arXiv:2305.06045v1 [math.AT] 10 May 2023

TRANSFER AND THE SPECTRUM-LEVEL SIEGEL-SULLIVAN KO-ORIENTATION FOR SINGULAR SPACES

MARKUS BANAGL

摘要。 奇异空间之间的具有整数定向的正规非奇异映射，在奇素数处的 KO-同调上具有相应的转移同态。我们证明，这类转移保持 Siegel-Sullivan 定向。该定向定义于满足维特条件的紧致伪流形奇异空间上，例如纯维紧致复代数簇。对于具有流形纤维的块丛所关联的丛转移，以及与正规非奇异嵌入相关的 Gysin 限制，这一结论同样成立。我们的方法基于将 Siegel-Sullivan 定向提升为高度结构化环谱之间的一个态射，并使其经过 L-理论分解。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 远离 2 时 KO-理论与 L-理论的乘法性识别 4 3. Sullivan 与 Ranicki 的定向 6 4. Siegel-Sullivan 定向的经典构造 12 5. Siegel-Sullivan 定向的环谱层面构造 15 6. 定向类的乘法性 22 7. Siegel-Sullivan 定向的丛转移 23 8. Siegel-Sullivan 定向的 Gysin 限制 26 参考文献 28

1. INTRODUCTION

令 $KO_*(-)$ 表示拓扑 KO-同调，并令 M 为一个光滑的 n 维闭定向流形。在他的 MIT 讲义 [56]，中，Sullivan 引入了一个类 $\Delta_{SO}(M) \in KO_n(M) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$，它是一种定向，在研究流形的 K-理论中发挥着基础性作用。例如，Sullivan 证明，远离 2 的拓扑块丛可由球面纤维化与 $KO[\frac{1}{2}]$-定向共同刻画。他进一步在 [57] 中指出，给定一类配备了配边不变量符号的定向分片线性（PL）伪流形，其中该符号将流形的符号推广到伪流形，并满足 Novikov 可加性和乘积公式，那么一种类似的过程（基于适当的

Date: May 2023.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 55N33, 55R12, 57N80, 57R20, 55N15, 19L41, 57Q20, 57Q50.

Key words and phrases. Stratified Spaces, Characteristic Classes, Orientation Classes, Bundle Transfer, Gysin maps, Intersection Homology, Bordism, KO-Homology, L-Theory.

This work is funded by a research grant of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) – Projektnummer 495696766.

奇异情形中的横截性结果）仍可用于确定 $KO_*(-) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 中的一个典范定向。Goresky 和 MacPherson 的交叉同调，使得当伪流形只有偶余维分层时，或更一般地，当它们满足 Siegel 在 [55] 中引入的维特条件时，可以构造此类签名不变量。若某个定向 PL 伪流形的奇余维分层的链接的中间偏 perversity、中间维有理交叉同调消失，则称其为维特空间。该类包含所有纯维复代数簇。维特空间类又包含在 [3], [4], 中引入的一个更大的伪流形类中，该类支持一种配边不变量签名。粗略地说，这些空间在奇余维分层处的链接上同调层中具有拉格朗日子层。然而，本文将仅关注维特空间。

因此，Sullivan 的一般框架意味着，n 维闭 Witt 空间 X 具有一个典范定向 $\Delta(X) \in KO_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$。Siegel 在 [55], 中详细描述了这一元素的构造，本文将再次回顾这一构造。我们将其称为 Witt 空间的 Siegel-Sullivan 定向。在 [17], 中，Cappell、Shaneson 和 Weinberger 将这一取向扩展为适用于不动点集满足弱正则性条件的有限群作用的等变类。在庞特里亚金特征下，$\Delta(X)$ 是 Goresky-MacPherson L 类 $L_*(X) \in H_*(X;\mathbb{Q})$ 的一个提升。后者已经包含了关于奇异空间 X 的重要全局信息（参见 [18], [60]），因此，其具体计算也相应地具有挑战性。对于复射影簇 X，通常可以利用 Gysin 同态，将 X 与光滑子簇的横截交作为切入点，从而获得关于 $L_*(X)$ 的信息。例如，可以将奇异舒伯特簇的 L 类计算完全归约为对明确给出的代数子簇进行签名计算。这一方法最初由 [7] 提出，并在 [11],中得到系统性推进，而其应用需要深入理解奇异空间的特征类和定向类在 Gysin 限制下如何变化。

设 $g : Y \hookrightarrow X$ 是闭 Witt 空间之间一个定向的、正规非奇异的余维 c 包含映射。因此，Y 在 X 中有一个开管状邻域，该邻域以保持分层的方式具有定向秩 c 向量丛的结构。由于 SO-丛具有 $KO[\frac{1}{2}]$-定向，g 有一个相关的 Gysin 同态 $g^! : KO_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \to KO_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. 我们证明（定理 8.2）：

定理。设 $g : Y^{n-c} \hookrightarrow X^n$ 是闭维特空间之间的定向正规非奇异嵌入。$g^!$ 所对应的 $KO[\frac{1}{2}]$-同调 Gysin 映射将 X 的 Siegel-Sullivan 定向映射为 Y 的 Siegel-Sullivan 定向：

$$g^!\Delta(X) = \Delta(Y).$$

代数几何中一类重要的态射是局部完全交态射 ([25]) $Y \to B$。根据定义，它们可分解为 $Y \to X \to B$，其中 $Y \to X$ 是闭正则代数嵌入，$X \to B$ 是光滑态射。正则嵌入有相应的代数法向量丛，而光滑态射有相应的相对切丛，因此 l.c.i. 态射具有虚切丛。Goresky-MacPherson [29, 54.3] 和 Fulton-MacPherson [26]也研究过与之平行的拓扑概念，即正规非奇异映射 $Y \to B$。根据定义，这类映射可分解为 $Y \to X \to B$，其中 $Y \to X$ 是正规非奇异嵌入，随后是纤维 $X \to B$ 为流形的纤维丛投影。因此，完整的图景还应包括对 Siegel-Sullivan 定向在 Becker-Gottlieb 型丛转移 ([12]) 下如何变化的理解。我们还将考察与紧 Witt 空间 B ([19]) 上的块丛 (ξ) 相关联的丛转移 $\xi^!$。这些转移不要求局部平凡投影

映射 X $\to$B，而只是将 X 分解为覆盖 B 中各个胞腔的块。（纤维丛是块丛的一种特殊情形。）因此，设 ξ 是一个定向 PL F-分块丛，其流形纤维 F 是闭的、定向的 d 维 PL 流形，底空间 B 是闭的维特基空间。那么，由于 ξ 的稳定垂直法向块丛具有 KO$[\frac{1}{2}]$-定向，存在一个块丛传递$\xi^!$: KO$_n$(B) $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \to$ KO$_{n+d}$(X) $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. 我们证明（定理 7.4）：

定理。若 ξ 是一个定向 PL F-分块丛，其纤维 F 是闭定向 PL 流形，且底空间 B 是闭 Witt 基空间，那么在块丛传递下，底空间与全空间 X 的 Siegel-Sullivan 定向满足

$$\xi^!\Delta(B) = \Delta(X).$$

我们并未直接使用 Siegel 原始构造的 Δ 来证明上述转移结果，而是从同伦论的角度出发，借助 K-理论与 L-理论之间的联系，对 Δ 作出新的描述：我们在此给出 Siegel-Sullivan 定向到环谱层面态射的提升

$$\Delta : \mathrm{MWITT} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}],$$

其中 MWITT 表示 Witt 空间配边理论的环谱，它按照 [10] 中的方法，通过 Laures 和 McClure 的 ad-理论构造。就本文的目的而言，Δ 一个尤为重要的特性是其乘法性。在同伦群上，Δ_* 将闭 Witt 空间 X^{4k} 的配边类映射到其符号σ(X)。为得到 Δ 的环谱层面描述，我们利用 Land 和 Nikolaus 的结果 [33]，在命题 2.1 中构造高结构环谱 KO$[\frac{1}{2}] \simeq \mathbb{L}$(ℝ)$[\frac{1}{2}]$ 之间的一个等价；该等价将 π_4(KO)$[\frac{1}{2}]$ 中复化后为复 Bott 元平方的元素，映射到 $\pi_4(\mathbb{L}(\mathbb{Z}))$ 中符号为 1 的元素。这里，$\mathbb{L}$(R) 表示带对合环 R 的（投射）对称代数 L-理论谱，最早由 Ranicki 引入。在此等价下，Witt 空间的 Siegel-Sullivan 定向 Δ(X) 对应于 Laures、McClure 与本文作者的 $\mathbb{L}(\mathbb{Q})$-同调定向 $[X]_{\mathbb{L}}$，它将 Ranicki 的流形 $\mathbb{L}$-同调定向推广到奇异空间。由此，我们得以运用 $\mathbb{L}$ 理论的转移结果，这些结果已在 [7] 和 [8] 中确立。对于底空间 B 为 PL 流形的 PL F-纤维丛 p : X $\to$ B，转移公式 $p^![B]_{\mathbb{L}} = [X]_{\mathbb{L}} \in \mathbb{L}$(ℤ)$_{n+d}$(X) 由 L¨uck 和 Ranicki 在 [37] 中提出。

从解析视角来看，对于一个（闭合、定向的）黎曼流形 M，Sullivan 定向 Δ_{SO}(M) 与 M 的 K-同调的 Kasparov 模型 K$_*$(M) = KK$_*$(C(M) ℂ) 中的符号算子类密切相关，参见例如 [52] 和 [34, 命题 8.3]。模去 2-幂扭率后，这两个类相差若干个 2 的幂。对于在正则部分配备了不完备迭代边缘度量的光滑分层 Witt 空间 X，Albin、Leichtnam、Mazzeo 和 Piazza 在 [1] 中构造了一个符号算子 $\eth_{\mathrm{sign}}$ 以及一个 K-同调类 $[\eth_{\mathrm{sign}}] \in$ K$_*$(X)。同样，我们可以远远超越维特空间的范畴：[3] 的拓扑上同调理论与解析 L^2 de Rham 理论已在 [2]中从一个共同的视角加以研究。

鉴于 [7] 和 [11], 的代数结果，本文的结论在以下问题的背景下也具有相关性。该问题由 J¨org Sch¨urmann 在 [54]中提出：纯维紧复代数簇 X 上的 Siegel-Sullivan 定向 Δ(X)，是否是通过动机 Hodge Chern 类变换 MHC$_1$: K$_0$(MHM(X)) $\to$ K$_0^{\mathrm{coh}}$(X) 将 X 上的交叉同调（混合）Hodge 模映射所得的像，其中该变换由 Brasselet-Sch¨urmann-Yokura [14], 提出，随后再经由 Baum、Fulton 和 MacPherson 的 K 理论 Riemann-Roch 变换?

上述内容安排如下：第 2 节汇集了 KO 和 $\mathbb{L}$ 的相关同伦论信息，并构造本文其余部分将一直使用的 KO 与 $\mathbb{L}$ 在 2 以外处的特定等价。第 3 节回顾了非奇异情形下 Sullivan 和 Ranicki 的定向。第 4 节概述了经典构造

：在 [55] 中给出的奇异 Witt 空间 Siegel-Sullivan 定向。第 5 节重点介绍我们在环谱层面构造 Siegel-Sullivan 定向的方法。这一构造的直接应用是在第 6 节证明 Siegel-Sullivan 定向的笛卡尔乘法性（定理 6.2）。第 7 节中，我们运用乘法谱层构造来确立正则非奇异块丛转移结果；最后，第 8 节讨论 Siegel-Sullivan 定向的正则非奇异 Gysin 限制。

致谢。感谢 J¨org Sch¨urmann 就本文主题展开富有启发性的讨论。我们尤其感谢 Markus Land 就远离 2 时 K-理论与 L-理论之间的关系进行讨论。

2. 远离 2 时 KO-理论与 L-理论的乘法等价

我们的方法基于寻找一个乘法等价 $\mathbb{L}[\frac{1}{2}] \simeq \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$：将其与 Ranicki 定向 $\mathrm{MSPL} \to \mathbb{L} \to \mathbb{L}[\frac{1}{2}]$复合后，所得映射给出 Sullivan 定向。本节将基于 Land 和 Nikolaus 在 [33]中获得的高度结构化环谱之间的一个等价，描述这样一个等价。

设 R 为带对合的交换含幺环，并令 $\mathbb{L}(R)$ 表示 R 的（射影）对称代数 L-理论谱，该谱最早由 Ranicki 引入。（例如参见 [47]；由于本文不会使用二次 L-理论谱，因此我们的记号无需区分对称代数 L-理论谱与二次 L-理论谱。）本文中 R 的唯一取值为整数环以及有理数、实数或复数域。由于在这些情形下 $\widetilde{\mathrm{K}}_0(R)$ 消失，因而自由 L-理论与射影 L-理论之间没有区别。$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的对合取为平凡对合，而我们将 $\mathbb{C}$ 视为带有复共轭对合。若 $R = \mathbb{Z}$，我们将简写为 $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{Z})$。谱 $\mathbb{L}(R)$ 是一个环谱，且带对合的交换环之间的态射 $R \to S$ 诱导出一个态射 $\mathbb{L}(R) \to \mathbb{L}(S)$。对于包含映射 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，可得到态射

$$\mathbb{L}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{C}).$$

Laures 和 McClure 的乘法对称 Poincaré ad 理论 [35] 表明，这些都是环谱之间的态射。他们的弱对称幺半函子还表明，对于交换环 R，$\mathbb{L}(R)$ 可以实现为一个交换对称环谱。因此，$\mathbb{L}(R)$ 等价于一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，也就是说，其乘法不仅在同伦意义下是交换且结合的，而且在相容同伦系统的意义下也是交换且结合的。如果 E 是一个环谱，而 A 是 $\mathbb{Q}$ 的子环，那么局部化谱 E_A 具有唯一的（在环等价意义下）环结构，使得局部化态射 $\mathrm{E} \to \mathrm{E}_A$ 是一个环态射。环态射 $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ 局部化后成为环态射 $\mathrm{E}_A \to \mathrm{F}_A$。如果 $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$，我们将用 $\mathrm{E}[\frac{1}{2}]$ 表示 E_A。因此，存在环谱之间的典范态射。

$$\mathbb{L}(\mathbb{Z})[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Q})[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R})[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{C})[\tfrac{1}{2}].$$

前两个态射是等价，最后一个不是。事实上，$\mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$ 的同伦环为 $\mathbb{L}_*(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\mathrm{x}^{\pm 1}]$，其中 $\mathrm{x} \in \mathbb{L}_4(\mathbb{Z})$ 是符号为 1 的元素。（$\mathbb{L}_*(\mathbb{Z})$ 中次数为 1 的挠元在将 2 取逆后消失。）$\mathbb{L}(\mathbb{R})$ 的同伦环为 $\mathbb{L}_*(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}[\mathrm{x}^{\pm 1}]$，其中 $\mathrm{x} \in \mathbb{L}_4(\mathbb{R})$ 表示类 $\mathrm{x} \in \mathbb{L}_4(\mathbb{Z})$ 的像。同伦群 $\mathbb{L}_i(\mathbb{Q})$ 在不能被 4 整除的次数 i 上消失。对于 $\mathrm{i} = 4\mathrm{k}$，它们包含

无限生成的 2-主挠部分，

$$\mathbb{L}_{4k}(\mathbb{Q}) = \mathbb{L}_{4k}(\mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{p \text{ prime}} \mathbb{L}_{4k}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/_2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/_4)^\infty,$$

其中 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的有限域。符号同态 $\mathbb{L}_{4k}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}$ 为唯一环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{L}_{4k}(\mathbb{Q})$ 提供了唯一的分裂。随后，通过求逆 2 消除了无限生成的 2-初等扭元。借助上述规范的乘法映射，我们将 $\mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$、$\mathbb{L}(\mathbb{Q})[\frac{1}{2}]$ 和 $\mathbb{L}(\mathbb{R})[\frac{1}{2}]$ 识别为 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。$\mathbb{L}(\mathbb{C})$ 的同伦环（在 $\mathbb{C}$ 上带有共轭对合）为 $\mathbb{L}_*(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}[b^{\pm 1}]$，其中 b 的次数为 2。谱 $\mathbb{L}(\mathbb{C})$ 是 2-周期的。在同伦环上，映射 $\mathbb{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}(\mathbb{C})$ 诱导映射 $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}[b^{\pm 1}]$，$x \mapsto b^2$。

令 KO 表示代表实 K-理论的 8-周期环谱，K 表示代表复 K-理论的 2-周期环谱。K 的同伦环为 $\pi_*(K) = \mathbb{Z}[\beta^{\pm 1}]$，其中 β是次数为 2 的复 Bott 元，即 β 由约化规范复直线丛 $H - 1 \in \widetilde{K}^0(S^2)$ 表示。复化 $c : BO \to BU$ 可提升为环谱态射 $c : KO \to K$（[53, p. 360，引理 VI.3.3]）。在 π_4 上，c 诱导乘以 2 的映射，$c_* = 2 : \pi_4(KO) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_4(K)$。因此，在 $\pi_4(KO)$ 中不存在映射到 β^2 的元素。但求逆 2 后，这样的元素存在。令 $a \in \pi_4(KO)[\frac{1}{2}]$ 为其复化为 β^2 的元素。局部化 $KO[\frac{1}{2}]$ 是一个 4-周期环谱，其同伦环为 $\pi_*(KO)[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][a^{\pm 1}]$.

Taylor 和 Williams 在 [59, 定理 A] 中证明，存在一个谱的等价 $\mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}] \simeq KO[\frac{1}{2}]$。在 [51], 中，Rosenberg 断言这些谱作为同伦环谱是等价的。Lurie [38]，进一步给出了这方面的论证，证明这些谱作为同伦环谱是等价的。Land 和 Nikolaus [33, 第 550] 页构造了一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 $KO[\frac{1}{2}] \simeq \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$. 的等价

命题 2.1. 存在一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的等价

$$\kappa : KO[\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{L}(\mathbb{R})[\tfrac{1}{2}]$$

它诱导出环同构

$$\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][a^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x^{\pm 1}],\ a \mapsto x$$

在同伦环上。

证明。我们感谢 Markus Land 就以下论证提供的交流。令 $\tau_{\mathbb{R}} : KO[\frac{1}{2}] \to \mathbb{LR}[\frac{1}{2}]$ 为 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的等价，如 [33, 推论 5.4] 所给出。该等价与一个复版本 $\tau_{\mathbb{C}} : K[\frac{1}{2}] \to \mathbb{LC}[\frac{1}{2}]$ 通过交换图相关联

$$\begin{array}{ccc} KO[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} & \mathbb{L}(\mathbb{R})[\frac{1}{2}] \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow \\ K[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\tau_{\mathbb{C}}]{} & \mathbb{L}(\mathbb{C})[\frac{1}{2}]. \end{array}$$

（尽管在周期谱上不存在 $\tau_{\mathbb{C}}$ 的积分版本，但在连通谱上存在一个积分版本 $k \to \ell\mathbb{C}$，在将 2 取逆后，它会在周期谱上诱导出 $\tau_{\mathbb{C}}$。）根据引理 4.9], $\tau_{\mathbb{C}*} : \pi_2(K)[\frac{1}{2}] \to \pi_2(\mathbb{LC})[\frac{1}{2}]$ 将 $\beta \mapsto 2$ 映射到 b。由于 $\tau_{\mathbb{C}}$ 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的映射，因此它将 $\beta^2 \mapsto 4$ 映射到 b^2。因此，右侧的竖直映射将元素 $\tau_{\mathbb{R}*}(a)$ 映射到

$$\tau_{\mathbb{C}*} c_*(a) = \tau_{\mathbb{C}*}(\beta^2) = 4b^2.$$

由于 $\mathbb{L}(\mathbb{R})[\frac{1}{2}] \to \mathbb{L}(\mathbb{C})[\frac{1}{2}]$ 将 x 映射为 $\mapsto b^2$,，我们推导出 $\tau_{\mathbb{R}*}(a) = 4x$。

Let

$$\psi^2 : \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

是稳定 Adams 运算，构造为一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱之间的态射（[21], [22, p.3], [41, p. 106]）。在同伦群 $\pi_{4k}\mathrm{KO}[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 上，ψ^2 诱导一个 $^k \mapsto 4^k a^k$。因此，ψ^2 诱导一个同伦环的同构，故它是一个等价。将 ψ^2 的逆与 Land-Nikolaus 等价 $\tau_{\mathbb{R}} : \mathrm{KO}[\frac{1}{2}] \to \mathbb{L}\mathbb{R}[\frac{1}{2}]$ 复合，由于该复合所诱导的映射在 π_4 上的作用为发送.....，我们便得到了所需的 $\mathbb{E}_\infty$-环谱之间的等价 κ。

$$a \mapsto \tfrac{1}{4}a \overset{\tau_{\mathbb{R}*}}{\mapsto} \tfrac{1}{4}(4x) = x.$$

□

3. The Orientations of Sullivan and Ranicki

令 MSO、MSPL 和 MSTOP 分别表示定向向量丛、PL 丛和拓扑丛的 Thom 谱。这些都是环谱，Pontrjagin-Thom 同构将它们的同伦群与定向光滑流形、PL 流形或拓扑流形的配边群 Ω_*^{SO}、Ω_*^{SPL}、Ω_*^{STOP} 联系起来。（拓扑谱 MSTOP 在下文中不会发挥实质性作用，但偶尔的旁注会涉及它。）Sullivan 在 [56] 中构造了一个谱态射。

$$\Delta_{\mathrm{SO}} : \mathrm{MSO} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

使得其在同伦群上诱导的映射

$$\Delta_{\mathrm{SO}*} : \Omega_{4k}^{\mathrm{SO}} = \mathrm{MSO}_{4k} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]_{4k} = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\langle a^k \rangle$$

is

$$\Delta_{\mathrm{SO}*}[M^{4k}] = \sigma(M) \cdot a^k, \tag{1}$$

其中 σ(M) 表示光滑定向闭流形 M 的符号，见 [39, 第 83–85] 页。庞特里亚金特征 $\mathrm{ph} : \mathrm{KO}[\frac{1}{2}] \to \mathrm{H}\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ of Δ_{SO} 是普遍希策布鲁赫 L 类 $L \in H^*(\mathrm{BSO};\mathbb{Q})$ 的逆，与稳定托姆类 $u \in H^0(\mathrm{MSO};\mathbb{Z})$ 相乘后相等，

$$\mathrm{ph}(\Delta_{\mathrm{SO}}) = L^{-1} \cup u \in H^*(\mathrm{MSO};\mathbb{Q}).$$

光滑闭 n 维流形 M 的 Sullivan 定向由.....的像给出 e

$$\Delta_{\mathrm{SO}}(M) = \Delta_{\mathrm{SO}*}[\mathrm{id}_M] \in \mathrm{KO}_n(M) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

在同态 $\Delta_{\mathrm{SO}*}$: $\Omega_n^{\mathrm{SO}}(\mathrm{M}) \to (\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])_n(\mathrm{M})$ 下，M 上恒等映射的配边类经由谱层面 Sullivan 定向 Δ_{SO} 映射得到。若 M 有边界 ∂M，则 $\Delta_{\mathrm{SO}}(\mathrm{M})$ 是相对群 $\mathrm{KO}_n(\mathrm{M}\ \partial\mathrm{M}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 中的一个元素。

定向 Δ_{SO} 典范地延拓为映射 $\Delta_{\mathrm{SPL}} : \mathrm{MSPL} \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$，相对于典范映射 MSO → MSPL（[39, 第 5.A 章，D]）。在同伦群上，诱导映射仍由符号给出，即

$$\Delta_{\mathrm{SPL}*}[M^{4k}] = \sigma(M) \cdot a^k \tag{2}$$

对于定向闭 PL 流形 M。庞特里亚金特征为

$$\mathrm{ph}(\Delta_{\mathrm{SPL}}) = L_{\mathrm{PL}}^{-1} \cup u_{\mathrm{PL}} \in H^*(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q}), \tag{3}$$

其中，L_{PL} 是万有分段线性 L 类 $L_{\mathrm{PL}} \in \mathrm{H}^*(\mathrm{BSPL};\mathbb{Q})$，而 u_{PL} 是稳定托姆类 $u_{\mathrm{PL}} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{MSPL};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ([39, 推论 5.4，第 102] 页)。注意，L_{PL} 在下述映射下限制为 L

典范映射 BSO $\to$ BSPL。我们回顾一下，该映射是有理等价，因此特别会诱导同构 $H^*(BSPL;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^*(BSO;\mathbb{Q})$；此同构将 Thom 的庞特里亚金类 $p_{4i} \in H^{4i}(BSPL;\mathbb{Q})$ 与整数庞特里亚金类的有理化 $p_{4i} \in H^{4i}(BSO;\mathbb{Q})$ 对应起来（尽管 PL 庞特里亚金类通常并非整数类）。因此，人们通常将 L 和 L_{PL} 视为相同，并统称为 L。一个 n 维闭 PL 流形具有 Sullivan 定向

$$\Delta_{SPL}(M) = \Delta_{SPL*}[\mathrm{id}_M] \in KO_n(M) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}],$$

where $[\mathrm{id}_M] \in \Omega_n^{SPL}(M)$.

注 3.1. Randal-Williams 在 [46, 第 9] 页指出，该映射还可以进一步规范地扩展为一个映射 Δ_{STOP}: MSTOP $\to$ KO$[\frac{1}{2}]$，且与规范遗忘映射 MSPL $\to$ MSTOP 相容，因为后一个映射的纤维是 2-局部的。特别地，给定一个元素$[N] \in \Omega_{4k}^{STOP}$ =$MSTOP_{4k}$，存在一个足够大的整数 i，使得 2^iN 在拓扑配边意义下等价于一个 PL 流形 M，而对于该流形，(2) 是成立的。因此

$$\begin{aligned} 2^i\Delta_{STOP*}[N] &= \Delta_{STOP*}[M] = \Delta_{SPL*}[M] = \sigma(M)\cdot a^k \\ &= \sigma(2^iN)\cdot a^k = 2^i\sigma(N)\cdot a^k. \end{aligned}$$

This shows that the map induced by Δ_{STOP} on homotopy groups is again given by the signature:

$$\Delta_{STOP*}[M^{4k}] = \sigma(M)\cdot a^k$$

for an oriented closed topological manifold M.

在本文中，我们采用 $\mathbb{L}$-理论的视角，以研究 Sullivan 和 Siegel-Sullivan 的定向。对于光滑流形 M，长期以来人们已知，在奇素数处 KO-同调与 $\mathbb{L}$-同调的适当识别下，Ranicki 的基本类 $[M]_{\mathbb{L}}$ 与 Sullivan 的类 Δ_{SO}(M) 一致，参见例如 Ranicki [47, p. 15], 和 Weinberger [60, p. 82]。令 L^n(R) 表示带有对合的环 R 的 Ranicki 的（投射）对称 L-群。在 [48, p. 385, 命题 15.8], 中，Ranicki 构造了一个环谱态射

$$\sigma^* : \mathrm{MSPL} \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Z})$$

such that the resulting $\mathbb{L}(\mathbb{Z})$-homology fundamental class

$$[M]_{\mathbb{L}} := \sigma^*[\mathrm{id}_M] \in \mathbb{L}(\mathbb{Z})_n(M)$$

of a closed oriented PL n-dimensional manifold M hits the Mishchenko-Ranicki symmetric signature

$$\sigma^*(M) = A[M]_{\mathbb{L}} \in L^n(\mathbb{Z}[\pi_1 M])$$

under the assembly map

$$A : \mathbb{L}(\mathbb{Z})_n(M) \longrightarrow L^n(\mathbb{Z}[\pi_1 M]).$$

（Ranicki 将 σ^* 扩展为环谱态射 MSTOP $\longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Z})$，见 [50, p. 290], ，但就本文的目的而言，我们不需要这一延拓。）具体而言，我们将使用 Laures 和 McClure 在 [35] 中利用 ad-理论构造的 σ^*。他们所构造的 σ^* 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环映射（[35, 1.4]）。局部化态射 $\mathbb{L}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$ 是一个环谱态射。因此，它与 σ^* 的复合是一个环谱态射 MSPL $\to \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$, ，我们也将其记作 σ^*。根据 [49, p. 243], σ^* 在同伦群上诱导的映射为

$$\sigma^*_{pt} : \Omega_{4k}^{SPL}(\mathrm{pt}) = \mathrm{MSPL}_{4k}(\mathrm{pt}) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\tfrac{1}{2}]_{4k} = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\langle x^k\rangle$$

给定的

$$\sigma^*_{\mathrm{pt}}[M^{4k}] = \sigma(M)\cdot x^k. \tag{4}$$

Remark 3.2. Let M be a closed oriented PL manifold of dimension n. The constant map $c : M \to \mathrm{pt}$ induces a diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{\mathrm{SPL}}_n(M) & \xrightarrow{\sigma^*} & \mathbb{L}(\mathbb{Z})_n(M) & \xrightarrow{A} & L^n(\mathbb{Z}[\pi_1 M]) \\
\downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} \\
\Omega^{\mathrm{SPL}}_n(\mathrm{pt}) & \xrightarrow[\sigma^*_{\mathrm{pt}}]{} & \mathbb{L}(\mathbb{Z})_n(\mathrm{pt}) & \xrightarrow[A]{=} & L^n(\mathbb{Z})
\end{array}$$

该图可交换，因为组装映射 A 是自然的。结合等式 (4)，此图表明同态 $\mathrm{L}^n(\mathbb{Z}[\pi_1 \mathrm{M}]) \to \mathrm{L}^n(\mathbb{Z})$，$\mathrm{n} = 4\mathrm{k}$，将 M 的对称签名映射为其普通签名。确实，

$$\begin{aligned} c_*\sigma^*(M) &= c_* A[M]_{\mathbb{L}} = c_* A\sigma^*[\mathrm{id}_M] \\ &= \sigma^*_{\mathrm{pt}} c_*[\mathrm{id}_M] = \sigma^*_{\mathrm{pt}}[M] = \sigma(M)x^k. \end{aligned}$$

对于满足维特条件的奇异伪流形，也有类似的事实；稍后将用它来计算本文定义的环谱层面的西格尔–沙利文定向在同伦群上的作用（命题 5.4）。

Ranicki [48, p. 390f] introduced an $\mathbb{L}$-theoretic Thom class

$$u_{\mathbb{L}}(\alpha) \in \widetilde{\mathbb{L}}^m(\mathrm{Th}(\alpha))$$

对于秩为 m 的定向 PL 微丛（或 PL ($\mathbb{R}^m$,0)-丛） α，其定义如下：分类映射 X $\to$ BSPL$_m$ of α （其中 X 是底空间）由一个从 α 到通用定向 PL 微丛的丛映射所覆盖。由此诱导的 Thom 空间映射产生一个类

$$u_{\mathrm{SPL}}(\alpha) \in \widetilde{\mathrm{MSPL}}^m(\mathrm{Th}(\alpha)),$$

the *Thom class* of α in oriented PL cobordism. It is indeed an MSPL-orientation of α in Dold's sense. Ranicki then defines

$$u_{\mathbb{L}}(\alpha) := \sigma^*(u_{\mathrm{SPL}}(\alpha)).$$

由于 σ^* : MSPL $\to \mathbb{L}(\mathbb{Z})$ 具有乘法性，因此元素 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\alpha)$ 确实是α的一个 $\mathbb{L}$-定向。这也可以推广到稳定 PL 丛 α。因此，对于泛稳定 PL 丛，存在一个典范的 $\mathbb{L}$-定向 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}} \in \widetilde{\mathbb{L}}^0$ (MSPL)。由于泛稳定 PL 丛的稳定托姆类 $\mathrm{u}_{\mathrm{SPL}} \in \widetilde{\ }^0\mathrm{MSPL}$ (MSPL) 由恒等态射 MSPL $\to$ MSPL 给出，我们有 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}} = \sigma^*$。环谱态射 $\mathbb{L}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 诱导出一个同态

$$\widetilde{\mathbb{L}(\mathbb{Z})}^m(\mathrm{Th}(\alpha)) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{L}(\mathbb{Q})}^m(\mathrm{Th}(\alpha)).$$

我们将此映射下 \(u_{\mathbb{L}}(v2)\) 的像仍记为 \(u_{\mathbb{L}}(v4)\)。此外，这些元素在局部化方块底行中的像】【。

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{\mathbb{L}\mathbb{Z}})^m(\mathrm{Th}(\alpha)) & \longrightarrow & (\widetilde{\mathbb{L}\mathbb{Q}})^m(\mathrm{Th}(\alpha)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\widetilde{\mathbb{L}\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]})^m(\mathrm{Th}(\alpha)) & = & (\widetilde{\mathbb{L}\mathbb{Q}[\frac{1}{2}]})^m(\mathrm{Th}(\alpha))
\end{array}$$

也将写作 $u_{\mathbb{L}}(\alpha)$。由于方形中的所有映射都由环谱的态射诱导，因此这些像元素也都是 α 的定向。

Comparing Equations (2) and (4), we find that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MSPL}_{4k}(\mathrm{pt}) & \xrightarrow{\sigma^*_{\mathrm{pt}}} & \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]_{4k} \\ & \searrow^{\Delta_{\mathrm{SPL}*}} & \uparrow{\scriptstyle \kappa}\ \simeq \\ & & \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]_{4k} \end{array}$$

commutes. More is true:

Proposition 3.3. *The composition*

$$\mathrm{MSPL} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{SPL}}} \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\kappa} \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\tfrac{1}{2}]$$

of Sullivan's orientation Δ_{SPL} with the ring equivalence κ from Proposition 2.1 is homotopic to Ranicki's orientation σ^*.

Proof. We start *at* the prime 2 with the cohomology class $L \in H^{4*}(\mathbb{L};\mathbb{Z}_{(2)})$ constructed by Taylor and Williams in [59]. This yields a specific homotopy class

$$L : \mathbb{L}(\mathbb{Z})_{(2)} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Z}_{(2)}[4i].$$

The pullback of this class under Ranicki's orientation σ^* corresponds under the Thom isomorphism to the Morgan-Sullivan class $\mathcal{L} \in H^*(\mathrm{BSPL};\mathbb{Z}_{(2)})$ of [43]. Rationally, $\mathcal{L}$ becomes the inverse $L^{-1} \in H^*(\mathrm{BSPL};\mathbb{Q})$ of the Thom-Hirzebruch L-class. The composition

$$\mathbb{L}(\mathbb{R})_{(2)} \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Z})_{(2)} \xrightarrow{L} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Z}_{(2)}[4i]$$

is an equivalence. (The individual arrows are not — the discrepancy is the de Rham invariant.) Rationally (i.e. inverting 2), this gives an equivalence

$$\mathbb{L}(\mathbb{R})_{(0)} = \mathbb{L}(\mathbb{Z})_{(0)} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[4i].$$

The map

$$\mathbb{L}^*(\mathrm{MSPL}) \longrightarrow H^*(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q})$$

induced by the composition

$$\mathbb{L}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{loc}} \mathbb{L}(\mathbb{Z})_{(0)} = \mathbb{L}(\mathbb{R})_{(0)} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[4i]$$

thus sends the universal stable $\mathbb{L}$-orientation $u_{\mathbb{L}} = \sigma^* \in \widetilde{\mathbb{L}}^0(\mathrm{MSPL})$ to

$$L_{\mathrm{PL}}^{-1} \cup u_{\mathrm{PL}} \in H^*(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q}),$$

另见 [47, 评注 16.2, 第 176] 页。它将符号为 1 的元素 $\mathrm{x}^k \in \mathbb{L}_{4k}(\mathbb{Z})$ 送到 $1 \in \pi_{4k}(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}\mathbb{Q}[4\mathrm{i}])$。考虑图表

(5)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{KO}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \mathrm{KO}_{(0)} & \xrightarrow[\simeq]{\mathrm{ph}} & \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[4i] \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa}\ \simeq & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{(0)}}\ \simeq & & \| \\ \mathbb{L}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \mathbb{L}_{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H\mathbb{Q}[4i]. \end{array}$$

左侧的局部化方块显然交换。右侧的方块在同伦意义下也交换：由于涉及的谱是分次 $\mathbb{Q}$- 向量空间的分次埃伦伯格 – 麦克莱恩谱，只需检验诱导的同伦环上的方块是否交换。由 $\kappa_{(0)}$ 诱导的竖直同构按照其构造，将生成元 $a^k \in \pi_{4k}(\mathrm{KO}^{(0)})$ 送到 $x^k \in \pi_{4k}(\mathbb{L}_{(0)})$，而后者又映射到 $1 \in \pi_{4k}(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}\mathbb{Q}[4i])$。至于庞特里亚金特征，

$$\mathrm{ph}(a^k) = (\mathrm{ch}\circ c)(a^k) = \mathrm{ch}(\beta^{2k}) = \mathrm{ch}(\beta)^{2k} = 1.$$

因此，右侧的方形图表在同伦意义下交换。在上述论证过程中，我们借鉴了 Randal-Williams 在 [46] 中提出的几条相关评述。现在，将上述图表应用于 MSPL：

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])^0(\mathrm{MSPL}) & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & (\mathrm{KO}_{(0)})^0(\mathrm{MSPL}) & \xrightarrow[\simeq]{\mathrm{ph}} & \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^{4i}(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q}) \\
\downarrow{\scriptstyle \kappa}\,\simeq & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{(0)}}\,\simeq & & \| \\
(\mathbb{L}[\frac{1}{2}])^0(\mathrm{MSPL}) & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & (\mathbb{L}_{(0)})^0(\mathrm{MSPL}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^{4i}(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q}).
\end{array}$$

We shall show that the elements

$$\Delta_{\mathrm{SPL}},\ \kappa^{-1}\circ\sigma^* \in (\mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}])^0(\mathrm{MSPL})$$

相等。根据（3），$\mathrm{ph}(\Delta_{\mathrm{SPL}}) = L_{\mathrm{PL}}^{-1}\cup u_{\mathrm{PL}}$。由于图表具有交换性，庞特里亚金特征 $\mathrm{ph}(\kappa^{-1}\circ\sigma^*)$ 可以通过水平映射得到，也可以先进行垂直向下映射，再进行水平向右映射来计算。通过 κ 向下映射得到 σ^*，随后按照上述讨论，将其映射到 $L_{\mathrm{PL}}^{-1}\cup u_{\mathrm{PL}}$。由此可知，这两个元素具有相同的庞特里亚金特征，

$$\mathrm{ph}(\Delta_{\mathrm{SPL}}) = \mathrm{ph}(\kappa^{-1}\circ\sigma^*).$$

现在，元素 Δ_{SPL} 由其庞特里亚金特征来刻画，[39, p. 115]。（Madsen 和 Milgram 证明，庞特里亚金特征映射 $\mathrm{ph} : \mathrm{KO}(\mathrm{MSPL}\langle p\rangle) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{MSPL};\mathbb{Q})$ 在每个奇素数 p 处都是单射，[39, Cor. 5.25]。）由此可知，$\kappa^{-1}\sigma^*$ 与 Δ_{SPL}同伦。□

推论 3.4. Sullivan 定向 $\Delta_{\mathrm{SPL}} : \mathrm{MSPL} \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$ 同伦于一个（同伦）环谱态射。

鉴于命题 3.3，我们因此可以对谱层面的 Sullivan 定向采用以下约定：

定义 3.5. 令

$$\Delta : \mathrm{MSPL} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

为由下列复合给出的环谱态射

$$\mathrm{MSPL} \xrightarrow{\sigma^*} \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\tfrac{1}{2}] = \mathbb{L}(\mathbb{R})[\tfrac{1}{2}] \overset{\kappa^{-1}}{\simeq} \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

Ranicki 定向与一个环等价 κ^{-1}（它逆于命题 2.1 中的环等价 κ）的复合。

定义 3.6. 对于一个定向的秩为 m 的 PL 微丛（或 PL $(\mathbb{R}^m,0)$-丛）α，令

$$\Delta(\alpha) \in \widetilde{\mathrm{KO}}^m(\mathrm{Th}(\alpha))[\tfrac{1}{2}]$$

是.....的像

$$\Delta(\alpha) = \Delta_*(u_{\mathrm{SPL}}(\alpha))$$

在.....作用下的 MSPL 定向

$$\widetilde{\mathrm{MSPL}}^m(\mathrm{Th}(\alpha)) \xrightarrow{\Delta_*} \widetilde{\mathrm{KO}}^m(\mathrm{Th}(\alpha))[\tfrac{1}{2}].$$

This is indeed a $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$-orientation of α, since Δ is multiplicative ([53, p. 305, Prop. V.1.6]).

From this perspective, it is immediate that κ aligns $\Delta(\alpha)$ and Ranicki's Thom class $u_{\mathbb{L}}(\alpha)$:

Lemma 3.7. *Let $\alpha : X \to \mathrm{BSPL}(m)$ be an oriented PL microbundle of rank m. Then the isomorphism*

$$\kappa_* : \widetilde{\mathrm{KO}}^m(\mathrm{Th}(\alpha)) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathbb{L}}^m(\mathrm{Th}(\alpha)) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

maps $\Delta(\alpha)$ to $u_{\mathbb{L}}(\alpha)$.

证明。根据 Ranicki 的定义，$\mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\alpha) = \sigma^*(\mathrm{u}_{\mathrm{SPL}}(\alpha))$。因此，

$$\kappa_*\Delta(\alpha) = \kappa_*\Delta_*(u_{\mathrm{SPL}}(\alpha)) = \kappa_*\kappa_*^{-1}\sigma^*(u_{\mathrm{SPL}}(\alpha)) = \sigma^* u_{\mathrm{SPL}}(\alpha) = u_{\mathbb{L}}(\alpha).$$

□

~给定一个定向向量丛或 PL 丛 α，其秩为 m，令 $\mathrm{u}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \in \mathrm{H}^m(\mathrm{Th}(\alpha);\mathbb{Z})$ 表示

~ ~其整数 Thom 类，令 $\mathrm{u}_{\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathrm{H}^m(\mathrm{Th}(\alpha);\mathbb{Q})$ 表示 $\mathrm{u}_{\mathbb{Z}}(\alpha)$ 在 $\mathrm{H}\ *(-;\mathbb{Z}) \to$ ~$\mathrm{H}^*(-;\mathbb{Q})$ 下的像。用于证明命题 3.3 的方法可以直接推出：

Lemma 3.8. *Let α be an oriented PL microbundle over X. Rationally, $\Delta(\alpha)$ is given by*

$$\mathrm{ph}\Delta(\alpha) = L^{-1}(\alpha) \cup u_{\mathbb{Q}}(\alpha) \in H^*(X;\mathbb{Q}).$$

证明。将交换图 (5) 取在 α 的底空间上，并注意到根据引理 3.7，$\kappa_*\Delta(\alpha) = \mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\alpha_{\mathrm{STOP}})$。由交换性，$\mathrm{ph}\Delta(\alpha)$ 可以通过沿下方水平复合映射 $\kappa_*\Delta(\alpha)$ 来计算。正如命题证明中所述，$\mathbb{L}$-上同调 Thom 类有理地（即沿下方水平复合）由逆 L-类与 $\mathrm{H}\mathbb{Q}$-上同调 Thom 类 $\mathrm{u}_{\mathbb{Q}}$ 的乘积给出，$\mathrm{L}^{-1}(\alpha) \cup \mathrm{u}_{\mathbb{Q}}(\alpha)$。（参见 [47, 备注 16.2]；Ranicki 用 $-\otimes\mathbb{Q}$ 代替 $\mathrm{ch}_{\mathbb{L}}\mathrm{loc}$，并在其记法中省略了与 $\mathrm{u}_{\mathbb{Q}}$ 的杯积。）□

For the sake of completeness, we also record the case of the trivial bundle:

Lemma 3.9. *If α is the trivial rank $4k = m$ PL bundle over a point, then $\Delta(\alpha) = a^k \in \widetilde{\mathrm{KO}}^{4k}(S^{4k})[\frac{1}{2}]$.*

证明。陈特征 $\mathrm{ch} : \mathrm{K}^0(\mathrm{S}^{4k}) \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{H}^{2i}(\mathrm{S}^{4k};\mathbb{Q})$ 是单射，其像为 $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{4k};\mathbb{Z}) \subset \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{4k};\mathbb{Q})$。因此，它是一个同构。

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}^0(S^{4k}) \xrightarrow{\cong} H^*(S^{4k};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

It restricts to an isomorphism

$$\mathrm{ch} : \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^{4k}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}^*(S^{4k};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

between reduced groups. The localization at odd primes is an isomorphism

$$\mathrm{ch}[\tfrac{1}{2}] : \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^{4k})[\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\cong} H^{4k}(S^{4k})[\tfrac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

接下来讨论复化。这是一个谱的态射 $\mathrm{c} : \mathrm{KO} \to \mathrm{K}$，它在同伦环上诱导环同态 $\mathrm{c}_* : \pi_*(\mathrm{KO}) \to \pi_*(\mathrm{K})$（[58, 第 304] 页）。在 4 次时，$\mathrm{c}_* = 2 : \pi_4(\mathrm{KO}) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_4(\mathrm{K})$；而在 8 次时，$\mathrm{c}_* : \pi_8(\mathrm{KO}) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_8(\mathrm{K})$ 是同构。局部化环同态

$$c_*[\tfrac{1}{2}] : \pi_*(\mathrm{KO})[\tfrac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][a^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][\beta^{\pm 1}] = \pi_*(\mathrm{K})[\tfrac{1}{2}]$$

将一个 $\in \pi_4(\mathrm{KO})[\frac{1}{2}]$ 映射到 $\beta^2 \in \pi_4(\mathrm{K})[\frac{1}{2}]$。特别地，$c_*[\frac{1}{2}]\colon \pi_{4k}(\mathrm{KO})[\frac{1}{2}] \to \pi_{4k}(\mathrm{K})[\frac{1}{2}]$ 是同构，将 $a^k \mapsto \beta^{2k}$ 映射到.....。 β^k 的陈特征由 v^k 给出，其中 $v \in H^2(S^2;\mathbb{Z})$ 是典范生成元，即 $S^2 = \mathbb{C}P^1$ 上典范（超平面）线丛 H 的第一陈类 $c_1(H)$。庞特里亚金特征 $\mathrm{ph} = \mathrm{ch}\circ c$ 局部化为 $\mathrm{ph}[\frac{1}{2}]$，它由以下复合映射给出

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{KO}}^0(S^{4k})[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{c_*[\frac{1}{2}]} & \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^{4k})[\frac{1}{2}] \\ & \searrow^{\mathrm{ph}[\frac{1}{2}]} & \cong \downarrow \mathrm{ch}[\frac{1}{2}] \\ & & H^{4k}(S^{4k};\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]. \end{array}$$

Here we have used suspension isomorphisms to identify

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mathrm{KO}}^0(S^{4k}) & \simeq & \widetilde{\mathrm{KO}}^{-4k}(S^0) & = & \mathrm{KO}^{-4k}(\mathrm{pt}) & = & \pi_{4k}(\mathrm{KO}) \\ \downarrow{\scriptstyle c_*} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle c_*} \\ \widetilde{\mathrm{K}}^0(S^{4k}) & = & \widetilde{\mathrm{K}}^{-4k}(S^0) & = & \mathrm{K}^{-4k}(\mathrm{pt}) & = & \pi_{4k}(\mathrm{K}). \end{array}$$

Therefore,

$$\mathrm{ph}[\tfrac{1}{2}](a^k) = \mathrm{ch}[\tfrac{1}{2}](c_*[\tfrac{1}{2}](a^k)) = \mathrm{ch}[\tfrac{1}{2}](\beta^{2k}) = v^{2k}.$$

生成元 $v^{2k} \in H^{4k}(S^{4k};\mathbb{Z})$ 与平凡的秩 4k 向量丛 α 在一个点上的 Thom 类 $u_{\mathbb{Z}}(\alpha) \in H^{4k}(\mathbb{R}^{4k}\cup\{\infty\};\mathbb{Z})$ 一致。令 $\iota : H^*(S^{4k};\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \hookrightarrow H^*(S^{4k};\mathbb{Q})$ 为由 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbb{Q}$ 诱导的单射。根据引理 3.8,

$$\begin{aligned} \iota\,\mathrm{ph}[\tfrac{1}{2}](\Delta(\alpha)) &= L^{-1}(\alpha)\cup u_{\mathbb{Q}}(\alpha) = 1\cup u_{\mathbb{Q}}(\alpha) = u_{\mathbb{Q}}(\alpha) \\ &= \iota(u_{\mathbb{Z}}(\alpha)) = \iota(v^{2k}) = \iota\,\mathrm{ph}[\tfrac{1}{2}](a^k). \end{aligned}$$

Since $\iota\,\mathrm{ph}[\frac{1}{2}]$ is injective,

$$\Delta(\alpha) = a^k.$$

□

4. The Classical Construction of the Siegel-Sullivan Orientation

利用 Goresky-MacPherson 的交叉同调，P. Siegel 于 [55] 引入了维特空间，将其作为一种几何循环理论，用以表示奇素数处的 KO-同调。关于交叉同调的参考资料包括 [28], [29], [31], [23], [36], [13], [5]。

定义 4.1. 维特空间是指一种定向 PL 伪流形，其中奇数余维 PL 内禀分层的链接 L^{2k} 的下中偏斜度次数 k 有理交叉同调消失，即 $IH^{-}{}^{mk}(L^{2k};\mathbb{Q}) = 0$。

例如，纯维复代数簇是维特空间，因为它们是定向伪流形，并且具有惠特尼分层，其所有分层的余维数均为偶数。链接 L^{2k} 的交叉同调消失条件，等价于要求从下中偏斜度到上中偏斜度的交叉链层之间的典范态射，在层复形的导出范畴中是一个同构。因此，这些中偏斜度交叉链层是韦尔迪耶自对偶的，并由此为紧致维特空间的中偏斜度交同调群诱导出整体庞加莱对偶。特别地，紧致维特空间 X 具有定义良好的配边。

不变符号 σ(X) 和 L-类 $L_*(X) \in H_*(X;\mathbb{Q})$，当 X 为光滑空间时，它们与希策布鲁赫切向 L-类的庞加莱对偶一致。带边界的维特空间的概念可以通过有序对 (X ∂X) 引入，其中 X 是一个分片线性空间，而 ∂X 是 X 的一个保层状结构的领圈分片线性子空间，并且 X − ∂X 和 ∂X 都是相容定向的维特空间。令 $\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(-)$ 表示基于维特循环的配边理论。$\Omega_n^{\mathrm{Witt}}(^n \to Y)$ 中的元素是连续映射 $f : X^n \to Y$ 的维特配边类，其中这些映射定义在 n 维闭维特空间 X 上。理论 $\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(-)$ 是一种同调理论，其系数已由 Siegel 计算得出。这些系数仅在非负且能被 4 整除的次数上非平凡，其中在次数 $4k > 0$ 时，它们由 $\mathbb{L}_{4k}(\mathbb{Q})$ 给出；而在次数 0 时，则由 $\mathbb{Z}$ 给出。

Let X be a closed Witt space of dimension n. Drawing on Sullivan's methods as laid out in [56] and [57], Siegel constructs in [55] a canonical orientation class

$$\mu_X \in \mathrm{KO}_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

（事实上，该类属于连通 KO-同调。）我们将 μ_X 称为 X 的 Siegel-Sullivan 定向类。下面简要概述 Siegel 的构造，其依据是 Sullivan 提出的两个基本事实：首先，存在一个正合列。

$$0 \to \mathrm{KO}^i(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathrm{KO}^i(Y,B)^\wedge \oplus \mathrm{KO}^i(Y,B) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{KO}^i(Y,B)^\wedge \otimes \mathbb{Q} \to 0,$$

其中，$\mathrm{KO}^i(Y, B)^\wedge$ 表示 $\mathrm{KO}^i(Y,B)$ 关于奇数阶群的有限剩余完备化。其次，自然变换 $\Delta_{\mathrm{SO}*}$: $\Omega_i^{\mathrm{SO}}(Y,B) \to (\mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}])_i(Y,B)$ 诱导出一个康纳–弗洛伊德型同构。

$$\Omega_{i+4*}^{\mathrm{SO}}(Y,B) \otimes_{\Omega_*^{\mathrm{SO}}(\mathrm{pt})} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathrm{KO}_i(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 周期理论对于紧 PL 对 (Y,B)， [56], [39, p. 85]。结合万有系数的相关考量，这两个事实意味着，$\mathrm{KO}^i(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$ 中的元素是同态对 (σ_0, τ_0)，其中 σ_0: $\Omega_{i+4*}^{\mathrm{SO}}(Y, B) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 以及 τ_0: $\Omega_{i+4*}^{\mathrm{SO}}(Y, B;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$，并且满足周期关系

$$\sigma_0([f][M \to \mathrm{pt}]) = \sigma(M) \cdot \sigma_0[f],\ \tau_0([f][M \to \mathrm{pt}]) = \sigma(M) \cdot \tau_0[f] \tag{6}$$

with respect to multiplication by a closed manifold M hold and the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{i+4*}^{\mathrm{SO}}(Y,B) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{i+4*}^{\mathrm{SO}}(Y,B;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]) & \xrightarrow{\tau_0} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \end{array}$$

交换。为了为闭维特空间 X 定义 μ_X ^{n}，选取一个余维为 4k 的分片线性嵌入 $X \subset \mathbb{R}^m$，其中 m 充分大。令 (N ∂N) 为 X 的一个正则邻域。我们将描述 $\mathrm{KO}^{4k}(N, \partial N) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$ 中的一个元素；根据亚历山大–斯潘尼尔–怀特海对偶，它对应于 $\mu_X \in \mathrm{KO}_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$。因此，我们需要指定满足上述周期关系和整性条件的同态 (σ_X, τ_X)，即下式的交换性

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{4(k+*)}^{\mathrm{SO}}(N,\partial N) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\sigma_X} & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{4(k+*)}^{\mathrm{SO}}(N,\partial N;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]) & \xrightarrow{\tau_X} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]. \end{array}$$

同态σ_X为

$$\sigma_X([(M,\partial M)\xrightarrow{f}(N,\partial N)]\otimes r):=\sigma(\widetilde{f}^{-1}(X))\otimes r,\ r\in\mathbb{Q},$$

其中，利用 [15], [40] 的分块横截性结果，使 f 与 PL 流形 N 中的 X 横截。横截映射 $\widetilde{\ }$f 下，$\widetilde{\ }$f^{-1}(X) $\subset$ M 的原像具有与 X 相同的局部结构，因此它仍然是一个具有良好定义的符号 $\sigma(\widetilde{\ }f^{-1}(X))\in\mathbb{Z}$ 的维特空间。同态τ_X是通过指定一列同态来获得的。

$$\tau_{X,k}:\Omega_*^{\mathrm{SO}}(N,\partial N;\mathbb{Z}/_k)\longrightarrow\mathbb{Z}/_k,\ k\text{ odd},$$

满足整除相容性，其定义方式与 σ_X 大致相同，但使用定向的 $\mathbb{Z}/_k$ 流形来表示 Ω_*^{SO}(N ∂N;$\mathbb{Z}/_k$) 的元素。根据紧致带边界维特空间的符号的诺维科夫可加性，X 在 $\mathbb{Z}/_k$ 流形中的横截逆像具有良定义的（且配边不变的） $\mathbb{Z}/_k$ 中的符号，由此定义了 $\tau_{X,\ k}$。周期性条件和整性条件均得到满足，因此获得了一个元素 μ_X。

由常值映射 c : X $\to$ pt 诱导的同态 c$_*$: KO$_n$(X) $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\to$ KO$_n$(pt) $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$，将 μ_X 映到 X 的符号。利用定向类 μ_X，Siegel 得到一个自然变换

$$\mu^{\mathrm{Witt}}:\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(-)\longrightarrow\mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]_*(-)$$

同调理论之间的变换，其定义为

$$\mu^{\mathrm{Witt}}([X\xrightarrow{f}Y])=f_*(\mu_X).$$

该变换在系数群上便化为符号同态。当然，可以通过该变换恢复定向类:

$$\mu_X=\mu^{\mathrm{Witt}}([\mathrm{id}_X]).$$

Siegel 变换可分解为由连通覆盖 ko$[\frac{1}{2}]\to$KO$[\frac{1}{2}]$, 诱导的同态，因为 Ω_*^{Witt}(–) 是连通的。

定理 4.2。（Siegel。）自然变换

$$\mu^{\mathrm{Witt}}[\tfrac{1}{2}]:\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(-)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\longrightarrow\mathrm{ko}[\tfrac{1}{2}]_*(-)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

是同调理论之间的等价。

Proposition 4.3. *(Siegel.) If $X=M$ is a smooth compact manifold, then μ_M agrees with the Sullivan orientation $\Delta_{\mathrm{SO}}(M)$,*

$$\mu_M=\Delta_{\mathrm{SO}}(M).$$

证明。正如 Siegel [55, p. 1069],所指出的，这一陈述可直接由上述构造得出，因为 Sullivan [56] 在流形的情形下已使用该构造来建立其典范 KO$[\frac{1}{2}]$-定向。（事实上，正如 [57] 和 Siegel 所指出的，该构造一般适用于任何基于一类 $\mathcal{F}$ 分片线性空间的配边理论，只要该类在与分片线性流形取笛卡尔积以及与欧几里得空间中的闭流形横截相交时保持封闭，并且具有满足 Novikov 可加性且关于与闭流形取乘积具有乘法性的配边不变量符号。除了分片线性流形和维特空间之外，还存在范围广泛得多的满足这一条件的奇异空间类 $\mathcal{F}$，其中尤其包括沿奇数余维分层具有拉格朗日结构的分层伪流形类，本文 [3], [4]中对此进行了研究。）□

5. Siegel-Sullivan 定向的环谱层面构造

Let MWITT be the Quinn spectrum associated to the ad-theory of Witt spaces, representing Witt bordism, see Banagl-Laures-McClure [10]. A weakly equivalent spectrum had been considered first by Curran in [20]. He verified that this spectrum is an MSO-module ([20, Thm. 3.6, p. 117]). The product of two Witt spaces is again a Witt space. This implies essentially that MWITT is a ring spectrum; for more details see [10]. (There, we focused on the spectrum MIP representing bordism of integral intersection homology Poincaré spaces studied by Goresky and Siegel in [30] and by Pardon in [45], but everything works in an analogous, indeed simpler, manner for $\mathbb{Q}$-Witt spaces.) Every oriented PL manifold is a Witt space. Hence there is a map

$$\phi_W : \mathrm{MSPL} \longrightarrow \mathrm{MWITT},$$

利用 [10], 中所采用的 ad-理论和 Quinn 谱的方法，可以将其构造为乘法的。在 [10], 中我们构造了一个映射

$$\tau : \mathrm{MWITT} \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Q}).$$

（我们甚至构造了一个整数映射 $\mathrm{MIP} \to \mathbb{L}_\circ$ ）如 [10, 第 12],节及交换图所示，该映射是乘法的，即一个环映射

(7)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MSPL} & \xrightarrow{\sigma^*} & \mathbb{L}(\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_W} & & \downarrow \\ \mathrm{MWITT} & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{L}(\mathbb{Q}) \end{array}$$

由于它来自应用 Laures 和 McClure 的对称谱函子 M [35]于 ad-理论所得到的交换图，该同伦交换。局部化态射 $\mathbb{L}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{L}(\mathbb{Q})[\frac{1}{2}]$ 是环谱的态射。因此， τ 与局部化态射的复合是环谱的态射 $\mathrm{MWITT} \to \mathbb{L}(\mathbb{Q})[\frac{1}{2}] = \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$,, 我们也将其记作 $\tau_\circ$ 专家们很早就知道，将 Mishchenko 的方法 [42] 应用于交链而非普通链，会得到对称签名向伪流形的延拓，其中分层仅具有偶数余维；更一般地说，还可延拓到维特空间；例如参见 [60], [16], [6]。在他们的维特空间项目 [1], 中，Albin、Leichtnam、Mazzeo 和 Piazza 将这一对称签名用于定义 C^*-代数维特空间对称签名 $K_*(C^*_r\pi)$，它在有理意义下与符号算子的指标类 $\eth_{\mathrm{sign}}$一致。在 [10], 中，Laures、McClure 和作者采用 [6] 中概述的方法，构造维特空间和整数交 Poincar´e 空间的对称签名：环谱态射 τ: $\mathrm{MWITT} \to \mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 给出了 n 维闭 Witt 空间 X 的一个$\mathbb{L}(\mathbb{Q})$-同调基本类，定义为

$$[X]_{\mathbb{L}} := \tau[\mathrm{id}_X] \in \mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(X),$$

$[\mathrm{id}_X] \in \Omega_n^{\mathrm{Witt}}(X)$. This fundamental class yields the symmetric signature

$$\sigma^*(X) = A[X]_{\mathbb{L}} \in L^n(\mathbb{Q}[\pi_1 X])$$

under the assembly map

$$A : \mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(X) \longrightarrow L^n(\mathbb{Q}[\pi_1 X]).$$

弗里德曼和 McClure 在 [24] 中详细阐述了如何将米先科的方法推广到交链。根据 [10, 定理 10.12],, 上述对称签名$\sigma^*(X)$ 与弗里德曼–McClure 的构造一致。根据 [24, 命题 5.20],, 当 $n = 4k$ 时，同态 $L^n(\mathbb{Q}[\pi_1 X]) \to L^n(\mathbb{Q})$ 将对称签名 $\sigma^*(X)$ 映射到

交形式在 IH $^{-m}2k(X;\mathbb{Q})$ 上的维特类 $w(X)$。在局部化同态 $L^n(\mathbb{Q}) \to L^n(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 下，$w(X)$ 映射为普通符号；如备注 3.2 中的流形情形所示，$w(X)^{(\mathrm{odd})} = \sigma(X) \cdot x^k$，$n = 4k$。$\mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(X) \to \mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 下 $[X]_{\mathbb{L}}$ 的像仍记为 $[X]_{\mathbb{L}}$。

Proposition 5.1. *In positive degrees, the composition*

$$\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\tau} \mathbb{L}(\mathbb{Q})_*(\mathrm{pt}) \overset{A}{=} L^*(\mathbb{Q})$$

与映射 $w : \Omega_*^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt}) \to L^*(\mathbb{Q})$ 一致。该映射将 $4k$ 维维特空间 X 的配边类映射为其在 IH $^{-m}2k(X;\mathbb{Q})$ 上的交形式的维特类 $w(X)$，并且在不能被 4 整除的次数上为零。

证明。群 $\Omega_i^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt})$ 在不能被 4 整除的次数上为零。因此，在这些次数上，$A \circ \tau$ 与 w 平凡一致。令 $[X] \in \Omega_{4k}^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt}), k > 0$ 为任意元素。令 $c : X \to \mathrm{pt}$ 表示常值映射，并考虑图式。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{4k}^{\mathrm{Witt}}(X) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{L}(\mathbb{Q})_{4k}(X) & \xrightarrow{A} & L^{4k}(\mathbb{Q}[\pi_1 X]) \\ \downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} \\ \Omega_{4k}^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt}) & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{L}(\mathbb{Q})_{4k}(\mathrm{pt}) & \underset{A}{=\!=} & L^{4k}(\mathbb{Q}). \end{array} \tag{8}$$

Since both τ and the assembly map are natural, the diagram commutes. The right hand vertical map sends the symmetric signature $\sigma^*(X) \in L^{4k}(\mathbb{Q}[\pi_1 X])$ to $w(X)$. Therefore,

$$\begin{aligned} A\tau[X] &= A\tau c_*[\mathrm{id}_X] = c_* A\tau[\mathrm{id}_X] \\ &= c_* A[X]_{\mathbb{L}} = c_*\sigma^*(X) = w(X). \end{aligned}$$

□

态射 τ: MWITT $\to \mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 不是等价。原因之一是 MWITT 是连通的，而 $\mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 是周期性的。令 $t_{\geq m}E \to E$ 为谱 E 的 $(m-1)$-连通覆盖。谱之间的态射 ϕ: $E \to F$ 可唯一地在同伦意义下提升为态射 $t_{\geq m}\phi : t_{\geq m}E \to t_{\geq m}F$。到连通覆盖 $t_{\geq 0}\mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 的提升 $t_{\geq 0}\tau$ 仍不是等价，因为 $\pi_0\mathrm{MWITT} = \Omega_0^{\mathrm{Witt}}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$，而 $\pi_0\mathbb{L}(\mathbb{Q}) = L^0(\mathbb{Q})$ 含有无限生成的 2-主扭结。尽管如此，零次是唯一有问题的非负次数：

Theorem 5.2. *The lift $t_{\geq 1}\tau : t_{\geq 1}\mathrm{MWITT} \to t_{\geq 1}\mathbb{L}(\mathbb{Q})$ is a weak equivalence.*

Proof. By Proposition 5.1, the diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(t_{\geq 1}\mathrm{MWITT}) & \xrightarrow{t_{\geq 1}\tau} & \pi_i(t_{\geq 1}\mathbb{L}(\mathbb{Q})) \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \pi_i(\mathrm{MWITT}) & \xrightarrow{\tau} & \pi_i(\mathbb{L}(\mathbb{Q})) \\ & {\scriptstyle w}\searrow & \Vert{\scriptstyle A} \\ & & L^i(\mathbb{Q}) \end{array}$$

commutes for $i \geq 1$. Siegel's Witt bordism calculation [55, Prop 1.1, p. 1098] asserts that w is an isomorphism. □

本文的核心构造是将 [55] 中引入的 Siegel-Sullivan 定向提升至环谱层次。

定义 5.3. 环谱层次的 Siegel-Sullivan 定向

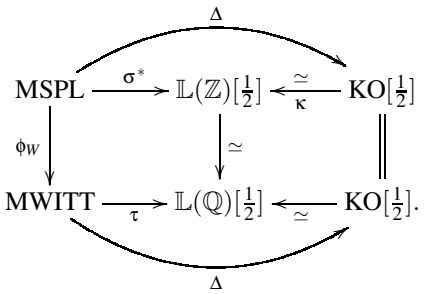
$$\Delta : \mathrm{MWITT} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

is the morphism of ring spectra given by the composition

$$\mathrm{MWITT} \xrightarrow{\tau} \mathbb{L}(\mathbb{Q})[\tfrac{1}{2}] = \mathbb{L}(\mathbb{R})[\tfrac{1}{2}] \overset{\kappa^{-1}}{\simeq} \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

of the Witt-orientation introduced by Laures, McClure and the author with a ring equivalence κ^{-1} inverse to the ring equivalence κ of Proposition 2.1.

Diagram (7) then embeds into the homotopy commutative diagram



Thus the ring-spectrum level Siegel-Sullivan orientation $\Delta : \mathrm{MWITT} \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$ restricts under $\phi_W : \mathrm{MSPL} \to \mathrm{MWITT}$ to the Sullivan orientation

$$\mathrm{MSPL} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]$$

定义 3.5。为了描述系数上的诱导映射 $\Delta_* : \mathrm{MWITT}_* \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]_*$，我们将采用维特空间的对称签名。我们注意到，(2) 可以从流形情形推广到维特空间：

Proposition 5.4. *The ring-spectrum level Siegel-Sullivan orientation Δ induces on homotopy groups the homomorphism*

$$\Delta_* : \Omega^{\mathrm{Witt}}_{4k} = \mathrm{MWITT}_{4k} \longrightarrow \mathrm{KO}[\tfrac{1}{2}]_{4k} = \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\langle a^k \rangle$$

given by

$$\Delta_*[X^{4k}] = \sigma(X) \cdot a^k, \tag{9}$$

where $\sigma(X)$ is the signature of the intersection form on the intersection homology groups $IH_{2k}(X;\mathbb{Q})$ of X.

Proof. Let $[X] \in \Omega^{\mathrm{Witt}}_{4k}$ be any element. The constant map $c : X \to \mathrm{pt}$ induces a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{\mathrm{Witt}}_n(X) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{A[\frac{1}{2}]} & L^n(\mathbb{Q}[\pi_1 X]) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\
\downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} & & \downarrow{\scriptstyle c_*} \\
\Omega^{\mathrm{Witt}}_n(\mathrm{pt}) & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{L}(\mathbb{Q})_n(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \underset{A[\frac{1}{2}]}{=\!=} & L^n(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].
\end{array}$$

This is quite similar to Diagram (8), except that here we map into L-theory away from 2. The claim is established by the calculation

$$\begin{aligned}
\kappa_* \Delta_*[X] &= \tau_*[X] = \tau_* c_*[\mathrm{id}_X] = c_* \tau_*[\mathrm{id}_X] = c_*[X]_{\mathbb{L}} \\
&= c_*(A[\tfrac{1}{2}])[X]_{\mathbb{L}} = c_* \sigma^*(X)_{(\mathrm{odd})} = w(X)_{(\mathrm{odd})} = \sigma(X) \cdot x^k,
\end{aligned}$$

so that

$$\Delta_*[X] = \sigma(X)\cdot \kappa_*^{-1}(x^k) = \sigma(X)\cdot a^k.$$

□

环谱层面的西格尔–沙利文定向尤其允许如下描述 Witt 空间的西格尔–沙利文定向类:

定义 5.5。紧致 n 维 Witt 空间 (X ∂X) 的西格尔–沙利文定向类定义为

$$\Delta(X) := \Delta_*[\mathrm{id}_X] \in \mathrm{KO}_n(X,\partial X)\otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

在同态 $\Delta_*\colon \Omega_n^{\mathrm{Witt}}(X\partial X) \to (\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])_n(X\partial X)$ 下，X 上恒等映射的维特配边类的像；该同态由环谱层面的西格尔–沙利文定向 Δ 诱导。

我们将在下文的命题 5.7 中看到，这一术语是恰当的，即 $\Delta(X) = \mu_X$。根据我们的构造,

$$\kappa_*\Delta(X) = \kappa_*\Delta_*[\mathrm{id}_X] = \tau[\mathrm{id}_X] = [X]_{\mathbb{L}} \in (\mathbb{L}\mathbb{Q}[\tfrac{1}{2}])_n(X,\partial X). \tag{10}$$

由于 $\Delta\colon \mathrm{MWITT} \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$ 限制为 Sullivan 定向 $\Delta\colon \mathrm{MSPL} \to \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$,，当 X 是分片线性流形时，西格尔–沙利文定向 Δ(X) 与 Sullivan 定向 $\Delta_{\mathrm{SPL}}(X)$ 一致。作为构建谱层面的西格尔–沙利文定向的最后一项工作，我们将验证所诱导的同调理论变换与经典构造一致；该构造由 Siegel 给出，并在第 4 节中概述。论证基于 Cappell、Shaneson 和作者的一项结果（[9, 命题 2，第 597] 页），该结果表明，在奇素数处，维特配边类可由光滑定向配边类表示。我们简要回顾这一结果。

For an integer j, let $\bar{j}$ denote its residue class in $\mathbb{Z}/_4$. Using 4-fold periodicity, we may view $\mathrm{KO}\frac{1}{2}$-homology as $\mathbb{Z}/_4$-graded. On the groups $C_{\bar{j}}(X,Y) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Omega^{\mathrm{SO}}_{j+4k}(X,Y)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, define an equivalence relation by

$$[M^{j+4k}\times N^{4i} \xrightarrow{\mathrm{proj}} M \xrightarrow{f} X] \sim \sigma(N)\cdot[M^{j+4k} \xrightarrow{f} X],$$

where $\sigma(N)$ is the signature of the manifold N. (See also [32, p. 193].) The periodicity relations (6) imply that Sullivan's orientation $\Delta_{\mathrm{SO}*}$ induces a well-defined homomorphism

$$\Delta_{\mathrm{SO}*}\colon Q_{\bar{j}}(X,Y) \longrightarrow (\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_{\bar{j}}(X,Y) \tag{11}$$

在商 -j(X,Y) 上：=C -j(X,Y)/ ∼。这是一个函子的自然变换，而 Sullivan 证明了，对于紧 PL 对 (X,Y)，它是一个同构（[56], [39, 4.15, p.85]）。这尤其表明，(X,Y) ↦ Q -j(X,Y) 是紧 PL 对上的一个（$\mathbb{Z}/_4$-分次）同调理论。令 Z 表示环 $Z = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$。Laurent 多项式环 Z[t,t^{-1}] 是一个$\mathbb{Z}$-分次环，其中 deg(t) =4。存在一个典范子环嵌入 Z[t] ⊂ Z[t,t^{-1}]，t ↦t。通过这一嵌入，Z[t,t^{-1}] 成为一个 Z[t]-模，Panov 在 [44] 中指出，这个模是平坦的。由于连通谱 ko 12 是一个环谱，(ko 12)$_*$(X) 特别地是一个右 (ko 12)$_*$(pt) =Z[a]-模，其中 a ∈(ko 12)$_4$(pt) =Z 是生成元，其复化结果为复 Bott 元的平方，如第 2 节所述。对于周期 KO，我们有 (KO 1 2)$_*$(pt) =Z[a, a^{-1}]，而典范映射 (ko 1 2)$_*$(pt) →(KO 1 2)$_*$(pt) 由嵌入 Z[$\bar{a}$] ⊂Z[a, a^{-1}]，$\bar{a}$ ↦a 给出。利用同构 Z[t] ≅Z[a],t ↦a，(ko 1 2)$_*$(X) 和 $(\mathrm{KO}\frac{1}{2})_*$(X) 成为右 Z[t]-模。因此，我们可以构造 Z[t]-模的张量积。

$$(\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}].$$

由于根据 Panov 的观察，函子 $-\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}]$ 是正合的，因此函子

$$(X,Y)\mapsto (\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_*(X,Y)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}]$$

是精确的，因此构成一个同调理论（定义在 CW 对 \((X,Y)\) 上），其分次由 $\mathbb{Z}$ 表示，满足 \(\deg(x\otimes_{Z[t]} rt^k)=n+4k\)，其中 \(x\in(ko\ 1\ 2\ )_n(X,Y)\)，\(r\in Z\)。现在将 $KO_*(-)$ 视为一个 $\mathbb{Z}$ 分次（而非 $\mathbb{Z}/4$ 分次）理论。连通覆盖 \((ko\ 1\ 2\ )_*(-)\to(KO\ 1\ 2\ )_*(-)\) 是 Z[t]-线性的，因此诱导出一个自然变换。

$$\Phi:(\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_*(-)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}]\longrightarrow(\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_*(-)$$

$\mathbb{Z}$ 分级同调理论。在一个点上，Φ 是恒等映射。因此，Φ 是同调理论之间的自然等价。这说明了如何利用连通 ko 12-同调以及 Z[t] 在其上的作用，重构周期 $\mathrm{KO}\frac{1}{2}$-同调。类似地，我们也可以将 Witt 配边这一连通理论转化为周期版本：将 2 之外的 Witt 配边记为

$$W_*(X):=\Omega_*^{\mathrm{Witt}}(X)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

This is a $\mathbb{Z}$-graded homology theory with coefficients

$$W_*(\mathrm{pt})=Z[c],\ c:=[\mathbb{C}P^2]\otimes 1\in W_4(\mathrm{pt}).$$

（在将 2 取逆后，只有符号作为不变量保留下来；2-挠和 4-挠均被消去。） $\mathbb{Z}$分次阿贝尔群 $W_*(X)$ 通常是环 $W_*(pt)$ 上的右模。由 $t\mapsto c\otimes 1\in W_4(pt)$ 诱导的环同构 $Z[t]\to W_*(pt)$，使 $W_*(X)$ 成为右 Z[t]-模。因此，我们可以构造张量积

$$\overline{W}_*(X):=W_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}],$$

其按 $\mathbb{Z}$ 分次，其中 $\deg(x^{\otimes_{Z[t]}}rt^k)=n+4k$，$x\in W_n(X)$，$r\in Z$。Panov 的观察表明，$\overline{W}_*(-)$ 是一种同调理论。它自然地构成一个右 $Z[t,t^{-1}]$-模，且右乘以 t 是一个同构，其逆映射由右乘以 t^{-1} 给出。这表明 $W_*(-)$ 是 4-周期的，因此我们可以称其为奇素数处的周期 Witt 配边。包含映射 $Z[t]\subset Z[t,t^{-1}]$ 诱导出一个自然映射。

$$i_*:W_*(X)=W_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t]\longrightarrow\overline{W}_*(X).$$

Again, the periodicity relations (6) imply that

$$\mu^{\mathrm{Witt}}([f:V^{j-4k}\to X]\cdot[M^{4k}])=(\mu^{\mathrm{Witt}}[f])\cdot\sigma(M)a^k\in(\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_j(X),\tag{12}$$

$[f]\in\Omega^{\mathrm{Witt}}_{j-4k}(X)$, $[M]\in\Omega^{SO}_{4k}(pt)$，这表明 μ^{Witt} 是一个 Z[t]-模同态，流形情形下的 Δ_{SO*} 也是如此。将其与 $Z[t,t^{-1}]$ 在 Z[t] 上作张量积，我们得到一个自然同构。

$$\mu^{\mathrm{Witt}}\otimes_{Z[t]}\mathrm{id}:\overline{W}_*(X)=W_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}]\xrightarrow{\cong}(\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}]$$

of $\mathbb{Z}$-graded homology theories by Siegel's Theorem 4.2. For any $j\in\mathbb{Z}$, a well-defined map

$$\omega:Q_{\bar{j}}(X)\otimes Z\longrightarrow(W_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}])_j$$

is given by setting

$$\omega([g:M^{j-4k}\to X]\otimes_{\mathbb{Z}} r):=[g]\otimes_{Z[t]} rt^k\in W_{j-4k}(X)\otimes_{Z[t]} Z\langle t^k\rangle,\ k\in\mathbb{Z},\ r\in Z,$$

where one views the closed oriented smooth manifold M as a Witt space via its canonical PL structure. On compact PL spaces X, the diagram

$$\begin{array}{ccc} Q_{\bar{j}}(X)\otimes Z & \xrightarrow[\Delta_{SO*}]{\cong} & (\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_{\bar{j}}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi}\cong \\ \overline{W}_j(X) & \xrightarrow[\mu^{\mathrm{Witt}}\otimes_{Z[t]}\mathrm{id}]{\cong} & ((\mathrm{ko}\tfrac{1}{2})_*(X)\otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}])_j \end{array}$$

由命题 4.3，等式对每个 $\mathrm{j}\in\mathbb{Z}$ 都成立。特别地， ω是一个同构，由此可得，在排除 2 的情况下，维特配边类可由光滑流形表示。以下推论将在命题 5.7 的证明中用到:

命题 5.6. 1. 给定一个 $\mathrm{Z[t]}$-线性映射 $\alpha_*\colon \mathrm{W_*(X)}\to(\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_*\mathrm{(X)}$，存在唯一的延拓，将 α_* 延拓为一个同态

$$\overline{\alpha}_*\colon \overline{W}_*(X)\longrightarrow(\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_*(X)$$

它是 $\mathrm{Z[t,t^{-1}]}$-模之间的同态。若 α_* 是同调理论的自然变换，则 $\overline{\alpha}_*$也是。

2. 设 $\alpha_*,\beta_*\colon \mathrm{W_*(X)}\to(\mathrm{KO}_{12})_*\mathrm{(X)}$ 是紧 PL X 上同调理论之间的 $\mathrm{Z[t]}$-线性自然变换。若对光滑流形 M 上的每个 g 都有 $\alpha_*([g:M\to X]\otimes 1)=\beta_*(\underline{[g]}\otimes 1)$，则在 $\mathrm{W_*(X)}$ 上有 $\alpha_*=\beta_*$；对于它们的周期版本，在 $\mathrm{W_*(X)}$ 上有 $\overline{\alpha}_*=\overline{\beta}_*$。

Proof. We prove statement 1: Since α_* is $Z[t]$-linear, it induces a map

$$\overline{\alpha}_*\colon (W_*(X)\otimes_{Z[t]}Z[t,t^{-1}])_j\longrightarrow(\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_{\bar{j}}(X),\ j\in\mathbb{Z},$$

by setting, for $p\in Z[t,t^{-1}]$,

$$\overline{\alpha}_*([f]\otimes_{Z[t]}p):=(\alpha_*[f])\cdot p,$$

where on the right hand side, we interpret p as an element of $Z[a,a^{-1}]$ by substituting $t\mapsto a$. Then $\overline{\alpha}_*$ is $Z[t,t^{-1}]$-linear, and the diagram

(13)
$$\begin{array}{ccc} W_*(X) & & \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & \searrow^{\alpha_*} & \\ \overline{W}_*(X) & \xrightarrow[\overline{\alpha}_*]{} & (\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_*(X) \end{array}$$

commutes.

现在我们转向唯一性的证明。假设 $\beta_*\colon \mathrm{W_*(X)}\to(\mathrm{KO}_{12})_*\mathrm{(X)}$ 是 α_* 的任意一个 $\mathrm{Z[t,t^{-1}]}$-线性延拓，即 $\beta_*\circ i_*=\alpha_*$。那么

$$\begin{aligned}\beta_*([f]\otimes_{Z[t]}p)&=\beta_*([f]\otimes_{Z[t]}(1\cdot p))=\beta_*(([f]\otimes_{Z[t]}1)\cdot p)\\&=(\beta_*([f]\otimes_{Z[t]}1))\cdot p=(\beta_*i_*[f])\cdot p\\&=\alpha_*[f]\cdot p=\overline{\alpha}_*([f]\otimes_{Z[t]}p).\end{aligned}$$

Hence $\overline{\alpha}_*$ is unique. If α_* is natural in X and commutes with suspension isomorphisms, then $\overline{\alpha}_*$ inherits these properties.

We prove statement 2: Since α_* and β_* are $Z[t]$-linear, they induce uniquely $Z[t,t^{-1}]$-linear transformations

$$\overline{\alpha}_*,\overline{\beta}_*\colon (W_*(X)\otimes_{Z[t]}Z[t,t^{-1}])_j\longrightarrow(\mathrm{KO}\tfrac{1}{2})_{\bar{j}}(X),\ j\in\mathbb{Z},$$

as explained in statement 1. Given an element

$$[f : V^{j-4k} \to X] \otimes_{Z[t]} rt^k \in (W_*(X) \otimes_{Z[t]} Z[t,t^{-1}])_j = \overline{W}_j(X)$$

k ∈ℤ, r ∈Z，存在一个（唯一的）元素 q ∈Q -j(X)⊗Z，使得 ω(q) =[f]⊗Z[t] rtk，因为 ω 是一个同构。商 Q -j(X)⊗Z 中的这样一个元素由形如以下形式的元素表示。

$$q = \sum_{i=1}^{m} [g_i : M_i^{j-4k_i} \to X] \otimes r_i,\ [g_i] \in \Omega^{SO}_{j-4k_i}(X),\ r_i \in Z,\ k_i \in \mathbb{Z}.$$

根据 ω, ω([gi] ⊗ℤ ri) 的定义，=[gi]⊗Z[t] ritki，因此

$$[f] \otimes_{Z[t]} rt^k = \sum_{i=1}^{m} [g_i] \otimes_{Z[t]} r_i t^{k_i}$$

因此,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_*([f] \otimes_{Z[t]} rt^k) &= \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_*([g_i] \otimes_{Z[t]} r_i t^{k_i}) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_*[g_i]) \cdot r_i a^{k_i} \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\beta_*[g_i]) \cdot r_i a^{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\beta}_*([g_i] \otimes_{Z[t]} r_i t^{k_i}) \\ &= \overline{\beta}_*([f] \otimes_{Z[t]} rt^k).\end{aligned}$$

这证明了周期版本在 W*(X), $\overline{\alpha}_* = \overline{\beta}_*$ 上一致。利用 (13) 的交换性，我们推导出 $\alpha_* = \overline{\alpha}_* \circ i_* = \overline{\beta}_* \circ i_* = \beta_*$. □

命题 5.7. 由 Δ: MWITT →KO[$\frac{1}{2}$] 诱导的同调理论的自然变换与变换 μ^{Witt} 一致,

$$\Delta_* = \mu^{Witt} : \Omega_*^{Witt}(Y,B) \longrightarrow KO_*(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

on compact PL pairs (Y,B). *In particular,* $\Delta(X) = \mu_X$ *for a compact Witt space* $(X\ \partial X)$.

证明。环谱层面的西格尔–沙利文定向 Δ: MWITT →KO[$\frac{1}{2}$] 限制为定义 3.5 中的定向 Δ: MSPL →KO[$\frac{1}{2}$]，进而进一步限制为 Δ|: MSO →MSPL $\xrightarrow{\Delta}$ KO[$\frac{1}{2}$]。根据命题 3.3，并且由于 Δ_{SPL} 延拓了 Δ_{SO}，所诱导的映射

$$\Delta|_* : \Omega_*^{SO}(Y,B) \longrightarrow KO_*(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

agrees with

$$\Delta_{SO*} : \Omega_*^{SO}(Y,B) \longrightarrow KO_*(Y,B) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

在每个紧致 PL 对 (Y, B) 上。由于 Δ*: Ω_*^{Witt}(Y,B) →KO*(Y,B) ⊗ℤ[$\frac{1}{2}$] 是奇素数局部化的，因此它唯一地经由 Ω_*^{Witt}(–) 的奇素数局部化 W*(–) 分解。由此得到的同态

$$\Delta_* : W_*(Y,B) \longrightarrow (KO\tfrac{1}{2})_*(Y,B) \tag{14}$$

is a natural transformation of homology theories. On a point, it is given by

$$\Delta_*(c^k) = \Delta_{SO*}(c^k) = \Delta_{SO*}[\mathbb{C}P^2]^k = \sigma(\mathbb{C}P^2)^k \cdot a^k = a^k,$$

using the signature relation (1). Since $\Delta : MWITT \to KO[\frac{1}{2}]$ is a morphism of ring spectra, this shows that (14) is $Z[t]$-linear. Siegel's transformation

$$\mu^{Witt} : W_*(Y,B) \longrightarrow (KO\tfrac{1}{2})_*(Y,B)$$

它也是一个同调理论的自然变换，并且根据周期性关系 (12)，它是 Z[t]-线性的。因此，为了证明这两个变换在 W∗(Y,B) 上相等，根据命题 5.6，只需证明它们在映射到 (Y, B) 的紧致光滑流形上相一致。设 g : (M ∂M) →(Y, B) 是映射到 (Y,B) 的一个光滑流形。根据命题 4.3，$\mu_M = \Delta_{\mathrm{SO}}(M)$，因此

$$\Delta_*([g]\otimes 1) = \Delta_{\mathrm{SO}*}[g] = g_*\Delta_{\mathrm{SO}}(M) = g_*\mu_M = \mu^{\mathrm{Witt}}([g]\otimes 1),$$

as was to be shown. □

6. Multiplicativity of Orientation Classes

The classical Sullivan orientation $\Delta_{\mathrm{SO}}(M\times N)$ of a product $M\times N$ of closed smooth manifolds is known to satisfy the multiplicativity property

$$\Delta_{\mathrm{SO}}(M\times N) = \Delta_{\mathrm{SO}}(M)\times\Delta_{\mathrm{SO}}(N) \tag{15}$$

关于 $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$-同调上的外积。一种理解这一点的方法是利用 Ranicki 的乘法态射 σ^* 进行 L-理论论证：MSPL →𝕃(ℤ)：环态射ϕ：环谱之间的 E →F 保持外积，即该图表。

$$\begin{array}{ccc} E_*(X)\otimes E_*(Y) & \xrightarrow{\phi\otimes\phi} & F_*(X)\otimes F_*(Y) \\ \times\downarrow & & \downarrow\times \\ E_*(X\times Y) & \xrightarrow[\phi]{} & F_*(X\times Y) \end{array} \tag{16}$$

commutes. Applying this to σ^*, one obtains the multiplicativity of the $\mathbb{L}$-homology orientation of PL manifolds,

$$\begin{aligned}[M]_{\mathbb{L}}\times[N]_{\mathbb{L}} &= \sigma^*[\mathrm{id}_M]\times\sigma^*[\mathrm{id}_N] = \sigma^*([\mathrm{id}_M]\times[\mathrm{id}_N]) \\ &= \sigma^*[\mathrm{id}_{M\times N}] = [M\times N]_{\mathbb{L}}.\end{aligned}$$

(Via the ring morphism $\mathrm{MSTOP}\to\mathbb{L}(\mathbb{Z})$, this works just as well for topological manifolds.) Using the ring equivalence $\kappa^{-1}:\mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]\simeq\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$, it follows that $\Delta(M\times N)=\Delta(M)\times\Delta(N)$ for $\Delta:\mathrm{MSPL}\to\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$ as in Definition 3.5. Equation (15) is then a consequence of Proposition 3.3. Alternatively, and more directly, one may also deduce (15) from the multiplicativity of Sullivan's universal elements

$$\Delta_{4n}\in\mathrm{KO}^{4n}(\mathrm{MSO}_{4n})\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

Indeed, he shows ([56, p. 202, g)]) that the canonical homomorphism, induced by the classifying map,

$$\widetilde{\mathrm{KO}\tfrac{1}{2}}^{4(q+r)}(\mathrm{MSO}_{4(q+r)})\longrightarrow\widetilde{\mathrm{KO}\tfrac{1}{2}}^{4(q+r)}(\mathrm{MSO}_{4q}\wedge\mathrm{MSO}_{4r})$$

sends $\Delta_{4(q+r)}\mapsto\Delta_{4q}\times\Delta_{4r}$. This, together with naturality, implies the relation

$$\Delta_{\mathrm{SO}}(\xi\times\eta)=\Delta_{\mathrm{SO}}(\xi)\times\Delta_{\mathrm{SO}}(\eta)\in\widetilde{\mathrm{KO}\tfrac{1}{2}}^{*}(\mathrm{Th}(\xi\times\eta))=\widetilde{\mathrm{KO}\tfrac{1}{2}}^{*}(\mathrm{Th}\,\xi\wedge\mathrm{Th}\,\eta)$$

for the Sullivan Thom class $\Delta_{\mathrm{SO}}(\xi)\in\widetilde{\mathrm{KO}}^{12}(\mathrm{Th}\,\xi)$；另见 Madsen-Milgram [39, 第 116] 页。最后，将其应用于稳定法丛 $\xi=\nu_M,\eta=\nu_N$，并使用 Alexander 对偶性。

有限复形上一个定向向量丛 ξ 的

注 6.1. 正如 Rosenberg 和 Weinberger 在 [52, 第 51 页的引理 6], 中指出的，符号算子 D_M 在 Kasparov K-同调中的类 $[D_M]$ 并不具有关于外 Kasparov 积的乘法性。如果这些类的维数中有一个是偶数，则该类具有乘法性；但如果两个维数都是奇数，则 $[D_{M\times N}] = 2[D_M]\times[D_N]$。另见[34, 定理 8.5]。

因此，我们的方法的一个直接应用，就是证明维特空间 X 的 Siegel-Sullivan 定向类 $\mu_X = \Delta(X) \in KO_n(X)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 具有完整的笛卡尔乘法性，这推广了流形乘法性。（这一点在 [55] 中尚未得到证明。）

Theorem 6.2. *Let X and Y be closed Witt spaces. Then the Siegel-Sullivan orientation of the Witt space $X\times Y$ is given by*

$$\Delta(X\times Y) = \Delta(X)\times\Delta(Y),$$

using the external product $(\mathrm{KO}\frac{1}{2})_m(X)\otimes(\mathrm{KO}\frac{1}{2})_n(Y)\to(\mathrm{KO}\frac{1}{2})_{m+n}(X\times Y)$.

Proof. Applying diagram (16) to the ring morphism $\Delta : \mathrm{MWITT}\to\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$, we obtain for the orientation classes

$$\begin{aligned}\Delta(X\times Y) &= \Delta_*[\mathrm{id}_{X\times Y}] = \Delta_*([\mathrm{id}_X]\times[\mathrm{id}_Y])\\ &= \Delta_*[\mathrm{id}_X]\times\Delta_*[\mathrm{id}_Y] = \Delta(X)\times\Delta(Y).\end{aligned}$$

□

7. Bundle Transfer of the Siegel-Sullivan Orientation

在命题 2.1 中构造的 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 $\kappa : \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]\simeq\mathbb{L}(\mathbb{R})[\frac{1}{2}]$ 的等价性，结合 [8], 的 $\mathbb{L}$ 理论结果，使得我们能够处理 Siegel-Sullivan 类的丛转移。我们首先回顾同调块丛转移同态，并利用 κ 将 KO 同调与 $\mathbb{L}$ 同调上的转移联系起来。

设 F 是一个维数为 d 的闭定向 PL 流形，K 是一个有限球复形，其关联多面体为 $B = |K|$。令 b 表示 B 的维数。令 ξ 为 K 上的一个定向 PL F- 分块丛，其全空间为 $X = E(\xi)$，$\dim X = b + d$。Casson 在 [19] 中发展了 F-分块丛理论。以点 F 为纤维的 PL 局部平凡 PL 纤维丛 $X\to B$ 是一种特殊情形。

Let E be a ring spectrum equipped with a ring map $\mathrm{MSPL}\to E$. Then the block bundle ξ has an associated block transfer homomorphism

$$\xi^! : E_n(B)\longrightarrow E_{n+d}(X). \tag{17}$$

In [8], we described $\xi^!$ as a composition

$$E_n(B)\overset{\sigma}{\cong}\widetilde{E}_{n+s}(S^sB^+)\xrightarrow{T(\xi)_*}\widetilde{E}_{n+s}(\mathrm{Th}(\nu))\xrightarrow{\Phi}E_{n+s-(s-d)}(X).$$

这里，σ 是悬挂同构，而 $T(\xi) : S^sB^+\to\mathrm{Th}(\nu)$ 是与一个 ξ-块保持的分片线性嵌入 $X\hookrightarrow B\times\mathbb{R}^s$（当 s 足够大时）相关的 Umkehr 映射（即庞特里亚金–汤姆坍缩）。可以证明，这种嵌入具有一个正则邻域，该邻域是 X 上一个 $(s-d)$-圆盘分块丛 ν 的全空间，参见例如 [8, 第 2] 节。这个法圆盘分块丛 ν 表示 ξ 的稳定垂直法丛，并且可以取为 PL 微丛（或 PL $(\mathbb{R}^{s-d},0)$-丛），因为对于稳定分类空间，$\mathrm{BSPL}\simeq B\widetilde{\mathrm{SPL}}$。（即使对于具有流形块的拟丛，这种稳定垂直法丛也存在，参见[15, IV.2, 第 83] 页。）在环映射 $\mathrm{MSPL}\to E$ 下，ν 的 MSPL 上同调 Thom 类的像给出 ν 的 E-上同调 Thom 类。与此类作帽积定义了 Thom 同态 Φ。

我们将考虑环谱 \(E\) 为 \(KO\) $[\frac{1}{2}]$,$\mathbb{L}(\mathbb{Q})$ 或 $\mathbb{L}(\mathbb{Q})[\frac{1}{2}] = \mathbb{L}(\mathbb{Z})[\frac{1}{2}]$,，且环映射 $\mathrm{MSPL} \to \mathrm{E}$ 为前面讨论过的定向时的块转移 $\xi^!$。这些转移之间的相容性将在引理 7.3 中得到确立，这本质上是映射 κ 的乘法性的结果。我们需要更精确地描述所涉及的 Thom 同态 Φ。我们的论证涉及第 3 节中讨论的三个 Thom 类：MSPL 上同调中的类 $\mathrm{u}_{\mathrm{SPL}}(\alpha)$、$\mathbb{L}$ 上同调中的类 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\alpha)$，以及 \(KO\)$[\frac{1}{2}]$ 上同调中的类 $\Delta(\alpha)$。设 \(E\) 为一个环谱，并令 $\mathrm{m} = \mathrm{s} - \mathrm{d}$ 表示上述稳定垂直法向圆盘块丛 ν 的代表元的秩。Thom 空间的约化 \(E\)-上同调群可以表示为一个相对群，

$$\widetilde{E}^m(\mathrm{Th}(\nu)) \cong E^m(N, \partial N),$$

where N is the total space of ν and ∂N the total space of the sphere bundle of ν. Let

$$\rho_* : E_*(N) \xrightarrow{\cong} E_*(X)$$

be the inverse of the isomorphism induced on E-homology by the inclusion $X \hookrightarrow N$ of the zero section. If ν is E-orientable, then using the cap product

$$\cap : E^m(N, \partial N) \otimes E_n(N, \partial N) \longrightarrow E_{n-m}(N) \overset{\rho_*}{\cong} E_{n-m}(X)$$

with a Thom class (E-orientation) $u \in E^m(N\ \partial N)$ for ν, we obtain the *Thom homomorphism*

$$\Phi := \rho_*(u \cap -) : \widetilde{E}_n(\mathrm{Th}(\nu)) \cong E_n(N, \partial N) \longrightarrow E_{n-m}(X).$$

由于 $\Delta(\nu)$ 是 ν 的 $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$-上同调定向，且满足 $\Delta(\nu) = \Delta_* \mathrm{u}_{\mathrm{SPL}}(\nu)$（定义 3.6），对于环谱 $\mathrm{E} = \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$，我们得到 Thom 同态

$$\Phi = \rho_*(\Delta(\nu) \cap -) : \widetilde{\mathrm{KO}}_n(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathrm{KO}_{n-m}(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

同样，由于 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\nu)$ 是 ν 的 $\mathbb{L}[\frac{1}{2}]$ 上同调定向，且 $\mathrm{u}_{\mathbb{L}}(\nu) = \sigma^* \mathrm{u}_{\mathrm{SPL}}(\nu)$，我们得到环谱 $\mathrm{E} = \mathbb{L}[\frac{1}{2}]$ 的 Thom 同态。

$$\Phi = \rho_*(u_{\mathbb{L}}(\nu) \cap -) : \widetilde{\mathbb{L}}_n(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}_{n-m}(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

Lemma 7.1. *The Thom homomorphisms Φ on $\mathbb{L}[\frac{1}{2}]$-homology and $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$-homology agree under the natural isomorphism κ, that is, the diagram*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{KO}}_n(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{KO}_{n-m}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_*} \cong & & \cong \downarrow{\scriptstyle \kappa_*} \\ \widetilde{\mathbb{L}}_n(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{L}_{n-m}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \end{array}$$

commutes.

证明。由于 κ_* 是同调理论之间的一个自然变换，因此它与同构 ρ_* 交换。由于 κ 是环谱态射，因此它保持帽积，即该图。

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])^m(Y,A) \otimes (\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])_n(Y,A) & \xrightarrow{\cap} & (\mathrm{KO}[\frac{1}{2}])_{n-m}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_* \otimes \kappa_*} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_*} \\ (\mathbb{L}[\frac{1}{2}])^m(Y,A) \otimes (\mathbb{L}[\frac{1}{2}])_n(Y,A) & \xrightarrow{\cap} & (\mathbb{L}[\frac{1}{2}])_{n-m}(Y) \end{array}$$

commutes. By Lemma 3.7, $\kappa_*(\Delta(\nu)) = u_{\mathbb{L}}(\nu)$. Therefore,

$$\begin{aligned}\kappa_*\Phi &= \kappa_*\rho_*(\Delta(\nu)\cap -) = \rho_*\kappa_*(\Delta(\nu)\cap -)\\ &= \rho_*(\kappa_*(\Delta(\nu))\cap\kappa_*(-)) = \rho_*(u_{\mathbb{L}}(\nu)\cap\kappa_*(-)) = \Phi\kappa_*.\end{aligned}$$

□

注记 7.2. 由于局部化在谱层面上是乘法的，因此它将由与 Thom 类 \(u_{\mathbb{L}}(\nu) \in (\mathbb{LQ})^m(\mathrm{Th}(\nu))\) 作帽积所定义的 Thom 同态 $\widetilde{\ }$homomorphism Φ 转化为由与局部化后的类 \(u_{\mathbb{L}}(\nu) \in (\widetilde{\mathbb{LQ}}[\frac{1}{2}])^m(\mathrm{Th}(\nu))\) 作帽积所定义的 Thom 同态 Φ，即下图所示。

$$\begin{array}{ccc}(\widetilde{\mathbb{LQ}})_n(\mathrm{Th}(\nu)) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{LQ})_{n-m}(X)\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\widetilde{\mathbb{LQ}}[\frac{1}{2}])_n(\mathrm{Th}(\nu)) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{LQ}[\frac{1}{2}])_{n-m}(X)\end{array}$$

commutes. Thus $\mathbb{L}$-theoretic transfers also commute with localization away from 2.

Using the Thom homomorphisms Φ appearing in Lemma 7.1, there are in particular transfers

$$\xi^! : \mathbb{L}_n(B)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}_{n+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

and

$$\xi^! : \mathrm{KO}_n(B)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathrm{KO}_{n+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

Lemma 7.3. *The diagram of transfers*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{KO}_{*+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_{*+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\\ \uparrow{\scriptstyle \xi^!} & & \uparrow{\scriptstyle \xi^!}\\ \mathrm{KO}_*(B)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_*(B)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\end{array}$$

commutes.

Proof. By construction of the block transfer $\xi^!$, the diagram factors as

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{KO}_{*+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_{*+d}(X)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\\ \uparrow{\scriptstyle \Phi} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi}\\ \widetilde{\mathrm{KO}}_{*+s}(\mathrm{Th}(\nu))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \widetilde{\mathbb{L}}_{*+s}(\mathrm{Th}(\nu))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\\ \uparrow{\scriptstyle T(\xi)_*} & & \uparrow{\scriptstyle T(\xi)_*}\\ \widetilde{\mathrm{KO}}_{*+s}(S^sB^+)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \widetilde{\mathbb{L}}_{*+s}(S^sB^+)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\\ \uparrow{\scriptstyle \sigma} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma}\\ \mathrm{KO}_*(B)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_*(B)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}].\end{array}$$

The bottom and middle squares commute, as κ_* is a natural transformation of homology theories, while the top square involving the Thom homomorphisms commutes by Lemma 7.1. □

The material on block bundle transfer homomorphisms developed above enables us to establish our main result on bundle transfer of Siegel-Sullivan orientations:

定理 7.4. 若 ξ 是一个定向 PL F-分块丛，其流形纤维 F 为闭定向 PL 流形，且底空间 B 是闭维特基空间，则底空间和全空间 X 的 Siegel-Sullivan 定向在块丛传递下满足关系:

$$\xi^!\Delta(B) = \Delta(X).$$

Proof. Remark 7.2 implies that transfer commutes with localization away from 2: the diagram

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{LQ})_{*+d}(X) & \longrightarrow & (\mathbb{LQ}[\frac{1}{2}])_{*+d}(X) \\ {\scriptstyle\xi^!}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\xi^!} \\ (\mathbb{LQ})_*(B) & \longrightarrow & (\mathbb{LQ}[\frac{1}{2}])_*(B) \end{array}$$

commutes. In [8, Theorem 7.1] we showed that the left hand transfer sends $[B]_{\mathbb{L}}$ to $[X]_{\mathbb{L}}$. Thus

$$\xi^![B]_{\mathbb{L}} = [X]_{\mathbb{L}}$$

for the right hand transfer as well. By (10),

$$\kappa_*\Delta(X) = [X]_{\mathbb{L}} \in (\mathbb{LQ}[\tfrac{1}{2}])_{b+d}(X),\ \kappa_*\Delta(B) = [B]_{\mathbb{L}} \in (\mathbb{LQ}[\tfrac{1}{2}])_b(B).$$

Using Lemma 7.3,

$$\kappa_*\xi^!\Delta(B) = \xi^!\kappa_*\Delta(B) = \xi^![B]_{\mathbb{L}} = [X]_{\mathbb{L}} = \kappa_*\Delta(X).$$

由此可得 $\xi^!\Delta(B) = \Delta(X)$，因为 κ_* 是一个同构。 □

8. Siegel-Sullivan 定向的 Gysin 限制

我们的方法基于 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 $\kappa\colon \mathrm{KO}[\frac{1}{2}] \simeq \mathbb{L}(\mathbb{R})[\frac{1}{2}]$ 的等价，该等价在命题 2.1 中构造，并结合 [7], 的结果，从而可以处理奇异空间的正规非奇异嵌入下 Siegel-Sullivan 类的 Gysin 限制；其方式与上一节对丛转移的分析相平行。若分层空间之间的嵌入 $g: Y \hookrightarrow X$ 满足以下条件，则称其为正规非奇异嵌入：Y 有一个开管状邻域，该邻域可在保持分层的方式下赋予一个在 Y 上的向量丛 ν结构，并使 Y 与零截面相识别。例如，环境光滑流形中的光滑子流形与 Whitney 分层集 X 的横截交，在 X 中是正规非奇异的（[27, 第 47 页，定理 1.11]）。

设 \(g : Y^{n-c} \hookrightarrow X^n\) 是闭维特空间的一个余维数为 \(c\) 的正规非奇异嵌入，其法丛为秩为 \(c\) 的 \(\nu \)。设 \(E\) 是一个环谱，使得 \(\nu\) 具有一个 \(E\)-定向 \(u\)。我们描述与 \(g\) 相关联的 \(E\)-同调上的 Gysin 限制。典范映射 \(j : X^+ \to\mathrm{Th}(\nu)\) 诱导出一个同态

$$j_* : E_*(X) \longrightarrow \widetilde{E}_*(\mathrm{Th}(\nu)).$$

As in the previous section, cap product with the E-orientation u yields the Thom homomorphism

$$\Phi = \rho_*(u \cap -) : \widetilde{E}_*(\mathrm{Th}(\nu)) \longrightarrow E_{*-c}(Y).$$

Composition defines the *Gysin restriction*

$$g^! = \Phi \circ j_* : E_*(X) \longrightarrow E_{*-c}(Y).$$

Now suppose that ν is $H\mathbb{Z}$-oriented, compatibly with the orientations of X and Y. Applying the above general description of $g^!$ to $E = \mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$ with $u = \Delta(\nu)$, we obtain the Gysin homomorphism

$$g^! : \mathrm{KO}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathrm{KO}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}],$$

and applying it to $E = \mathbb{L}[\frac{1}{2}]$ with $u = u_{\mathbb{L}}(\nu)$, we obtain the Gysin homomorphism

$$g^! : \mathbb{L}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{L}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

Lemma 8.1. *The diagram of Gysin restrictions*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KO}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\ \uparrow{\scriptstyle g^!} & & \uparrow{\scriptstyle g^!} \\ \mathrm{KO}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \end{array}$$

commutes.

Proof. By construction of the restrictions $g^!$, the diagram factors as

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KO}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_{*-c}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\ \uparrow{\scriptstyle \Phi} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi} \\ \widetilde{\mathrm{KO}}_*(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \widetilde{\mathbb{L}}_*(\mathrm{Th}(\nu)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\ \uparrow{\scriptstyle j_*} & & \uparrow{\scriptstyle j_*} \\ \mathrm{KO}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} & \mathbb{L}_*(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]. \end{array}$$

The bottom square commutes, as κ_* is a natural transformation of homology theories, while the top square involving the Thom homomorphisms commutes by Lemma 7.1. □

The Siegel-Sullivan orientation behaves under normally nonsingular Gysin restrictions as follows.

Theorem 8.2. *Let $g : Y^{n-c} \hookrightarrow X^n$ be an oriented normally nonsingular inclusion of closed Witt spaces. The $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$-homology Gysin map $g^!$ of g sends the Siegel-Sullivan orientation of X to the Siegel-Sullivan orientation of Y:*

$$g^!\Delta(X) = \Delta(Y).$$

Proof. The proof is analogous to the one of Theorem 7.4. Remark 7.2 implies that Gysin restriction commutes with localization away from 2: the diagram

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{LQ})_{*-c}(Y) & \longrightarrow & (\mathbb{LQ}[\frac{1}{2}])_{*-c}(Y) \\ \uparrow{\scriptstyle g^!} & & \uparrow{\scriptstyle g^!} \\ (\mathbb{LQ})_*(X) & \longrightarrow & (\mathbb{LQ}[\frac{1}{2}])_*(X) \end{array}$$

commutes. In [7, Theorem 3.17] we showed that the left hand restriction sends $[X]_{\mathbb{L}}$ to $[Y]_{\mathbb{L}}$. Thus

$$g^![X]_{\mathbb{L}} = [Y]_{\mathbb{L}}$$

for the right hand restriction as well. By (10),

$$\kappa_*\Delta(X) = [X]_{\mathbb{L}} \in (\mathbb{L}\mathbb{Q}[\tfrac{1}{2}])_n(X),\ \kappa_*\Delta(Y) = [Y]_{\mathbb{L}} \in (\mathbb{L}\mathbb{Q}[\tfrac{1}{2}])_{n-c}(Y).$$

Using Lemma 8.1,

$$\kappa_* g^! \Delta(X) = g^! \kappa_* \Delta(X) = g^! [X]_{\mathbb{L}} = [Y]_{\mathbb{L}} = \kappa_* \Delta(Y).$$

It follows that $g^!\Delta(X) = \Delta(Y)$, as κ_* is an isomorphism. □

定理 8.2 和 7.4 共同表明，与通常非奇异映射 Y → B（Goresky-MacPherson [29, 5. 4.3], Fulton-MacPherson [26]）相关联的转移将 Δ(B) 映射到 Δ(Y)。

REFERENCES

[1] P. Albin、E. Leichtnam、R. Mazzeo、P. Piazza，《Witt 空间上的符号包》，《高等师范学校科学年刊》´Ecole normale sup ´ **45** 2012 241 310 3, 15 erieure（），–。P. Albin、M. [2] Banagl、E. Leichtnam、R. Mazzeo、P. Piazza，《非 Witt 空间上的精细交叉同调》，拓扑分析期刊 **7** 2015 1, 105 133 3（），第 – 期。M. Banagl，《将交叉同调型不变量扩展到非 Witt 空 [3] 间》，《美国数学会回忆录》160（2002），第760号，1–83。2, 3, 14 [4] **163** 2006 1 24 2, 14 M. Banagl，《非 Witt 空间的 [5] L 类》，《数学年刊》（），–。M. Banagl，《分层空间的拓扑不变量》，《施普林格数学专著》，Springer Verlag，2007。12[6] M. Banagl，《奇异空间的符号及其对广义同调理论的细化》，载于：《分层空间的拓扑》，G. Friedman、E. Hunsicker、A. Libgober、L. Maxim 编，数学科学研究所出版物，第 58, 2011, 223 249 15 卷，剑桥大学出版社，– [7] 。M. Banagl，《奇异空间拓扑与霍奇理论特征类的 Gysin 限制》，纽约数学杂志 **26** 2020 1273 1337 2, 3, 26, 27（），–。M. Banagl，《奇异空间的 [8] Goresky-MacPherson L 类的丛转移》，预印本（2022），arXiv:2210.05432。3, 23, 26[9] M. Banagl、S. Cappell 和 J. Shaneson，《计算分层空间的扭曲符号和 L 类》，《数学年刊》326，第3期（2003），589–623。18[10] M. Banagl、G. Laures、J. McClure，《IP 空间的 L-同调基本类与分层诺维科夫猜想》，数学精选 **25 7** 2019 1 104 3, 15：（），第 - 页。M. Banagl、D. Wrazidlo， [11] 《奇异空间 Gysin 相干特征类的唯一性定理》，预印本（ 2022 2210 13009 2, 3），arXiv: 。. J. C. Becker、D. H. Gottlieb，《转移映射与纤维丛》，《拓扑学》 [12] **14** 1975 1 12 2（），–。A. Borel [13] 50, ¨ 1984 等，《交叉上同调》，数学进展，第 Birkhauser 卷，。 12 [14] ¨ J.-P. Brasselet、J. Schurmann、S. Yokura，《奇异空间的 Hirzebruch 类与动机陈类》，《拓扑分析杂志》 **2** 2010 1 55 3（），–。S. Buoncristiano、C. P. Rourke、B. J. Sanderson，《同调理 [15] 论的几何方法》，伦敦数学会讲义系列，第 18, 1976 14, 23 卷，剑桥大学出版社，。S. E. Cappell、J. L. Shaneson，《可分层映射与拓扑不变量》，美国数学会杂志 4（ [16] 1991），521–551。15[17] S. Cappell、J. Shaneson、S. Weinberger，《奇异空间上群作用的拓扑特征类》，巴黎科学院报告 **313** 1991 293 295 2（），–。S. E. Cappell 和 S. Weinberger，[18] 《某些分层空间的分类》，巴黎科学院报告 S´er. I Math. 313（1991），399–401。2[19] A. J. Casson，《块丛的推广与应用》，剑桥三一学院研究员学位论文， 1967 33 68 2, 23 。载于：《主猜想文集》（A. [20] Ranicki 编），–。S. J. Curran，《Witt 空间上的交叉同调与自由群作用》，密歇根数学杂志 39（1992），111–127。15[21] J. M. Davies，《定向 p-可除群模空间的结构层》，预印本（2020），arXiv:2007.00482v1。6[22] J. M. Davies，《在拓扑模形式上构造和计算 Adams 运算》，预印本（2021），arXiv:2104.13407v1 6[23] G. Friedman，《奇异交叉同调》，新数学专著，第33卷，剑桥大学出版社，2020。12

[24] G. Friedman、J. McClure, 《维特空间的对称签名》, 《拓扑与分析杂志》5（2013）, 121–159。15[25] 2 1998 2 W. Fulton, 《交叉理论》, 第 nd 版, [26] Springer Verlag, 。W. Fulton、R. MacPherson, 《奇异空间研究的范畴框架》, 《美国数学会回忆录》31（1981）, 第243号。2, 28[27] M. Goresky、R. MacPherson, 《分层莫尔斯理论》, 《数学及其边界领域成果》, 第 14, 1988 26 卷, Springer-Verlag, 。M. Goresky、R. MacPherson, [28] 《交叉同调理论》, 《拓扑学》 **19** 1980 135 162 12（）, –。[29] **71** 1983 77 129 M. Goresky、R. MacPherson, 《交叉同调 II》, 《数学创刊》（）, –。 2, 12, 28 [30] **58** 1983 R. M. Goresky、P. H. Siegel, 《奇异空间上的链接配对》, 《瑞士数学通讯》（）, 96–110。15[31] F. Kirwan、J. Woolf, 《交叉同调理论导论》, 第2版, Chapman & Hall/CRC, 2006。12 [32] ¨ ¨ 2005 18 M. Kreck、[33] * W. Luck, 《诺维科夫猜想》, Oberwolfach 研讨会, Birkhauser Verlag, 。M. Land、T. Nikolaus, 《C -代数的 K-理论与 L-理论之间的关系》, 《数学年刊》371（2018）, 517–563。3, 4, 5 [34] * 2208 10556 1 3, 23 M. Land、[35] **26** 2014 T. Nikolaus、M. Schlichting, 《C -代数的 L-理论》, 预印本, arXiv: 。v 。G. Laures、J. McClure, 《Quinn 谱的乘法性质》, 《数学论坛》（）, 第4期, 1117–1185。4, 7, 15[36] L. G. Maxim, 《交叉同调与 pervers 层》, 《数学研究生教材》281, Springer-Verlag, 2019。12[37] W. L¨uck、A. Ranicki, 《纤维丛的手术障碍》, 《纯粹与应用代数杂志》81（1992）, 139–189。3[38] J. Lurie, 《代数 L 理论与手术讲座 25：Hirzebruch 特征公式》（2011）, [39] https://www.math.ias.edu/~lurie/267x.html 5 I. Madsen、R. J. Milgram, 《流形手术与协边的分类空间》, 《数学年刊研究》普林斯顿大学出版社, 。C. McCrory, 《锥复形与 PL 横截性》, 《美国数学会会刊》207（1975）, 269–291。14 **92**, 1979 6, 10, 13, 18, 22 J. Peter May, 《E 环空间与 E 环谱》, 《数[40] 学讲义》（）, Springer-Verlag。A. S. Mishchenko, 《非单连通流形的同伦不变量。III. 高阶特征数》, 《苏联科学院通报》, 数学辑 35（1971）, 1316–1355。15 [41] ∞ ∞ **577** 1977 6 J. W. Morgan、D. P. Sullivan, [42] 《手术理论中的横截特征类与链接循环》, 《数学年刊》99（1974）, 第3期, 463–544。9[43] N. V. Panov, 《稳定 K-理论的泛系数公式》, 《数学札记》11（1972）, 53–[44] 《数学札记》11（1972）, 36–40。18 60 = W. L. Pardon, 《交叉同调、庞加莱空间与特征簇定理》, 《瑞士数学评论》65（1990）, 198–233。15[45] O. Randal-Williams, 《族特征定理》, 《爱丁堡皇家学会会刊》（Ranicki 纪念专辑）, 即将出版。´A. A. Ranicki, 《代数 L 理论与拓扑流形》, 《剑桥数学专著》, 第102 7, 10 卷, 剑桥大学出版社, [47] 。A. A. Ranicki, 《手术的代数理论》, https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ats.pdf 1978 7, 8（）。A. Ranicki, 《手术的[49] 代数理论 II：拓扑学应用》, 《伦敦数学会会刊》40（1980）, 193–283。7[50] A. A. Ranicki, 《总体手术障碍》, 1978年奥胡斯拓扑学会议, 《数学讲义》 **763**, 1979, 275 316 7 Springer, –。[51] J. Rosenberg, 《面向拓扑学家的解析诺维科夫猜想》, 载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第1卷, S. C. Ferry、A. Ranicki、J. Rosenberg 编, 伦敦数学会讲义系列226, 剑桥大学出版社, 1995, 338–372。5 [52] 2, **45** 2006 47 63 3, 23 J. Rosenberg、[53] 2 S. Weinberger, 《拓扑学中的符号算子》（）, –。Y. B. Rudyak, 《Thom 谱、可定向性与协边》, 第 nd 次印刷, 《施普林格数学专著》, Springer Verlag, 2008 5, 11 。J. Schurmann, [54] ¨ 《混合霍奇模的特征类》, 载于: 《分层空间的拓扑》（Friedman、Hunsicker、Libgober、Maxim 编）, MSRI 出版物第58卷, 剑桥大学出版社, 2011, 419–470。3

[55] P. H. Siegel, 《维特空间：奇素数处 KO-同调的几何循环理论》, 《美国数学杂志》105（1983）, 1067–1105。2, 4, 12, 13, 14, 16, 23[56] D. Sullivan, 《几何拓扑学：局部化、周期性与伽罗瓦对称性》, 麻省理工学院讲义，1970。1, 6, 13, 14, 18, 22[57] D. Sullivan, 《空间中的奇点》, 利物浦奇点专题讨论会论文集 II, 《数学讲义》 **209**, 196 206, 1971 1, 13, 14 – Springer-Verlag, 。R. M. Switzer, 《代数拓扑学[58]——同伦与同调》, 《数学科学基础丛书》, 第 212, 1975 11 卷，Springer-Verlag, 。L. Taylor, B. Williams, 《手术空间：公式[59]与结构》, 1978 年滑铁卢代数拓扑学会议论文集, 《数学讲义》 **741**, 170 195 1979 5, 9 Springer, – ( )。S. [60]Weinberger, 《分层空间的拓扑分类》, 芝加哥数学讲座丛书，芝加哥大学出版社，1994。2, 7, 15

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT HEIDELBERG, IM NEUENHEIMER FELD 205, 69120 HEIDELBERG, GERMANY

Email address: banagl@mathi.uni-heidelberg.de