arXiv:2305.05985v1 [math.AG] 10 May 2023

由非奇异分支构成的可约平面曲线的同时伽罗瓦点

池田亚纪与高桥武

Abstract. Yoshihara 对不可约平面曲线的伽罗瓦点的定义被推广到可约平面曲线。我们还定义了同时伽罗瓦点，并放宽了该定义的条件。我们研究了具有非奇异分支的约化平面曲线上同时伽罗瓦点的数量。

1. Introduction

不可约平面曲线的伽罗瓦点定义如下：

定义 1.1（[17], [18]）。设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是代数闭域 k 上次数为 d 的不可约平面曲线。对于一点 $P \in \mathbb{P}^2$，设 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 为以 P 为中心的投影。如果由投影 π_P 给出的域扩张 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P})$ 是伽罗瓦扩张，则称点 P 为伽罗瓦点。我们分别用 $\Delta_{\mathrm{in}}(C)$（分别地，$\Delta_{\mathrm{out}}(C)$）表示 C 上（分别地，不在 C 上）的所有伽罗瓦点的集合，并且 $\Delta(C) = \Delta_{\mathrm{in}}(C) \cup \Delta_{\mathrm{out}}(C)$。

关于伽罗瓦点的研究已有很多。例如，人们已对非奇异平面曲线的伽罗瓦点进行了枚举（[17], [18], [15], [4–10]）。在 [11], , Fukasawa 证明，对于一条（可能是奇异的）曲线，当 $\mathrm{char}(k) = 0$ and $d \geq 3$时，外伽罗瓦点（指不在 C上的伽罗瓦点）的数量至多为三个。Yoshihara 为高维射影空间中的不可约超曲面定义了伽罗瓦点（[19], [20]）。此外，Yoshihara 为 $\mathbb{P}^N$ 中的射影簇定义了伽罗瓦子空间，并为非奇异射影簇定义了伽罗瓦嵌入，对它们进行了研究（[21], [22], 等）。Fukasawa、Miura 和第二作者引入了准伽罗瓦点，这是不可约平面曲线的伽罗瓦点的一种推广，并研究了其数量、分布和伽罗瓦群（[12], [13]）。关于伽罗瓦点的更多研究动向，请参见 Yoshihara 和 Fukasawa 编写的“问题列表”（[23]）。

在本研究中，我们定义了伽罗瓦点，并考察了可约平面代数曲线上伽罗瓦点的数量。下文设 k 是特征为 0 的代数闭域。设 C 是 k 上 $\mathbb{P}^2$ 中的一条约化射影曲线。设 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 是 C 的不可约分解，K_i 是 C_i 的函数域。设 $R(C)$ 是 C 的函数环（定义见 [14] 的 Chapitre Premier 第 7.1.3 节，或 [3] 的习题 I-21）。这里，$R(C)$ 同构于

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 14H50；次要分类号 14H05、14H45。

Key words and phrases. 伽罗瓦点、可约平面曲线、投影。我们感谢 Satoru Fukasawa 教授和 Kei Miura 教授提供的宝贵建议。我们谨向 Editage（www.editage.com）致谢，感谢其提供英语语言编辑服务。本研究得到 JSPS KAKENHI 项目（编号 JP19K03441）和 JST SPRING 项目（编号 JPMJSP2121）的资助。

直积 $K_1 \times \cdots \times K_n$。对于可约平面曲线，函数环被视为函数域的替代对象。我们考虑一个投影π_P： $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$，其中心为 $P \in \mathbb{P}^2$。利用 π_P，我们得到域扩张 π_P^*： $k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow K_i$，以及 k-代数的扩张 π_P^*： $k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow R(C)$。令 K_P 表示 π_P^* 的像： $k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow R(C)$。

域上的代数的伽罗瓦扩张如下:

定义 1.2（见 [16] 第 V 章）。设 F 是一个域。有限维 F-代数 L 称为 ´etale F-代数，若 $L \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$（作为 F-代数）为某些有限可分域扩张 K_1、.....、K_r 的 F。赋予有限群 G 的 F-代数自同构作用的 ´etale F-代数 L，称为 F 上的 G-代数。若 $|G| = \dim_F L$ 且 $L^G = F$ 成立，则称 F 上的 G-代数为伽罗瓦代数，其中 $L^G = \{x \in L \mid g(x) = x$ 对所有 $g \in G\}$ 均成立。

按照 Yoshihara 对伽罗瓦点的定义，我们对约化平面曲线作如下定义:

定义 1.3. 若点 $P \in \mathbb{P}^2$ 满足函数环 $R(C)$ 是 K_P 上的伽罗瓦 G-代数，则称其为伽罗瓦点，其伽罗瓦群为 G 。

基于这样一个事实：每个伽罗瓦 G-代数扩张 $L \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$ 都满足每个 K_i/F 都是伽罗瓦的，且作为 F-代数有 $K_i \simeq K_j (\forall i, j)$（见 [16] 中的命题 18.18），我们对伽罗瓦点的定义作了稍微弱化。

定义 1.4. 若点 $P \in \mathbb{P}^2$ 满足每个域扩张 $k(C_i)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$（$i = 1, \ldots, n$）都是伽罗瓦的，并且作为 $k(\mathbb{P}^1)$-代数有 $k(C_i) \simeq k(C_j)$（$\forall i, j$），则称其为同时伽罗瓦点（简称“SG”点）。若 $P \in \cap_{i=i}^n C_i$（分别地， $P \notin \cup_{i=i}^n C_i$），则称该 SG 点为内点（分别地，外点）。我们用 $S\Delta(C_1, \ldots, C_n)$（分别地， $S\Delta_{\text{in}}(C_1, \ldots, C_n)$、$S\Delta_{\text{out}}(C_1, \ldots, C_n)$）表示所有 SG 点（分别地，内 SG 点、外 SG 点）的集合。

虽然本文未作讨论，但也可以考虑“SG 点”定义的扩张（例如，高维超曲面上的 SG 点、SG 子空间、准 SG 点等）。本研究考察最简单情形下 SG 点的数量。正如后续各节所述，我们的主要结果如下:

定理 1.5. 设 $C = C_1 \cup C_2$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的一条约化曲线。

(1)（定理 3.1）假设 C_1 和 C_2 是非奇异二次曲线。那么外部 SG 点的数量等于 0、1、3 或 6。(2)（定理4.1）假设 C_1 和 C_2 是次数相同的非奇异曲线，次数为 d，其中 $d \geq 3$。那么外部 SG 点的数量至多为一个。(3)（引理 2.9）假设 C_1 和 C_2 是次数相同的非奇异曲线，次数为d，其中 $d \geq 5$。那么内 SG 点的数量至多为一个。(4)（定理 5.1）假设 C_1 和 C_2 是非奇异四次曲线。那么内 SG 点的数量为 0、1 或 2。(5)（定理 5.5）假设 C_1 和 C_2 是次数相同的非奇异曲线，次数为 d，其中 $d \geq 4$。那么 $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) = \emptyset$ 或 $S\Delta_{\text{out}}(C_1, C_2) = \emptyset$。

我们首先介绍第 2 节中的预备结果。在第 3 节中，我们分析由两个二次曲面组成的平面曲线的外部 SG 点。在第 4 节中，我们探讨由两个次数大于二的曲线组成的平面曲线的外部 SG 点。最后，在第 5 节中，我们考察由两条四次曲线组成的平面曲线的内 SG 点。在每一节中，我们都会给出相关定理、证明和示例。

2. Preliminaries

为了理解伽罗瓦点和 SG 点，我们首先介绍预备结果。

我们总结非奇异平面曲线的伽罗瓦点相关结果。

定理 2.1（[17], [18], [7], [8]）。设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是代数闭域 k 上的次数为 $d \geq 3$ 的非奇异射影曲线，且 k 的特征为 0。则：

(1) 对于伽罗瓦点 P，扩张 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ 的伽罗瓦群是循环群；(2) $\#\Delta_{\mathrm{out}}(C) = 0$，取 1 或 3；(3) $\#\Delta_{\mathrm{out}}(C) = 3$ 当且仅当 C 与费马曲线 F_d：$X^d + Y^d + Z^d = 0$ 射影等价，其中 $(X : Y : Z)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的一组齐次坐标；(4) 对于费马曲线 F_d：$X^d + Y^d + Z^d = 0$，$\Delta_{\mathrm{out}}(C) = \{(0:0:1)、(0:1:0)、(1:0:0)\}$；(5) 若 $d \geq 5$，则 $\#\Delta_{\mathrm{in}}(C) = 0$ 或 1；(6) 若 $d = 4$，则 $\#\Delta_{\mathrm{in}}(C) = 0$，取 1 或 4；(7) $\#\Delta_{\mathrm{in}}(C) = 4$ 当且仅当 C 与曲线 $XY^3 + X^4 + Z^4 = 0$ 射影等价；(8) 若 $d \geq 4$，$\#\Delta_{\mathrm{in}}(C) \geq 1$ 且 $\#\Delta_{\mathrm{out}}(C) \geq 1$，则 C 与曲线 $XY^{d-1} + X^d + Z^d = 0$ 射影等价；(9) 对于曲线 $XY^3 + X^4 + Z^4 = 0$，$\Delta_{\mathrm{in}}(C) = \{(0:1:0)、(-1:1:0)、(-\omega:1:0)、(-\omega^2:1:0)\}$，且 $\Delta_{\mathrm{out}}(C) = \{(0:0:1)\}$，其中 ω 是本原三次单位根；(10) 对于曲线 $XY^{d-1} + X^d + Z^d = 0$ $(d \geq 5)$，$\Delta_{\mathrm{in}}(C) = \{(0:1:0)\}$，且 $\Delta_{\mathrm{out}}(C) = \{(0:0:1)\}$。

这里给出关于伽罗瓦点和 SG 点的一些基本事实。设 $C = \cup_{i=1}^n C_i \subset \mathbb{P}^2$ 为一条约化曲线，$P \in \mathbb{P}^2$ 为一点。以 P 为中心的投影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ 诱导出一个单态射 $\pi_P^* : k(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow R(C)$，可将其视为一个 $k(\mathbb{P}^1)$-代数 $R(C)$，其中 $R(C)$ 是 C 的函数环。注意，$R(C) = k(C_1) \times \cdots \times k(C_n)$。我们用 K_P 表示 π_P^* 的像。用 $\mathrm{Bir}(C)$ 表示从 C 到 C 的双有理映射群，并用 $\mathrm{Bir}(\pi_P)$ 表示 $\{f \in \mathrm{Bir}(C) \mid \pi_P \circ f = \pi_P\}$ 的子群。设 G 是 $\mathrm{Aut}^{K_P}(R(C))$ 的一个有限子群，其中 $\mathrm{Aut}^{K_P}(R(C))$ 是 K_P-代数 $R(C)$ 的自同构群。群 $G \subset \mathrm{Aut}^{K_P}(R(C))$ 对应于群 $G^{\mathrm{op}} \subset \mathrm{Bir}(\pi_P)$。或者，一个元素 $g \in G$，即一个在 K_P 上从 $R(C)$ 到 $\to R(C)$ 的自同构 g，给出一个双有理映射 $f : C \dashrightarrow C$。这 $g \mapsto f$ 给出反同构 $G \to G^{\mathrm{op}}$。一个元素 $f \in G^{\mathrm{op}}$ 可表示为一个元组 $(\sigma_f; \varphi_{f,1}, \ldots, \varphi_{f,n})$，其中

(1) σ_f 是一个双射 $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$；(2) $\varphi_{f,i}$（$i = 1, \ldots, n$）是一个双有理映射 $C_i \dashrightarrow C_{\sigma_f(i)}$。

对于 $f, g \in G^{\mathrm{op}}$，我们有 $\sigma_{fg} = \sigma_f \circ \sigma_g$ 和 $\varphi_{fg,i} = \varphi_{f,\sigma_g(i)} \circ \varphi_{g,i}$。以下引理由伽罗瓦点的定义给出：

引理 2.2. 点 P 是伽罗瓦点，其伽罗瓦群为 G，当且仅当

(1) $\#G^{\mathrm{op}} = \sum_{i=1}^n \deg \pi_{P,i}$，其中 $\pi_{P,i}$ 是投影 $\pi_P : C_i \dashrightarrow \mathbb{P}^1$；并且 (2) $\{z \in R(C) \mid f^*(z) = z \text{对所有 } f \in G^{\mathrm{op}}\} = K_P$ 均成立，其中 $f^*(z)$ 表示 z 通过 f 的拉回。

关于伽罗瓦 G 扩张，我们有以下代数事实：

命题 2.3（ [16]中的命题 18.18）。设 $L \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$ 是 F上的伽罗瓦G-代数，其中 K_i 是 F的可分域扩张。那么，对于所有 i、j，$K_i \simeq K_j$作为F-代数成立，并且域扩张 K_i/F 都是伽罗瓦扩张。

下面的引理可由上述命题立即得出。

引理 2.4. 设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。假设点 $P \in \mathbb{P}^2$ 是 C 的伽罗瓦点。则 P 是一个 SG 点。

下面考虑引理 2.4 的逆命题。

注记 2.5（参见 [16] 中的例 18.16）。设 F 和 K 是域。假设 K 是 F 上次数为 d 的伽罗瓦扩张。设 L 是代数 $K \times \cdots \times K$（n 个域的直积）。那么，L 可视为具有 $t \cdot (k_1, \ldots, k_n) = (tk_1, \ldots, tk_n)$ 的 F- 代数，其中 $t \in F$ 且 $(k_1, \ldots, k_n) \in L$，并且 $\dim_F L = dn$。

(1) 假设 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 是循环群。设 α 是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 的生成元。设 σ 是 L 关于 F 的自同构，定义如下：

$$\sigma((k_1, \ldots, k_n)) = (\alpha(k_n), k_1, \ldots, k_{n-1}),$$

并且 G 是由 σ生成的群。那么 G 是一个阶为 dn的循环群，且 L 是 F上的伽罗瓦 G-代数。

(2) 令 σ_α ($\alpha \in \mathrm{Gal}(K/F)$)，并令 τ 为 F 上的 L 的自同构，其定义如下：

$\sigma_\alpha((k_1, \ldots, k_n)) = (\alpha(k_1) \ldots, \alpha(k_n))$，且 $\tau((k_1, \ldots, k_n)) = (k_n, k_1, \ldots, k_{n-1})$，并令 G为由 $\sigma_\alpha(\alpha \in \mathrm{Gal}(K/F))$ 和 τ生成的群。那么 G同构于 $\mathrm{Gal}(K/F) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，且 L是 F上的伽罗瓦 G-代数。

以下引理由命题 2.3 和注记 2.5 推出。

引理 2.6. 设 $C = \cup_{i=1}^n C_i \subset \mathbb{P}^2$ 为一条约化平面曲线，$P \in \mathbb{P}^2$ 为一点。假设 P是一个 SG 点。设 H 为一个与伽罗瓦群同构的群，由每个 $\pi_P \colon C_i \dashrightarrow \mathbb{P}^1$给出。那么 P可视为一个伽罗瓦点，其伽罗瓦群为 $G \simeq H \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。若 H 是循环的，则 P也可视为一个伽罗瓦点，其伽罗瓦群为 $G \simeq \mathbb{Z}/dn\mathbb{Z}$。

根据引理 2.6，第 3、4 和 5 节示例中的所有 SG 点都可以视为伽罗瓦点。下面四个引理由 SG 点的定义给出。

引理 2.7. 设 $C = \cup_{i=1}^n C_n \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。点 $P \in \mathbb{P}^2$ 是 SG 点，当且仅当

(1) 对每个 C_i（$i = 1$，...，n），P 都是伽罗瓦点；并且 (2) 对每个 $1 \le i < j \le n$，存在双有理映射 $\phi_{i,j} \colon C_i \dashrightarrow C_j$，使得 $\pi_P \circ \phi_{i,j} = \pi_P$。

引理2.8. 设 $C = \cup_{i=1}^n C_n \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。对于任意满足 $i \neq j$ 的 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$，点 $P \in \mathbb{P}^2$ 是关于 C 的 SG 点，当且仅当 P 是关于 $C_i \cup C_j$ 的 SG 点。

引理 2.9. 设 $C = \cup_{i=1}^n C_n \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。那么

$$\Delta(C_1) \supset S\Delta(C_1, C_2) \supset \cdots \supset S\Delta(C_1, \ldots, C_n).$$

假设分支 C_1 是一条次数为 d_1 的非奇异曲线。若 $d_1 \ge 3$，则 $\#S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, \ldots, C_n) \le 3$。若 $d_1 = 4$，则 $\#S\Delta_{\mathrm{in}}(C_1, \ldots, C_n) \le 4$。若 $d_1 \ge 5$，则 $\#S\Delta_{\mathrm{in}}(C_1, \ldots, C_n) \le 1$。

引理 2.10. 设 $C = \cup_{i=1}^{n} C_n \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。假设每个 C_i 都是非奇异的。那么

$$S\Delta(C_1, \ldots, C_n) = S\Delta_{\text{in}}(C_1, \ldots, C_n) \cup S\Delta_{\text{out}}(C_1, \ldots, C_n),$$
$$S\Delta_{\text{in}}(C_1, \ldots, C_n) \subset \cap_{i=1}^{n} \Delta_{\text{in}}(C_i), \ and$$
$$S\Delta_{\text{out}}(C_1, \ldots, C_n) \subset \cap_{i=1}^{n} \Delta_{\text{out}}(C_i).$$

以下引理在关于通过替换射影平面的坐标来简化曲线的定义方程或伽罗瓦群的表示矩阵的讨论中经常被隐含地使用。

引理 2.11. 对于 $\mathbb{P}^2$ 的一个射影变换 σ，映射

$$S\Delta(C_1, \ldots, C_n) \to S\Delta(\sigma(C_1), \ldots, \sigma(C_n)) \ given \ by \ \ P \mapsto \sigma(P)$$

是双射。

证明。设 P 是关于 $C = \cup_{i=1}^{n} C_n$ 的 SG 点。若 $\phi : C_i \dashrightarrow C_j$ 是一个双有理映射，且对某些 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 有 $\pi_P \circ \phi = \pi_P$，则 $\pi_{\sigma(P)} \circ (\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}) = \pi_{\sigma(P)}$。因此，$\sigma(P)$ 是关于 $\sigma(C)$ 的 SG 点。□

根据以下引理，若约化曲线由非奇异分支组成，则伽罗瓦群表示中出现的不可约分支之间的双有理映射由射影平面上的射影变换给出。

引理 2.12. 设 $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 是次数相同的非奇异射影曲线，次数为 d。设 $\phi: C_2 \to C_1$ 是一个同构。

(1) 若 $d \geq 4$，或；(2) 若 $d = 3$，且存在一点 P，使得 $\pi_P \circ \phi = \pi_P$ 作为映射 $C_2 \to \mathbb{P}^1$,

$t$hen ϕ 是 $\mathbb{P}^2$的某个射影变换的限制。

证明。对于情形 (1)，根据 [2] 和 [1]，中的附录 A 18，存在定义在 C_2 上的唯一一个次数为 d、射影维数为 2 的线性系 g_d^2。恒等态射 $\text{id}_{C_2} : C_2 \to C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 和态射 $\phi : C_2 \to C_1 \subset \mathbb{P}^2$ 均由 g_d^2 确定。在情形 (2) 中，由于 $\pi_P \circ \phi = \pi_P$，我们知道 id_{C_2} 和 ϕ 由同一个完全线性系确定。因此，在这两种情形下，都存在 $\mathbb{P}^2$ 的一个射影变换 T，使得 $T \circ \text{id}_{C_2} = \phi$。□

3. Outer SG points for a plane curve consisting of quadrics

在本节中，我们研究平面曲线的外部 SG 点数量。 e
由两个非奇异二次曲面组成。

定理 3.1. 设 $C = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化平面曲线。假设 C_1 和 C_2 是非奇异二次曲线。那么 $\#S\Delta_{\text{out}}(C_1, C_2) \in \{0, 1, 3, 6\}$。

证明。令$\hat{}\mathbb{P}^2$ 为对偶射影平面，$\hat{}\ C_1$ 和$\hat{}\ C_2$ 分别为C_1和 C_2的对偶曲线。令 $\mathcal{L}(\hat{}C_1, \hat{}C_2)$ 为集合 $\{\overline{pq} \subset \hat{}\mathbb{P}^2 \mid p, q \in \hat{}C_1 \cap \hat{}C_2, p \neq q\}$，其中 $\overline{pq}$ 是经过点 p 和 q 的直线。于是有映射$\hat{}\ \hat{}\varphi : S\Delta_{\text{out}}(C_1, C_2) \to \mathcal{L}(C_1, C_2)$，定义如下。对于 $P \in S\Delta_{\text{out}}(C_1, C_2)$，存在一个同构 $\phi : C_2 \to C_1$ 使得 $\pi_P \circ \phi = \pi_P$。因此，在 $\mathbb{P}^2$ 中，恰有两条经过 P 且与曲线 C_1 和 C_2相切的直线 l_p 和 l_q。令 p 和 q 为$\hat{}\mathbb{P}^2$ 中分别对应于直线 l_p 和 l_q的点。

$\overline{pq} \in \mathcal{L}(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$。我们令 $\varphi(P) = \overline{pq}$。由于 $\overline{pq}$ 在$\hat{\mathbb{P}}^2$ 中是对应于 $\mathbb{P}^2$中点 P 的直线，φ 是单射。

我们证明 φ 是满射。对于直线 $\overline{pq} \in \mathcal{L}(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$，令 P为 $\mathbb{P}^2$ 中与 $\overline{pq}$对应的点。由于 $\pi_P\colon C_1 \to \mathbb{P}^1$ 和 $\pi_P\colon C_2 \to \mathbb{P}^1$ 的次数均为 2，P 是 C_1 和 C_2的伽罗瓦点。因为 $\pi_P\colon C_1 \to \mathbb{P}^1$和 $\pi_P\colon C_2 \to \mathbb{P}^1$ 的分歧点集相同，所以二次扩张 $k(C_1)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ 和 $k(C_2)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ 的判别式零点集相同。因此，$k(C_1) \simeq k(C_2)$ 是 $k(\mathbb{P}^1)$ 上的扩张。点 P 是 C的 SG 点。

由于对偶曲线 $\hat{}\, C_1$ 和 $\hat{}\, C_2$ 是非奇异二次曲面，$\#(\hat{C}_1 \cap \hat{C}_2) \in \{1,2,3,4\}$。我们有 $\#S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) = \#\mathcal{L}(C_1, C_2) \in \{0,1,3,6\}$。□

例3.2. 设 C_1 和 C_2 分别为由 $X^2+Y^2-Z^2=0$ 和 $X^2+Y^2-4YZ+3Z^2=0$ 定义的非奇异二次曲线。则对偶曲线 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{}\, C_2$ 分别记为 $X^2+Y^2-Z^2=0$ 和 $X^2-3Y^2-4YZ-Z^2=0$。因此，

$$\hat{C}_1 \cap \hat{C}_2 = \{R_1 := (1:0:1), R_2 := (-1:0:1), R_3 := (0:-1:1)\}.$$

在对偶射影平面 $\hat{\mathbb{P}}^2$ 中，我们有 $\overline{R_1R_2}\colon Y=0$, $\overline{R_2R_3}\colon X+Y+Z=0$ 和 $\overline{R_3R_1}\colon -X+Y+Z=0$。这三条直线对应于 $\mathbb{P}^2$ 中的 SG 点，也就是说，

$$S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) = \{P_1 := (0:1:0), P_2 := (1:1:1), P_3 := (-1:1:1)\}.$$

显然，$l\colon X+Z=0$、$l'\colon X-Z=0$ 和 $l^\sharp\colon Y-Z=0$ 这三条直线位于 $\mathbb{P}^2$ 中，分别对应于 $\hat{\mathbb{P}}^2$ 中的三个点 R_1、R_2 和 R_3，它们与两条曲线 C_1 和 C_2 相切，并满足 $l \cap l' = P_1$、$l' \cap l^\sharp = \{P_2\}$ 和 $l^\sharp \cap l = \{P_3\}$。

例3.3. 设 $C_1\colon X^2-4YZ=0$ 和 $C_2\colon X^2+4Y^2-4YZ=0$。那么这两条曲线的对偶曲线为 $\hat{}\, C_1\colon X^2-YZ=0$ 和 $\hat{}\, C_2\colon X^2-YZ-Z^2=0$。由于 $\hat{}\, C_1 \cap \hat{}\, C_2 = \{(0:1:0)\}$，我们可知 $S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) = \emptyset$。

例3.4. 设 $C_1\colon X^2+Y^2-Z^2=0$ 和 $C_2\colon Y^2+2(X+Z)(X+Y)=0$。那么 $S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) = \{(0:1:0)\}$.

例3.5. 设 $C_i\,(i=1,\dots n)$ 是由以下方程定义的平面曲线

$$X^2 + \frac{1}{i}Y^2 - \frac{1}{1+i}Z^2 = 0.$$

设 C 为约化曲线 $\cup_{i=1}^n C_i$。则对偶曲线 $\hat{}\, C_i$ 由 $X^2+iY^2-(1+i)Z^2=0$给出。对于任意 $i,j \in \{1,\dots,n\}$ 且满足 $i \neq j$，$\hat{}\, C_i \cap \hat{}\, C_j = \{(1:1:1)、(-1:1:1)、(1:-1:1)、(1:1:-1)\}$。因此，$S\Delta_{\mathrm{out}}(C_i, C_j) = \{(0:1:1)、(1:0:1)、(1:1:0)、(0:-1:1)、(-1:0:1)、(-1:1:0)\}$。由引理2.8，该集合等于 $S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, \dots, C_n)$。

4. Outer SG points for a plane curve consisting of curves of the same degree $d \geq 3$

本节中，我们证明以下定理，并给出一个由两条次数均为 $d \geq 3$ 的非奇异曲线构成、具有一个外 SG 点的约化平面曲线的例子。

定理4.1. 设 $C = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 为约化曲线。假设 C_1 和 C_2是次数相同的非奇异曲线，次数为 $d \geq 3$。那么$\#S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) \leq 1$.

证明。我们假设 $\#S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2) \geq 2$。我们分别将三个点 (1 : 0 : 0)、(0 : 1 : 0) 和 (0 : 0 : 1) 记为 P_1、P_2 和 P_3。由定理 2.1 (3) 和 (4) 以及引理 2.7 和 2.12，可知 C_1 和 C_2 与费马曲线 F_d：$X^d+Y^d+Z^d=0$ 射影等价。通过施行射影变换，我们假设 $C_1 = F_d$。此外，我们假设 $\{P_1, P_2\} \subset S\Delta_{\mathrm{out}}(C_1, C_2)$。再次由引理 2.7 和 2.12，存在射影变换 ϕ 和 ψ，使得 $\phi(C_2) = C_1$、$\psi(C_2) = C_1$、$\pi_{P_1} \circ \phi = \pi_{P_1}$ 和 $\pi_{P_2} \circ \psi = \pi_{P_2}$。我们注意到，$\phi(P_1) = P_1$ 且 $\psi(P_2) = P_2$。

断言 4.2. $\phi(P_2) = P_2$ 和 $\psi(P_1) = P_1$。

我们证明断言 4.2。由引理 2.10，P_2 是 C_2的外伽罗瓦点。因此，$\phi(P_2)$是 $C_1 = \phi(C_2)$的外伽罗瓦点。由定理 2.1 (4)，$\phi(P_2) \in \{P_1, P_2, P_3\}$。由于 $\pi_{P_1} \circ \phi = \pi_{P_1}$，$\phi(P_2)$位于经过点$P_1$ 和 P_2的直线上。因为 P_1、P_2和 P_3 不共线，且 $\phi(P_1) = P_1$，所以我们有$\phi(P_2) = P_2$。类似地，我们得到 $\psi(P_1) = P_1$。

由断言 4.2 和一些初等矩阵计算，我们得到

$$\phi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$ 和 $\alpha, \beta \in k$。

断言 4.3。$\alpha = \beta = 0$ 和 $\lambda^d = \mu^d = 1$。

下面证明断言 4.3。曲线 $\phi^{-1}(C_1)$ 和 $\psi^{-1}(C_2)$ 分别表示为 $F := (\lambda X + \alpha Z)^d + Y^d + Z^d = 0$ 和 $G := X^d + (\mu Y + \beta Z)^d + Z^d = 0$。由于$C_2 = \phi^{-1}(C_1) = \psi^{-1}(C_1)$，存在 $\xi \in k \setminus \{0\}$ 使得 $F = \xi G$。通过比较各项两边，我们发现 $\alpha = \beta = 0$ 和 $\lambda^d = \mu^d = 1$。

根据断言 4.3，曲线 C_2 必与曲线 C_1重合：然而，这一结论与事实矛盾。□

例 4.4。设 $C_i \subset \mathbb{P}^2 (i = 1, \ldots, n)$ 为由 $X^d + \zeta_n^i Y^d + Z^d = 0$ 定义的平面曲线，其中 $d \geq 3$，且 ζ_n 是一个本原 n 次单位根。设 C 为约化平面曲线 $\cup_{i=1}^n C_i$。那么，点 $P := (0 : 1 : 0)$ 是C的一个 SG 点。事实上，根据定理 2.1 (4)，P 是 C_n的一个伽罗瓦点。由于这些射影变换

$$\sigma^i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{nd}^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ where } \zeta_{nd} \text{ is a primitive } (nd)\text{th root of unity},$$

给出 $\sigma^i : C_i \to C_n$，P 也是 C_i的伽罗瓦点。此外，σ^i 满足$\pi_P \circ \sigma^i = \pi_P$。

5. Inner SG points for a plane curve consisting of quartic curves

本节中，我们考虑由非奇异分支组成的约化平面曲线 C 的内 SG 点。根据定理 2.1 (5) 和引理 2.9，如果 C 的分支中含有一条次数为 $d \geq 5$ 的非奇异曲线，那么 SG 点至多有一个。我们接下来考虑由

非奇异四次曲线组成的约化平面曲线 C 上 SG 点的数量。我们将由以下方程定义的四次曲线 $C_1^{(1)}$ 、 $C_2^{(1)}$ 、 $C_2^{(2)}$ 和 $C_2^{(3)}$ 记为

$$C_1^{(1)} : XY^3 + X^4 + Z^4 = 0,$$
$$C_2^{(1)} : X((\zeta_4 - 1)X + \zeta_4 Y)^3 + X^4 + Z^4 = 0,$$
$$C_2^{(2)} : X(-2X - Y)^3 + X^4 + Z^4 = 0 \text{ and}$$
$$C_2^{(3)} : X((-\zeta_4 - 1)X - \zeta_4 Y)^3 + X^4 + Z^4 = 0,$$

其中， ζ_4 表示本原四次单位根。

定理 5.1. 设 $C = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{P}^2$ 是由两条非奇异四次曲线组成的约化平面曲线。

(1) C 的内 SG 点数为 0、1 或 2。(2) 若 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) = 2$, 则存在一个关于 $\mathbb{P}^2$ 的射影变换 T , 使得 $T(C_1) = C_1^{(1)}$ 且 $T(C_2) \in \{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$。(3) 假设 $C_1 = C_1^{(1)}$ 。那么 $C_2 \in \{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$ 当且仅当 $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) = \{(0 : 1 : 0), (-1 : 1 : 0)\}$。

引理 5.2. 设 C_1 为曲线 $C_1^{(1)}$ 。设 P_1 和 P_2 分别为点 $(0 : 1 : 0)$ 和 $(-1 : 1 : 0)$。设 σ_1 和 σ_2 为 $\mathbb{P}^2$ 的射影变换。则以下两个条件等价:

(1) $\pi_{P_i} \circ \sigma_i = \pi_{P_i}$ *for* $i = 1, 2$, $\sigma_i(P_j) = P_j$ *for all* $1 \le i, j \le 2$, *and* $\sigma_1^{-1}(C_1) = \sigma_2^{-1}(C_1)$;

(2) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *and* $\sigma_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ -c+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, c \in k$, $a^4 = 1$ *and* $c = a^3$.

证明。蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 是显然的。现在证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。假设条件 (1) 成立。通过一些初等矩阵计算，我们得到

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \sigma_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & d \\ -c+1 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 a、 b、 c、 $d \in k$。曲线 $\sigma_1^{-1}(C_1)$ 和 $\sigma_2^{-1}(C_1)$ 由下式给出

$$F_1 := X((a-1)X + aY + bZ)^3 + X^4 + Z^4 = 0 \text{ and}$$
$$F_2 := (cX + dZ)((-c+1)X + Y - dZ)^3 + (cX + dZ)^4 + Z^4 = 0.$$

由于 $\sigma_1^{-1}(C_1) = \sigma_2^{-1}(C_1)$, 存在 $f \in k \setminus \{0\}$ 使得 $F_1 = fF_2$。通过比较每一项的两边, $a^4 = 1$、 $c = a^3$ 和 $b = d = 0$。 □

Note that σ_1 and σ_2 in (2) of Lemma 5.2 satisfy $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

定理 5.1 的证明。我们来证明断言 (1)。假设 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \ge 2$。由引理 2.10 以及定理 2.1 的 (6) 和 (7)，曲线 C_1 和 C_2 射影等价于曲线 $C_1^{(1)}$ 。通过进行射影变换，我们假设 $C_1 = C_1^{(1)}$ 。然后，再由引理 2.10 和定理 2.1 的 (9)， $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \subset \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, 其中 $P_1 = (0 : 1 : 0)$, $P_2 = (-1 : 1 : 0)$, $P_3 = (-\omega : 1 : 0)$ 和 $P_4 = (-\omega^2 : 1 : 0)$（$\omega$ 是本原三次单位根）。我们

假设 $P_1 \in S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2)$，必要时可通过射影变换实现，例如， σ_2、 σ_2^2、 $\sigma_2\sigma_1$ 和 $\sigma_2\sigma_1^2$，其中

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & 0 \\ 2\omega^2 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

（注意， σ_i $(i = 1,2)$ 诱导了一个与伽罗瓦点 P_i 相关联的 C_1 的自同构。）此外，通过考虑射影变换 σ_1 或 σ_1^2，我们假设 $P_2 \in S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2)$。根据引理 2.7 和 2.12，存在射影变换 ϕ_i $(i = 1, 2)$，使得 $\phi_i(C_2) = C_1$ 且 $\pi_{P_i} \circ \phi_i = \pi_{P_i}$。显然，$\phi_i(P_i) = P_i$ $(i = 1,2)$。若 $\phi_1(P_2) \neq P_2$，则用另一个射影变换替换 ϕ_1 后，我们假设 $\phi_1(P_2) = P_2$。事实上，若 $\phi_1(P_2) \neq P_2$，那么由于$\phi_1(P_2) \in \Delta(C_1)$，我们有 $\phi_1(P_2) \in \{P_3, P_4\}$。因此，我们用 $\sigma_1^2 \circ \phi_1$ 或$\sigma_1 \circ \phi_1$替换 ϕ_1。对于 ϕ_2，根据上述类似论证，我们也可以假设 $\phi_2(P_1) = P_1$。由引理 5.2，我们得到

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ where } a \in k \text{ and } a^4 = 1. \tag{2}$$

因此， $\phi_1(P_3) = (-\omega : -\omega(a-1) + a : 0)$。我们假设 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \geq 3$。当 $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \supset \{P_1, P_2, P_3\}$ 时，我们有 $P_3 \in \Delta(C_2)$，因此 $\phi_1(P_3) \in \Delta(C_1)$。由于 $\phi_1(P_1) = P_1$ 且 $\phi_1(P_2) = P_2$，我们有 $\phi_1(P_3) \in \{P_3, P_4\}$。如果 $\phi_1(P_3) = P_3$，那么 $(-\omega : -\omega(a-1) + a : 0) = (-\omega : 1 : 0)$；也就是说， $a = 1$ 且 ϕ_1 是恒等变换。然而，这一发现与假设矛盾。如果 $\phi_1(P_3) = P_4$，那么 $(-\omega : -\omega(a-1) + a : 0) = (-\omega^2 : 1 : 0)$，也就是说， $a = -\omega$。这与$a^4 = 1$矛盾。在 $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \supset \{P_1, P_2, P_4\}$ 的情况下，类似的论证也会导致矛盾。由此可得，$\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) = 2$。

我们来证明断言（2）。根据上述论证，存在一个射影变换 T，使得 $T(C_1) = C_1^{(1)}$，且 $S\Delta_{\text{in}}(T(C_1)\ T(C_2)) = \{P_1, P_2\}$。此外，公式（2）中的 ϕ_1 满足 $T(C_2) = \phi_1^{-1}(T(C_1))$。由此可得， $T(C_2)$ 是 $C_2^{(1)}$ 、 $C_2^{(2)}$ 或 $C_2^{(3)}$ 。

下面证明断言 (3)。我们假设 $C_1 = C_1^{(1)}$。设 $\phi_1^{(j)}$ 和 $\phi_2^{(j)}$ $(j = 1,2,3)$ 为由.....表示的射影变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \zeta_4^j - 1 & \zeta_4^j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} \zeta_4^{3j} & 0 & 0 \\ -\zeta_4^{3j} + 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectively.}$$

假设 $C_2 = C_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$。那么，由于 $P_1, P_2 \in \Delta(C_1)$、 $\phi_1^{(j)}(C_2) = C_1$,$\phi_1^{(j)}(P_1) = P_1$ 以及 $\phi_1^{(j)}(P_2) = P_2$，我们有 $P_1, P_2 \in \Delta(C_2)$。此外， $\pi_{P_1} \circ \phi_1^{(j)} = \pi_{P_1}$ 和 $\pi_{P_2} \circ \phi_2^{(j)} = \pi_{P_2}$。因此， P_1 和 P_2 是 $C_1 \cup C_2$的内 SG 点。由于 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \leq 2$，我们有 $S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) = \{P_1, P_2\}$。由断言 (1) 和 (2) 的证明中所述的论证可以推导出相反的结论。□

推论 5.3. 设 $C = \cup_{i=1}^n C_i \subset \mathbb{P}^2$ 是一条约化曲线。假设 $n \geq 2$ 和所有 C_i 都是次数相同的非奇异曲线，次数为 $d \geq 4$。若 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, \ldots, C_n) \geq 2$，则 $n \leq 4$, $d = 4$, $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, \ldots, C_n) = 2$，且 C 射影等价于一条分量为曲线 $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)}$ 或 $C_2^{(3)}$ 的曲线。

例5.4. 设 $C_i (i = 1, \dots, n)$ 是由 $\zeta_n^i XY^{d-1} + X^d + Z^d = 0$ 定义的平面曲线，其中 $d \geq 4$ 和 ζ_n 是一个本原 n 次单位根。设 C 是约化曲线 $\cup_{i=1}^n C_i$。那么，点 $P := (0:1:0)$ 是一个 SG 点。事实上，由定理 2.1 (9) 和 (10)，P 是 C_n 的一个伽罗瓦点。由于射影变换

$$\sigma^i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{n(d-1)}^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ where } \zeta_{n(d-1)} \text{ is a primitive } (n(d-1))\text{st root of unity,}$$

给出 $\sigma^i : C_i \to C_n$, P 也是 C_i 的伽罗瓦点。此外，σ^i 满足 $\pi_P \circ \sigma^i = \pi_P$。

通过类似于定理 5.1 的证明的论证，我们可以得出以下结论：

定理 5.5. 对于约化曲线 $C = \cup_{i=1}^n C_i \subset \mathbb{P}^2$，若 C_1 和 C_2 是次数分别为 $d_1 \geq 4$ 和 $d_2 \geq 4$的非奇异曲线，则 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, .., C_n) = 0$ 或 $\#S\Delta_{\text{out}}(C_1, \dots, C_n) = 0$。

证明。假设 $\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, \dots, C_n) \geq 1$ 且 $\#S\Delta_{\text{out}}(C_1, \dots, C_n) \geq 1$。由引理 2.9，$\#S\Delta_{\text{in}}(C_1, C_2) \geq 1$ 且 $\#S\Delta_{\text{out}}(C_1, C_2) \geq 1$。再次利用引理 2.9、定义 1.4 和定理 2.1 (8)，我们得出 $d_1 = d_2 (=: d)$，且 C_1 和C_2 与曲线 $XY^{d-1} + X^d + Z^d = 0$射影等价。通过进行射影变换，我们不妨设 C_1 由 $XY^{d-1} + X^d + Z^d = 0$ 给出。设 P 和 Q 分别是 $C_1 \cup C_2$的内 SG 点和外 SG 点。由定理 2.1 (9) 和 (10)，若 $d \geq 5$，则 $P = (0:1:0)$ 且 $Q = (0:0:1)$；若$d = 4$，则 $P \in \{(0:1:0)、(-1:1:0)、(-\omega:1:0)、(-\omega^2:1:0)\}$ 以及 $Q = (0:0:1)$，其中 ω 是本原三次单位根。若 $d = 4$，则通过进行由公式 (1) 表示的射影变换（它们是 C_1的自同构），我们不妨设$P = (0:1:0)$。由引理 2.7 和 2.12，存在射影变换 ϕ_P和 ϕ_Q，使得 $\phi_P(C_2) = C_1$，$\phi_Q(C_2) = C_1$，$\pi_P \circ \phi_P = \pi_P$和 $\pi_Q \circ \phi_Q = \pi_Q$。由于 Q 是 C_1 和 C_2的唯一外伽罗瓦点，我们得到 $\phi_P(Q) = Q$。因为 $\phi_Q(P)$ 是 C_1的内伽罗瓦点，$\phi_Q(P)$ 位于直线 $Z = 0$上。通过一些初等矩阵计算，我们可以得出

$$\phi_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \phi_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha, \gamma, \in k$和 $\beta, \delta \in k \setminus \{0\}$。曲线 $\phi_P^{-1}(C_1)$ 和 $\phi_Q^{-1}(C_1)$ 分别由$F := X(\alpha X + \beta Y)^{d-1} + X^d + Z^d = 0$ 和 $G := XY^{d-1} + X^d + (\gamma X + \delta Z)^d = 0$给出。由于 $C_2 = \phi_P^{-1}(C_1) = \phi_Q^{-1}(C_1)$，存在 $\lambda \in k \setminus \{0\}$ 使得 $F = \lambda G$。比较各项等式两边可得，$\alpha = 0$, $\beta^{d-1} = 1$, $\gamma = 0$ 和 $\delta^d = 1$。因此，$C_2 = C_1$。然而，这一发现与结论矛盾。□

在本文末尾，我们提出了一些问题。

问题 5.6。设 $C = \cup_{i=1}^n C_i \subset \mathbb{P}^2$ 是代数闭域 k上的约化平面曲线。

(1) 假设 $\text{char}(k) = 0$, $n = 2$，且 C_1 和 C_2 都是非奇异三次曲线。接下来研究 C的内 SG 点的数量与分布。(2) 假设 $\text{char}(k) = 0$, $n = 2$，且 C_1 或 C_2 存在奇点。接下来确定 C的 SG 点的数量与分布。

(3) 当 char(k) $= p > 0$时，研究 C的 SG 点的数量与分布。特别地，研究分量射影等价于厄米曲线的曲线。请注意，厄米曲线（*[15]*）是具有众多伽罗瓦点的曲线中最著名的例子之一。

References

[1] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris，《代数曲线几何：第一卷》，Grundlehren Math. Wiss.，第 267 卷。Springer-Verlag，纽约，1985 年。[2] H. C. Chang，《关于平面代数曲线》，Chin. J. Math. 6 (1978)，185–189。[3] D. Eisenbud 和 J. Harris，《概形几何》，Grad. Texts Math.，第 197 卷，纽约：Springer，2000 年。[4] S. Fukasawa，《特征 3 下四次曲线上的伽罗瓦点》，Nihonkai Math. J. 17 (2006)，103–110。[5] ———，《正特征下平面曲线的伽罗瓦点数，II》，Geom. Dedicata 127 (2007)，131–137。[6] ———，《正特征下平面曲线的伽罗瓦点数》，Commun. Algebra 36 (2008)，29–36。[7] ———，《光滑平面曲线的伽罗瓦点数的完全确定》，arXiv:math/1011.3648 (2010)。[8] ———，《正特征下平面曲线的伽罗瓦点数，III》，Geom. Dedicata 146 (2010)，9–20。[9] ———，《光滑平面曲线的伽罗瓦点数的完全确定》，Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 129 (2013)，93–113。[10] ———，《特征 2 下平面曲线的伽罗瓦点》，J. Pure Appl. Algebra 218 (2014)，343–353。[11] ———，《费马曲线的一种新刻画》，arXiv:math/2210.02076 (2022)。[12] S. Fukasawa、K. Miura 和 T. Takahashi，《准伽罗瓦点，I：平面曲线的自同构群》，Tohoku Math. J. (2) 71 (2019)，487–494。[13] ———，《准伽罗瓦点，II：配置》，arXiv:math/2211.16033 (2022)。[14] A. Grothendieck，´代´数´几´何´学。I. 概´形的语言，Inst. Hautes´Etudes Sci. Publ. Math. (1960)，1–228。[15] M. Homma，《厄米曲线上的伽罗瓦点》，Commun. Algebra 34 (2006)，4503–4511。[16] M.-A. Knus、A. Merkurjev、M. Rost 和 J.-P. Tignol，《对合之书》。J. Tits 作序，Colloq. Publ.，美国数学学会，第 44 卷，普罗维登斯：美国数学学会，1998 年。[17] K. Miura 和 H. Yoshihara，《平面四次曲线函数域的域论》，J. Algebra 226 (2000)，283–294。[18] H. Yoshihara，《通过对偶曲线研究平面曲线的函数域理论》，J. Algebra 239 (2001)，340–355。[19] ———，《四次曲面上的伽罗瓦点》，J. Math. Soc. Japan 53 (2001)，731–743。[20] ———，《光滑超曲面上的伽罗瓦点》，J. Algebra 264 (2003)，520–534。[21] ———，《空间曲线的伽罗瓦直线》，Algebra Colloq. 13 (2006)，455–469。[22] ———，《代数簇的伽罗瓦嵌入及其在阿贝尔曲面上的应用》，Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 117 (2007)，69–85。[23] H. Yoshihara 和 S. Fukasawa，《问题列表》（版本：2023年3月15日），Fukasawa Lab.，检索于2023年4月27日，网址为
https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-engli

sh/.

(A. IKEDA) Department of Mathematics, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950-2181, Japan.
Email address: ikeda@m.sc.niigata-u.ac.jp

(T. TAKAHASHI) Education Center for Engineering and Technology, Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata 950-2181, Japan
Email address: takeshi@eng.niigata-u.ac.jp