arXiv:2305.06019v1 [math.RT] 10 May 2023

Brauer 图代数的广义 Kauer 变换与导出等价

Valentine Soto

摘要。 Kauer 变换是 Brauer 图中针对一条边的局部变换，可以在 Brauer 图代数之间产生导出等价 [Kau98]。这些导出等价可以用 silting 突变来解释。本文将 Kauer 变换的概念推广到任意有限数量的边。其构造基于对 Brauer 图实施的剪切与粘贴作用。为了定义这些作用，我们采用了组合拓扑中提出的 Brauer 图的另一种定义 [Laz14]。利用通过平凡扩张建立的 Brauer 图代数与 gentle 代数之间的联系 [Sch15], ，我们证明，广义 Kauer 变换同样能够产生 Brauer 图代数之间的导出等价，并且也可以用 silting 变异来解释。

目录

<escape>**引言 1 记号与约定 3 1. 广义 Kauer 变换 3**</escape>1.1. Brauer 图代数.3 1.2. 广义 Kauer 变换.6<escape>**2. 链接**</escape>

与 gentle代数 11
2.1. Admissible cuts and graded generalized Kauer moves 11
2.2. Moves of admissible dissections 15

3. Com 与 silting 突变的相容性 19
3.1. silting 突变.19 3.2. gentle 代数的相容性.20 3.3. Brauer 图代数的相容性.25**参考文献 28**

Introduction

Brauer 图代数是借助一种称为 Brauer 图的组合数据定义的有限维代数。它们最初是在有限群的模表示论中引入的。

Donovan 和 Freislich 群 [DF78]。此后，这些代数出现在其他背景中，例如与簇理论 [MS14; Lad17], 、Hecke 代数 [Ari17; Ari21]、通过平凡扩张与 gentle代数 [Sch15] ，以及与儿童画 [MS20]相关。此外，Brauer 图代数与对称特殊双串代数一致 [Sch15], ，其表示论已得到广泛研究。例如，这种对应关系使得人们能够用串与带组合对这类代数上的有限维不可分解模进行分类 [DF78; WW85] ，并对它们的 Auslander-Reiten 分支进行分类 [ES92]。有关 Brauer 图代数相关成果的详细列表，请参阅 [Sch18] 。

Brauer 图是一个有限图，其每个顶点上都定义了一个重数函数，并且每个顶点周围的边都带有定向。它也可以定义为嵌入定向曲面中的图，并附有定义在每个顶点上的重数函数 [MS14]。这种对 Brauer 图的另一种定义，为研究 Brauer 图代数表示论增添了几何视角。人们持续关注这类代数的一个原因是，与 Brauer 图代数相关的图和曲面的数据，在 Brauer 图代数的表示论中发挥着重要作用。Brauer 图的概念也出现在组合拓扑中（例如参见 [Laz14] ），在这一语境下称为定向映射。

近年来，人们对 Brauer 图代数的导出等价研究表现出了特别浓厚的兴趣。已有研究证明，Brauer 图代数类在导出等价下是稳定的 [AZ22]。此外，Opper 和 Zvonareva 对导出等价意义下的 Brauer 图代数进行了分类 [OZ22]。这一分类基于 Antipov[Ant07] 的工作，并依赖于与分次带 puncture 曲面上某些弧集相关联的 A_∞-范畴。本文关注一种称为 Kauer 变换的组合工具，该工具能够导出重数恒为 1 的 Brauer 图代数之间的导出等价 [Kau98]。这种 Kauer 变换是关联 Brauer 图中一条边的局部变换。这些导出等价由 Okuyama-Rickard 倾斜复形给出 [Oku98], ，根据 [AI10] 中的定义，这些复形可以通过导出范畴中的 silting 变异来解释。

本文旨在将 Kauer 变换的概念推广到任意有限数量的边。我们希望扩展这一概念，使广义 Kauer 变换也能产生 Brauer 图代数之间的导出等价，并且能够用 silting 突变来解释。我们的主要结果如下。

定理 (定理 3.10)。设 B 是一个重数恒为一的 *Brauer* 图代数。记 Γ 为 B 的底层 *Brauer* 图，并令 Γ_1 为 Γ 的边集。那么，对于 Γ_1 的任意子集 E ，

(1) 对 Γ 中的 E 施行广义 *Kauer* 变换得到的 *Brauer* 图代数 B_E 与 B 导出等价。*(2)* 对应于边集 $\Gamma_1 \backslash E$ 的射影 B-模上的 B 的 *silting* 突变是倾斜的。其自同态代数同构于 B_E。

证明该定理的关键在于通过平凡扩张 [Sch15] 建立 Brauer 图代数与 gentle 代数之间的联系，以及有限维代数之间的导出等价会导致其平凡扩张之间导出等价这一事实 [Ric89]。我们采用 [OPS18] 引入的 gentle 代数有界导出范畴的拓扑模型，以通过容许剖分中若干条弧的变换来诠释 gentle 代数中的 silting 突变。我们将在例 1.16 中证明，广义 Kauer 变换一般不能描述为一系列标准 Kauer 变换。因此，定理 3.8 推广了 [CS23] 中的推论 3.7。

在第一节中，我们定义广义 Kauer 变换的概念。我们首先回顾 [Sch18] 中 Brauer 图代数的定义及一些结果。为定义这些广义 Kauer 变换，我们将采用一种源自组合拓扑的 Brauer 图的另一种定义。这使我们能够在 Brauer 图上定义一种切割与粘贴操作。

在第二节中，我们将广义 Kauer 变换的概念推广到 gentle 代数。为此，我们利用这样一个事实：gentle 代数与配备容许切割 [Sch18] 的 Brauer 图代数（重数恒为一）一一对应。随后，我们利用 gentle 代数与配备容许剖分 [OPS18] 的标记曲面之间的对应关系，以广义 Kauer 变换的方式诠释容许剖分的变换。

在最后一节中，我们用 silting 突变来诠释针对 Brauer 图代数和 gentle 代数的广义 Kauer 变换概念。本节首先介绍 [AI10] 中关于 silting 突变和倾斜突变的定义及若干结果。我们的主要结果将在本节中证明。

致谢。本文是博士论文的一部分，论文由 Claire Amiot 指导，并获法国国家科学研究中心资助。作者感谢导师就本文提出的宝贵建议和意见。作者在舍布鲁克大学期间完成了部分工作。她还感谢 Thomas Br¨ustle 提供的有益讨论，并感谢舍布鲁克大学的热情接待。

记号与约定

本文中，所有代数均定义在代数闭域 k 上。对于任意代数 Λ，记 mod(Λ) 为有限生成右 Λ-模范畴，记 proj(Λ) 为 mod(Λ) 中由投射模构成的全子范畴。此外，$\mathrm{D^b}(\Lambda)$ 表示与 mod(Λ) 相关的有界导出范畴，per(Λ) 表示 $\mathrm{D^b}(\Lambda)$ 中由完美复形构成的全子范畴。此外，记 Triv(Λ) 为Λ 由 Λ-Λ-双模 $D\Lambda = \mathrm{Hom}_k(\Lambda, k)$ 给出的平凡扩张：它是一个以 Triv(Λ) $= \Lambda \oplus D\Lambda$ 为k-向量空间的代数，其乘法由 $D\Lambda$ 的 Λ-Λ-双模结构诱导

$$(a, \phi).(b, \psi) = (ab, a\psi + \phi b)$$

对所有 $a, b \in \Lambda$ 和 $\phi, \psi \in D\Lambda$ 均成立。最后，箭图中的箭头按从右到左的顺序复合：对于箭头 α, β, 我们用 $\beta\alpha$ 表示一条从 α 的起点到 β 的终点的路径。类似地，态射也按从右到左的顺序复合。

1. 广义 Kauer 变换

本节旨在推广 Kauer 变换的概念。我们将其从 Brauer 图的一条边推广到任意有限条边。Kauer 变换是 Brauer 图上的局部变换，可使相应的 Brauer 图代数之间产生导出等价。我们也希望广义 Kauer 变换具有这样的结果。

1.1. Brauer 图代数

在本部分中，我们回顾 Brauer 图代数的定义，以及它们与 gentle 代数的紧密联系。关于 Brauer 图代数的更多信息，请参阅 [Sch18] 。

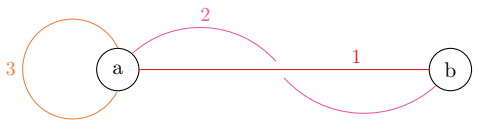
定义 1.1。一个（重数为 *1* 的）*Brauer* 图是一个元组 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \circ)$，其中

- (Γ_0, Γ_1) 是一个有限图，其顶点集为 Γ_0，边集为 Γ_1，
- $\circ$ 称为 Γ 的定向，它通过为每个顶点 $v \in \Gamma_0$ 指定与其关联的边的循环序来给出。注意，若顶点 v只与一条边 i 关联，则其循环序由 i给出。

注 1.2。本文只关注重数为 1 的 Brauer 图。更一般地，Brauer 图还包含一个重数函数 m : $\Gamma_0 \to \mathbb{Z}_{>0}$ [Sch18]。

除非另有说明，Brauer 图的定向由将每个顶点局部嵌入逆时针定向平面来给出。

例 1.3。设 Γ 为如下给出的 Brauer 图



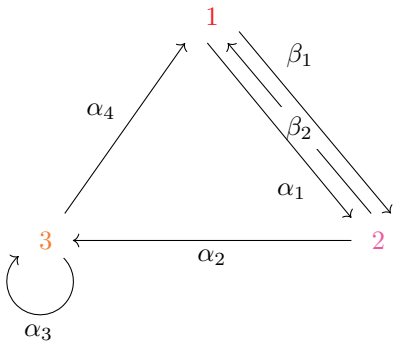
按照前述约定，顶点 a 处的循环序由 $1 < 2 < 3 < 3 < 1$ 给出，而顶点 b 处的循环序由 $1 < 2 < 1$给出。

给定一个 Brauer 图 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \circ)$，我们按如下方式构造箭图 $Q_\Gamma = (Q_0, Q_1)$ [Sch18]

- 图 Q_Γ 的顶点集 Q_0 是 Brauer 图 Γ的边集 Γ_1，
- 图 Q_Γ 的箭集 Q_1 由图 Γ的定向 $\circ$ 诱导。更确切地说，给定图 Γ 中与同一顶点 $v \in \Gamma_0$相 incident 的两条边 i 和 j，若 j 在 v的循环序中是 i 的直接后继，则箭图 Q_Γ 中存在一支从 i 指向j 的箭。

注意，对于任意一个不与单条边相 incident 的顶点 $v \in \Gamma_0$，我们都可以在 Q_Γ 中关联一个有向环 C_v。这个有向环 C_v 在循环置换意义下唯一，称为顶点 v处的特殊环。此外，我们将以 v 为起点和终点的 C_v 循环置换类的代表元称为顶点 v 处的特殊 i-环。注意，顶点 v 处的特殊 i-环不一定唯一，但顶点 v 处至多有两个特殊 i-环；当且仅当 v处的 i 是一个环时，才会出现这种情况。

例 1.4. 设 Γ 为例 1.3 中定义的 Brauer 图。根据构造，其关联箭图由下式给出。



该箭图中有两个特殊环，分别由 $C_a = \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ 和 $C_b = \beta_2\beta_1$ 给出。由于 3 是 Γ 中 a 处的一个环，因此在 a 处有两个不同的特殊 3-环，分别由 $\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3$ 和 $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4$ 给出。

定义 1.5。设 Γ 为一个 Brauer 图，$Q_\Gamma = (Q_0, Q_1)$ 为其关联箭图。与 Γ 关联的 ***Brauer*** 图代数 B_Γ 是路径代数 kQ_Γ/I_Γ，其关系理想I_Γ 由以下三类关系生成。

(I)
$$C_v^i - C_{v'}^i$$
for any $i \in Q_0$ and for any special i-cycle C_v^i and $C_{v'}^i$ at v and v' respectively, where v and v' are not incident to a single edge.

(II)
$$\alpha_n C_v^i$$
对于任意 $i \in Q_0$，以及位于 v 处的任意特殊 i-循环 $C_v^i = \alpha_1 \dots \alpha_n$，其中 v 不与任何边相邻接。

(III)
$$\beta\alpha$$
对于任意的 $\alpha, \beta \in Q_1$，使得 $\beta\alpha$ 不是任何特殊循环的子路径。

In general, these relations are not minimal as we can see in the following example.

例 1.6。设 Γ 为例 1.3 中定义的 Brauer 图。其对应的 Brauer 图代数的关系集为

(I) $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \beta_2\beta_1$, $\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_2 - \beta_1\beta_2$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3 - \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4$; **(II)** $\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$, $\beta_1\beta_2\beta_1$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_2$, $\beta_2\beta_1\beta_2$, $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3$, $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4$; **(III)** $\beta_1\alpha_4$, $\alpha_1\beta_2$, $\alpha_2\beta_1$, $\beta_2\alpha_1$, $\alpha_4\alpha_2$, α_3^2.

In this case the relations (II) are determined by (I) and (III).

Let us recall now the link between gentle algebras and Brauer graph algebras via the trivial extension. We refer for instance to [Sch18, Definition 3.1] for the definition of a gentle algebra.

定义 1.7。令 Q 为与 Brauer 图 Γ 相关联的箭图。Q 的容许切割 C 是 Q 的一组箭，其中对 Γ_0 中每个不与单条边相连的顶点 v，每个特殊环 C_v（模循环置换）恰好包含一个箭头。

定理 1.8 (Schroll [Sch18，定理 3.13 和推论 3.14])。设 $B = kQ/I$ 是 ***Brauer*** 图 Γ 的 ***Brauer*** 图代数，且 C 是 Q的容许切割。那么

- 路径代数 $B_C := kQ/ < I \cup C >$ 是一个 ***gentle*** 代数，其中 $< I \cup C >$ 是由 $I \cup C$生成的 kQ 的理想。
- *B is the trivial extension of B_C.*

反过来，对于每个 ***gentle*** 代数 Λ，都存在唯一的 ***Brauer*** 图代数 $B = kQ/I$，使得对于某个 Q的容许切割 C，有 $\Lambda = B_C$。此外，该 ***Brauer*** 图代数是 Λ 的平凡扩张 $\mathrm{Triv}(\Lambda)$。

1.2. Generalized Kauer moves

回顾一下，Brauer 图的一条边 s 上的 Kauer 变换是一种局部变换，可以描述如下：[Kau98]

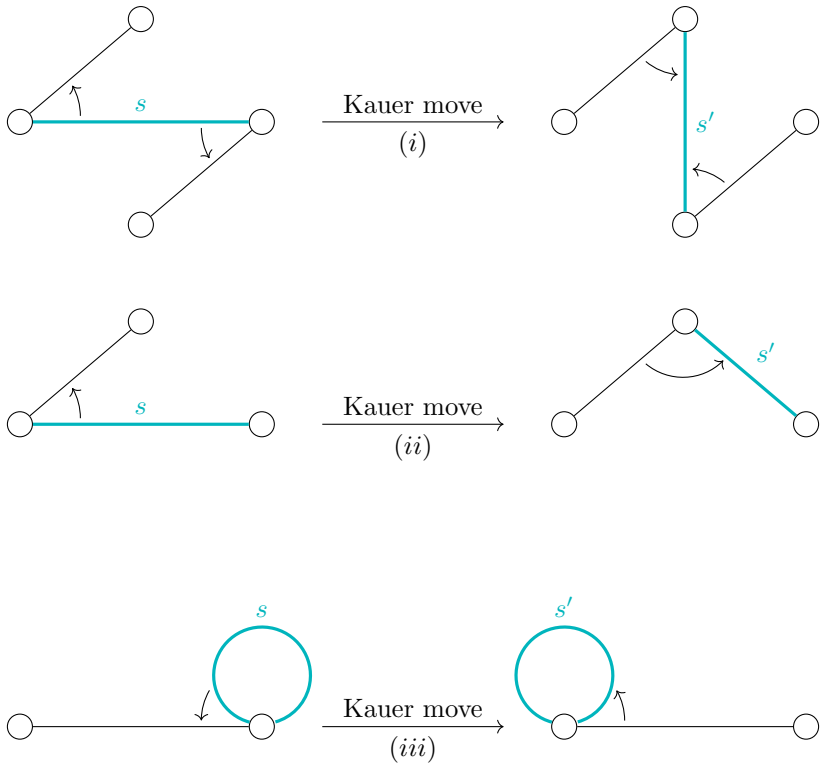


Figure 1: Kauer move at the edge s

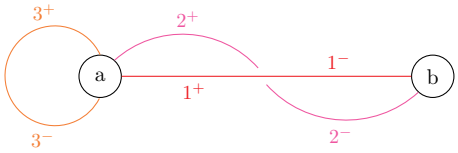
为了推广 Kauer 变换这一概念，我们将采用一种以半边来定义 Brauer 图的替代方式，事实证明它等价于定义 1.1。组合拓扑中已使用这种 Brauer 图的概念（例如参见 [Laz14] ），在这一语境下称为定向映射。下文中，$\mathfrak{S}_H$ 表示 H 的对称群。

定义 1.9. Brauer 图是由数据 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 构成，其中

- H 是半边的集合，
- $\iota \in \mathfrak{S}_H$ 是一个无不动点且满足 $\iota^2 = \mathrm{id}_H$ 的置换：称为配对，
- $\sigma \in \mathfrak{S}_H$ 称为定向。

对于数据 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$，我们可以自然地关联如下图：顶点集为$\Gamma_0 = H/\sigma$，边集为 $\Gamma_1 = H/\iota$，源映射为自然投影 s: $H \to H/\sigma$。此外，置换 σ 在每个顶点周围诱导出边的循环序。关于 Brauer 图的定向，我们沿用先前的约定（见例 1.3 之前）。

例 1.10。令 Γ 为例 1.3 中定义的 Brauer 图。根据定义 1.9，这个 Brauer 图可以看作 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$



其中 $H = \{1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-\}$ 和 j^- 表示 ιj^+。此外，$\sigma = (1^+\ 2^+\ 3^+\ 3^-)(1^-\ 2^-)$。$\sigma$ 中的每个循环都表示一个顶点周围半边的循环序。

注 1.11。将 Brauer 图视为带状图，可以通过带状曲面 [Sch18，第 2.7] 小节，为 Brauer 图关联一个带边界的曲面。我们可以验证，其曲面的面集对应于 $H/\sigma\iota$。

对于固定的半边集合 H 和固定的配对 $\iota \in \mathfrak{S}_H$，我们可以在满足 $\sigma \in \mathfrak{S}_H$ 给定条件的、形如 (H, ι, σ) 的 Brauer 图集合上定义 $\mathfrak{S}_H$ 的左作用和右作用，即

$$
\begin{aligned}
L : \mathfrak{S}_H &\to \{(H, \iota, \sigma') \mid \sigma' \in \mathfrak{S}_H\} \\
\tau &\mapsto L_\tau(H, \iota, \sigma) = (H, \iota, \tau\sigma) \\
R : \mathfrak{S}_H &\to \{(H, \iota, \sigma') \mid \sigma' \in \mathfrak{S}_H\} \\
\tau &\mapsto R_\tau(H, \iota, \sigma) = (H, \iota, \sigma\tau)
\end{aligned}
$$

对于 h_1，$h_2 \in H$，换位 $\tau = (h_1\ h_2)$ 对 Brauer 图 (H, ι, σ) 的左作用和右作用取决于 h_1 和 h_2 是否位于同一个 σ-轨道中。若它们位于同一个 σ-轨道中，我们可以将这些作用视为剪切作用；否则，可以将这些作用视为粘贴作用。$\tau = (h_1\ h_2)$ 的左作用和右作用可表示如下

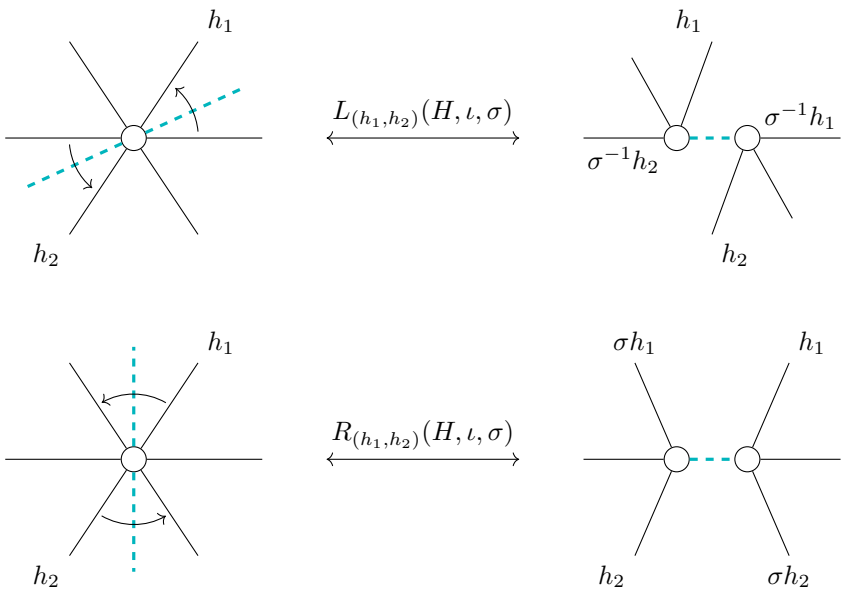


Figure 2: Left and right action of $\tau = (h_1\ h_2)$

现在，我们利用这些剪切与粘贴作用，在 Brauer 图的任意有限条边上定义广义 Kauer 变换。为此，我们将这些边划分为若干组连续的半边，称为扇区。

定义 1.12. 定义设 $\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$ 是一个 Brauer 图，且 H' 是 H 的一个子集，在.....下封闭 ι.

- 如果 $r+1$ 是满足 $\sigma^{r'}h\notin H'$ 的最小整数 $r'\geq 0$，我们称 $(h,\ r)\in H\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 H' 中元素的 Γ 里的一个扇区。
- 如果 $(h,\ r)$ 是满足 $\sigma^{-1}h\notin H'$ 的一个扇区，我们称 $(h,\ r)\in H\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 H' 中元素的 Γ 里的一个极大扇区。

我们分别用 sect$(H',\ \sigma)$ 和 Sect$(H',\ \sigma)$ 表示 H' 中元素的 Γ 里的扇区集和极大扇区集。

设 $\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$ 是一个 Brauer 图，且 H' 是 H 的一个子集，在 ι 下封闭。根据前面的定义，我们可以定义 H 的两个置换

$$\tau_{\text{cut}}^{\Gamma}=\prod_{(h,r)\in\text{Sect}(H',\sigma)}(h\quad\sigma^{r+1}h)\qquad\text{and}\qquad\tau_{\text{paste}}^{\Gamma}=\prod_{(h,r)\in\text{Sect}(H',\sigma)}(\sigma^{r}h\quad\iota\sigma^{r+1}h)$$

注意，由于这些对换的支撑互不相交，这两个乘积是定义良好的。利用由 $\mathfrak{S}_H$的左作用 L 和右作用 R 所诱导的剪切与粘贴作用，我们定义一个新的 Brauer 图

$$\mu_{H'}^{+}(\Gamma)=R_{\tau_{\text{paste}}^{\Gamma}}L_{\tau_{\text{cut}}^{\Gamma}}(\Gamma)=(H,\iota,\tau_{\text{cut}}^{\Gamma}\sigma\tau_{\text{paste}}^{\Gamma})$$

that is locally obtained from Γ as follows

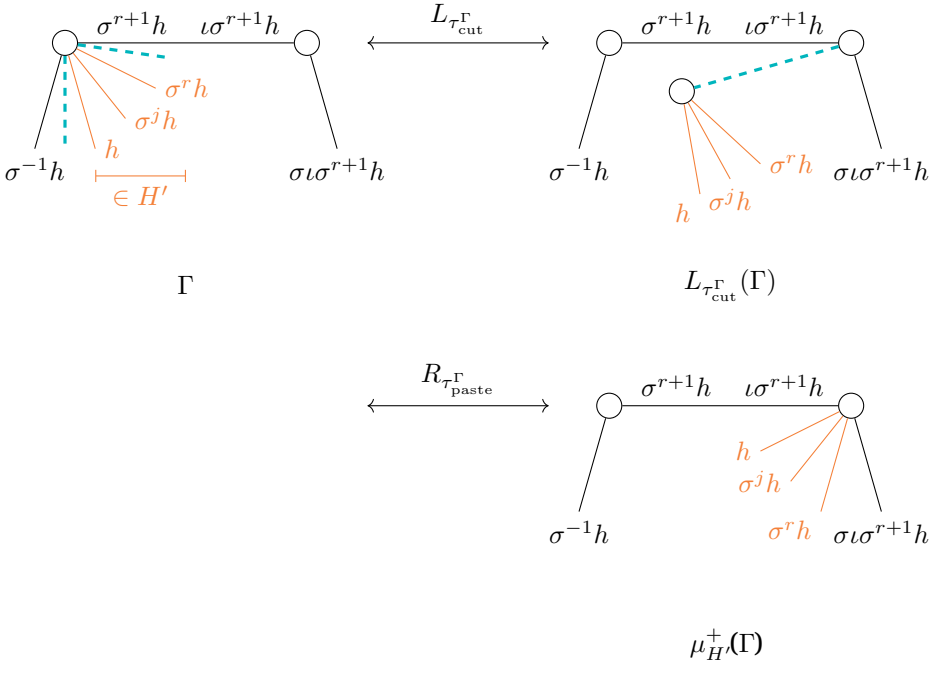


图 3： H'的广义 Kauer 变换

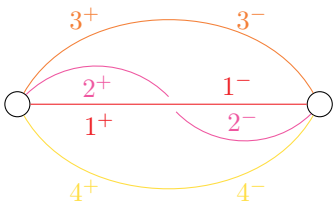
定义 1.13. Γ 中的广义 *Kauer* 变换 H' 是先前定义的局部变换，作用于 H' 的半边，从 Γ得到 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$。

参见图 3，不难看出下述命题成立。

命题 1.14。 设 $\Gamma=(H,\iota,\sigma)$ 是一个 *Brauer* 图。如果 $H'=\{h,\iota h\}$ 对于某个 $h\in H$成立，那么在 Γ 中对 H' 进行的广义 *Kauer* 变换，恰好是此前图 *1* 中定义的、在与 h对应的边处进行的标准 *Kauer* 变换。

注意，如下例所示，对 H' 进行的广义 Kauer 变换不一定等于在 H'/ι 中的每条边处依次进行标准 Kauer 变换。

例 1.15。 考虑下列 Brauer 图 $\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$



其中，j^- 表示 ιj^+和 $\sigma=(1^+\ 2^+\ 3^+\ 4^+)(1^-\ 2^-\ 4^-\ 3^-)$。令 $H'=\{3^+,3^-,4^+,4^-\}$。在此情况下，H' 中元素的极大扇区为 $(3^+,\ 1)$ 和 $(4^-,\ 1)$。因此，对 H'进行广义 Kauer 变换后从 Γ得到的 Brauer 图为 $\mu^+_{H'}(\Gamma)=(H,\ \iota,\ \sigma_{H'})$，其中

$$\sigma_{H'}=(3^+\ 1^+)(4^-\ 1^-)\sigma(4^+\ 1^-)(3^-\ 1^+)=(3^+\ 4^+\ 2^-\ 1^-)(4^-\ 3^-\ 2^+\ 1^+)$$

Moreover, computing first the standard Kauer move at 3 and then at 4, we obtain the following Brauer graph $(H,\iota,\sigma_{4,3})$ where

$$\begin{aligned}\sigma_{4,3}&=(4^+\ 1^+)(4^-\ 3^+)\left[(3^+\ 4^+)(3^-\ 1^-)\sigma(3^+\ 4^-)(3^-\ 1^+)\right](4^+\ 1^-)(4^-\ 3^-)\\&=(4^+\ 2^-\ 3^+\ 1^-)(4^-\ 2^+\ 1^+\ 3^-)\end{aligned}$$

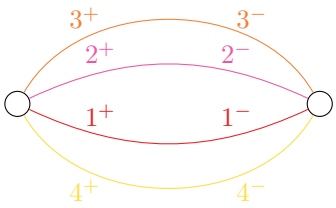
Similarly, computing first the standard Kauer move at 4 and then at 3, we obtain the following Brauer graph $(H,\iota,\sigma_{3,4})$ where

$$\sigma_{3,4}=(3^+\ 2^-\ 1^-\ 4^+)(4^-\ 1^+\ 3^-\ 2^+)$$

In particular, $\sigma_{H'}\neq\sigma_{3,4}$ and $\sigma_{H'}\neq\sigma_{4,3}$.

More generally, a generalized Kauer move of H' is not necessarily a succession of standard Kauer moves as pictured in the following example.

例 1.16. 考虑以下 Brauer 图 $\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$



其中 j^- 表示 ιj^+ 和 $\sigma = (1^+\ 2^+\ 3^+\ 4^+)(1^-\ 4^-\ 3^-\ 2^-)$。令 $H' = \{1^+, 1^-, 2^+, 2^-\}$。在此情形下， H' 中元素的极大扇区为 $(1^+,\ 1)$ 和 $(2^-,\ 1)$。因此，对 Γ 进行 H' 的广义 Kauer 变换后得到的 Brauer 图为 $\mu^+_{H'}(\Gamma) = (H,\ \iota,\ \sigma_{H'})$，其中

$$\sigma_{H'} = (1^+\ 3^+)(2^-\ 4^-)\sigma(2^+\ 3^-)(1^-4^+) = (1^+\ 2^+\ 4^-\ 3^-)(2^-\ 1^-\ 3^+\ 4^+)$$

请注意， Γ 中的任何标准 Kauer 变换都不会改变边 j ，而是会交换半边 j^+ 和 j^-。特别地，由于弧 2 和 4 在 Γ的任何顶点处都不是直接后继，因此我们无法通过一系列标准 Kauer 变换得到$\mu^+_{H'}(\Gamma)$。

利用 [OZ22], 中 Brauer 图代数的导出等价分类，我们可以证明，广义 Kauer 变换也能给出 Brauer 图代数之间的导出等价。

命题 1.17。 设 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 是一个 *Brauer* 图，且 H' 是 H 的一个在 ι作用下稳定的子集。那么，与 Γ 和$\mu^+_{H'}(\Gamma)$ 相关联的 *Brauer* 图代数导出等价。

证明。 根据 [OZ22], 中的定理 7.12，我们需要验证以下条件

(i) Γ 和 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$具有相同数量的顶点和边,

(ii) Γ 和 $\mu^+_{H'}$（Γ）的面数相同，且各面的周长多重集相同,

(iii) Γ 和 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$ 要么都为二部的，要么都不是二部的。

回顾一下，如果顶点集 V 可以划分为 $V = V_1 \coprod V_2$，使得每条边都连接 V_1 中的一个顶点和 V_2 中的一个顶点，那么图 (V, E) 就是二分图。根据 Brauer 图的定义 1.9，这些内容可以改述为

(i) $\mathrm{card}(H/\sigma) = \mathrm{card}(H/\sigma_{H'})$ and $\mathrm{card}(H/\iota) = \mathrm{card}(H/\iota)$,

(ii) $\sigma\iota$ and $\sigma_{H'}\iota$ are conjugated in $\mathfrak{S}_H$,

(iii) $\exists C\colon\ H \to \{0,1\}$ 使得 $C\sigma = C$ 且 $C\iota = 1 - C \Leftrightarrow \exists C'\colon\ H \to \{0,1\}$ 使得$C'\sigma_{H'} = C'$ 且 $C'\iota = 1 - C'$。

其中，$\sigma_{H'} = \tau^{\Gamma}{}_{\text{切}}\sigma\tau^{\Gamma}_{\text{paste}}$是 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$的定向。对于 **(i)**，结论显然： $\tau^{\Gamma}_{\text{cut}}$中对应于极大扇区（$h, r$）的每个换位都会创建一个新顶点，而 $\tau^{\Gamma}_{\text{paste}}$中对应于（$h, r$）的换位则会移除这个新顶点，如图 3 所示。此外，可以验证，在 **(ii)** 中， $t\tau^{\Gamma}_{\text{cut}}$ 是 $\mathfrak{S}_H$ 中的一个元素，它将 $\sigma\iota$ 与 $\sigma_{H'}\iota$ 共轭，其中 $t \in \mathfrak{S}_H$ 定义如下:

$$t_{|_{H'}} = (\tau^{\Gamma}_{\text{cut}}\sigma\iota)^{-1}_{|_{H'}} \qquad \text{and} \qquad t_{|_{H\setminus H'}} = \mathrm{id}_{H\setminus H'}$$

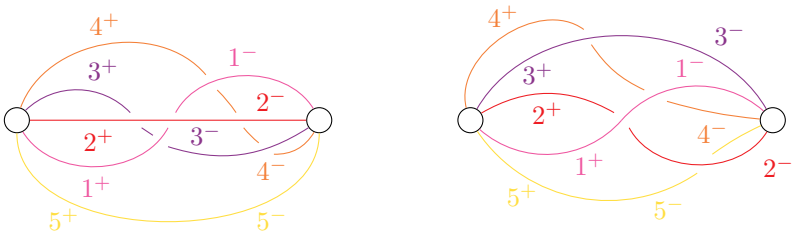
最后，对于 **(iii)**，注意到 Γ 可以通过前述剪切与粘贴作用由 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$构造得到。因此，我们只需构造 $C'\colon\ H \to \{0,1\}$ 由 C构造得到： $H \to \{0,1\}$。定义 C' 如下:

$$C'(h) = C(h) \text{ if } h \notin H' \qquad \text{and} \qquad C'(h) = 1 - C(h) \text{ if } h \in H$$

可以验证 $C'\sigma_{H'} = C'$ 和 $C'\iota = 1 - C'$。

□

注 1.18. 在 [Ant07], Antipov 的例 4.7 中，构造了以下两个 Brauer 图$\Gamma_1 = (H,\ \iota,\ \sigma_1)$ 和 $\Gamma_2 = (H,\ \iota,\ \sigma_2)$



Γ_1 Γ_2

其中 $\sigma_1 = (1^+\ 2^+\ 3^+\ 4^+\ 5^+)(1^-\ 2^-\ 3^-\ 4^-\ 5^-)$ 和 $\sigma_2 = (1^+\ 2^+\ 3^+\ 4^+\ 5^+)(1^-\ 4^-\ 5^-\ 2^-\ 3^-)$，这里 j^- 表示 ιj^+。利用 [OZ22], 中的 Brauer 图代数导出等价分类，我们可以证明，与 Γ_1 和 Γ_2 相关联的 Brauer 图代数导出等价。然而，无法通过一系列广义 Kauer 变换从 Γ_1 得到 Γ_2。事实上，注意在 Γ_1 中，ι 和 σ_1 可交换。可以验证，在广义 Kauer 变换下这一性质保持不变，因为在此情形下，(h, r) 是极大扇区，当且仅当 $(\iota h, r)$ 是极大扇区。由于在 Γ_2 中，ι 和 σ_2 不可交换，我们得出结论：无法通过一系列广义 Kauer 变换从 Γ_1 得到 Γ_2。因此，广义 Kauer 变换不足以得到与给定 Brauer 图代数导出等价的所有 Brauer 图代数。

2. 与 gentle 代数的联系

我们在定理 1.8 中看到，gentle 代数与配备容许切割的 Brauer 图代数之间存在对应关系。此外，gentle 代数也与配备容许剖分 [OPS18] 的标记曲面之间存在对应关系。后一对应关系基于 gentle 代数 Λ 的标记带状图；事实上，它是其平凡扩张 Triv(Λ) 的 Brauer 图，并配备相应的容许切割 [Sch18]。本节的目标是利用先前的对应关系，通过 Brauer 图上的广义 Kauer 变换来定义标记曲面上容许剖分的变换。

2.1. 容许切割与分次广义 *Kauer* 变换

我们使用定义 1.9 中的记号来理解什么是容许切割。对 Brauer 图代数 $B = kQ/I$ 选取容许切割 C，会在其关联箭图 Q 上赋予一个 $\mathbb{Z}$-分次：C 中的箭的次数为 1，其余箭的次数为 0。由于定义 I 的关系 (I)、(II) 和 (III) 关于 Q 上的 $\mathbb{Z}$-分次都是齐次的，这便在 B 上诱导出一个 $\mathbb{Z}$-分次。此外，gentle 代数 $\Lambda = B_C$ 可以看作 B 的零次子代数。考虑箭的源点，我们可以在 Brauer 图代数的箭与其关联 Brauer 图的半边之间构造一个双射。因此，Brauer 图代数 B 的容许切割 Δ，就是其关联 Brauer 图 $(H,\ \iota,\ \sigma)$ 上的一个 $\mathbb{Z}$-分次 $d : H \to \{0, 1\}$，使得对所有 $v \in H/\sigma$，都存在唯一一个源顶点为 v 的 $h_v \in H$ 满足 $d(h_v) = 1$。事实上，容许切割属于 Brauer 图上一类特殊的 $\mathbb{Z}$-分次，称为 1-齐次 $\mathbb{Z}$-分次。

定义 2.1. 设 $\Gamma = (H,\ \iota,\ \sigma)$ 是一个 Brauer 图。

- A $\mathbb{Z}$分次 d: $H \to \mathbb{Z}$ 对于所有 $v \in H/\sigma$，若满足*1*-齐次，则称其为 1-齐次。

$$\sum_{h \in H, s(h)=v} d(h) = 1$$

其中， s: $H \to H/\sigma$ 是 Γ 的源映射。

- 我们称 $(\Gamma,\ d)$ 为 $\mathbb{Z}$-分次 ***Brauer*** 图，如果 d: $H \to \mathbb{Z}$ 是 Γ 上的 1-齐次 $\mathbb{Z}$-分次。

特别地，Brauer 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 的一个容许切割 d: $H \to \mathbb{Z}$ 是 Γ 上的一个 1-齐次 $\mathbb{Z}$-分次，其取值包含于 $\{0, 1\}$ 中。现在，我们来定义适用于 $\mathbb{Z}$-分次 Brauer 图的广义 Kauer 变换的 $\mathbb{Z}$-分次版本。

定义 2.2. 设 (Γ, d) 是一个带有 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 的 $\mathbb{Z}$-分次 Brauer 图。设 H' 是 H 的一个在 ι 下稳定的子集。在 (Γ, d) 中，扇区 $(h, r) \in \mathrm{sect}(H', \sigma)$ 的 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换给出如下 $\mathbb{Z}$-分次 Brauer 图: $\mu^+_{(h,r)}(\Gamma, d) = (H, \iota, \sigma_{(h,r)}, d_{(h,r)})$，其中

$$\sigma_{(h,r)} = (h\ \sigma^{r+1}h)\sigma(\sigma^r h\ \iota\sigma^{r+1}h)$$

其中 $d_{(h,r)} : H \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\begin{aligned}
d_{(h,r)} : \iota\sigma^{r+1}h \quad &\mapsto \quad -\sum_{i=0}^{r} d(\sigma^i h) \\
\sigma^r h \quad &\mapsto \quad \begin{cases} d(\iota\sigma^{r+1}h) + d(\sigma^r h) & \text{if } \iota\sigma^{r+1}h \neq \sigma^{-1}h \\ \sum_{i=-1}^{r} d(\sigma^i h) + d(\sigma^r h) & \text{else} \end{cases} \\
\sigma^{-1}h \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \sum_{i=-1}^{r} d(\sigma^i h) & \text{if } \iota\sigma^{r+1}h \neq \sigma^{-1}h \\ -\sum_{i=0}^{r} d(\sigma^i h) & \text{else} \end{cases} \\
h' \quad &\mapsto \quad d(h') \qquad \text{for } h' \neq \iota\sigma^{r+1}h, \sigma^r h, \sigma^{-1}h
\end{aligned}$$

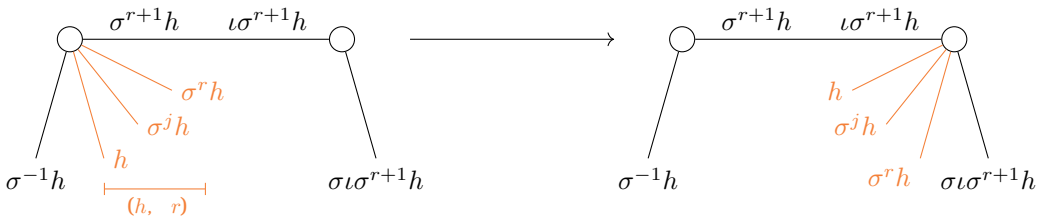


图 4: 扇区 (h,r) 的广义 Kauer 变换

我们来验证 $d_{(h,r)}: H \to \mathbb{Z}$确实是 1-齐次的。根据图 2 中剪切与粘贴作用的描述，存在一个双射 $\phi: H/\sigma \to H/\sigma_{(h,r)}$ 满足

$$\begin{aligned} s_{(h,r)}(\sigma^i h) &= \phi(s(\iota\sigma^{r+1}h)) \quad \text{for } i = 0, \dots, r \\ s_{(h,r)}(h') &= \phi(s(h')) \qquad\qquad \text{for } h' \neq \sigma^i h,\ i = 0, \dots, r \end{aligned}$$

其中，$s: H \to H/\sigma$和$s_{(h,r)}: H \to H/\sigma_{(h,r)}$分别是（$H, \iota, \sigma$）和（$H, \iota, \sigma_{(h,r)}$）的源映射。因此，很容易验证，对于所有 $v \in H/\sigma_{(h,r)}$

$$\sum_{h' \in H, s_{(h,r)}(h') = v} d_{(h,r)}(h') = \sum_{h' \in H, s(h') = \phi^{-1}(v)} d(h') = 1$$

注记 2.3. 我们已在命题 1.17 中看到，关于 H' 的广义 Kauer 变换能够在 Brauer 图代数之间建立导出等价。然而，根据前一个定义，对 H' 中一组元素的某个扇区进行广义 Kauer 变换，一般而言并不能在 Brauer 图代数之间建立导出等价。

引理 2.4。设 (h_1, r_1)、$(h_2, r_2) \in$扇区(H', σ)是 *Brauer* 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 中的扇区，其元素属于 $H' \subset H$，且在 ι 下保持稳定，使得 $\sigma^i h_1 \neq \sigma^j h_2$对于 $i = 0$、…、r_1、 $j = 0$、…、r_2。那么，$(h_1, r_1) \in$扇区$(H', \sigma_{(h_2,r_2)})$。

证明。 根据$\sigma_{(h_2,r_2)}$的定义，我们有

$$\sigma_{(h_2,r_2)}\sigma^i h_1 = (h_2\ \sigma^{r_2+1}h_2)\sigma(\sigma^{r_2}h_2\ \iota\sigma^{r_2+1}h_2)\sigma^i h_1 = \sigma^{i+1}h_1$$

对于 $i = 0, \dots, r_1$。特别地，$\sigma^i_{(h_2,r_2)}h_1 = \sigma^i h_1$对于 $i = 0, \dots, r_1 + 1$。

□

例如，如果 (h_1, r_1) 和 (h_2, r_2) 是Γ中的两个不同极大扇区，那么这一假设成立。然而，如果 (h_1, r_1) 和 (h_2, r_2) 是 Γ 中的两个不同极大扇区，那么 (h_1, r_1) 不一定是 Brauer 图 $(H, \iota, \sigma_{(h_2,r_2)})$ 中的极大扇区。在引理 2.4 的假设下，我们可以考虑连续进行 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换。记

$$\mu^+_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\Gamma, d) = (H, \iota, \sigma_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}, d_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)})$$

由 $\mu^+{}_{(h_1,r_1)}(\mu^+{}_{(h_2,r_2)}(\Gamma(d))$ 定义的 $\mathbb{Z}$-分次 Brauer 图。

命题 2.5。设 $(h_1, r_1), (h_2, r_2) \in \mathrm{Sect}(H', \sigma)$ 是 *Brauer* 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 中互不相同的极大扇区，由 $H' \subset H$ 中在 ι 作用下稳定的元素构成。那么，对于 Γ 的任意 *1*-齐次$\mathbb{Z}$分次 $d: H \to \mathbb{Z}$

$$\mu^+_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\Gamma, d) = \mu^+_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$$

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)} &= (h_1\ \sigma^{r_1+1}_{(h_2,r_2)}h_1)\sigma_{(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}_{(h_2,r_2)}h_1\ \iota\sigma^{r_1+1}_{(h_2,r_2)}h_1)\\
&= (h_1\ \sigma^{r_1+1}h_1)(h_2\ \sigma^{r_2+1}h_2)\sigma(\sigma^{r_2}h_2\ \iota\sigma^{r_2+1}h_2)(\sigma^{r_1}h_1\ \iota\sigma^{r_1+1}h_1)\\
&= (h_2\ \sigma^{r_2+1}h_2)(h_1\ \sigma^{r_1+1}h_1)\sigma(\sigma^{r_1}h_1\ \iota\sigma^{r_1+1}h_1)(\sigma^{r_2}h_2\ \iota\sigma^{r_2+1}h_2)\\
&= (h_2\ \sigma^{r_2+1}_{(h_1,r_1)}h_2)\sigma_{(h_1,r_1)}(\sigma^{r_2}_{(h_1,r_1)}h_2\ \iota\sigma^{r_2+1}_{(h_1,r_1)}h_2)\\
&= \sigma_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}
\end{aligned}$$

剩下的工作是检验各次数的交换性。根据定义，在依次进行 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换时，次数发生改变的唯一半边是

- $\iota\sigma^{r_i+1}h_i$, $\sigma^{r_i}h_i$ and $\sigma^{-1}h_i$, for $i=1,2$;
- $\iota\sigma^{r_i+1}_{(h_j,r_j)}h_i = \iota\sigma^{r_i+1}h_i$, for $\{i,j\}=\{1,2\}$;
- $\sigma^{r_i}_{(h_j,r_j)}h_i = \sigma^{r_i}h_i$, for $\{i,j\}=\{1,2\}$;
- $\sigma^{-1}_{(h_j,r_j)}h_i = \begin{cases}\sigma^{-1}h_i & \text{if } \iota\sigma^{r_j+1}h_j \neq \sigma^{-1}h_i\\ \sigma^{r_j}h_j & \text{else}\end{cases}$, for $\{i,j\}=\{1,2\}$.

由于 h_1 和 h_2 扮演对称的角色，只需检验 $i=1$ 第一行中各半边次数的交换性。我们只详细说明 $\sigma^{r_1}h_1$ 的计算，其余情况类似。

∗ 假设 $\iota\sigma^{r_1+1}{}_{(h_2,\ r_2)}h_1 \neq \sigma^{-1}{}_{(h_2,\ r_2)}h_1$。在这种情况下， $\iota\sigma^{r_1+1}h_1 \neq \sigma^{-1}h_1$ 和

$$\begin{aligned}
d_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}h_1) &= d_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}_{(h_2,r_2)}h_1)\\
&= d_{(h_2,r_2)}(\iota\sigma^{r_1+1}_{(h_2,r_2)}h_1) + d_{(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}_{(h_2,r_2)}h_1)\\
&= d_{(h_2,r_2)}(\iota\sigma^{r_1+1}h_1) + d_{(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}h_1)\\
&= \begin{cases} d(\iota\sigma^{r_1+1}h_1) + d(\sigma^{r_1}h_1) & \text{if } \iota\sigma^{r_1+1}h_1 \neq \sigma^{-1}h_2\\ \displaystyle\sum_{i=-1}^{r_2} d(\sigma^i h_2) + d(\sigma^{r_1}h_1) & \text{else}\end{cases}
\end{aligned}$$

另一方面，如果 $\iota\sigma^{r_1+1}h_1 \neq \sigma^{-1}h_2$,

$$d_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1) = d_{(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1) = d(\iota\sigma^{r_1+1}h_1) + d(\sigma^{r_1}h_1)$$

类似地，如果 $\iota\sigma^{r_1+1}h_1 = \sigma^{-1}h_2$，那么 $\iota\sigma^{r_1+1}{}_{(h_1,\ r_1)}h_2 \neq \sigma^{-1}{}_{(h_1,\ r_1)}h_2$ 以及

$$\begin{aligned}
d_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1) &= d_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\sigma^{-1}_{(h_1,r_1)}h_2)\\
&= \sum_{i=-1}^{r_2} d_{(h_1,r_1)}(\sigma^i_{(h_1,r_1)}h_2)\\
&= \sum_{i=0}^{r_2} d_{(h_1,r_1)}(\sigma^i h_2) + d_{(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1)\\
&= \sum_{i=-1}^{r_2} d(\sigma^i h_2) + d(\sigma^{r_1}h_1)
\end{aligned}$$

$*$ 假设 $\iota\sigma^{r_1+1}{}_{(h_2,\ r_2)}h_1 = \sigma^{-1}{}_{(h_2,\ r_2)}h_1$。在这种情况下，$\iota\sigma^{r_1+1}h_1 = \sigma^{-1}h_1$ 以及

$$\begin{aligned}
d_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}h_1) &= d_{(h_1,r_1)(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}_{(h_2,r_2)}h_1) \\
&= \sum_{i=-1}^{r_1} d_{(h_2,r_2)}(\sigma^{i}_{(h_2,r_2)}h_1) + d_{(h_2,r_2)}(\sigma^{r_1}_{(h_2,r_2)}h_1) \\
&= \sum_{i=-1}^{r_1} d(\sigma^{i}h_1) + d(\sigma^{r_1}h_1) \\
&= d_{(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1) \\
&= d_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\sigma^{r_1}h_1)
\end{aligned}$$

□

注意，$\mu^{+}_{H'}(\Gamma)$ 是通过对 Γ 中每个极大扇区依次进行 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换所得到的 Brauer 图。原则上，在配备容许切割的 Brauer 图 $\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$ 上，由 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换定义的 1-齐次 $\mathbb{Z}$-分次 $d_{(h,r)}: H\to\mathbb{Z}$ 不一定是 $(H,\ \iota,\ \sigma_{(h,r)})$ 的容许切割。不过，在某些假设下，我们可以确保这一性质成立。

命题 2.6. 设 $\Gamma=(H,\iota,\sigma)$ 是配备容许切割 $d:\ H\to\mathbb{Z}$ 的 *Brauer* 图，且 $H'\subset H$ 在 ι 下稳定。对于任意满足 $d(\sigma^i h)=0$（$i=0,\dots,r$）的 $(h,r)\in$ 扇区(H',σ)，*1*-齐次 $\mathbb{Z}$-分次 $d_{(h,r)}:\ H\to\mathbb{Z}$ 是$(H,\iota,\sigma_{(h,r)})$ 的容许切割。

证明。根据我们的假设，有

$$\begin{aligned}
&d_{(h,r)}(\iota\sigma^{r+1}h)=0\\
&d_{(h,r)}(\sigma^{r}h)=d(\iota\sigma^{r+1}h)\\
&d_{(h,r)}(\sigma^{-1}h)=\begin{cases} d(\sigma^{-1}h) & \text{if } \iota\sigma^{r+1}h\neq\sigma^{-1}h\\ 0 & \text{else}\end{cases}
\end{aligned}$$

特别地，$d_{(h,r)}$ 的取值包含在 $\{0,1\}$ 中。 □

2.2. 容许剖分的变换

设 $\Gamma=(H,\iota,\sigma)$ 是一个配备了容许切割 $d:\ H\to\mathbb{Z}$ 的 Brauer 图。该数据对应于一个配备了容许剖分 Δ 的标记曲面 (S,M)。曲面 S 是 Γ 的带状曲面，而 Γ 的容许切割 d 决定了标记点所在的边界分支。此外，容许剖分 Δ 是 Γ 在 (S,M) 中的嵌入。关于精确定义，请参阅 [OPS18 第 2] 节。在命题 2.6 的假设下，我们希望描述由 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换所得到的容许剖分。首先回顾 [OPS18] 和 [APS23] 中关于标记曲面的一些概念。

定义 2.7. 一个标记曲面是一个有序对 (S,M)，其中

- S is an oriented surface with non-empty boundary ∂S;

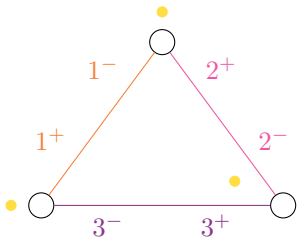
- $M = M_\circ \cup M_\bullet \cup P_\bullet$ 是一个有限的标记点集，其中 $M_\circ \cup M_\bullet$ 中的元素位于 ∂S 的边界上， S 而 $P_\bullet$中的元素称为 内点，位于 S的内部。要求 ∂S 的每个边界分支都至少包含一个位于 $M_\circ \cup M_\bullet$中的标记点，并且给定边界分支上的 $\circ$ 点和 $\bullet$-点交替排列。

在曲面上，所有曲线都视为在同伦意义下等价：如果任意选取的同伦代表曲线彼此相交，我们就称这两条曲线相交。

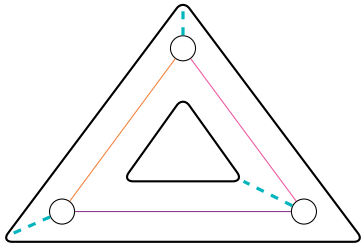
定义 2.8。 设 (S, M) 为一个标记曲面。

- 一条 $\circ$-弧 是端点位于 $M_\circ$ 中的非可缩曲线。
- 若一组 $\circ$-弧 是容许的，则其中两条弧的唯一可能交点是它们的端点，并且由这些弧围成的每个子曲面中都至少有一个 $\bullet$-点属于 $M_\bullet \cup P_\bullet$ 。
- 一个 容许剖分 是极大的容许 $\circ$-弧集合。

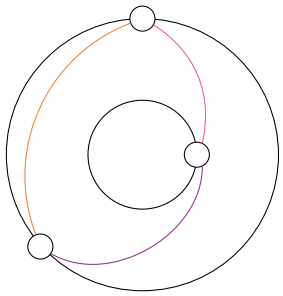
例 2.9。 设 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 是如下定义的 Brauer 图



其中， j^- 表示 ιj^+ 和 $\sigma = (1^-\ 2^+)(2^-\ 3^+)(3^-\ 1^+)$。我们为 Γ 配备一个容许切割 C，它在上一幅图中以各顶点附近的黄色点表示。记Λ 为与(Γ, C)相关联的 gentle 代数。在这种情况下， Γ 的带状曲面 S 是一个环带，如下图所示



在上一幅图中，蓝色虚线表示，借助容许切割 C 的数据， S 中的标记点如何附着到一个边界分支上。因此，与 Λ 对应的带有容许剖分的标记曲面为



在本文余下部分，我们将采用上一个例子中的约定来表示 Brauer 图中的容许切割。

记号。对于 $h \in H$，记 $[h] \in H/\iota$ 为与 h 在 Γ中的边。将 Γ 的半边朝向其源顶点，我们可以考虑 $\overrightarrow{h}$，即 $\circ$中与 $[h]$ 相对应的有向 S-弧；这里的对应关系由 Γ 在（S，M）中的嵌入给出。注意，$\overrightarrow{\iota h} = (\overrightarrow{h})^{-1}$。此外，对于 γ中的一条有向曲线 S，$|\gamma|$ 表示与 γ相对应的无向曲线。

沿用前面的记号，与赋予了容许切割 $d\colon H \to \mathbb{Z}$的 Brauer 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$相关联的（$S$，$M$）的容许剖分 Δ由下式给出：

$$\Delta = \{|\overrightarrow{h}|, [h] \in H/\iota\}$$

设（h_0，r_0）$\in$是 Γ中的一个扇区。若存在 $j = 0, \ldots, r_0$使得 $h = \sigma^j h_0$，则称 $h \in H$属于 （h_0，r_0）。此外，对所有 $h \in H$，定义如下的 $\circ$-弧

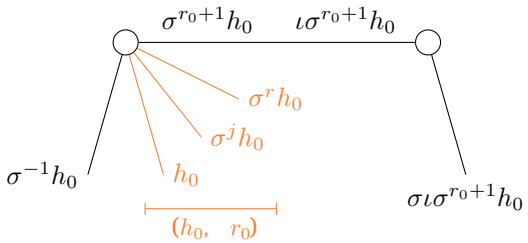
$$\overline{h} := \begin{cases} |\overrightarrow{h}| & \text{if } h \text{ and } \iota h \text{ do not belong to } (h_0, r_0) \\ |\overrightarrow{\iota\sigma^{r_0+1}h_0} \cdot \overrightarrow{h}| & \text{if } h \text{ belongs to } (h_0, r_0) \text{ but } \iota h \text{ does not} \\ |\overrightarrow{\iota\sigma^{r_0+1}h_0} \cdot \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r_0+1}h_0}| & \text{if } h \text{ and } \iota h \text{ belong to } (h_0, r_0) \end{cases}$$

其中 $\cdot$ 是 [APS23] 中命题 1.20 之前定义的拼接。

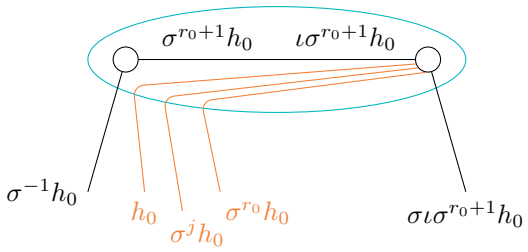
引理 2.10. 设 (H, ι, σ, d) 是配备容许切割 $d\colon H \to \mathbb{Z}$ 的 *Brauer* 图，且(S, M, Δ) 是配备容许剖分的对应标记曲面。设 H' 是在 ι 下稳定的 H 的子集，且 $(h_0, r_0) \in$扇区(H', σ) 是 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 中的一个扇区，使得$d(\sigma^i h) = 0$ 对于 $i = 0, \ldots, r_0$ 成立。那么，

(1) 弧的集合 $\Delta' = \{h, [h] \in H/\iota\}$是$(S, M)$的容许剖分，*(2)* 与 $\mu^+{}_{(h_0,r_0)}(\Gamma, d)$ 对应的、配备容许剖分的标记曲面是(S, M, Δ')。

Proof. The admissible dissection Δ of (S, M) locally looks like



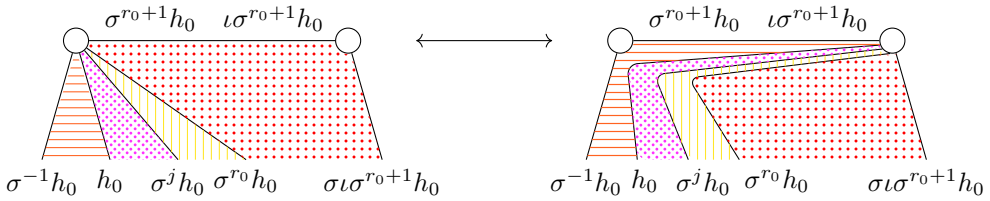
考虑 $|\overrightarrow{\sigma^{r_0+1}h_0}|$ 在 S 内部且不包含任何 $\bullet$-点的一个邻域$M_\bullet \cup P_\bullet$，我们来定义另一组 $\circ$中的弧 S，其局部定义为



注意，这个新的 $\circ$-弧集合就是集合 Δ'，其定义见 (1)。根据 Δ'的构造，很容易看出，这些 $\circ$-弧仅在端点处相交，且不会围成一个不包含任何 $\bullet$-点的 $M_\bullet \cup P_\bullet$子曲面。这意味着 Δ' 是一个可容许的

$\circ$-弧。由于它的弧数与 Δ 相同，因此它特别是一个容许剖分。

对于 (2)，注意，由 $\circ$-弧围成的多边形与 Δ 和 Δ' 之间存在如下对应关系



由于 Δ' 的 $\circ$-弧对应于 $(H,\ \iota,\ \sigma_{(h_0,r_0)})$ 在 $(S,\ M)$ 中的嵌入，只需检查容许切割 $d_{(h_0,r_0)}$：$H \to \mathbb{Z}$ 与 $d\colon H \to \mathbb{Z}$ 兼容，即在上述多边形对应关系下，对于每个不与单条边关联的顶点，与 d 和 $d_{(h_0,r_0)}$ 相关联的特殊环中的度为 1 的箭头属于同一个多边形。这一点由命题 2.6 的证明中计算出的 $d_{(h_0,r_0)}$ 的表达式显然可知。

□

Note that we can iterate the last result for sectors in Γ satisfying the assumptions of Lemma 2.4 to compute the admissible dissection of (S, M) corresponding to the succession of the $\mathbb{Z}$-graded generalized Kauer moves of these sectors.

注 2.11。 反复应用引理 2.10，我们可以证明

$$\mu^+_{(h_0,r_0)}(\Gamma, d) = \mu^+_{(h_0,0)} \circ \ldots \circ \mu^+_{(\sigma^{r_0}h_0,0)}(\Gamma, d)$$

3. Compatibility with silting mutations

标准 Kauer 变换可以用 [AI10] 意义下的 silting 突变来理解。本节的目标是用 silting 突变来诠释广义 Kauer 变换。

3.1. Silting mutations

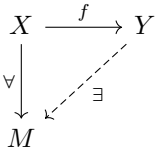
在本部分，我们回顾 [AI10] 中关于 silting 突变的一些定义和结果。记 A 为一个有限维 k-代数。对于 per(A) 中的任意对象 M，令 add(M) 表示 per(A) 的全子范畴，其对象由 M 的直和项的直和构成；令 thick(M) 表示 per(A) 中包含 M 且对直和项封闭的最小三角子范畴。

Definition 3.1. Let M be an object in $\mathrm{per}(A)$.

- We say that M is *silting* if $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(A)}(M, M[>0]) = 0$ and $\mathrm{thick}(M) = \mathrm{per}(A)$.
- We say that M is *tilting* if M is silting and $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(A)}(M, M[<0]) = 0$.

定义 3.2. 设 M 是 per(A) 中的一个对象。

- 若态射 $f\colon X \to Y$ 是 add(M)-逼近 X 的左 逼近，当且仅当 $Y \in$ 属于 add(M)，且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(A)}(f, M)$ 是满射。



- 设 $M_0 \in$ 属于 add(M)。考虑 per(A) 中的如下三角：

$$M/M_0 \xrightarrow{f} M_0' \longrightarrow C_{M/M_0} \longrightarrow M/M_0[1]$$

其中 $f\colon M/M_0 \to M_0'$ 是 M/M_0 的左 add(M_0)-逼近。因此， M 关于 M_0 的左突变是 per(A) 中的如下对象：

$$\mu^+(M; M_0) := M_0 \oplus C_{M/M_0}$$

定理 3.3（Aihara-Iyama [AI10，定理 2.32]）。

- *per(A)* 中的任意 *silting* 对象的左突变，都是$\mathrm{per}(A)$中的 *silting* 对象。
- 设 M 是 $\mathrm{per}(A)$ 的倾斜对象，且 $M_0 \in \mathrm{add}(M)$。那么， $\mu^+(M; M_0)$ 是倾斜对象，当且仅当 M/M_0 存在一个左 $\mathrm{add}(M_0)$-逼近 f，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(A)}(M_0, f)$ 是单射。

备注 3.4。 我们可以对偶地定义右逼近和右突变。此外，定理 3.3 对右突变也有一个对偶版本。

定理 3.3 使我们能够证明关于对称代数中倾斜突变的以下结果。根据定理 1.8，该结果可应用于 Brauer 图代数。

命题 3.5。 设 A 是一个有限维对称 k-代数，且 e 是A的一个幂等元。那么，左突变 $\mu^{+}(A;(1-e)A)$ 在$\mathrm{per}(A)$中是倾斜的。

3.2. gentle 代数的相容性

本部分中，我们希望通过对定义 Λ的容许剖分进行变换，来描述 gentle 代数 Λ 的 silting 突变。设 Λ是一个对应于 Brauer 图$\Gamma=(H,\ \iota,\ \sigma)$ 的 gentle 代数，并配备一个容许切割 $d\colon H\to\mathbb{Z}$。设 B是与 Γ相关联的 Brauer 图代数。回顾一下， Λ 可视为 B的零次子代数。对于 H 中任意一个在 ι作用下封闭的子集 H'，记作

$$e_{H'}B=\bigoplus_{[h]\in H'/\iota}e_{[h]}B$$

其中， $e_{[h]}B$ 是与 Γ 中的边 $[h]\in H/\iota$ 相关联的不可分解射影 B-模。此外，我们记为】【。

$$\alpha(h,H'):e_{[h]}B\longrightarrow e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}B$$

由 B 中从 h 到 $\sigma^{r(h)+1}h$ 的路径诱导的态射，其中 $r(h)+1=\min\{r\geq 0\mid\sigma^{r}h\notin H'\}$。如果对所有 $r\geq 0$ 都有 $\sigma^{r}h\in H'$，则滥用记号，令 $e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}B=0$。注意，对于 $h\notin H'$， $\alpha(h,\ H')=\mathrm{id}_{e_{[h]}B}$。我们将 $d(\alpha(h,\ H'))$ 记作该态射的次数：它是当 $i=0,\ \ldots\ldots,\ r$ 时 $d(\sigma^{i}h)$ 之和。

命题 3.6。 设 H' 是在 ι 作用下稳定的 H 的子集。对所有 $h\in H$， $e_{[h]}B$ 在 $\mathrm{per}(B)$ 中的左 $\mathrm{add}(e_{H\setminus H'}B)$ 逼近由下式给出。

$$e_{[h]}B\xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha(h,H')\\ \alpha(\iota h,H')\end{pmatrix}}e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}B\oplus e_{[\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h]}B$$

若 $d(\alpha(h,\ H'))=0$，则将 $\alpha(h,\ H')_0\colon e_{[h]}\Lambda\to e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}\Lambda$ 记为由 $\alpha(h,\ H')$ 在次数 0 部分上诱导的态射。

命题 3.7 ([OPS18])。 设$(S、\ M、\ \Delta)$ 为带有与 Λ 对应的容许剖分的标记曲面。设 H' 是 H 的一个在 ι 下稳定的子集，并设 $h\in H$，使得$d(\alpha(h、\ H'))=d(\alpha(\iota h、\ H'))=0$。那么，

$e_{[h]}\Lambda$ 在 $\mathrm{per}(\Lambda)$ 中的左 $\mathrm{add}(e_{H\setminus H'}\Lambda)$-逼近为

$$e_{[h]}\Lambda \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha(h,H')_0\\ \alpha(\iota h,H')_0\end{pmatrix}} e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}\Lambda \oplus e_{[\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h]}\Lambda$$

(2) 前述态射的锥是 *per(*Λ*)* 中由 ∘-弧 $|\overrightarrow{\iota\sigma^{r(h)+1}h} \cdot \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h}|$ 在 (S, M) 中给出的不可分解字符串对象。

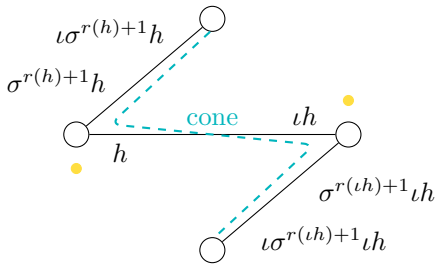


图 5： $e_{[h]}\Lambda$ 的逼近锥

我们回顾一下，上一幅图中的黄色点表示容许切割 d，其定义方式如例 2.9 中的 Λ。现在，我们可以利用 Λ 中对逼近锥的这一描述，从其容许剖分的变换来理解 Λ 的左突变。

定理 3.8。设 Λ 是一个 *gentle* 代数，对应于一个 *Brauer* 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$，并配备一个容许切割 $d : H \to \mathbb{Z}$。设 H' 是 H 的一个在 ι 作用下保持稳定的子集，使得对于所有 $h \in H'$, $d(\alpha(h, H')) = 0$。那么，

(1) 左突变 $\mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda)$ 在 $\mathrm{per}(\Lambda)$ 中是倾斜的。

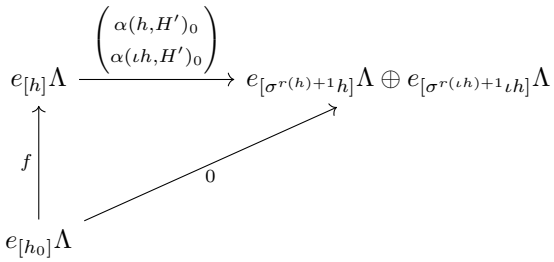
(2) $\mu^+_\pi(\Gamma, d)$ 是一个具有容许切割的 *Brauer* 图，其中 π 表示 Γ中所有极大扇区$(h, r) \in \mathrm{Sect}(H', \sigma)$ 的乘积。与 $\mu^+_\pi(\Gamma, d)$ 相关联的 *gentle* 代数是 $\mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda)$的自同态代数。

注 3.9. 如果 $H' = \{h, \iota h\}$ 中的某个 $h \in H$ 和 Γ 至少有 2 条边，请注意，我们可以借助 [CS23] 中的推论 3.7 证明这一结果。然而，我们在例 1.16 中看到，广义 Kauer 变换一般不能描述为一系列标准 Kauer 变换。因此，我们无法迭代 [CS23] 中的结果来证明定理 3.8。

证明. (1) 我们将利用定理 3.3 证明 $\mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda)$ 是倾斜的。设 $h \in H'$。根据命题 3.7，回想一下，per(Λ) 中 $e_{[h]}\Lambda$ 的左 add($e_{H\backslash H'}\Lambda$)-逼近为

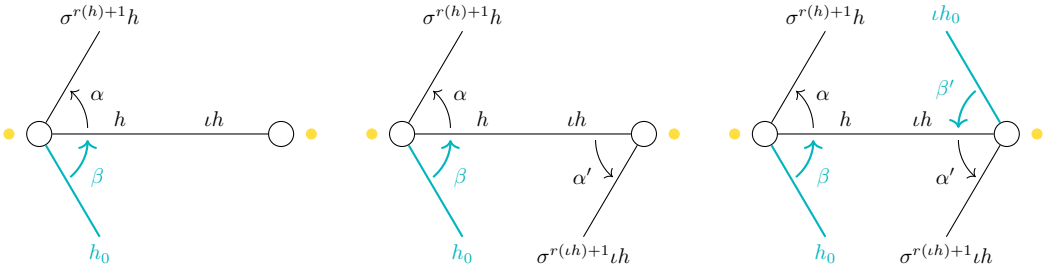
$$e_{[h]}\Lambda \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha(h,H')_0\\ \alpha(\iota h,H')_0\end{pmatrix}} e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}\Lambda \oplus e_{[\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h]}\Lambda$$

设 $h_0 \in H\backslash H'$，使得 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{per}(\Lambda)}(e_{[h_0]}\Lambda,\ e_{[h]}\Lambda) \neq 0$ 且 $f :\ e_{[h_0]}\Lambda \to e_{[h]}\Lambda$ 是 per(Λ) 中的一个态射，使得下图交换。



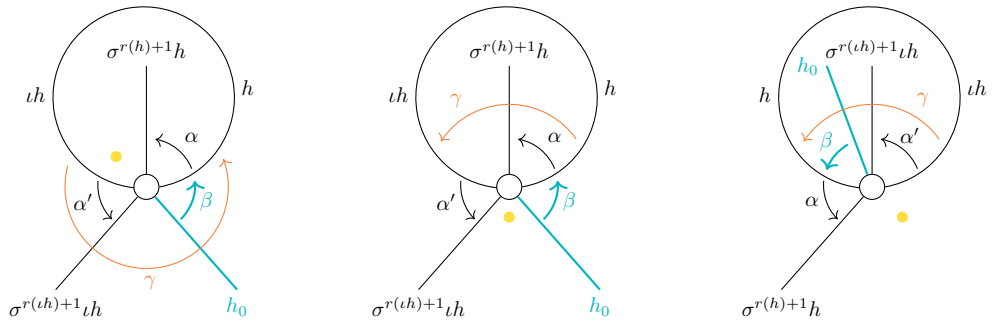
我们想证明 $f=0$。设 (S,M,Δ) 为与 Λ 相关联的带有容许剖分的标记曲面。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(e_{[h_0]}\Lambda, e_{[h]}\Lambda) \neq 0$，$\circ$-弧 $|\overrightarrow{h}|$ 和 $|\overrightarrow{h_0}|$ 有一个定向交点；由于 Δ 是容许剖分，该交点必然位于端点处。不妨假设例如 h_0 属于 Γ 中 h 的 σ-轨道。特别地，由于 $d(\alpha(h,H'))=0$，$e_{[\sigma^{r(h)+1}h]}\Lambda \neq 0$。分别记 α 和 α' 为 Brauer 图代数 B 中与态射 $\alpha(h,H')_0$ 和 $\alpha(\iota h,H')_0$ 相关联的路径，则定义 Λ 的容许剖分在局部上由以下情形之一给出。

- *1rst case*： h 和 ιh 不在同一个 σ-轨道中。

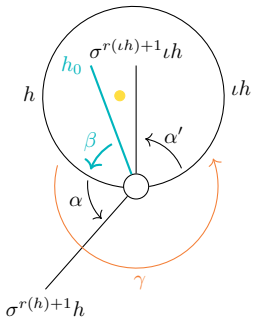


(I) (II) (III)

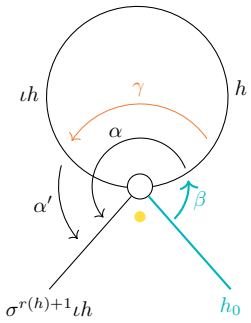
- *2*第 n 种情况： h 和 ιh 位于同一个 σ-轨道中。在这种情况下，与 h 相关联的边是 Γ中的一个环。此外，我们将 γ 记为 B 中的路径，它诱导出 per(Λ) 中的态射 $f_h : e_{[h]}\Lambda \to e_{[h]}\Lambda$，使得 $e_{[h]}\Lambda$ 的自同态代数由 $\mathrm{id}_{e_{[h]}\Lambda}$ 和 f_h生成。



(IV) (V) (VI)

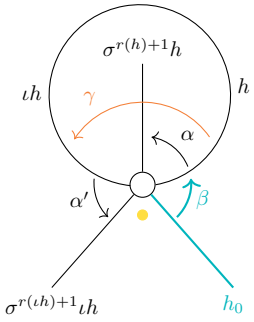


(VII)

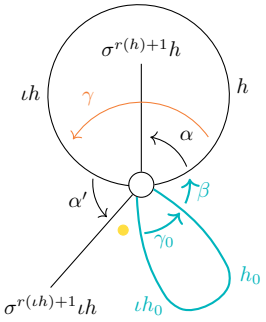


(VIII)

在前面的图中，β 表示 B 中与 $f_\beta: e_{[h_0]}\Lambda \to e_{[h]}\Lambda$ 相关联的一个非零态射，它来自 Λ中 $\circ$-弧 $|\overrightarrow{h}|$ 与 $|\overrightarrow{h_0}|$的一个定向交点。注意，$\circ$-弧 $|\overrightarrow{h_0}|$ 可能是一个环（情况 (III) 除外），在这种情况下会诱导出一个态射$f_{h_0}: e_{[h_0]}\Lambda \to e_{[h_0]}\Lambda$，它位于 per(Λ) 中，且与 $\mathrm{id}_{e_{[h_0]}\Lambda}$无关。我们只证明情况 (V) 中的 $f = 0$，其他情况类似。此时，定义 Λ 的容许剖分在局部上具有以下形式之一



(i)



(ii)

where γ_0 is the path in B associated to $f_{h_0}: e_{[h_0]}\Lambda \to e_{[h_0]}\Lambda$. Using the correspondence between oriented intersections and bases of morphism spaces from [OPS18], we deduce that

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(e_{[h_0]}\Lambda, e_{[h]}\Lambda) = \begin{cases} \mathrm{Span}_k(f_\beta, f_h f_\beta) & \text{in case (i)} \\ \mathrm{Span}_k(f_\beta, f_h f_\beta, f_\beta f_{h_0}, f_h f_\beta f_{h_0}) & \text{in case (ii)} \end{cases}$$

Then, we can write

$$f = \begin{cases} \lambda f_\beta + \mu f_h f_\beta & \text{in case (i)} \\ \lambda f_\beta + \mu f_h f_\beta + \lambda' f_\beta f_{h_0} + \mu' f_h f_\beta f_{h_0} & \text{in case (ii)} \end{cases}$$

for some $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in k$. Moreover, since $\alpha\gamma = 0$ and $\alpha'\beta = 0$, we have

$$0 = \alpha(h, H')_0 f = \begin{cases} \lambda\alpha(h, H')_0 f_\beta & \text{in case (i)} \\ \lambda\alpha(h, H')_0 f_\beta + \lambda'\alpha(h, H')_0 f_\beta f_{h_0} & \text{in case (ii)} \end{cases}$$

$$0 = \alpha(\iota h, H')_0 f = \begin{cases} \mu\alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta & \text{in case (i)} \\ \mu\alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta + \mu'\alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta f_{h_0} & \text{in case (ii)} \end{cases}$$

Again, using the correspondence from [OPS18], we know that

- In case (i), $\alpha(h, H')_0 f_\beta, \alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta \neq 0$.
- 在情形 (ii) 中，态射 $\alpha(h, H')_0 f_\beta$ 和 $\alpha(h, H')_0 f_\beta f_{h_0}$ 相互独立；对于 $\alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta$ 和 $\alpha(\iota h, H')_0 f_h f_\beta f_{h_0}$，情况也一样。

在这两种情形下，我们都得出结论：$f = 0$。

(2) 第一部分由命题 2.6 显然成立。此外，根据定义，

$$\mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda) = e_{H\backslash H'}\Lambda \bigoplus \bigoplus_{[h]\in H'/\iota} Ce_{[h]}$$

其中 $Ce_{[h]}$ 是 per(Λ) 中 $e_{[h]}\Lambda$ 的左 add($e_{H\backslash H'}\Lambda$)-逼近的锥。此外，由命题 3.7 和 [APS23], ，其自同态代数是与标记曲面 (S, M) 相对应的 gentle 代数，该曲面配备以下容许剖分

$$\Delta' = \{|\overrightarrow{\iota\sigma^{r(h)+1}h} \cdot \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h}|, [h] \in H'/\iota\} \cup \{|\overrightarrow{h'}|, [h'] \in (H\backslash H')/\iota\}$$

剩下需要证明的是，(S, M, Δ') 是配备容许剖分、与 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 相对应的标记曲面。首先注意到，由命题 2.5，定义 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 的连续 $\mathbb{Z}$-分次广义 Kauer 变换可以按任意顺序进行。反复应用引理 2.10，我们知道 (S, M) 是与 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 相关联的标记曲面。此外，只需证明对于任意 $h \in H'$，

$$\gamma_h := |\overrightarrow{\iota\sigma^{r(h)+1}h} \cdot \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r(\iota h)+1}\iota h}|$$

是 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 的 Brauer 图在 (S, M) 中的嵌入下，与 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 中的边 $[h]$ 相对应的 S 中的 $\circ$-弧。根据是否存在满足 $\sigma^r h \notin H'$ 和 $\sigma^{r'}\iota h \notin H'$ 的 r、$r' \geq 0$，需要考虑三种情形。我们只详细说明存在这样的 r、$r' \geq 0$ 的情形，其他情形类似。在这种情形下，存在 (h_1, r_1)、$(h_2, r_2) \in$ Sect(H', σ)，使得对于某些 $j = 0$，……，r_1 以及 $j' = 0$，……，r_2，有 $h = \sigma^j h_1$ 和 $\iota h = \sigma^{j'} h_2$。

- 若 $(h_1, r_1) = (h_2, r_2)$，根据引理 2.10，$\mu^+{}_{(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$ 中的边 $[h]$ 嵌入到 (S, M) 中的 $\circ$-弧 $|\overrightarrow{\iota\sigma^{r_1+1}h_1} \cdot \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r_1+1}\iota h_1}|$，而该弧恰好是 γ_h。此外，由于对于所有不同于 (h_1, r_1) 的 $(h_0, r_0) \in$ Sect(H', σ)，$[h] \neq [\sigma^j h_0], j = 0, \ldots, r_0$，半边 h 和 ιh 不会从 $\mu^+{}_{(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$ 移动到 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$。因此，$\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 中的边 $[h]$ 嵌入到 (S, M) 中，与 $\mu^+{}_{(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$ 中的边 $[h]$ 嵌入到同一条 $\circ$-弧中，即嵌入到 γ_h。
- 若 $(h_1, r_1) \neq (h_2, r_2)$，由引理 2.10，有向边 $(\iota h)^{-1}h$ 在 $\mu^+{}_{(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$ 中嵌入到 (S, M) 内，成为有向 $\circ$-弧 $(\overrightarrow{\iota\sigma^{r_1+1}h_1} \cdot \overrightarrow{h})^{-1}$，即 $\overrightarrow{\iota h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r_1+1}h_1}$。因此，再次运用引理 2.10，边 $[\iota h]$ 在 $\mu^+{}_{(h_2,r_2)(h_1,r_1)}(\Gamma, d)$ 中嵌入到 (S, M) 内，成为 $\circ$-弧 $|\overrightarrow{\iota\sigma^{r_2+1}h_2} \cdot \overrightarrow{\iota h} \cdot \overrightarrow{\sigma^{r_1+1}h_1}|$，而它恰好是 γ_h。我们如前一种情况那样得出结论。

□

3.3. Compatibility for Brauer graph algebras

本部分的目标是证明以下定理，该定理从 silting 突变的角度诠释广义 Kauer 变换。

定理 3.10。 设 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$ 为一个 ***Brauer*** 图，且 H' 是 H 的一个在 ι 下稳定的子集。分别记 B_Γ 和 $B_{\mu^+_{H'}(\Gamma)}$ 为与 Γ 和 $\mu^+_{H'}(\Gamma)$ 相关联的 ***Brauer*** 图代数，

$$\mathrm{End}_{\mathrm{per}(B_\Gamma)}(\mu^+(B_\Gamma; e_{H\setminus H'}B_\Gamma)) \simeq B_{\mu^+_{H'}(\Gamma)}$$

The idea of the proof is to use a result proved by Rickard in [Ric89] that gives a link between derived equivalences of algebras and derived equivalences of their trivial extensions.

定理 3.11 (Rickard [Ric89, 定理 3.1])。设 Λ 是有限维的 k-代数，且$T \in \mathrm{per}(\Lambda)$ 是一个倾斜对象。我们将 Λ的平凡扩张记为 B_Λ 。那么， $T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$ 是$\mathrm{per}(B_\Lambda)$中的一个倾斜对象。此外，

$$\mathrm{End}_{\mathrm{per}(B_\Lambda)}(T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda) \simeq \mathrm{Triv}(\mathrm{End}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(T))$$

我们可以用下面的交换图概括前面的定理

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{per}(\Lambda') & \xrightarrow{- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda'} T} & \mathrm{per}(\Lambda) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle - \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda'} B_{\Lambda'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle - \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda} B_{\Lambda}} \\ \mathrm{per}(B_{\Lambda'}) & \xrightarrow[- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{B_{\Lambda'}} (T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)]{} & \mathrm{per}(B_\Lambda) \end{array}$$

其中， Λ' 表示 T 的自同态代数，$B_{\Lambda'}$ 表示 Λ'的平凡扩张。

为证明定理 3.10，我们需要下面这个引理，它将代数中的倾斜突变与其平凡扩张中的倾斜突变联系起来，如前一定理所述。

引理 3.12。 设 Λ 是一个有限维的 k-代数，且 $T \in \mathrm{per}(\Lambda)$ 是一个倾斜对象。记 B_Λ 为 Λ的平凡扩张。设 $T_0 \in \mathrm{add}(T)$ 满足 $\mu^+(T; T/T_0)$ 是$\mathrm{per}(\Lambda)$中的倾斜对象。那么，

$$\mu^+(T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda; (T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)/(T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)) = \mu^+(T; T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$$

特别地，根据定理 3.11， $\mu^+(T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda; (T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)/(T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)) \in \mathrm{per}(B_\Lambda)$ 是倾斜的。

证明。 考虑 $\mathrm{per}(\Lambda)$ 中的如下三角

$$T_0 \xrightarrow{f} T' \longrightarrow C_{T_0} \longrightarrow T_0[1]$$

其中 $f\colon\ T_0 \to T'$ 是 T_0 在 per(Λ) 中关于 add(T/T_0) 的左逼近。由于函子$_ \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$: per(Λ) $\to$ per(B_Λ) 是三角函子，我们有

$$(T \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)/(T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda) = (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$$

Moreover, the previous functor yields the following triangle in per(B_Λ)

$$T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda \xrightarrow{f\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda} T' \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda \longrightarrow C_{T_0} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda \longrightarrow T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda[1]$$

我们想证明 $f \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda\colon\ T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda \to T' \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$ 是 per(B_Λ) 中 $T_0 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$ 的左 add((T/T_0) $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda$)-逼近。对前一个三角形应用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(B_\Lambda)}(-, (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda)$，只需证明】【: 】【“】【

$$\mathrm{H} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(C_{T_0} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda[-1], (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda) = 0$$

为此，注意到图 H 自然同构于双复形总复形中次数 1 的同调

$$\begin{aligned} CC :&= \mathrm{Hom}_{B_\Lambda}(C_{T_0} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda, (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda) \\ &= \mathrm{Hom}_\Lambda(C_{T_0}, (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Lambda) \\ &= \mathrm{Hom}_\Lambda(C_{T_0}, T/T_0) \oplus \mathrm{Hom}_\Lambda(C_{T_0}, (T/T_0) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda D\Lambda) \\ &= \mathrm{Hom}_\Lambda(C_{T_0}, T/T_0) \oplus D\mathrm{Hom}_\Lambda(T/T_0, C_{T_0}) \end{aligned}$$

Thus, we obtain that

$$\mathrm{H} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(C_{T_0}, (T/T_0)[1]) \oplus D\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(T/T_0, C_{T_0}[-1])$$

由于 $\mu^+(T;\ T/T_0)\ = T/T_0 \oplus C_{T_0}$ 在 per(Λ) 中是倾斜的，我们得出 $H = 0$。 □

We have now all the tools to prove Theorem 3.10.

Proof of Theorem 3.10. Let us define an admissible cut $d : H \to \mathbb{Z}$ on Γ as follows : for every vertex $v \in H/\sigma$,

- If there exists $h_0 \in H\backslash H'$ and $h_1 \in H'$ whose source vertices are v, then we choose any maximal sector $(h, r) \in \mathrm{Sect}(H', \sigma)$ and we set $d(\sigma^{-1}h) = 1$ and $d(h') = 0$ for every half-edge $h' \neq \sigma^{-1}h$ whose source vertex is v.
- Else, we choose any $h \in H$ whose source vertex is v and we set $d(h) = 1$ and $d(h') = 0$ for every half-edge $h' \neq h$ whose source vertex is v.

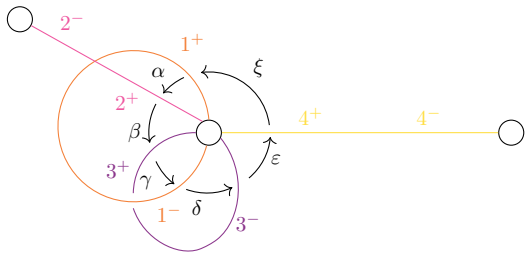
通过构造，(Γ, d) 定义了一个 gentle 代数 Λ，满足对于所有 $h \in H'$， $d(\alpha(h, H')) = 0$。特别地，根据定理 1.8， B_Γ 是 Λ的平凡扩张。此外，根据定理 3.8，$T := \mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda)$ 是倾斜对象，其自同态代数是与 $\mu^+_\pi(\Gamma, d)$ 相关联的 gentle 代数，其中 π 是 Γ 中所有极大扇区 $(h, r) \in \mathrm{Sect}(H', \sigma)$ 的乘积。因此，根据引理 3.12，我们得到如下同构

$$E := \mathrm{End}_{\mathrm{per}(B_\Gamma)}(\mu^+(B_\Gamma; e_{H\backslash H'}B_\Gamma)) \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{per}(B_\Gamma)}(\mu^+(\Lambda; e_{H\backslash H'}\Lambda) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda B_\Gamma)$$

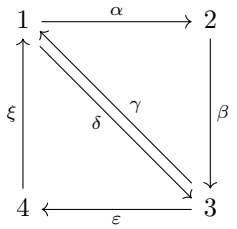
利用定理 3.11，我们推得自同态代数 E 同构于 $\mathrm{End}_{\mathrm{per}(\Lambda)}(T)$ 的平凡扩张。再次利用定理 1.8，我们知道 E 是一个 Brauer 图代数，其 Brauer 图为 (H, ι, σ_π)，其中 σ_π 是 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 的定向。根据命题 2.5，注意到 $\mu_\pi^+(\Gamma, d)$ 的定向 σ_π 恰好是 $\mu_{H'}^+(\Gamma)$ 的定向 $\sigma_{H'}$。因此，E 确实同构于 $B_{\mu_{H'}^+(\Gamma)}$。 □

由于根据命题 3.5，$\mu^+(B_\Gamma, e_{H\setminus H'}B_\Gamma)$ 在 $\mathrm{per}(B_\Gamma)$ 中是倾斜的，因此我们得到了命题 1.17 的另一种证明，即 B_Γ 和 $B_{\mu_{H'}^+(\Gamma)}$ 是导出等价的 Brauer 图代数。

例 3.13。考虑下面的 Brauer 图 $\Gamma = (H, \iota, \sigma)$



其中 j^- 表示 ιj^+ 和 $\sigma = (1^+\ 2^+\ 3^+\ 1^-\ 3^-\ 4^+)$。其对应的 Brauer 图代数$B_\Gamma = kQ/I$ 是路径代数，其箭图如下所示

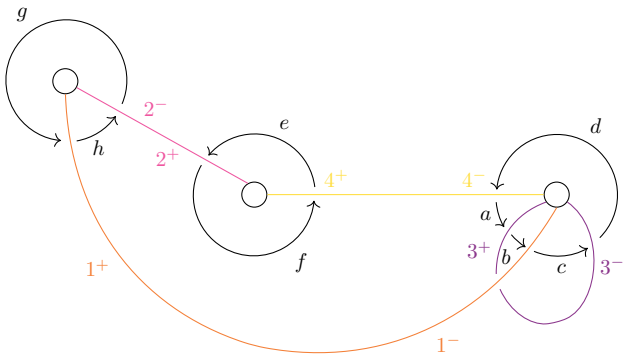


其关系集为

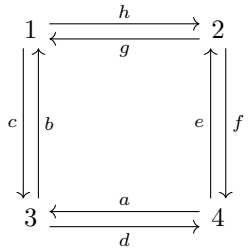
(I) $\xi\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha - \gamma\beta\alpha\xi\varepsilon\delta$, $\delta\gamma\beta\alpha\xi\varepsilon - \beta\alpha\xi\varepsilon\delta\gamma$; (II) $\alpha\xi\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$, $\delta\gamma\beta\alpha\xi\varepsilon\delta$, $\beta\alpha\xi\varepsilon\delta\gamma\beta$, $\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha\xi\varepsilon$, $\gamma\beta\alpha\xi\varepsilon\delta\gamma$, $\xi\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha\xi$; (III) $\delta\xi$, $\varepsilon\beta$, $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$。

让我们计算 $\mu^+(B_\Gamma; e_2B_\Gamma \oplus e_4B_\Gamma)$ 的自同态代数。根据定理 3.10，我们需要计算与 $\mu_{H'}^+(\Gamma)$ 相关联的 Brauer 图代数，其中 $H' = \{1^+, 1^-, 3^+, 3^-\}$。$H'$ 中元素的极大扇区为 $(1^+,0)$ 和 $(3^+,2)$。因此，通过对 Γ 进行 H' 的广义 Kauer 变换所得到的 Brauer 图为 $\mu_{H'}^+(\Gamma) = (H, \iota, \sigma_{H'})$，其中

$$\sigma_{H'} = (1^+\ 2^+)(3^+\ 4^+)\sigma(1^+\ 2^-)(3^-\ 4^-) = (1^+2^-)(1^-\ 3^-\ 4^-\ 3^+)(2^+\ 4^+)$$



The Brauer graph algebra $B_{\mu^+_{H'}(\Gamma)} = kQ_{H'}/I_{H'}$ associated to $\mu^+_{H'}(\Gamma)$ is the path algebra whose quiver is given by



且其关系集为

(I) $gh - badc$、$hg - ef$、$cbad - adcb$、$dcba - fe$; (II) hgh、$cbadc$、ghg、fef、$dcbad$、$badcb$、$adcba$、efe; (III) fh、cg、ge、af、da、hb、bc、ed。

特别地，Brauer 图代数 B_Γ 和 $B_{\mu^+_{H'}(\Gamma)}$ 是导出等价的。

References

[AI10] T. Aihara 和 O. Iyama. “三角范畴中的 silting 突变”。发表于：伦敦数学会杂志 85 (2010)。 DOI: 10.1112/jlms/jdr055.[Ant07] M. Antipov. “对称特殊双串代数的导出等价”。发表于：数学科学杂志 147 (2007)，第 6981–6994 页。 DOI: 10.1007/s10958-007- 0524-4.[APS23] C. Amiot、P.-G. Plamondon 和 S. Schroll. “通过绕数和 Arf 不变量得到 gentle 代数的完备导出不变量”。发表于：*Selecta Mathematica* 29 (2023)。DOI: 10.1007/s00029-022-00822-x.[Ari17] S. Ariki. “经典型 Hecke 代数块代数的表示类型”。发表于：数学进展 317 (2017)，第 823–845 页。 DOI: 10.1016/j.aim.2017. 07.018.

[Ari21] S. Ariki. “经典型 Hecke 代数的 tame 块代数”。发表于：澳大利亚数学会杂志 111.2 (2021)，第 179–201 页。 DOI: 10. 1017 / S1446788719000326.[AZ22] M. Antipov 和 A. Zvonareva. “Brauer 图代数在导出等价下封闭”。发表于：数学杂志 301 (2022)，第 1–19 页。 DOI: 10.1007/s00209- 021-02937-x.[CS23] W. Chang 和 S. Schroll. “gentle 代数 silting 理论的几何实现”。发表于：数学杂志 303 (2023)。 DOI: 10.1007/s00209-023-03207-8.[DF78] P. Donovan 和 M. Freislich. “具有二面体 Sylow 子群的某些群的不可分解模表示”。发表于：数学年刊 238 (1978)，第 207–216 页。 DOI: 10.1007/BF01420248.[ES92] K. Erdmann 和 A. Skowro´nski. “块的 Auslander-Reiten 分支与自单射双串代数”。发表于：美国数学会汇刊 330 (1992)。 DOI: 10.2307/2154159.[Kau98] M. Kauer. “图代数的导出等价”。发表于：当代数学 229，《有限维代数表示论趋势》(1998)，第 201–213 页。[Lad17] S. Ladkani. “从群到簇”。载于：《表示论——当前趋势与展望》。EMS Press，2017，第 427–500 页。 DOI: 10.4171/171-1/15.[Laz14] F. Lazarus.《组合图与曲面：计算与拓扑视角》，附《方形平坦环面的等距嵌入札记》。M´研究资格论文 `。2014.[MS14] B. R. Marsh 和 S. Schroll. “Brauer 图代数的几何与簇突变”。发表于：代数杂志 419 (2014)，第 141–166 页。 ISSN: 0021-8693。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.08.002.[MS20] G. Malic 和 S. Schroll. 儿童画、Brauer 图代数与伽罗瓦不变量。2020。arXiv: 1902.09876 [math.RT].[Oku98] T. Okuyama. 有限群导出等价块的一些例子。未发表论文。1998.[OPS18] S. Opper、P.-G. Plamondon 和 S. Schroll. gentle 代数导出范畴的几何模型。2018。arXiv: 1801.09659 [math.RT].[OZ22] S. Opper 和 A. Zvonareva. “Brauer 图代数的导出等价分类”。发表于：数学进展 402 (2022)，第 108341 页。 DOI: 10.1016/j.aim. 2022.108341.[Ric89] J. Rickard. “导出范畴与稳定等价”。发表于：纯粹与应用代数杂志 61 (1989)，第 303–317 页。 DOI: 10.1016/0022-4049(89)90081-9.[Sch15] S. Schroll. “gentle 代数的平凡扩张与 Brauer 图代数”。发表于：代数杂志 444 (2015)，第 183–200 页。 ISSN: 0021-8693。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.07.037.[Sch18] S. Schroll. “Brauer 图代数”。载于：《同调方法、表示论与簇代数》。2018，第 177–223 页。 ISBN: 978-3-319-74584-8。 DOI: 10.1007/978-3-319-74585-5_6.[WW85] B. Wald 和 J. Waschb¨usch. “Tame 双串代数”。发表于：代数杂志 95.2 (1985)，第 480–500 页。 ISSN: 0021-8693。 DOI: https : / / doi . org / 10 . 1016 / 0021 - 8693(85)90119-X.

Université Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, 38610 Gières
E-mail address : valentine.soto@univ-grenoble-alpes.fr