha=0.6$，$d_1=0.3$，$d_2=0.75$，R $=6$，$\tau=3$。初始值为 u(t, r θ) $=13.0320+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\cos\theta$，v(t, r θ) $=0.8108+0.01\cdot\cos t\cdot\cos r\cdot\sin\theta$，t $\in[-\tau,0)$。(a)：u，(b)：v。

[26] S. Gils 和 J. Mallet-Paret，爱丁堡皇家学会会刊 A辑：数学**104**, 279 (1986).

[27] D. Schley，数学与计算机建模**37**，767（2003）。

[28] S. Guo 和 L. Jsw，美国数学会会刊**136**, 2031 (2008)。

[29] S. Guo，非线性动力学**61**，311–329（2010）。

[30] S. Guo，《应用数学快报》**24**，724（2011）。

[31] S. Guo，《微分方程杂志》**317**，387（2022）。

[32] X. Qu 和 S. Guo，《应用数学与物理学杂志》**74**，76（2023）。

[33] J. Wu、T. Faria 和 Y. Huang，数学与计算机建模**30**, 117 (1999).[34] S. Guo 和 L. Huang，《物理学D：非线性现象》**183**, 19 (2003).[35] S. A. Akhmanov、M. A. Vorontsov、V. Y. Ivanov、A. V. Larichev 和 N. I. Zheleznykh，《美国光学学会杂志B辑》**9**, 78 (1992).[36] P. L. Ramazza、E. Pampaloni、S. Residori 和 F. T. Arecchi，《物理学D：非线性现象》**96**, 259 (1996).[37] S. Residori、A. Petrossian、T. Nagaya、C. S. Riera 和 M. G. Clerc，《物理学D：非线性现象》**199**, 149 (2007).[38] J. Dai，《SIAM数学分析杂志》**53**, 1004 (2021).[39] J. Pa ullet、B. Ermentrout 和 W. Troy，《SIAM应用数学杂志》**54**, 1386 (1994).[40] W. Abid、R. Yafia、M. A. Aziz-Alaoui、H. Bouhafa 和 A. Abichou，《应用数学与计算》**260**, 292 (2015).[41] R. Yafia、M. A. Aziz-Alaoui 和 S. Yacoubi，载于生物与物理科学中的应用分析：施普林格数学与统计学论文集（施普林格出版社，新德里，2016），第 3–25 页。[42] T. Faria 和 L. T. Magalhães，微分方程杂志**122**, 181 (1995).[43] T. Faria 和 L. T. Magalhaes，微分方程杂志**122**, 201 (1995).[44] J. D. Murray，数学生物学 *II*：空间模型与生物医学应用 （施普林格出版社，纽约，2001）。[45] Y. Pinchover 和 J. Rubinstein，偏微分方程导论 （剑桥大学出版社，2005）。[46] S. Ruan 和 J. Wei，连续、离散与脉冲系统动力学A辑 **10**, 863 (2003).[47] J. Guckenheimer 和 P. Holmes，非线性振荡、动力系统与向量场分岔（施普林格出版社，纽约，1983）。[48] W. Zuo 和 J. Wei，《分岔与混沌国际杂志》**22**, 1250037 (2012).[49] Y. Liu、D. Duan 和 B. Niu，《应用数学快报》**103**, 106175 (2020).

Appendix A: The specific calculation of $g_3^1(z\ 0,\mu)$

1. The calculation of $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)} f_3^1(z,0,0)$.

Writing $\tilde{F}_3(\Phi_{r\theta}z\ \mu)$ as follows

$$\tilde{F}_3(\Phi_{r\theta}z,0)=\sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=3} A_{p_1p_2p_3p_4}\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4} z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4},$$

then we have

$$\begin{aligned} f_3^1(z,0,0)&=\begin{pmatrix}\left\langle\tilde{F}_3(\Phi_{r\theta}z,0),\Psi_{r\theta}^1(0)\right\rangle\\ \left\langle\tilde{F}_3(\Phi_{r\theta}z,0),\Psi_{r\theta}^2(0)\right\rangle\end{pmatrix}\\ &=\overline{\Psi(0)}\begin{pmatrix}\sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=3}A_{p_1p_2p_3p_4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4+1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}\\ \sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=3}A_{p_1p_2p_3p_4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2+1}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Noticing the fact

$$\begin{aligned}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^4\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r&=\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^4\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=0,\\ \int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^3\hat{\phi}_{nm}^s\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r&=\int_0^R\int_0^{2\pi} r\hat{\phi}_{nm}^c\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=0,\\ \int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^2\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r&\triangleq \mathrm{M}_{22},\end{aligned}$$

and the relationship of $\Phi_{r\theta}$ and $\Psi_{r\theta}$, we get (31).

2. $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\left(Dzf_{12}(z,0,0)U_2^1(z,0)\right)$**.的计算**

我们有

$$\begin{aligned} f_2^1(z,0,0)&=\begin{pmatrix}\left\langle\tilde{F}_2(\Phi_{r\theta}z,0),\Psi_{r\theta}^1(0)\right\rangle\\ \left\langle\tilde{F}_2(\Phi_{r\theta}z,0),\Psi_{r\theta}^2(0)\right\rangle\end{pmatrix}\\ &=\overline{\Psi(0)}\begin{pmatrix}\sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=2}A_{p_1p_2p_3p_4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4+1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}\\ \sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=2}A_{p_1p_2p_3p_4}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^{p_1+p_2+1}\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^{p_3+p_4}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A1}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r&=\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=0,\\ \int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(\hat{\phi}_{nm}^c\right)^2\hat{\phi}_{nm}^s\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r&=\int_0^R\int_0^{2\pi} r\hat{\phi}_{nm}^c\left(\hat{\phi}_{nm}^s\right)^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=0,\end{aligned}$$

然后我们得到 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\left(Dzf12\ (z,0,0)U12\ (z,0)\right)=0$。

3. $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(M_3^1)}\left(Dyf_{12}(z,\ 0,\ 0)U_2^2(z,\ 0)\right)$**.的计算**

首先，我们计算 Fr´échet 导数 $Dyf12\ (z,0,0):Q_s\to\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$。根据 (26) 和 (27)，$\tilde{}F_2(z,y,0)$ 可以写为

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2(z,y,0)&=S_2(\Phi_{r\theta}z,y)+o(z^2,y^2)\\&=S_{yz_1}(y)z_1\hat{\phi}^c_{nm}+S_{yz_2}(y)z_2\hat{\phi}^c_{nm}+S_{yz_3}(y)z_3\hat{\phi}^s_{nm}+S_{yz_4}(y)z_4\hat{\phi}^s_{nm}+o(z^2,y^2),\end{aligned}\tag{A2}$$

其中，$S^{yz_k}(k=1、2、3、4)$：$Q_s\to\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ 是线性算子，且

$$S_{yz_k}(\varphi)=S_{y(0)z_k}(\varphi(0))+S_{y(-1)z_k}(\varphi(-1)).$$

Let

$$U_2^2(z,0)\triangleq h(z)=\sum_{j\geq 0}h_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta),$$

with

$$h_{jk}(z)=\begin{pmatrix}h^{(1)}_{jk}(z)\\h^{(2)}_{jk}(z)\end{pmatrix}=\sum_{p_1+p_2+p_3+p_4=2}\begin{pmatrix}h^{(1)}_{jkp_1p_2p_3p_4}(z)\\h^{(2)}_{jkp_1p_2p_3p_4}(z)\end{pmatrix}z_1^{p_1}z_2^{p_2}z_3^{p_3}z_4^{p_4}.$$

因此,

$$\begin{aligned}D_y\tilde{F}_2(z,0,0)\left(U_2^2(z,0)\right)&=\begin{pmatrix}\langle D_y\tilde{F}_2(z,0,0)\left(U_2^2(z,0)\right),\Psi^1_{r\theta}(0)\rangle\\\langle D_y\tilde{F}_2(z,0,0)\left(U_2^2(z,0)\right),\Psi^2_{r\theta}(0)\rangle\end{pmatrix}\\&=\overline{\Psi(0)}\begin{pmatrix}\sum_{j\geq 0}\left[\mathrm{M}_{jkcs}S_{yz_1}(h_{jk})z_1+\mathrm{M}_{jkcs}S_{yz_2}(h_{jk})z_2\right.\\\left.+\mathrm{M}_{jkss}S_{yz_3}(h_{jk})z_3+\mathrm{M}_{jkss}S_{yz_4}(h_{jk})z_4\right]\\\sum_{j\geq 0}[\mathrm{M}_{jkcc}S_{yz_1}(h_{jk})z_1+\mathrm{M}_{jkcc}S_{yz_2}(h_{jk})z_2\\+\mathrm{M}_{jksc}S_{yz_3}(h_{jk})z_3+\mathrm{M}_{jksc}S_{yz_4}(h_{jk})z_4]\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{M}_{jksc}=\mathrm{M}_{jkcs}=\int_0^R\int_0^{2\pi}r\hat{\phi}_{jk}\hat{\phi}^c_{nm}\hat{\phi}^s_{nm}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\begin{cases}\mathrm{M}^c_{0kcs}&\hat{\phi}_0\ or\ \hat{\phi}^c_{0k},\\0,&otherwise,\end{cases}$$

$$\mathrm{M}_{jkss}=\int_0^R\int_0^{2\pi}r\hat{\phi}_{jk}\hat{\phi}^s_{nm}\hat{\phi}^s_{nm}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\begin{cases}\mathrm{M}^c_{2nkss},\ \hat{\phi}_{jk}=\hat{\phi}^c_{2nk},\\0,&otherwise,\end{cases}$$

$$\mathrm{M}_{jkcc}=\int_0^R\int_0^{2\pi}r\hat{\phi}_{jk}\hat{\phi}^c_{nm}\hat{\phi}^c_{nm}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\begin{cases}\mathrm{M}^s_{2nkcc},\ \hat{\phi}_{jk}=\hat{\phi}^s_{2nk},\\0,&otherwise.\end{cases}$$

此外，我们有

$$D_y\tilde{F}_2(z,0,0)\left(U_2^2(z,0)\right)=\bar{\Psi}(0)\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix},$$

with

$$N_1 = \mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{0k})z_1 + S_{yz_2}(h^{ccs}_{0k})z_2\right) + \mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left(S_{yz_3}(h^{css}_{2nk})z_3 + S_{yz_4}(h^{css}_{2nk})z_4\right),$$

$$N_2 = \mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{2nk})z_1 + S_{yz_2}(h^{ccs}_{2nk})z_2\right) + \mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_3}(h^{ccs}_{0k})z_3 + S_{yz_4}(h^{ccs}_{0k})z_4\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3!}\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(\mathrm{M}^1_3)}\left(D_y f^1_2(z,0,0)U^2_2(z,0)\right)\\
&= \begin{pmatrix}
E^1_{2100}z^2_1z_2 + E^1_{2001}z^2_1z_4 + E^1_{0120}z^2_3z_2 + E^1_{0021}z^2_3z_4 + E^1_{1110}z_1z_2z_3 + E^1_{1011}z_1z_3z_4\\
\overline{E^1_{2100}}z_1z^2_2 + \overline{E^1_{2001}}z^2_2z_3 + \overline{E^1_{0120}}z^2_4z_1 + \overline{E^1_{0021}}z_3z^2_4 + \overline{E^1_{1110}}z_1z_2z_4 + \overline{E^1_{1011}}z_2z_3z_4\\
E^2_{2100}z^2_1z_2 + E^2_{2001}z^2_1z_4 + E^2_{0120}z^2_3z_2 + E^2_{0021}z^2_3z_4 + E^2_{1110}z_1z_2z_3 + E^2_{1011}z_1z_3z_4\\
\overline{E^2_{2100}}z_1z^2_2 + \overline{E^2_{2001}}z^2_2z_3 + \overline{E^2_{0120}}z^2_4z_1 + \overline{E^2_{0021}}z_3z^2_4 + \overline{E^2_{1110}}z_1z_2z_4 + \overline{E^2_{1011}}z_2z_3z_4
\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{A3}$$

where

$$\begin{aligned}
E^1_{2100} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{0k1100}) + S_{yz_2}(h^{ccs}_{0k2000})\right)\right],\\
E^1_{2001} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_1}(h^{ccs}_{0k1001}) + \mathrm{M}^{c}_{2nkss}S_{yz_4}(h^{css}_{2nk2000})\right],\\
E^1_{0120} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_2}(h^{ccs}_{0k0020})) + \mathrm{M}^{c}_{2nkss}S_{yz_3}(h^{css}_{2nk0110})\right],\\
E^1_{0021} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left(S_{yz_3}(h^{css}_{2nk0011}) + S_{yz_4}(h^{css}_{2nk0020})\right)\right],\\
E^1_{1110} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{0k0110}) + S_{yz_2}(h^{ccs}_{0k1010})\right) + \mathrm{M}^{c}_{2nkss}S_{yz_3}(h^{css}_{2nk1100})\right],\\
E^1_{1011} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_1(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_1}(h^{ccs}_{0k0011}) + \mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left(S_{yz_3}(h^{css}_{2nk1001}) + S_{yz_4}(h^{css}_{2nk1010})\right)\right],\\
E^2_{2100} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{2nk1100}) + S_{yz_2}(h^{ccs}_{2nk2000})\right)\right],\\
E^2_{2001} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}S_{yz_1}(h^{ccs}_{2nk1001}) + \mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_2}(h^{ccs}_{0k2000})\right],\\
E^2_{0120} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}S_{yz_2}(h^{ccs}_{2nk0020}) + \mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_3}(h^{ccs}_{0k0110})\right],\\
E^2_{0021} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_3}(h^{ccs}_{0k0011}) + S_{yz_4}(h^{ccs}_{0k0020})\right)\right],\\
E^2_{1110} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left(S_{yz_1}(h^{ccs}_{2nk0110}) + S_{yz_2}(h^{ccs}_{2nk1010})\right) + \mathrm{M}^{c}_{0kcs}S_{yz_3}(h^{ccs}_{0k1100})\right]\\
E^2_{1011} &= \frac{1}{6}\overline{\Psi_3(0)}\left[\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}S_{yz_1}(h^{ccs}_{2nk0011}) + \mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left(S_{yz_3}(h^{ccs}_{0k1001}) + S_{yz_4}(h^{ccs}_{0k1010})\right)\right].
\end{aligned}$$

现在，我们需要进行计算

$$\begin{aligned}
&h^{ccs}_{0k2000},\ h^{ccs}_{0k1100},\ h^{ccs}_{0k1010},\ h^{ccs}_{0k1001},\ h^{ccs}_{0k0110},\ h^{ccs}_{0k0020},\ h^{ccs}_{0k0011},\\
&h^{ccs}_{2nk2000},\ h^{ccs}_{2nk1100},\ h^{ccs}_{2nk1010},\ h^{ccs}_{2nk1001},\ h^{ccs}_{2nk0110},\ h^{ccs}_{2nk0020},\ h^{ccs}_{2nk0011},\\
&h^{css}_{2nk2000},\ h^{css}_{2nk1100},\ h^{css}_{2nk1010},\ h^{css}_{2nk1001},\ h^{css}_{2nk0110},\ h^{css}_{2nk0020},\ h^{css}_{2nk0011}.
\end{aligned}$$

From (19) and(24), we get

$$M_2^2U_2^2(z,0)(\vartheta)=M_2^2h(z)(\vartheta)$$
$$=\begin{cases} D_zh(z)Bz-\tilde{D}_0\Delta h(0)-\tilde{L}_0(h(z)), & \vartheta=0,\\ D_zh(z)Bz-D_\vartheta h(z), & \vartheta\neq 0,\end{cases}$$
$$=\begin{cases} \sum_{j\geq 0}\left[D_zh_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta)Bz-\tilde{D}_0\Delta h_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta)-\tilde{L}_0(h_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta))\right], & \vartheta=0,\\ \sum_{j\geq 0}\left[D_zh_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta)Bz-D_\vartheta h_j(z)\hat{\phi}_{jk}(r,\theta)\right], & \vartheta\neq 0,\end{cases}$$

and

$$f_2^2(z,0,0)=\begin{cases} \tilde{F}_2(z,0,0)-\Phi_1(0)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^s-\Phi_2(0)f_2^{1(2)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^s & \\ \quad -\Phi_3(0)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^c-\Phi_4(0)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^c, & \vartheta=0,\\ -\Phi_1(\vartheta)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^s-\Phi_2(\vartheta)f_2^{1(2)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^s & \\ \quad -\Phi_3(\vartheta)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^c-\Phi_4(\vartheta)f_2^{1(1)}(z,0,0)\hat{\phi}_{nm}^c, & \vartheta\neq 0.\end{cases}$$

此外，我们有

$$\langle M_2^2\left(U_2^2(z,0)\right),\beta_{jk}\rangle=\langle f_2^2(z,0,0),\beta_{jk}\rangle, \tag{A4}$$

其中 $\beta_{jk}=\frac{\phi_{jk}}{\|\phi_{jk}\|}$。

因此，可以得到$h_{jp_1p_2p_3p_4}$的表达式。由于表达式数量较多，具体结果见附录 F。

注意到

$$\mathrm{M}_{2nkcc}^s=\mathrm{M}_{2nkss}^c,$$

因此，我们有

$$E_{2100}^1=E_{0021}^2,\ E_{2001}^1=E_{0120}^2,\ E_{0120}^1=E_{2001}^2,$$
$$E_{0021}^1=E_{2100}^2,\ E_{1110}^1=E_{1011}^2,\ E_{1011}^1=E_{1110}^2,$$

为简化符号，将 (A3) 改写为 (34)。

附录 B：引理 III.2 的证明

通过光滑变换

$$\begin{aligned} z_1&=\zeta_1+b_1\zeta_1^2\zeta_2+b_2\zeta_3^2\zeta_2+b_3\zeta_3^2\zeta_4+b_4\zeta_1\zeta_3\zeta_4,\\ z_2&=\bar{z}_1,\\ z_3&=\zeta_1+b_1\zeta_3^2\zeta_4+b_2\zeta_1^2\zeta_4+b_3\zeta_1^2\zeta_2+b_4\zeta_1\zeta_2\zeta_3,\\ z_4&=\bar{z}_3,\end{aligned} \tag{B1}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= z_1 - b_1 z_1^2 z_2 - b_2 z_3^2 z_2 - b_3 z_3^2 z_4 - b_4 z_1 z_3 z_4 + o(4),\\
\zeta_2 &= \bar{\zeta}_1,\\
\zeta_3 &= z_1 - b_1 z_3^2 z_4 - b_2 z_1^2 z_4 - b_3 z_1^2 z_2 - b_4 z_1 z_2 z_3 + o(4),\\
\zeta_4 &= \bar{\zeta}_3.
\end{aligned} \tag{B2}$$

Then

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 =& \dot{z}_1 - 2b_1 z_1 z_2 \dot{z}_1 - b_1 z_1^2 \dot{z}_2 - 2b_2 z_2 z_3 \dot{z}_3 - b_2 z_3^2 \dot{z}_2 - 2b_3 z_3 z_4 \dot{z}_3 - b_3 z_3^2 \dot{z}_4 - b_4 z_1 z_3 \dot{z}_4 - b_4 z_1 z_4 \dot{z}_3 - b_4 z_3 z_4 \dot{z}_1 + o(4)\\
=& (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_1 + B_{2100} z_1^2 z_2^2 + B_{1011} z_1 z_3 z_4 + B_{2001} z_1^2 z_4 + B_{0120} z_3^2 z_2 + B_{0021} z_3^2 z_4 + B_{1110} z_1 z_2 z_3\\
& - 3b_1 (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_1^2 z_2 - 3b_2 (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_3^2 z_2 - 3b_3 (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_3^2 z_4 - 3b_4 (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_1 z_3 z_4 + o(4).
\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{B_{2100}}{3(\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu)},\ b_2 = \frac{B_{0120}}{3(\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu)},\\
b_3 &= \frac{B_{0021}}{3(\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu)},\ b_4 = \frac{B_{1011}}{3(\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu)},
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 =& (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu) z_1 + B_{2001} z_1^2 z_4^2 + B_{1110} z_1 z_2 z_3 + o(4)\\
=& (\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}} + B_{11}\mu)\zeta_1 + B_{2001}\zeta_1^2\zeta_4^2 + B_{1110}\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + o(4).
\end{aligned}$$

对于 ζ_2，ζ_3 和 ζ_4 也同样成立，因此得到了（37）。

附录 C：定理 III.3 的证明

我们只需证明约化到中心子空间的旋转解和驻波解的近似表达式，定理的其余部分可由前面的分析轻易得到。

由（16）、（18）、（38），得到

$$\begin{aligned}
U_t(\vartheta)(r,\theta) \approx& \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_1(t)} + \bar{\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\rho_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_2(t)}\\
& + \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_2(t)} + \bar{\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\rho_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_1(t)}
\end{aligned}$$

其中 $\xi = (p_{11}, p12, \cdots, p_{1n})^{\mathrm{T}}$。为简单起见，在后续计算中，我们也将 p_{1i}改写为复角形式 $p_{1i} = |p_{1i}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(p_{1i})}$。

For $(\rho_1, \rho_2) = (0, \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}})$,

$$\begin{aligned}
U_t(\vartheta)(r,\theta) \approx& \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_1(t)} + \bar{\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\rho_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_1(t)}\\
\approx& \sum_{i=1}^{n} 2|p_{1i}| \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\cos(\mathrm{Arg}(p_{1i}) + \omega_{\hat{\lambda}}\vartheta + \omega_{\hat{\lambda}} t + n\theta) e_i.
\end{aligned}$$

where e_i is the ith unit coordinate vector of $\mathbb{R}^n$. This corresponds to the form of a rotating wave solution in the plane of (z_2, z_3).

对于 $(\rho_1,\ \rho_2) = (\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}}, 0)$,

$$\begin{aligned} U_t(\vartheta)(r,\theta) \approx & \bar{\xi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \rho_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi_2(t)} + \xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_2(t)} \\ \approx & \sum_{i=1}^{n} 2|p_{1i}| \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2}} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \cos(\mathrm{Arg}(p_{1i}) + \omega_{\hat{\lambda}}\vartheta + \omega_{\hat{\lambda}} t - n\theta) e_i, \end{aligned}$$

这对应于在平面（z_1, z_4）中沿相反方向的旋转波解形式。

对于（$\rho_1,\ \rho_2$）=（$\sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}}, \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}}$），

$$\begin{aligned} U_t(\vartheta)(r,\theta) \approx & \sum_{i=1}^{n} 2|p_{1i}| \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \cos(\mathrm{Arg}(p_{1i}) + \omega_{\hat{\lambda}}\vartheta + \omega_{\hat{\lambda}} t + n\theta) e_i \\ & + \sum_{i=1}^{n} 2|p_{1i}| \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \cos(\mathrm{Arg}(p_{1i}) + \omega_{\hat{\lambda}}\vartheta + \omega_{\hat{\lambda}} t - n\theta) e_i \\ \approx & \sum_{i=1}^{n} 4|p_{1i}| \sqrt{\frac{-a_1\mu}{a_2+a_3}} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r) \cos(\mathrm{Arg}(p_{1i}) + \omega_{\hat{\lambda}}\vartheta + \omega_{\hat{\lambda}} t) \cos(n\theta) e_i, \end{aligned}$$

这意味着，当 $n\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $n\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时，解的形式不会随时间发生变化。换句话说，在二维平面中，解的图像具有一条固定的轴，因此，它对应于驻波解的形式。

附录 D：计算公式 $A_{p_1p_2p_3p_4}$

1. $A_{p_1p_2p_3p_4}(p_1+p_2+p_3+p_4=2)$的计算公式

$$\begin{gathered} A_{2000} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{2000} \\ A^2_{2000} \end{pmatrix},\ A_{1100} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1100} \\ A^2_{1100} \end{pmatrix}, \\ A_{1010} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1010} \\ A^2_{1010} \end{pmatrix},\ A_{1001} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1001} \\ A^2_{1001} \end{pmatrix}, \\ A_{0020} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{0020} \\ A^2_{0020} \end{pmatrix},\ A_{0011} = 2\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{0011} \\ A^2_{0011} \end{pmatrix}, \\ A_{0200} = \overline{A_{2000}},\ A_{0101} = \overline{A_{1010}}, \\ A_{0110} = \overline{A_{1001}},\ A_{0002} = \overline{A_{0020}}, \end{gathered}$$

with

$$
\begin{aligned}
A^1_{2000} =& F^{(1)}_{20} + F^{(1)}_{11} p_0 + F^{(1)}_{02} p_0^2,\\
A^1_{1100} =& 2F^{(1)}_{20} + F^{(1)}_{11}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{02} p_0\bar{p}_0,\\
A^1_{1010} =& 2F^{(1)}_{20} + 2F^{(1)}_{11} p_0 + 2F^{(1)}_{02} p_0^2,\\
A^1_{1001} =& 2F^{(1)}_{20} + F^{(1)}_{11}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{02} p_0\bar{p}_0,\\
A^1_{0020} =& F^{(1)}_{20} + F^{(1)}_{11} p_0 + F^{(1)}_{02} p_0^2,\\
A^1_{0011} =& 2F^{(1)}_{20} + F^{(1)}_{11}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{02} p_0\bar{p}_0,\\
A^2_{2000} =& F^{(2)}_{2000} + F^{(2)}_{1100} p_0 + F^{(2)}_{0200} p_0^2 + F^{(2)}_{0020} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0011} p_0 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0002} p_0^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ F^{(2)}_{1010}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + (F^{(2)}_{1001} + F^{(2)}_{0110}) p_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0101} p_0^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}},\\
A^2_{1100} =& 2F^{(2)}_{2000} + F^{(2)}_{1100}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{0200} p_0\bar{p}_0 + 2F^{(2)}_{0020} + F^{(2)}_{0011}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(2)}_{0002} p_0\bar{p}_0 + F^{(2)}_{1010}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}})\\
&+ F^{(2)}_{1001}(p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0110}(p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0101}(p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}),\\
A^2_{1010} =& 2F^{(2)}_{2000} + 2F^{(2)}_{1100} p_0 + 2F^{(1)}_{0200} p_0^2 + 2F^{(2)}_{0020}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2F^{(2)}_{0011} p_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2F^{(2)}_{0002} p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ 2F^{(2)}_{1010}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2(F^{(2)}_{1001} + F^{(2)}_{0110}) p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2F^{(2)}_{0101} p_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}},\\
A^2_{1001} =& 2F^{(2)}_{2000} + F^{(2)}_{1100}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{0200} p_0\bar{p}_0 + 2F^{(2)}_{0020} + F^{(2)}_{0011}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(2)}_{0002} p_0\bar{p}_0 + F^{(2)}_{1010}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}})\\
&+ F^{(2)}_{1001}(p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0110}(p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0101}(p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}),\\
A^2_{0020} =& F^{(2)}_{2000} + F^{(2)}_{1100} p_0 + F^{(2)}_{0200} p_0^2 + F^{(2)}_{0020}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0011} p_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0002} p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ F^{(2)}_{1010}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + (F^{(2)}_{1001} + F^{(2)}_{1001}) p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + F^{(2)}_{0101} p_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}},\\
A^2_{0011} =& 2F^{(2)}_{2000} + F^{(2)}_{1100}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(1)}_{0200} p_0\bar{p}_0 + 2F^{(2)}_{0020} + F^{(2)}_{0011}(p_0+\bar{p}_0) + 2F^{(2)}_{0002} p_0\bar{p}_0 + F^{(2)}_{1010}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}})\\
&+ F^{(2)}_{1001}(p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0110}(p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + \bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0101}(p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}).
\end{aligned}
$$

2. $A_{p_1p_2p_3p_4}(p_1+p_2+p_3+p_4=3)$**的计算公式**

$$
\begin{aligned}
A_{2100} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{2100}\\ A^2_{2100}\end{pmatrix},\ A_{2010} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{2010}\\ A^2_{2010}\end{pmatrix},\\
A_{2001} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{2001}\\ A^2_{2001}\end{pmatrix},\ A_{1020} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1020}\\ A^2_{1020}\end{pmatrix},\\
A_{0120} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{0120}\\ A^2_{0120}\end{pmatrix},\ A_{0021} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{0021}\\ A^2_{0021}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$A_{1110} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1110} \\ A^2_{1110} \end{pmatrix},\ A_{1011} = 6\hat{\tau}\begin{pmatrix} A^1_{1011} \\ A^2_{1011} \end{pmatrix},$$

$$A_{1200} = \overline{A_{2100}},\ A_{0210} = \overline{A_{2010}},$$

$$A_{0201} = \overline{A_{2001}},\ A_{0002} = \overline{A_{0020}},$$

with

$$\begin{aligned}
A^1_{2100} =& 3F^{(1)}_{30} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(1)}_{21} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{2010} =& 3F^{(1)}_{21} + 3p_0^2F^{(1)}_{03},\\
A^1_{2001} =& 3F^{(1)}_{30} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(1)}_{21} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{1020} =& 3F^{(1)}_{21} + 3p_0F^{(1)}_{12} + 3p_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{0120} =& 3F^{(1)}_{30} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(1)}_{21} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{0021} =& 3F^{(1)}_{30} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(1)}_{21} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{1110} =& 6F^{(1)}_{30} + (2\bar{p}_0 + 4p_0)F^{(1)}_{21} + (2p_0^2 + 4p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^1_{1011} =& 6F^{(1)}_{30} + (2\bar{p}_0 + 4p_0)F^{(1)}_{21} + (2p_0^2 + 4p_0\bar{p}_0)F^{(1)}_{12} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(1)}_{03},\\
A^2_{2100} =& 3F^{(2)}_{3000} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(2)}_{2100} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300}\\
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(2)}_{0021} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ F^{(2)}_{2010}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(2p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}})\\
&+ F^{(2)}_{0201}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2) + F^{(2)}_{1002}(p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\bar{p}_0)\\
&+ F^{(2)}_{0120}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0) + F^{(2)}_{0102}(p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0),
\end{aligned}$$

<escape>$A^2_{2010} = 3F^{(2)}_{3000} + 3p_0F^{(2)}_{2100} + 3p_0^2F^{(2)}_{1200} + 3p_0^3F^{(2)}_{0300}$</escape>

$$\begin{aligned}
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + 3p_0F^{(2)}_{0021} + 3p_0^2F^{(2)}_{0012} + 3p_0^3F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ \left(3F^{(2)}_{2010} + 3p_0F^{(2)}_{2001} + 3p_0^2F^{(2)}_{0210} + 3p_0^3F^{(2)}_{0201}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ \left(3F^{(2)}_{1020} + 3p_0F^{(2)}_{0120} + 3p_0F^{(2)}_{1002} + +3p_0^3F^{(2)}_{0102}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}},\\
A^2_{2001} =& 3F^{(2)}_{3000} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(2)}_{2100} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300}\\
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + (\bar{p}_0 + 2p_0)F^{(2)}_{0021} + (p_0^2 + 2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}\\
&+ F^{(2)}_{2010}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(2p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}})\\
&+ F^{(2)}_{0201}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2) + F^{(2)}_{1002}(p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\bar{p}_0)\\
&+ F^{(2)}_{0120}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0) + F^{(2)}_{0102}(p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^2_{1020} =& 3F^{(2)}_{3000} + 3p_0F^{(2)}_{2100} + 3p_0^2F^{(2)}_{1200} + 3p_0^3F^{(2)}_{0300} \\
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + 3p_0F^{(2)}_{0021} + 3p_0^2F^{(2)}_{0012} + 3p_0^3F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ \left(3F^{(2)}_{2010} + 3p_0F^{(2)}_{2001} + 3p_0^2F^{(2)}_{0210} + 3p_0^3F^{(2)}_{0201}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ \left(3F^{(2)}_{1020} + 3p_0F^{(2)}_{0120} + 3p_0F^{(2)}_{1002} + +3p_0^3F^{(2)}_{0102}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}, \\
A^2_{0120} =& 3F^{(2)}_{3000} + (\bar{p}_0+2p_0)F^{(2)}_{2100} + (p_0^2+2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300} \\
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + (\bar{p}_0+2p_0)F^{(2)}_{0021} + (p_0^2+2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ F^{(2)}_{2010}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(2p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) \\
&+ F^{(2)}_{0201}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2) + F^{(2)}_{1002}(p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\bar{p}_0) \\
&+ F^{(2)}_{0120}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0) + F^{(2)}_{0102}(p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0), \\
A^2_{0021} =& 3F^{(2)}_{3000} + (\bar{p}_0+2p_0)F^{(2)}_{2100} + (p_0^2+2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300} \\
&+ \left(3F^{(2)}_{0030} + (\bar{p}_0+2p_0)F^{(2)}_{0021} + (p_0^2+2p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 3p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ F^{(2)}_{2010}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(2p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) \\
&+ F^{(2)}_{0201}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2) + F^{(2)}_{1002}(p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0\bar{p}_0) \\
&+ F^{(2)}_{0120}(\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0) + F^{(2)}_{0102}(p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0), \\
A^2_{1110} =& 6F^{(2)}_{3000} + (2\bar{p}_0+4p_0)F^{(2)}_{2100} + (2p_0^2+4p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300} \\
&+ \left(6F^{(2)}_{0030} + (2\bar{p}_0+4p_0)F^{(2)}_{0021} + (2p_0^2+4p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ F^{(2)}_{2010}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(4p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) \\
&+ F^{(2)}_{0201}(4p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4) + F^{(2)}_{1002}(2p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0\bar{p}_0) \\
&+ F^{(2)}_{0120}(2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0) + F^{(2)}_{0102}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0^2\bar{p}_0), \\
A^2_{1011} =& 6F^{(2)}_{3000} + (2\bar{p}_0+4p_0)F^{(2)}_{2100} + (2p_0^2+4p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{1200} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0300} \\
&+ \left(6F^{(2)}_{0030} + (2\bar{p}_0+4p_0)F^{(2)}_{0021} + (2p_0^2+4p_0\bar{p}_0)F^{(2)}_{0012} + 6p_0^2\bar{p}_0F^{(2)}_{0003}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \\
&+ F^{(2)}_{2010}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{2001}(2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{0210}(4p_0\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) \\
&+ F^{(2)}_{0201}(4p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}) + F^{(2)}_{1020}(2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4) + F^{(2)}_{1002}(2p_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0\bar{p}_0) \\
&+ F^{(2)}_{0120}(2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0) + F^{(2)}_{0102}(2p_0^2\bar{p}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} + 4p_0^2\bar{p}_0).
\end{aligned}
$$

附录 E：$S^{y(0)z_k}$、$S^{y(-1)z_k}$、$k=1$、2、3、4的计算公式

$$
S_{y(0)z_1}=\begin{pmatrix} 2F_{20}^{(1)}+F_{11}^{(1)}p_0 & F_{11}^{(1)}+2F_{02}^{(1)}p_0 \\ 2F_{2000}^{(2)}+F_{1100}^{(2)}p_0+F_{1010}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} & F_{1100}^{(2)}+2F_{0200}^{(2)}p_0+F_{0110}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0101}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \end{pmatrix},
$$

$$
S_{y(0)z_2}=\begin{pmatrix} 2F_{20}^{(1)}+F_{11}^{(1)}\bar{p}_0 & F_{11}^{(1)}+2F_{02}^{(1)}\bar{p}_0 \\ 2F_{2000}^{(2)}+F_{1100}^{(2)}\bar{p}_0+F_{1010}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} & F_{1100}^{(2)}+2F_{0200}^{(2)}\bar{p}_0+F_{0110}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0101}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \end{pmatrix},
$$

$$
S_{y(0)z_3}=\begin{pmatrix} 2F_{20}^{(1)}+F_{11}^{(1)}p_0 & F_{11}^{(1)}+2F_{02}^{(1)}p_0 \\ 2F_{2000}^{(2)}+F_{1100}^{(2)}p_0+F_{1010}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} & F_{1100}^{(2)}+2F_{0200}^{(2)}p_0+F_{0110}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0101}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \end{pmatrix},
$$

$$
S_{y(0)z_4}=\begin{pmatrix} 2F_{20}^{(1)}+F_{11}^{(1)}\bar{p}_0 & F_{11}^{(1)}+2F_{02}^{(1)}\bar{p}_0 \\ 2F_{2000}^{(2)}+F_{1100}^{(2)}\bar{p}_0+F_{1010}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} & F_{1100}^{(2)}+2F_{0200}^{(2)}\bar{p}_0+F_{0110}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0101}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}} \end{pmatrix},
$$

$$
S_{y(-1)z_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2F_{0020}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0011}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1010}^{(2)}+F_{0110}^{(2)}p_0 & F_{0011}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+2F_{0002}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}+F_{0101}^{(2)}p_0 \end{pmatrix}
$$

$$
S_{y(-1)z_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2F_{0020}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0011}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1010}^{(2)}+F_{0110}^{(2)}\bar{p}_0 & F_{0011}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+2F_{0002}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}+F_{0101}^{(2)}\bar{p}_0 \end{pmatrix},
$$

$$
S_{y(-1)z_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2F_{0020}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0011}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1010}^{(2)}+F_{0110}^{(2)}p_0 & F_{0011}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+2F_{0002}^{(2)}p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}+F_{0101}^{(2)}p_0 \end{pmatrix}
$$

$$
S_{y(-1)z_4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2F_{0020}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{0011}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1010}^{(2)}+F_{0110}^{(2)}\bar{p}_0 & F_{0011}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+2F_{0002}^{(2)}\bar{p}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\hat{\tau}}+F_{1001}^{(2)}+F_{0101}^{(2)}\bar{p}_0 \end{pmatrix}.
$$

附录 F：的计算公式 $hjp_1p_2p_3p_4$

$$
\begin{aligned}
h^{ccs}_{0k2000}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{2000},\\
h^{ccs}_{0k1100}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left[-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1100},\\
h^{ccs}_{0k1010}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{1010},\\
h^{ccs}_{0k1001}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left[-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1001},\\
h^{ccs}_{0k0110}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left[-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0110},\\
h^{ccs}_{0k0020}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{0020},\\
h^{ccs}_{0k0011}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{0kcs}\left[-\lambda_{0k}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0011},
\end{aligned}
$$

where $k=0,1,2\cdots,$

$$
\begin{aligned}
h^{ccs}_{2nk2000}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{2000},\\
h^{ccs}_{2nk1100}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1100},\\
h^{ccs}_{2nk1010}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{1010},\\
h^{ccs}_{2nk1001}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1001},\\
h^{ccs}_{2nk0110}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0110},\\
h^{ccs}_{2nk0020}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{0020},\\
h^{ccs}_{2nk0011}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{s}_{2nkcc}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0011},\\
h^{css}_{2nk2000}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{2000},\\
h^{css}_{2nk1100}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1100},\\
h^{css}_{2nk1010}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{1010},\\
h^{css}_{2nk1001}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{1001},\\
h^{css}_{2nk0110}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0110},\\
h^{css}_{2nk0020}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}\vartheta}\left[-2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\hat{\lambda}}}\cdot I_d)\right]^{-1}A_{0020},\\
h^{css}_{2nk0011}(\vartheta) &= -\mathrm{M}^{c}_{2nkss}\left[-\lambda_{2nk}\tilde{D}_0+\tilde{L}_0(I_d)\right]^{-1}A_{0011}.
\end{aligned}
$$

其中 $k=1,\ 2,\ \cdots$。