arXiv:2305.06059v2 [math.RT] 7 Nov 2024

经典型 SOCULAR 最高权模与 Richardson轨道的刻画

白占强和张少毅

Abstract. 设 $\mathfrak{g}$ 是经典型单复李代数，其 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h}$。固定一个标准抛物子代数 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$。socular 单模正是相应抛物范畴$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$中具有最大可能 Gelfand-Kirillov 维数的最高权模。本文将对这些模给出明确刻画。当模是整数型时，我们通过与给定最高权模相关联的杨表信息来刻画它。当模是非整数型时，我们仍可利用整数型情形的结果对其作出一定刻画。在刻画过程中，我们定义了一种特殊的杨图，称为 Z-图。借助该图，我们可以描述与给定抛物子代数 $\mathfrak{p}$相关联的唯一 Richardson 轨道的分拆类型。

1. Introduction

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维复半单李代数。固定一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$，并记与 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 相关联的根系为 Φ。选取一个正根系 $\Phi^+ \subset \Phi$ 和一个单根系 $\Delta = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \Phi^+$。设 ρ 为 Φ^+ 中所有根之和的一半。设 $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解，其幂零根基为 $\mathfrak{n}$，其对偶空间为 $\bar{\mathfrak{n}}$。此外，$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ 是与 Φ^+ 相对应的 Borel 子代数。选取一个子集 $I \subset \Delta$。则它生成一个子系 $\Phi_I \subset \Phi$。设 $\mathfrak{p}_I$ 为与 I 相对应的标准抛物子代数，其 Levi 分解为 $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \oplus \mathfrak{u}_I$。如果不会引起混淆，我们通常省略下标 I。

设 $F(\lambda)$ 为一个具有最高权 $\lambda - \rho \in \mathfrak{h}^*$ 的有限维不可约 $\mathfrak{l}$-模。它也可以视为一个具有平凡 $\mathfrak{u}$-作用的 $\mathfrak{p}$-模。广义 Verma 模 $M_I(\lambda)$ 定义为

$$M_I(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F(\lambda).$$

$M_I(\lambda)$ 的不可约商模记为 $L(\lambda)$，它是最高权为 $\lambda - \rho$ 的最高权模。我们用 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 表示相应的抛物范畴。

在 [15], Irving 称 $L(\mu)$ 或 μ *socular*，如果 $L(\mu)$ 是抛物范畴中广义 Verma 模 $M_I(\lambda)$ 的根基的一个直和项 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$。在 [15, A. 2], Irving 证明，这些 socular 最高权模 $L(\mu)$ 正是具有最大可能 Gelfand-Kirillov 维数 dim$(\mathfrak{u})$ 的模 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$。这些模在抛物范畴的研究中发挥着重要作用 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$。许多数学家使用

2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B10, 17B08.*Key words and phrases.* 最高权模，Gelfand-Kirillov 维数，杨表，抛物子范畴，Richardson 轨道。

这些模用于研究范畴 $\mathcal{O}$ 或其他类型代数的性质，例如，参见文献 [8, 6, 7, 19, 20, 25]。我们研究这些模的另一个动机是，标量广义 Verma 模 $M_I(\lambda)$（这里的“标量”意味着 $\dim F(\lambda) = 1$）是可约的，当且仅当其不可约商模 $L(\lambda)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数严格小于 $\dim(\mathfrak{u}_I)$（参见 [2]）。根据 [3], ，我们可以将 $\lambda = w\mu$ 写为唯一的反占优 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ 和唯一的最短长度元素 $w \in W_{[\lambda]}$，其中 $W_{[\lambda]}$ 是 λ 的整 Weyl 群。众所周知，$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular 的，当且仅当 w 属于包含 $w_0^{\mathfrak{p}}$ 的 Kazhdan-Lusztig 右胞腔，其中 $w_0^{\mathfrak{p}}$ 是 W 中与抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 对应的抛物子群的最长元素，参见 [20, 定理 48]。然而，在类型 A 之外，KL 右胞腔尚无简洁的组合描述（例如，类型 A 中通过 Robinson-Schensted 算法给出的描述）。Garfinkle [10, 11, 12] 使用多米诺表来描述 KL 右胞腔，但这种方法并不容易使用。

最近，Bai-Xie [4] 和 Bai-Xiao-Xie [3] 推广了 Robinson-Schensted 算法，并提出了一些实用的组合算法，用于计算当 $\mathfrak{g}$ 为经典李代数时任意简单最高权模的 Gelfand-Kirillov 维数。本文将利用他们的算法，对这些 socular 最高权模给出明确的刻画。

现在令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$。我们选取 $\Phi^+ = \{e_i - e_j | 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_i | 1 \le i \le n\}$ 和一个单根系 $\Delta = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{\alpha_n := e_n\}$。我们选取一个子集 $I \subset \Delta$。将存在一些正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$，满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} \le n$，使得 $\Delta \backslash I = \{\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \cdots, \alpha_{p_{k-1}}\}$，其中 $p_t = \sum_{i=1}^{t} n_i$。这个子集 I 将生成一个子系 $\Phi_I \subset \Phi$。令 $\mathfrak{p}_I$ 为与 I 对应的标准抛物子代数，其 Levi 分解为 $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \oplus \mathfrak{u}_I$。我们称 $\mathfrak{p}_I$ 为类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 且满足 $n_k = n - \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ 的标准抛物子代数。注意，我们可能有 $n_k = 0$。我们可以类似地定义 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ 的标准抛物子代数。

对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$。我们选择 $\Phi^+ = \{e_i \pm e_j | 1 \le i < j \le n\}$ 和一个单根系 $\Delta = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{\alpha_n := e_{n-1} + e_n\}$。类似地，我们可以得到一个类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。当 $n_k = 1$ 时，我们可以将$\mathfrak{p}_I$视为一个类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_{k-2}, n_{k-1}+1, 0)$ 的标准抛物子代数。这两个抛物子代数是同构的。例如，当 $\Delta \setminus I = \{\alpha_{n-1}\}$ 时，$\mathfrak{p}_I$将是一个类型为 $(n-1, 1)$ 的标准抛物子代数。当 $\Delta \setminus I = \{\alpha_n\}$ 时，$\mathfrak{p}_I$将是一个类型为 $(n, 0)$ 的标准抛物子代数。这两个标准抛物子代数是同构的。从现在起，本文仅考虑 $n_k \neq 1$ 对于$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ 的情形。

For an integral weight $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, we write $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ and

$$\lambda^- = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, -\lambda_n, \cdots, -\lambda_1).$$

利用 [4], from λ 中著名的 R-S 算法，我们可以得到一个杨表 $P(\lambda)$，参见 §2.1。我们用 $p(\lambda) = (p_1, \cdots, p_N)$ 表示其形状，它是 n 的一个分拆。我们称 $q = (q_1, \cdots, q_N)$ 为形状为 $p = (p_1, \cdots, p_N)$ 的杨表 P 的对偶杨表的形状，并记为 $q = p^t$，其中 q_i 是杨表 P 的第 i 列的长度。

We recall the definition of Hollow tableaux in [3].

定义 1.1. 对于形状为 p 的杨表 P，用 (k, l) 表示第 k 行、第 l 列中的方格。若方格 (k, l) 满足 $k + l$ 为偶数（分别为奇数），则称其为偶方格（分别为奇方格）。令 p_i^{ev}（分别为 p_i^{odd}）为偶方格（分别为奇方格）的数量

杨表 P 第 i 行中的方格数。容易验证

$$p_i^{\mathrm{ev}} = \begin{cases} \lceil \frac{p_i}{2} \rceil & \text{if } i \text{ is odd,} \\ \lfloor \frac{p_i}{2} \rfloor & \text{if } i \text{ is even,} \end{cases} \quad p_i^{\mathrm{odd}} = \begin{cases} \lfloor \frac{p_i}{2} \rfloor & \text{if } i \text{ is odd,} \\ \lceil \frac{p_i}{2} \rceil & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

这里， $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor a \rfloor$ 表示满足 $n \leq a$ 的最大整数 n ， 而 $\lceil a \rceil$ 表示满足 $n \geq a$ 的最小整数 n 。为方便起见，我们令

$$p^{\mathrm{ev}} = (p_1^{\mathrm{ev}}, p_2^{\mathrm{ev}}, \cdots) \quad \text{and} \quad p^{\mathrm{odd}} = (p_1^{\mathrm{odd}}, p_2^{\mathrm{odd}}, \cdots).$$

Example 1.2. Let $p = (5, 5, 4, 3, 3)$ be the shape of a Young diagram P. The even and odd boxes in P are marked as follows:

E	O	E	O	E
O	E	O	E	O
E	O	E	O	
O	E	O		
E	O	E		

.

Then $p^{\mathrm{ev}} = (3, 2, 2, 1, 2)$ and $p^{\mathrm{odd}} = (2, 3, 2, 2, 1)$.

Now we can give our characterization of socular highest weight modules.

定理 1.3。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$。假设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。若且唯若 $p(\lambda)^t = (m_1, \cdots, m_k)$， 则 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的简单整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular， 其中 $(m_1, \cdots, m_k)$ 是序列 $(n_1, n_2, .., n_k)$ 按降序排列所得的排列。

Since this result is well-known in the language of KL right cells [20], we will omit its proof in this article.

定理 1.4. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$。假设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的简单整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular 的， 当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与一个类型为 $(n_k; n_1, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图具有相同的奇数方格。

这里的 Z-图是指定义3.3中的杨图。类型为 $(n_k; n_1, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图中奇数方格和偶数方格的数量将在推论3.6中给出。

Similarly we have the following.

定理 1.5. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$。 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。当 $n_k \neq 1$ 时， $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的简单整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular 的， 当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与一个类型为 $(n_k; n_1, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图具有相同的偶数方格。当 $n_k = 1$ 时， $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的简单整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular 的， 当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与一个类型为 $(0; n_1, \cdots, n_{k-2}, n_{k-1} + 1)$ 的 Z-图具有相同的偶数方格。

本文的第二个目的是对与抛物子代数 $\mathfrak{p}$相关联的 Richardson 轨道的分拆进行刻画。设 G 是一个复约化李群， 其李代数为 $\mathfrak{g}$。假设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ 是一个类型为$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$的标准抛物子代数。 G 对 $\mathfrak{u}$ 的饱和是$\mathfrak{g}$的一个幂零轨道， 它与 $\mathfrak{u}$ 相交于一个开稠密集。这样的轨道称为 Richardson 轨道。它由 $\mathfrak{p}$唯一确定。它们在 G 的表示论中发挥着重要作用， 并引起了广泛关注（例如， [22, 13, 14, 21, 16, 5]）。

回顾一下， 对于 $2n$ 或 $2n+1$ 的一个分拆， 我们可以将其与一个杨图 Q对应起来。然后， 在 Q 中移动一些方格后， 我们可以得到另一个图， 它

将给出一个特定的分拆，该分拆对应于类型 X 的幂零轨道（这里 $X = C$、D 或 B）。这个算法称为分拆 $\mathfrak{q}$ 的坍缩，记作 $\mathfrak{q}_X$。相关细节见定义 2.10。对于类型 C 和 D，我们发现，对应于类型 $(n_k;\ n_1、\cdots、n_{k-1})$ 的 Z-图的分拆 $\mathfrak{q}$，经过坍缩后，可以得到与类型为 $(n_1、\cdots、n_k)$ 的给定抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道，见定理 6.6 和 6.7。对于类型 B，我们从一个经过修改的分拆开始，它与对应于类型 $(n_k;\ n_1、\cdots、n_{k-1})$ 的 Z-图的分拆 $\mathfrak{q}$ 仅有一部分不同。最后，经过 B-坍缩后，我们也可以得到与类型为 $(n_1、\cdots、n_k)$ 的给定抛物子代数$\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道，见定理 6.4。

本文结构如下：在 §2 中，我们回顾了计算 [3, 4] 中最高权模的 Gelfand-Kirillov 维数的算法，以及 H-算法（见 [1]）；借助该算法，我们可以从多米诺型划分构造出一个特殊分拆（按 Lusztig [17] 的定义）。在 §3 中，我们先为类型为 $(n_1,\cdots,n_k)$ 的抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 定义 Z-图，然后证明类型 B 和 C 的主定理。在 §4 中，我们证明类型 D 的主定理。在 §5 中，我们给出非整合 socular 最高权模的刻画。在 §6 中，我们给出与类型为 $(n_1,\cdots,n_k)$ 的抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道的分拆的刻画。

2. Preliminaries

在证明主定理之前，我们先回顾一些关于 Gelfand-Kirillov 维数的有用结果。详见 [24] 和 [4]。

2.1. Gelfand-Kirillov 维数。设 M 是由有限维子空间 M_0 生成的 $U(\mathfrak{g})$-模（即 M 是有限生成的）。令 $U_n(\mathfrak{g})$ 为 $U(\mathfrak{g})$ 的∞标准滤过。设 $M_n = U_n(\mathfrak{g})\cdot M_0$，且 $\mathrm{gr}(M) = \bigoplus \mathrm{gr}_n M$，其中$_{n=0}\mathrm{gr}_n M = M_n/M_{n-1}$。因此，$\mathrm{gr}(M)$ 是 $\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$ $\simeq S(\mathfrak{g})$ 的分次模。

定义 2.1。 M 的 Gelfand-Kirillov 维数定义为

$$\mathrm{GKdim}\, M = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \dim(U_n(\mathfrak{g})M_0)}{\log n}.$$

容易看出，上述定义与 M_0 的选取无关。

现在设 $\mathfrak{g}$ 是一个复单李代数。我们选取一个子集 $I \subset \Delta$。该集合 I 将生成一个子系 $\Phi_I \subset \Phi$。设 $\mathfrak{p}_I$ 为与 I 对应的标准抛物子代数，其 Levi 分解为 $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \oplus \mathfrak{u}_I$。设 $F(\lambda)$ 是一个最高权为 $\lambda - \rho \in \mathfrak{h}^*$ 的有限维不可约 $\mathfrak{l}_I$-模。广义 Verma 模 $M_I(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} F(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_I}$ 中具有可能的最大 Gelfand-Kirillov 维数（若无歧义，我们将省略 I）。也就是说，GK维数$(M_I(\lambda))$ =维数$(\mathfrak{u}_I)$。

引理 2.2. 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$。假设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。则我们有

$$|\Phi_I^+| = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2.$$

引理 2.3. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$。假设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。那么我们有

$$|\Phi_I^+| = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2 - n_k & \text{if } n_k \neq 1, \\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2} n_j(n_j-1) + \frac{1}{2}(n_{k-1}+1)n_{k-1} & \text{if } n_k = 1. \end{cases}$$

因此，对于类型 B 和 C，$\dim(\mathfrak{u}) = n^2 - |\Phi_I^+|$；对于类型 D，$\dim(\mathfrak{u}) = n^2 - n - |\Phi_I^+|$。我们将这个数记为 $d_m(\mathfrak{p})$。现在，我们的问题是找出 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中所有具有最大 Gelfand-Kirillov 维数 $d_m(\mathfrak{p})$ 的简单模 $L(\lambda)$。

设 Γ 为一个全序集。我们用 $\mathrm{Seq}_n(\Gamma)$ 表示满足 $x_i \in \Gamma$ 的序列$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合。根据 Bai-Xie [4],，我们知道，对于每个 $\lambda \in \mathrm{Seq}_n(\Gamma)$，通过使用 Robinson-Schensted 插入算法，都存在一个与之对应的杨表$P(\lambda)$。我们根据 Bai-Xie [4] 回顾这一方法。记 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。令 P_0 为一个空杨表。假设我们已经构造了与 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 相关联的杨表 P_k，$0 \leq k < n$。那么 P_{k+1} 通过如下方式向 P_k 添加 λ_{k+1} 得到。首先，将 λ_{k+1} 插入 T_k 的第一行，方法是将第一行中最左边的、严格大于 λ_{k+1} 的元素 x 替换掉。（如果不存在这样的元素 x，我们只需在第一行右侧添加一个填入元素 λ_{k+1} 的方格，并结束这一过程。）然后，以相同的方式将 x 插入下一行，就像将 λ_{k+1} 插入第一行一样。接着，我们记 $P(\lambda) = P_n$。$P(\lambda)$ 的形状记为 $p(\lambda)$。我们将 $p(\lambda)$ 与对应于杨表 $P(\lambda)$ 的分拆 $\mathfrak{p}$ 等同起来。

Definition 2.4. Let $x \in \mathrm{Seq}_n(\Gamma)$. Define

$$F_b(x) := \sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{odd}} = \sum_{2\nmid i}(q_i^{\mathrm{odd}})^2 + \sum_{2|i} q_i^{\mathrm{odd}}(q_i^{\mathrm{odd}} - 1),$$
$$F_d(x) := \sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{ev}} = \sum_{2\nmid i} q_i^{\mathrm{ev}}(q_i^{\mathrm{ev}} - 1) + \sum_{2|i}(q_i^{\mathrm{ev}})^2,$$

where $p = p(x) = (p_1, p_2, \cdots)$ and $q = q(x) = p(x)^t = (q_1, q_2, \cdots)$.

For $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{Seq}_n(\Gamma)$, set

$$x^- = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n, -x_n, -x_{n-1}, \cdots, -x_2, -x_1),$$
$$^-x = (-x_n, -x_{n-1}, \cdots, -x_2, -x_1, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n).$$

命题 2.5（[3, 定理 1.5]）。设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}^*$ 是一个整权。那么

$$\mathrm{GKdim} L(\lambda) = \begin{cases} n^2 - F_b(\lambda^-) & \text{if } \Phi = B_n/C_n, \\ n^2 - n - F_d(\lambda^-) & \text{if } \Phi = D_n. \end{cases}$$

令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$。当 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数时，$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中简单模的最大 Gelfand-Kirillov 维数将为 $\dim(\mathfrak{u}) = n^2 - (\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2)$ $= n^2 - F_b(\lambda^-)$。

因此，$L(\lambda)$ 中的一个简单模 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 当且仅当 $F_b(\lambda^-) = |\Phi_I^+|$ 时是 socular 的，而这.....

$$\sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2.$$

2.2. H-算法。 对于某些李代数的魏尔群 w 中的一个元素 W，我们有一个分拆 $p(^-w)$。由于它与多米诺表 [3, 命题 4. 具有相同的形状，因此我们称之为 多米诺型分拆 。一般而言，如果一个分拆 p(杨图 P) 与某个 $p(^-w)$ 对应的图相同，其中 $w \in W$，那么也称分拆 [1] p（杨图）为多米诺型分拆（杨图）。我们回顾一下 [18] 中定义的 H-算法，它们可以将给定的多米诺型分拆与一个特殊分拆（Lusztig 意义下的特殊分拆，参见 [9]或 B），使得对于类型 C 和 D（分别为类型 D），二者具有相同的奇数格（分别为偶数格）。

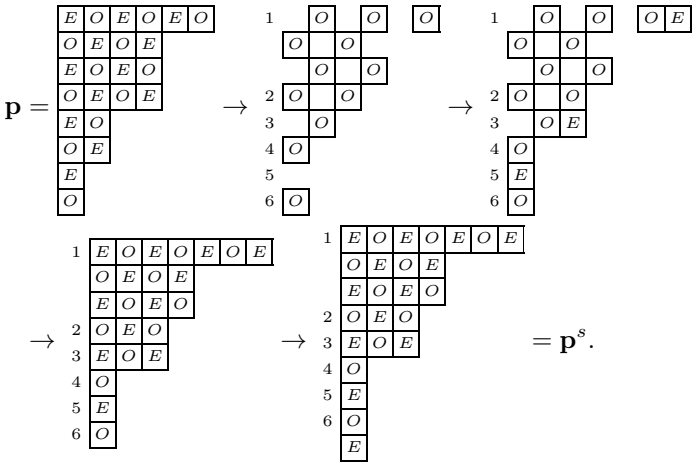
定义 2.6（B 型 H-算法）。如果 p 是一个 $2n$ 的多米诺型分拆（其杨图为 P），那么我们可以通过以下步骤得到一个 B_n 型的特殊分拆 $\mathbf{p}^s$：

(1) 构造由奇数方格组成的空心图 P^{odd}；(2) 从 1 开始对各行进行编号，但避开所有以形状 $^{O}_{O}|$ 结尾的连续行；(3) 保持偶数编号的行不变，并在每个奇数编号行的末尾添加 $\sqsubset$；(4) 填补空洞。然后，如果新杨图中只有 $2n$ 个方格，我们就在最后一行的下方添加一个方格 $_E$，至此完成。如果新杨图中有 $2n+1$ 个方格，则直接完成。

□

We call the above algorithm *H-algorithm of type B*.

Example 2.7. Let $\mathbf{p} = [6, 4^3, 2, 2, 1, 1]$ be a partition of domino type of 24. Then we have



Thus $\mathbf{p}^s = [7, 4, 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1]$ is a special partition of type B_{12}.

定义 2.8（C 型 H-算法）。如果 p 是一个多米诺型分拆（其杨图为 P）且属于 $2n$，那么我们可以通过以下步骤得到一个 C 型的特殊分拆 $\mathbf{p}^s$：

(1) 构造由奇数方格组成的空心图表 P^{odd}；(2) 从 1 开始标记各行，但跳过所有以形状 $^{O}_{O}\llcorner$ 结尾的连续行（当 P 中两个连续行具有形状 $^{E}_{O}|$ 时，这两行将不予标记）；

（3）保持奇数标记行不变，并将 $_E$ 放在每个偶数标记行的末尾；（4）填补空缺，至此完成。

We call the above algorithm *Hollow diagram algorithm* or *H-algorithm of type C*.

定义 2.9（ D类型的 H-算法）。设 $\mathbf{p}$ 为 $2n$ 的一个多米诺型分拆（其杨图为 P），则通过以下步骤，我们可以得到一个 D_n 类型的特殊分拆 $\mathbf{p}^s$：

(1) 构造由偶数方格组成的空心杨图 P^{ev}；(2) 从 1 开始对各行进行编号，但避开所有以形状 ^{E} 结尾的连续行；(3) 保持奇数编号的行不变，并在每个偶数编号行的末端添加 $\circ$；(4) 填补空缺。然后，如果新杨图中只有 $2n-1$ 个方格，则在最后一行下方添加一个方格 $_\circ$，即可完成。如果新杨图中有 $2n$ 个方格，则直接完成。

□

We call the above algorithm *H-algorithm of type D*.

给定两个整数 m 的分拆 $\mathbf{d} = [d_1, \cdots, d_k]$ 和 $\mathbf{f} = [f_1, \cdots, f_k]$，如果满足以下条件，我们称 $\mathbf{d}$ 支配 $\mathbf{f}$:

$$\sum_{1\le j\le l} d_j \ge \sum_{1\le j\le l} f_j$$

for $1 \le l \le k$.

定义 2.10（坍缩）。设 $\mathbf{d} = [d_1, \cdots, d_k]$ 是 $2n+1$ 的一个分拆。存在唯一最大的、被 $\mathbf{d}$ 支配的 B_n 类型的 $2n+1$ 分拆。如果 $\mathbf{d}$ 不是 B_n 类型的分拆，那么它的某个偶数部分必定具有奇数重数。设 q 为满足此条件的最大部分。然后，将 $\mathbf{d}$ 中 q 的最后一次出现替换为 $q-1$，并将其后第一个严格小于 $q-1$ 的部分 r 替换为 $r+1$。重复这一过程，直到得到一个 B_n 类型的分拆。这个新的 B_n 类型的分拆称为 $\mathbf{d}$ 的 B-坍缩，记作 $\mathbf{d}_B$。类似地，还可以定义 $\mathbf{d}$ 的 D-坍缩和 C-坍缩。

另一个称为扩张的概念可以计算出支配给定的类型为 X（此处 $X = B$、C 或 D）的分拆 $\mathbf{q}$ 的最小特殊分拆。这个特殊分拆记作 $\mathbf{q}^X$。

More properties for the collapse and expansion of partitions can be found in [9].

注 2.11。在坍缩和扩展过程中，对于类型 B 和 C，奇数方格保持不变（对于类型 D，偶数方格保持不变），且移动的偶数方格不能与同一行中的另一个偶数方格相遇（对于类型 D，移动的奇数方格不能与同一行中的另一个奇数方格相遇）。我们可以将这两种操作称为受限坍缩和扩展，分别记作 $\mathbf{q}_{\bar{X}}$ 和 $\mathbf{q}^{\bar{X}}$。于是，对于类型 B 和 C，$\mathbf{q}$、$\mathbf{q}_{\bar{X}}$ 和 $\mathbf{q}^{\bar{X}}$ 的奇数方格相同（对于类型 D，偶数方格相同）。当 $\mathbf{p}$ 是一个多米诺型分拆时，$H(\mathbf{p})$ 将是一个特殊分拆；对于类型 B 和 C，其奇数方格相同（对于类型 D，偶数方格相同）。因此，我们有 $H(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}_{\bar{X}})^{\bar{X}}$。

3. Proof of Theorem 1.4

在本节中，我们将证明定理1.4。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1,\ \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n,\ \mathbb{C})$ 在本节中。

Firstly, we need two lemmas.

引理 3.1. 假设 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 是一个递减的正整数序列。我们有一个函数 $f(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2$，其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in D$，满足

$$D = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_1 + m_2, \cdots, \sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j,$$
$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} m_j, x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 0\}.$$

Then f will take the minimal value $\sum_{j=1}^{k} m_j^2$ if and only if $x_j = m_j$ for all $1 \leq j \leq k$.

Proof. When f is a function of two variables, the conclusion is obvious. We assume the conclusion is true for all functions of $k-1$ variables or less.

现在我们假设 f 是 k 个变量的函数。我们记为 $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$。如果没有任何限制，该函数 f 将在点 $P_0 = (\frac{m}{k}, \cdots, \frac{m}{k})$ 处取得最小值。现在，这个问题等价于在给定平面 $\Pi: \sum_{j=1}^{k} x_j = m$ 上，寻找满足某些限制条件的所有点，使得原点到这些点的距离取得最小值 $d = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} m_j^2}$。根据条件 $x_1 \geq m_1$、$x_1 + x_2 \geq m_1 + m_2$、$\cdots$、$\sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j$、$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$，我们知道函数 f 的定义域 $D \subseteq \Pi$ 是第一象限内一个有界、连通且闭合的子集，并且 $P_0 \notin D$（除非所有整数 m_i 都相等）。因此，f 将在 D 的边界 ∂D 处取得其最小值 d^2。

When $x_1 = m_1$, we have $f(m_1, x_2, \cdots, x_k) = m_1^2 + \sum_{j=2}^{k} x_j^2$. We denote

$$f_2(x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=2}^{k} x_j^2,$$

where

$$(x_2, \cdots, x_k) \in D_2 = \{(x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1} | x_2 \geq m_2, x_2 + x_3 \geq m_2 + m_3, \cdots,$$
$$\sum_{j=2}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=2}^{k-1} m_j, \sum_{j=2}^{k} x_j = \sum_{j=2}^{k} m_j, x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_k \geq 0\}.$$

因此，f_2 是 $k-1$ 个变量的函数。根据归纳法，当且仅当对所有 $2 \leq j \leq k$，$x_j = m_j$ 成立时，f_2 才取得其最小值。因此，当且仅当对所有 $1 \leq j \leq k$，$x_j = m_j$ 成立时，f 才会在边界 $x_1 = m_1$ 处取得其最小值。

当 $x_1 + x_2 = m_1 + m_2$ 时，我们有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_1^2 + x_2^2) + \sum_{j=3}^{k} x_j^2 := g_2(x_1, x_2) + f_3(x_3, \cdots, x_k).$$

这是两个满足我们的归纳法的函数之和。当且仅当对于所有 $3 \leq j \leq k$， $x_1 = m_1$、 $x_2 = m_2$ 和 f_3 取得最小值当且仅当 $x_j = m_j$ 时， g_2 才会取得其最小值。因此，当且仅当对于所有 $1 \leq j \leq k$， $x_j = m_j$ 成立时， f 才会在边界 $x_1 + x_2 = m_1 + m_2$ 处取得其最小值。

We continue this process and finally, when $\sum_{j=1}^{k} x_j = m = \sum_{j=1}^{k} m_j$, we will have

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= x_k^2 + \sum_{j=1}^{k-1} x_j^2 \\ &= (m - \sum_{j=1}^{k-1} x_j)^2 + \sum_{j=1}^{k-1} x_j^2 \\ &:= f_k(x_1, \cdots, x_{k-1}), \end{aligned}$$

where

$$(x_1, \cdots, x_{k-1}) \in D_k = \{(x_1, \cdots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} | x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_1 + m_2, \cdots, \sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j, x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{k-1} \geq 0\}.$$

如果没有限制， 函数 f_k 将在点 $Q_0 = (\frac{m}{k}, \cdots, \frac{m}{k})$ 处取得最小值。但 $Q_0 \notin D_k$。因此， 函数 f_k 将在 D_k 的边界 ∂D_k 处取得最小值。当 $x_1 = m_1, \cdots, \sum_{j=1}^{k-2} x_j = \sum_{j=1}^{k-2} m_j$ 时， 论证与 f 的情形类似。当 $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = \sum_{j=1}^{k-1} m_j$ 时， 我们有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\sum_{j=1}^{k-1} x_j) + m_k^2 := g_{k-1} + m_k^2,$$

where g_{k-1} is a function of $k-1$ variables which satisfies our induction.

Thus we have proved our lemma.

□

假设 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 是一个整数序列。如果存在某个指标$2 \leq s \leq k-1$，使得 $m_{s-1} - 1 \geq 2m_s \geq m_{s+1}$ 和 $m_i \geq m_{i+1} (i \neq s, s-1)$， 则称序列 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 为一个指标为s的“几乎”降序序列。

引理 3.2. 假设 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 是一个指标为 s 的“几乎”递减序列。对于 $1 \leq t \leq k$， 记 $h_t := \sum m_j$。我们定义一个函数$1 \leq j \leq t$

$$f(x_1, \cdots, x_k) := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq k, j \neq s} x_j(x_j - 1) + x_s^2,$$

其中（x_1， x_2， $\cdots$， x_k） $\in D$ 与

$$D = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k | x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_1 + m_2, \cdots, \sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j, \sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} m_j, x_i \geq x_{i+1} (i \neq s, i+1 \neq s),$$

$$x_{s-1} - 1 \geq 2x_s \geq x_{s+1}\}.$$

当且仅当$1\leq j\leq k,\ j\neq s x_j = m_j$ 对所有 $1 \leq j \leq k$成立时， f 将取最小值 $\frac{1}{2} \sum m_j(m_j - 1) + m_s^2$。

Proof. When f is a function of two variables, the conclusion is obvious. We assume that the conclusion is true for all functions of $k-1$ variables or less.

Now we assume that f is a function of k variables. Note that $h_k = \sum\limits_{1\leq j\leq k} m_j = \sum\limits_{1\leq j\leq k} x_j$.

If $s \neq k$, we have

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_k) =& \frac{1}{2} \sum_{1\leq j\leq k, j\neq s} x_j(x_j - 1) + x_s^2 \\ =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} x_j^2 + \frac{1}{2}x_s^2 + \frac{1}{2}x_s + \frac{1}{2}(h_k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j)^2 - \frac{1}{2}h_k \\ :=& g(x_1, \cdots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} g_s := \frac{\partial g}{\partial x_s} =& 2x_s + \frac{1}{2} - (h_k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j) = 2x_s + \frac{1}{2} - x_k > 0, \\ g_i := \frac{\partial g}{\partial x_i} =& x_i - (h_k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j) = x_i - x_k \geq 0, (i \neq s). \end{aligned}$$

Thus we have

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_k) =& g(x_1, \cdots, x_{k-1}) \\ \geq& g(x_1, \cdots, x_{k-2}, h_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-2} x_j) \\ =& f(x_1, \cdots, x_{k-2}, h_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-2} x_j, m_k). \end{aligned}$$

当且仅当 $x_{k-1} = h_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-2} x_j$ 时，等价于 $x_k = m_k$。因此，由归纳法可得 $f(x_1, \cdots, x_{k-2}, h_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-2} x_j, m_k) \geq f(m_1, \cdots, m_k)$，且当且仅当对所有 $1 \leq i \leq k-2$， $x_i = m_i$ 成立时，等式成立。因此，$f(x_1, \cdots, x_k) \geq f(m_1, \cdots, m_k)$，且当且仅当对所有 $1 \leq i \leq k$， $x_i = m_i$ 成立时，等式成立。

如果 $s = k$，类似地，根据引理 3.1 以及归纳法假设，我们可以证明 $f(x_1, \cdots, x_k) \geq f(m_1, \cdots, m_k)$，且等号成立当且仅当 $x_i = m_i$对所有 $1 \leq i \leq k$均成立。

由此，我们证明了该引理。

□

我们使用 A 表示由两个相邻方格组成的垂直矩形，并用B 表示由两个相邻方格组成的水平矩形，分别称为A-多米诺骨牌和 B-多米诺骨牌。

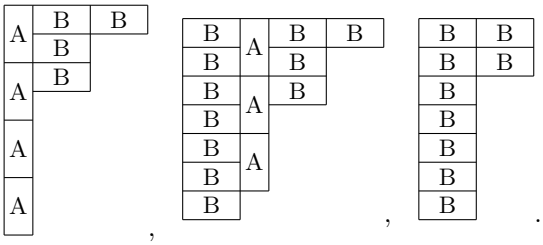
Definition 3.3 (Z-diagram)**.** We construct a Z-diagram of type $(a_0; b_1, \cdots, b_{k-1})$ by the following steps:

(1) 将 b_i B 多米诺骨牌放入两列中，并将此图记为 A_i for$1 \leq i \leq k-1$；(2) 将 a_0 A 多米诺骨牌放入一列中，并将此图记为 A_k；(3) 重新排列这些图，使其按列高递减；(4) 将这些图组合起来，构造一个多米诺型分拆。

The above diagram is called a *Z-diagram of type* $(a_0; b_1, \cdots, b_{k-1})$.

It is clear that a Z-diagram gives us a domino type partition.

例 3.4. 以下分别是类型为 (4;1, 3)、(3;3, 7, 1) 和 (0;2, 7) 的 Z-图：



In a Z-diagram, it is obvious that the subdiagram consisting of A-dominoes always lies in an odd column.

Lemma 3.5. *Suppose P is a Z-diagram type of $(a_0; b_1, \cdots, b_{k-1})$. Then we have*

$$F_b(P) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_i b_i(b_i - 1),$$
$$F_d(P) = a_0^2 - a_0 + \frac{1}{2}\sum_i b_i(b_i - 1).$$

Proof. Recall in Definition 2.4, we have

$$F_b(x) := \sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{odd}} = \sum_{2\nmid i}(q_i^{\mathrm{odd}})^2 + \sum_{2|i} q_i^{\mathrm{odd}}(q_i^{\mathrm{odd}} - 1),$$
$$F_d(x) := \sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{ev}} = \sum_{2\nmid i} q_i^{\mathrm{ev}}(q_i^{\mathrm{ev}} - 1) + \sum_{2|i}(q_i^{\mathrm{ev}})^2,$$

其中， $p = p(x) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 是使用 R-S 算法得到的杨表 $P(x)$ 的形状。因此， $F_b(x)$ 和 $F_d(x)$ 仅取决于杨表 $P(x)$ 的形状。因此，我们也可以类似地为杨表 T 定义 $F_b(T)$。

现在， P是一个类型为（a_0； $b_1, \cdots, b_{k-1}$）的 Z-图。我们可以将其视为一个形状为 $p = (p_1, .., p_k)$ 的杨图，其中 $p^t = (a_0', b_1', b_1', b_2', b_2', .., b_{k-1}', b_{k-1}')$，并且

$(a'_0, b'_1, b'_2, .., b'_{k-1})$ 是序列 $(a_0, b_1, b_2, .., b_{k-1})$ 按降序排列后的结果。我们用 $F_b(P|_Q)$ 表示 $F_b(P)$ 中子图 Q 的值。类似地，表示 $F_d(P|_Q)$。

注意，子图 A_k 含有 a_0 个奇数方格、 a_0 个偶数方格，并且始终位于奇数列中。因此， $F_b(P|_{A_k}) = a_0^2$且 $F_d(P|_{A_k}) = a_0^2 - a_0$。

子图 A_i $(i \neq k)$ 有 b_i 个奇数方格和 b_i 个偶数方格，并且 A_i 总是位于一个奇数列和一个偶数列中。因此，我们有 $F_b(P|_{A_i}) = \frac{1}{2}b_i(b_i - 1) = F_d(P|_{A_i})$。

Sum up these results, we have proved the result. □

推论 3.6. 假设 $p = (p_1, \cdots, p_N)$ 是类型为 $(n_k; n_1, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图 P 的形状，使得

$$p^t = (m_1, m_1, m_2, m_2, \cdots, m_{s-1}, m_{s-1,}, 2m_s, m_{s+1}, m_{s+1}, \cdots, m_k, m_k).$$

Here $(m_1, \cdots, m_k)$ *is the arrangement of the sequence* $(n_1, n_2, .., n_k)$ *in descending order and* $m_s = n_k$. *Then we have*

$$p^{\mathrm{odd}} = (\left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil, \cdots, \left\lfloor \frac{m_{s-1}}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m_{s-1}}{2} \right\rceil, m_s, \left\lceil \frac{m_{s+1}}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m_{s+1}}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m_k}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor)$$

and

$$p^{\mathrm{ev}} = (\left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor, \cdots, \left\lceil \frac{m_{s-1}}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m_{s-1}}{2} \right\rfloor, m_s, \left\lfloor \frac{m_{s+1}}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m_{s+1}}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{m_k}{2} \right\rceil).$$

引理 3.7. 设 P_1 是一个类型为 $(a_0; b_1, \cdots, b_{k-1})$ 的 Z-图，且 P_2 是一个类型为 $(a_0; c_1, \cdots, c_{k-1})$ 的 Z-图。那么，当且仅当存在某个 $\sigma \in S_{k-1}$，使得对于 $1 \leq i \leq k-1$， $c_i = \sigma(b_i)$ 成立时，有 $P_1 = P_2$。

证明。 $k = 2$ 的情形显然。由 Z-图的构造可知，$(c_1, \cdots, c_{k-1})$ 是 $(b_1, \cdots, b_{k-1})$ 的一种排列，因此该结论显然成立。□

假设 $\Phi = B_n/C_n/D_n$ 且 λ 是一个整权。那么根据 [1], 我们知道，杨表的形状 $p = p(\lambda^-)$ 给出了一个多米诺型分拆。通过使用 H-算法，我们可以从这个杨表 $P(\lambda^-)$ 中得到一个特殊分拆。

引理 3.8. 设 A 是一个具有两列的多米诺型杨图，且c_i（或A）表示 A的第 i列中的方格数。则当 c_1（A） $+ c_2$（A） $= 2m$ 为定值时， F_b（A）是关于 c_2（A）的递减函数。当且仅当 c_2（A） $= c_1$（A）或 c_2（A） $= c_1$（A） -2时，它取得最小值$\frac{1}{2}m$（$m-1$）。

证明。回想一下， $F_b(x) = \sum_{2\nmid i}(q_i^{\mathrm{odd}})^2 + \sum_{2|i} q_i^{\mathrm{odd}}(q_i^{\mathrm{odd}} - 1)$。由于 A 是一个具有两列的杨图，我们可以写成

$$F_b(A) = (c_1^{\mathrm{odd}})^2 + c_2^{\mathrm{odd}}(c_2^{\mathrm{odd}} - 1) := F(c_1, c_2) = F(n - c_2, c_2) = f(c_2).$$

当我们将 A 第一列中的一个方格移至第二列时，我们将¯得到一个新的杨图 A。因此， $\bar{c}_1 = c_1 - 1$和 $\bar{c}_2 = c_2 + 1$。由于 A是一个多米诺型杨图，存在以下两种可能:

- $\bar{c}_1^{\mathrm{odd}} = c_1^{\mathrm{odd}}$, $\bar{c}_2^{\mathrm{odd}} = c_2^{\mathrm{odd}}$;
- $\bar{c}_1^{\mathrm{odd}} = c_1^{\mathrm{odd}} - 1$, $\bar{c}_2^{\mathrm{odd}} = c_2^{\mathrm{odd}} + 1$.

在第二种情况下，我们有 $c_1^{\mathrm{odd}} \geq c_2^{\mathrm{odd}} + 1$。因此我们有

$$\begin{aligned} f(\bar{c}_2) &= (\bar{c}_1^{\mathrm{odd}})^2 + \bar{c}_2^{\mathrm{odd}}(\bar{c}_2^{\mathrm{odd}} - 1) \\ &= (c_1^{\mathrm{odd}} - 1)^2 + (c_2^{\mathrm{odd}} + 1)c_2^{\mathrm{odd}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (c_1^{\mathrm{odd}})^2 + c_2^{\mathrm{odd}}(c_2^{\mathrm{odd}} - 1) + (-2c_1^{\mathrm{odd}} + 1 + 2c_2^{\mathrm{odd}})\\ &\leq f(c_2) + (-2c_2^{\mathrm{odd}} - 2 + 1 + 2c_2^{\mathrm{odd}})\\ &= f(c_2) - 1\\ &< f(c_2).\end{aligned}$$

这就完成了证明。

□

假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。假设 $L(\lambda) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 是一个整最高权模。记 c_i 为 $P(\lambda)$ 的第 i 列中的元素个数。如果序列 $(c_1, .., c_k)$ 是序列 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 按降序排列得到的排列，则称 λ 为类型 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的极大标准权。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ 时，我们可以将 λ^- 视为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$ 中对应于类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}, 2n_k, n_{k-1}, \cdots, n_1)$（若 $n_k > 0$）或类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}, 0, 0, n_{k-1}, \cdots, n_1)$（若 $n_k = 0$）的标准抛物子代数的一个权。类似地，如果 λ^- 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}, 2n_k, n_{k-1}, \cdots, n_1)$（若 $n_k > 0$）或类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}, 0, 0, n_{k-1}, \cdots, n_1)$（若 $n_k = 0$）的极大标准权，则称 λ 为类型 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的极大标准权。

引理 3.9（类型 B 和 C 的唯一性）。假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。假设 $L(\lambda) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 是一个整最高权模。当且仅当 λ 是类型 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的极大标准权时，数值 $F_b(\lambda^-)$ 将取得最小值 $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j - 1) + n_k^2$。换言之，当 $F_b(\lambda^-)$ 取得最小值时，$P(\lambda^-)^{\mathrm{odd}}$ 是唯一的。

Proof. Since $L(\lambda) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$, in λ^-, for each n_i we have two decreasing subsequences

$$(\lambda_{n_{i-1}+1}, \lambda_{n_{i-1}+2}, \cdots, \lambda_{n_{i-1}+n_i})$$

which is denoted by str_i^+, and

$$(-\lambda_{n_{i-1}+n_i}, -\lambda_{n_{i-1}+n_i-1}, \cdots, -\lambda_{n_{i-1}+1})$$

which is denoted by str_i^-.

我们将 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 按“几乎”降序排列，得到一个序列 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$，其中 $m_s = n_k$, $m_{s-1} - 1 \geq 2m_s \geq m_{s+1}$ 和 $m_i \geq m_{i+1}$（如果 $i \neq s, s-1$）。显然，每个 m_i 都等于某个 n_{j_0}。我们称其为 n_{j_i}。它对应于两个递减子序列 $str_{j_i}^+$ 和 $str_{j_i}^-$。如果 $n_{j_s} = n_k > 0$，那么子序列 $(str_{j_s}^+, str_{j_s}^-)$ 将是一个递减子序列。

Now we construct $P(\lambda^-)$, and we only focus on odd boxes.

步骤 1。我们构造一个与 $m_1 = n_{j_1}$ 对应的杨表 Y_1。实际上，我们选择子序列 $(str_{j_1}^+, str_{j_1}^-)$ 来构造杨表 Y_1。然后我们发现 Y_1 中有 m_1 个奇数方格。如果 $s = 1$，杨表 Y_1 只包含一列。如果 $s \neq 1$，杨表 Y_1 至多包含两列。Y_1 中有 m_1 个奇数方格。我们将与 Y_1 对应的列记为 Area S_1。

第 2 步。我们继续构造与 $m_2 = n_{j_2}$ 对应的杨表。根据 λ^- 中的原始顺序，将 $str_{j_2}^+$ 和 $str_{j_2}^-$ 插入子序列（$str_{j_1}^+$, $str_{j_1}^-$）中，随后新的子序列将生成一个新的杨表 Y_2。我们发现 Y_2 中有 $m_1 + m_2$ 个奇数方格。与之比较。

Y_1，我们在 Y_2 中得到了一些新列，并将它们记为区域 S_2。随着一些新元素的加入，新的区域 S_1 中可能会出现更多奇数方格。

Step 3. Similarly, we continue these steps to m_k. Then We have constructed $P(\lambda^-)$.

我们用 x_i 表示 $P(\lambda^-)$ 的区域 S_i 中奇数方格的数量。注意，当区域 S_s 非空时，它只包含一列，而其他区域包含两列。根据构造 $P(\lambda^-)$ 的步骤，我们发现，

$$x_1 \geq m_1, x_1 + x_2 \geq m_1 + m_2, \cdots, \sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} m_j, x_i \geq x_{i+1} (i \neq s, s-1), x_{s-1} - 1 \geq 2x_s \geq x_{s+1}.$$

By Lemma 3.8, the Area S_i $(i \neq s)$ will contain two columns if we want the value of $F_b(\lambda^-)$ to be as small as possible.

Then by Lemma 3.2 and Lemma 3.8, $F_b(\lambda^-)$ will take the minimal value

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j - 1) + n_k^2$$

if and only if $x_i = m_i$ for all $1 \leq i \leq k$. Thus, the numbers of odd boxes in different areas are fixed.

This finishes the proof.

□

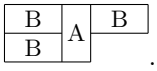
在引理 3.9中，我们构造了一个杨表 $P(\lambda^-)$，其奇数杨表$P(\lambda^-)^{\text{odd}}$ 在 $F_b(\lambda^-)$ 取最小值时是唯一的。事实上，我们可以构造一个 Z-图，使其具有与 $P(\lambda^-)^{\text{odd}}$ 相同的奇数方格。

定理 3.10. 假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$。令 $\mathfrak{p}$ 为类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的标准抛物子代数。假设 $L(\lambda) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 是一个整最高权模。当 $F_b(\lambda^-)$ 取最小值时，类型为 $(n_k; n_1, n_2, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图 P与奇数杨表 $P(\lambda^-)^{\text{odd}}$ 具有相同的奇数方格。

证明。 根据引理 3.5，我们知道 $F_b(P) = F_b(\lambda^-)$。因此，由于 3.9 中的引理可知 $P(\lambda^-)^{\text{odd}}$ 是唯一的，故结论成立。 □

Now we have proved the main Theorem 1.4 for types B and C.

例 3.11. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(9, \mathbb{C})$。假设 $\Delta \setminus I = \{\alpha_2, \alpha_3\}$。则相应的抛物子代数 $\mathfrak{p}_I$ 是一个类型为 (2,1,1) 的标准抛物子代数。根据定理 1.4，简单整最高权模 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与以下类型为 (1; 2, 1) 的 Z-图具有相同的奇数方格:



.

The shape of $P(\lambda^-)^{\text{odd}}$ is $p(\lambda^-)^{\text{odd}} = p^{\text{odd}} = (2, 2)$, where p is the shape of the Z-diagram P.

现在假设 $\lambda = (-5, -6, -4, 2) \in \mathfrak{h}^*$。那么， $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的。我们可以验证， $P(\lambda^-)$ 与类型为 (1; 2, 1) 的 Z-图 P具有相同的奇数方格。

事实上，由于 $\lambda^- = (-5,-6,-4,2,-2,4,6,5)$，并且根据 R-S 算法，我们有

$$\begin{array}{|c|}\hline -6\\\hline -5\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline -6 & -4 & 2\\\hline -5\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline -6 & -4 & -2\\\hline -5 & 2\\\cline{1-2}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -6 & -4 & -2 & 4 & 6\\\hline -5 & 2\\\cline{1-2}\end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -6 & -4 & -2 & 4 & 5\\\hline -5 & 2 & 6\\\cline{1-3}\end{array} = P(\lambda^-).$$

4. Proof of Theorem 1.5

在本节中，令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型为（n_1, n_2, $\cdots$, n_k）的标准抛物子代数（$n_k \neq 1$）。根据命题 2.5, $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中简单模的最大 Gelfand-Kirillov 维数为

$$d_m(\mathfrak{p}) = n^2 - n - (\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2 - n_k) = n^2 - n - F_d(\lambda^-).$$

So a simple module $L(\lambda)$ in $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ is socular if and only if

$$F_d(\lambda^-) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2 - n_k,$$

which is

$$\sum_{i\geq 1}(i-1)p_i^{\mathrm{ev}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2 - n_k.$$

引理 4.1. 假设 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 是一个整数序列，其中 $m_{s-1} \geq 2m_s \geq m_{s+1}+1$ 且 $m_i \geq m_{i+1}(i \neq s, s-1)$。我们称 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 为近似降序排列。记 $h_t := \sum_{1\leq j\leq t} m_j$。我们定义一个函数

$$f(x_1, \cdots, x_k) := \frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq k, j\neq s} x_j(x_j-1) + x_s^2 - x^s,$$

where $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in D$ *with*

$$D = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \geq m_1, x_1+x_2 \geq m_1+m_2, \cdots, \sum_{j=1}^{k-1} x_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} m_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} m_j, x_i \geq x_{i+1}(i \neq s, s-1),$$

$$x_{s-1} \geq 2x_s \geq x_{s+1}+1\}.$$

那么，当且仅当，对于所有 $1 \leq j \leq k$, f 将取最小值 $\frac{1}{2}\sum m_j(m_j-1) + m_s^2 - m_s$。

证明。 与引理 3.2的证明类似。 □

由于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$，我们可以将 λ^- 视为对应于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$ 中以下类型的标准抛物子代数的权：类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},2n_k,n_{k-1},\cdots,n_1)$（如果 $n_k>0$ 和 $\lambda_n>0$），或类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},2n_k-1,1,n_{k-1},\cdots,n_1)$（如果 $n_k>0$ 和 $\lambda_n\leq 0$），或类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},0,0,n_{k-1},\cdots,n_1)$（如果 $n_k=0$）。类似地，如果 λ^- 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$ 中是类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},2n_k,n_{k-1},\cdots,n_1)$ 的极大标准权（如果 $n_k>0$ 和 $\lambda_n>0$），或类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},2n_k-1,1,n_{k-1},\cdots,n_1)$ 的极大标准权（如果 $n_k>0$ 和 $\lambda_n\leq 0$），或类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},0,0,n_{k-1},\cdots,n_1)$ 的极大标准权（如果 $n_k=0$），则称 λ 是类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的极大标准权。

引理 4.2（类型 D 的唯一性）。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 为类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ ($n_k\neq 1$) 的标准抛物子代数。假设 $L(\lambda)\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 是一个整最高权模。数值 $F_d(\lambda^-)$ 将取到最小值$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}n_j(n_j-1)+n_k^2-n_k$，当且仅当 λ 是类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的极大标准权。换言之，当 $F_d(\lambda^-)$ 取到最小值时，$P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ 是唯一的。

Proof. The proof of this case is similar to that in types B and C. However, we have to focus on even boxes rather than odd boxes.

我们将 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 按照"几乎"降序排列，得到一个序列 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$，其中 $m_s=n_k$, $m_{s-1}\geq 2m_s\geq m_{s+1}+1$ 和 $m_i\geq m_{i+1}(i\neq s,s-1)$。显然，$m_i$ 等于某个 n_j。我们称其为 n_{j_i}。它对应于两个递减子序列 $str_{j_i}^+$ 和 $str_{j_i}^-$。

Now we construct $P(\lambda^-)$, and we only focus on even boxes.

步骤 1. 我们构造一个与 $m_1=n_{j_1}$ 对应的杨表 Y_1。实际上，我们选取子序列 $(str_{j_1}^+,str_{j_1}^-)$ 来构造杨表 Y_1。然后我们发现 Y_1 中有 m_1 个偶数方格。若 $s=1$，则杨表 Y_1 仅包含一列或两列，且具有 $c_2(Y_1)=1$。我们将 Y_1 中的第一列记为区域 S_1。若 $s\neq 1$，则杨表 Y_1 至多有两列。Y_1 中有 m_1 个偶数方格。我们将与 Y_1 对应的列记为区域 S_1。

步骤 2. 我们继续构造与 $m_2=n_{j_2}$ 对应的方格的杨表。按照 λ^- 中的原始顺序，将 $str_{j_2}^+$ 和 $str_{j_2}^-$ 插入子序列 $(str_{j_1}^+,str_{j_1}^-)$，然后新的子序列将生成一个新的杨表 Y_2。我们发现 Y_2 中有 m_1+m_2 个偶数方格。与区域 S_1 相比，我们在 Y_2 中得到了一些其他列（可能出现 $c_4(Y_2)=1$ 的情况）。如果 $c_4(Y_2)=0$，我们用区域 S_2 表示这些新列；如果 $c_4(Y_2)>0$，则用区域 S_2 表示前两个新列。随着一些新元素的加入，新的区域 S_1 中可能会出现更多偶数方格。

Step 3. Similarly, we continue these steps to m_k. Then We have constructed $P(\lambda^-)$.

我们用 x_i 表示 $P(\lambda^-)$ 的区域 S_i 中偶数方格的数量。注意，当区域 S_s 非空时，它仅包含一列含有偶数方格的列，而其他区域均包含两列。根据构造 $P(\lambda^-)$ 的步骤，我们发现，

$$x_1\geq m_1, x_1+x_2\geq m_1+m_2,\cdots,\sum_{j=1}^{k-1}x_j\geq\sum_{j=1}^{k-1}m_j,$$
$$\sum_{j=1}^{k}x_j=\sum_{j=1}^{k}m_j, x_i\geq x_{i+1}(i\neq s,s-1), x_{s-1}\geq 2x_s\geq x_{s+1}+1.$$

根据引理 3.8，区域 S_i $(i \neq s)$ 将包含两列，以使 $F_d(\lambda^-)$ 的值尽可能小。

Then by Lemma 4.1 and Lemma 3.8, $F_d(\lambda^-)$ will take the minimal value

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n_j(n_j-1) + n_k^2 - n_k$$

if and only if $x_i = m_i$ for all $1 \leq i \leq k$. Thus, the numbers of even boxes in different areas are fixed.

This finishes the proof. □

在引理 4.2中，我们构造了一个杨表 $P(\lambda^-)$，其偶数杨表$P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ 在 $F_d(\lambda^-)$ 取最小值时是唯一的。事实上，我们可以构造一个与 $P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ 具有相同偶数方格的 Z-图。

定理 4.3. 假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是一个类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ $(n_k \neq 1)$ 的标准抛物子代数。假设 $L(\lambda) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 是一个整最高权模。当 $F_d(\lambda^-)$ 取最小值时，类型为 $(n_k; n_1, n_2, \cdots, n_{k-1})$ 的 Z-图 P 与偶数杨表 $P(\lambda^-)^{\mathrm{odd}}$ 具有相同的偶数方格。

证明。 根据引理 3.5，我们知道 $F_d(P) = F_d(\lambda^-)$。因此，由于 引理 4.2 且 $P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ 是唯一的，结论得证。 □

回想一下， $n_k = 1$ 的情形可以归结为 $n_k = 0$的情形，因此这里没有必要对此进行讨论。由此，我们证明了类型 D的主定理1.5 。

例 4.4. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(10, \mathbb{C})$。假设 $\Delta \setminus I = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}$。那么，相应的抛物子代数 $\mathfrak{p}_I$ 是一个类型为 (1,2,2,0) 的标准抛物子代数。根据定理 1.5，简单整最高权模 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$，当且仅当 $P(\lambda^-)$ 具有与下列类型为 $(0; 1, 2, 2)$ 的 Z-图相同的偶数方格:

B	B	B
B	B	

.

The shape of $P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ is $p(\lambda^-)^{\mathrm{ev}} = p^{\mathrm{ev}} = (3, 2)$, where p is the shape of the Z-diagram P.

现在假设 $\lambda = (-6, -4, -5, -2, -3) \in \mathfrak{h}^*$。那么 $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的。我们可以验证， $P(\lambda^-)$ 与类型为 (0; 1, 2, 2) 的 Z-图 P 具有相同的偶数方格。事实上，由于 $\lambda^- = (-6, -4, -5, -2, -3, 3, 2, 5, 4, 6)$，根据 R-S 算法，我们有

$$\begin{array}{|c|c|}\hline -6&-4\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline -6&-5&-2\\\hline -4\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline -6&-5&-3\\\hline -4&-2\\\cline{1-2}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -6&-5&-3&3\\\hline -4&-2\\\cline{1-2}\end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -6&-5&-3&2\\\hline -4&-2&3\\\cline{1-3}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -6&-5&-3&2&5\\\hline -4&-2&3\\\cline{1-3}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -6&-5&-3&2&4\\\hline -4&-2&3&5\\\cline{1-4}\end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline -6&-5&-3&2&4&6\\\hline -4&-2&3&5\\\cline{1-4}\end{array} = P(\lambda^-).$$

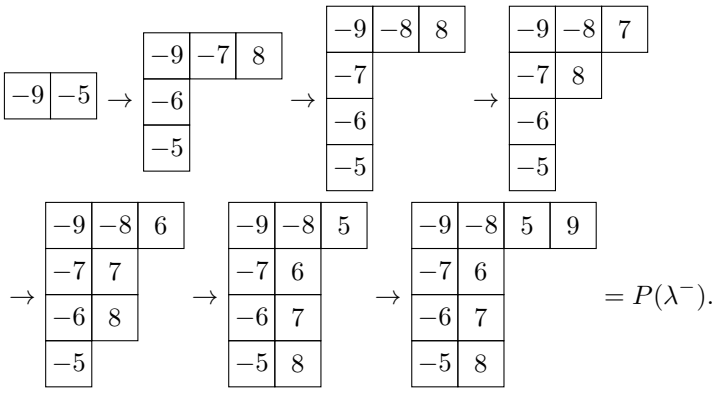
例 4.5. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$。假设 $\Delta\setminus I=\{\alpha_1,\alpha_4\}$。那么，相应的抛物子代数 $\mathfrak{p}_I$ 是一个类型为 (1,3,1) 的标准抛物子代数。我们可以将其视为一个类型为 (1,4,0) 的标准抛物子代数。根据定理 1.5，简单整最高权模 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$，当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与下列类型为 (0; 1, 4) 的 Z-图 P具有相同的偶数方格时，才是 socular 模块:

B	B
B	
B	
B	

.

$P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$ 的形状为 $p(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}=p^{\mathrm{ev}}=$(2, 1, 1, 1)，其中 p 是 Z-图 P的形状。

现在假设 $\lambda=(-9,-5,-6,-7,8)\in\mathfrak{h}^*$。那么 $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular。我们可以验证， $P(\lambda^-)$ 与类型为 (0; 1, 4) 的 Z-图 P具有相同的偶数方格。事实上，由于 $\lambda^-=(-9,-5,-6,-7,8,-8,7,6,5,9)$，并根据 R-S 算法，我们有



5. The non-integral case

令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是一个大小为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的抛物子代数，其中 $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ 是对应的、大小为 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 的递减抛物子代数。当权 $\lambda\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 非整数时，根据 Bai-Xie [4], ，我们可以将一些杨表与 λ 关联起来。对于任意 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，我们记 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。令 $P(\lambda)$ 为如下杨表的集合。设 λ_Y: $\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_r}$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 的一个极大子序列，使得 λ_{i_k}, $1\le k\le r$ 关于 $\mathbb{Z}$ 彼此同余。于是，令 $P(\lambda_Y)$ 为通过对 λ_Y 使用 R-S 算法得到的杨表，它是 $P(\lambda)$ 中的一个杨表。

现在，我们将这些杨表组合起来，通过将其他杨表的列插入第一个杨表中，使其构成一个更大的杨表 ¯tableau $P(\lambda)$，从而使 $c_i(P(\lambda))$ 对于 $1\le i\le k$ 是递减的。换句话说，杨表 $\bar{P}(\lambda)=\underset{P(\lambda_Y}{\overset{c}{\sqcup}})\in P(\lambda)P(\lambda_Y)$。这里， $P_1\overset{c}{\sqcup}P_2$ 表示一个杨表，其非零列长度的多重集等于两个杨表 P_1 和 P_2 的并集。

Then from Theorem 1.3, we have the following theorem and corollary.

定理 5.1. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的抛物子代数。¯当且仅当 $c_i(P(\lambda))=$时， $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的非整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular。

<escape>m_i</escape>对于 <escape>$1 \leq i \leq k$</escape>，其中 <escape>$(m_1, \cdots, m_k)$</escape> 是序列 <escape>$(n_1, n_2, .., n_k)$</escape> 按降序排列后得到的排列。

推论 5.2. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 的抛物子代数。抛物范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的非整最高权模 $L(\lambda)$ 是 socular 的，当且仅当我们将 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 划分为若干个子序列，使得每个子序列中的任意两个元素之差都是整数，并且 λ 在每个子序列上的限制都是相应抛物范畴中的 socular 权。

对于类型 B_n、C_n 和 D_n，令 $[\lambda]$ 为 λ 的所有极大子序列 x 的集合，使得 x 中任意两个元素的差或和都是整数。在这种情况下，我们令 $[\lambda]_1$（分别为 $[\lambda]_2$）为 $[\lambda]$ 的子集，其中包含所有元素均属于 $\mathbb{Z}$（分别为 $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$）的序列。我们令 $[\lambda]_{1,2} = [\lambda]_1 \cup [\lambda]_2$，$[\lambda]_3 = [\lambda] \setminus [\lambda]_{1,2}$。由于 $[\lambda]_1$ 和 $[\lambda]_2$ 中至多各有一个元素，我们将它们分别记为 $(\lambda)_{(0)}$ 和 $(\lambda)_{(\frac{1}{2})}$。

令 $x = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots \lambda_{i_r}) \in [\lambda]_3$。令 $y = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_p})$ 为 x 的最大子序列，使得 $j_1 = i_1$，且 y 中任意两个元素之差均为整数。令 $z = (\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \cdots, \lambda_{k_q})$ 为从 x 中删除 y 后得到的子序列，该子序列可能为空。定义

$$\tilde{x} = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_p}, -\lambda_{k_q}, -\lambda_{k_{q-1}}, \cdots, -\lambda_{k_1}).$$

For $\lambda_Y \in (\lambda)_{(0)} \cup (\lambda)_{(\frac{1}{2})}$, we can get a Young tableau $P(\lambda_Y^-)$.
We define

$$F_a(x) = \sum_{j \geq 1} \frac{c_j(c_j - 1)}{2} = \sum_{k \geq 1} (k-1) p_k,$$

其中，$p(x) = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ 是杨表 $P(x)$ 的形状，且 $p(x)^t = (c_1, \cdots, c_K)$。

命题 5.3 ([4, 定理 4。6] 和 [3, 定理 5。7])。的 GK 维数$L(\lambda)$ 可按如下方式计算。

(1) *If* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$,

$$\mathrm{GKdim} L(\lambda) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{x \in [\lambda]} F_a(x).$$

(2) *If* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$,

$$\mathrm{GKdim} L(\lambda) = n^2 - F_b((\lambda)^-_{(0)}) - F_d((\lambda)^-_{(\frac{1}{2})}) - \sum_{x \in [\lambda]_3} F_a(\tilde{x}).$$

(3) *If* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$,

$$\mathrm{GKdim} L(\lambda) = n^2 - F_b((\lambda)^-_{(0)}) - F_b((\lambda)^-_{(\frac{1}{2})}) - \sum_{x \in [\lambda]_3} F_a(\tilde{x}).$$

(4) *If* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$,

$$\mathrm{GKdim} L(\lambda) = n^2 - n - F_d((\lambda)^-_{(0)}) - F_d((\lambda)^-_{(\frac{1}{2})}) - \sum_{x \in [\lambda]_3} F_a(\tilde{x}).$$

<escape>根据上述命题5.3，我们可以看出，非整最高权模 $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的，当且仅当 GK维数F求和中的所有函数‘$L(\lambda)$ 都取最小值。</escape>

Thus similar to type A, we have the following result.

推论 5.4。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$、 $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 为类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的抛物子代数。非整最高权模 $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的，当且仅当 $(\lambda)^{(0)}$，$(\lambda)^{(\frac{1}{2})}$ 且所有 $\tilde{x}$（其中 $x\in[\lambda]_3$）都是相应抛物范畴中的 socular 整权。

6. Richardson orbits associated to parabolic subalgebras

本节将给出与类型为（n_1， n_2， $\cdots$， n_k）的标准抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$ 的分拆类型。我们用 $\mathrm{p}=[p_1,\cdots,p_k]$ 表示整数 n的一个分拆。

首先回顾一些关于经典型幂零轨道的结果。相关细节可见[9]。

命题 6.1（[9, 定理 5.1.2、5.1.3 和 5.1.4 以及命题 6.3.7]）。经典型的幂零轨道可以如下对应于某些分拆:

(1) $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$中的幂零轨道与 $2n+1$ 的分拆集合一一对应，其中偶数部分出现的重数均为偶数。类型为 B 的分拆 q 是特殊的，当且仅当其对偶分拆 q^t 是类型为 B的分拆。(2) $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$中的幂零轨道与 $2n$ 的分拆集合一一对应，其中奇数部分出现的重数均为偶数。类型为 C 的分拆 q 是特殊的，当且仅当其对偶分拆 q^t 是类型为 C的分拆。(3) $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$中的幂零轨道与 $2n$的分拆集合一一对应，其中偶数部分出现的重数均为偶数，但每个“非常偶”的分拆 d（仅由偶数部分组成）对应两个轨道，记为 $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}^{I}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}^{II}$。类型为 D 的分拆 q 是特殊的，当且仅当其对偶分拆 q^t 是类型为 C的分拆。

命题 6.2（[16, Page 41] 和 [9, Page 118]）。与类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的标准抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$ 是唯一的且是特殊的。我们有 $\dim\mathcal{O}=2\dim(\mathfrak{u})$。

定理 6.3. 假设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 为类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的标准抛物子代数。与 $\mathfrak{p}$相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$具有分拆 $\mathrm{p}=[m_1,\cdots,m_k]^t$，其中 $(m_1,\cdots,m_k)$ 是序列 $(n_1,n_2,..,n_k)$ 按降序排列后得到的排列。

Proof. See [9, Theorem 7.2.3]. □

定理 6.4. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$。令 $\mathfrak{p}$ 为类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的标准抛物子代数。与 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$ 具有如下分拆。

$$\mathrm{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_{2m_s},p_{2m_s+1}+1,p_{2m_s+2},\cdots,p_N]_B,$$

其中，$p=(p_1,\cdots,p_N)$ 是类型为 $(n_k;\ n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的 Z-图 P 的形状，因此

$$p^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{s-1},m_{s-1},,2m_s,m_{s+1},m_{s+1},\cdots,m_k,m_k).$$

Here $(m_1,\cdots,m_k)$ is the arrangement of the sequence $(n_1,n_2,..,n_k)$ in descending order and $m_s=n_k$.

证明。从定理 1.4 可知，当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与类型为 $(n_k;\ n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的某个 Z-图具有相同的奇数方格时， $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的整最高权模 $L(\lambda)$ 才是 socular。回顾一下，在这种情况下，我们可以将 $\lambda = w\mu$ 写成唯一的反占优 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ 和唯一的最短长度元素 $w \in W$。根据 [15, 命题 4.3] 或 [20, 定理48]，当且仅当 w 属于包含 $w_0^{\mathfrak{p}}$ 的 Kazhdan-Lusztig 右胞腔时， $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中的 $L(\lambda)$ 才是 socular，其中 $w_0^{\mathfrak{p}}$ 是与抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 对应的 W 的抛物子群中的最长元素。由 Springer 对应可知， $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{w_0^{\mathfrak{p}}}$ 是特殊的，其中 $\mathcal{O}_{w_0^{\mathfrak{p}}}$ 是所需的 Richardson 轨道。由 [1] 可知， $\mathcal{O}_w$ 与 $P(\lambda^-)$ 具有相同的奇数图。因此， $\mathcal{O}_w$ 与类型为 $(n_k;\ n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的 Z-图 P 具有相同的奇数图。利用 H-算法，我们可以从 Z-图 P 得到与 $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{w_0^{\mathfrak{p}}}$ 对应的特殊分拆 $\mathbf{p}$。

When $n_k = 0$, P is a Young diagram with shape $p = (p_1, \cdots, p_N)$ such that

$$p^t = (m_1, m_1, m_2, m_2, \cdots, m_{k-1}, m_{k-1}).$$

<escape>注意，这个 p 仅包含偶数部分。对 p应用 p_1 后变为p_1+1，其中一些 p_{2i}变为 $p_{2i}-1$，而 p_{2i+1}变为 $p_{2i+1}+1$（当 p_{2i}以奇数重数出现且 $p_{2i} > p_{2i+1}$）。回顾一下，类型为 $\mathbf{q}$ 的分拆 B 是特殊的，当且仅当其对偶分拆 $\mathbf{q}^t$ 的类型为 B。因此，由命题6.1 和 6.2可得 $\mathbf{p} = [p_1+1, p_2, \cdots, p_N]_B$，因为它是特殊的，且具有与 Z-图 P相同的奇数图。</escape>

When $n_k > 0$, P is a Young diagram with shape $p = (p_1, \cdots, p_N)$ such that

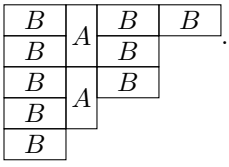
$$p^t = (m_1, m_1, m_2, m_2, \cdots, m_{s-1}, m_{s-1},, 2m_s, m_{s+1}, m_{s+1}, \cdots, m_k, m_k),$$

其中 $m_s = n_k$。对 p 执行 H-算法后，前 $2m_s$ 个部分不会发生变化，因为它们都是奇数部分。我们只需要对其余部分进行 B-折叠。因此，我们得到

$$\mathbf{p} = H(p) = [p_1, p_2, \cdots, p_{2m_s}, p_{2m_s+1}+1, p_{2m_s+2}, \cdots, p_N]_B.$$

Combined the above two cases, we complete the proof. □

例 6.5。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(23, \mathbb{C})$。假设 $\Delta \setminus I = \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_9\}$。那么，相应的抛物子代数 $\mathfrak{p}_I$ 是一个类型为 (1,3,5,2) 的标准抛物子代数。根据定理 1.4，简单整最高权模 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$，当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与下列类型为 (2; 1, 3, 5) 的 Z-图具有相同的奇数方格时，它才是 socular:



$P(\lambda^-)^{\mathrm{odd}}$ 的形状为 $p(\lambda^-)^{\mathrm{odd}} = p^{\mathrm{odd}} =$ (3, 3, 2, 2, 1)，其中 p 是 Z-图 P的形状。

由这个 Z-图 P，我们可以得到一个具有分拆 $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \cdots, p_{2m_s}, p_{2m_s+1}+1, p_{2m_s+2}, \cdots, p_N]_B = [7,5,5,3,2+1]_B = [7,5,5,3,3]$的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$。

例如，假设 $\lambda = (-12, -9, -10, -11, -4, -5, -6, -7, -8, 4, 3) \in \mathfrak{h}^*$。那么， $L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的。我们可以验证， $P(\lambda^-)$ 与类型为 (2; 1, 3, 5) 的 Z-图 P 具有相同的奇数方格。

定理 6.6. 假设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$。设 $\mathfrak{p}$ 是类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的标准抛物子代数。与 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$ 具有分拆

$$\mathbf{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_N]_C,$$

where $p=(p_1,\cdots,p_N)$ *is the shape of the Z-diagram* P *of type* $(n_k;n_1,\cdots,n_{k-1})$ *so that*

$$p^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{s-1},m_{s-1},,2m_s,m_{s+1},m_{s+1},\cdots,m_k,m_k).$$

Here $(m_1,\cdots,m_k)$ *is the arrangement of the sequence* $(n_1,n_2,..,n_k)$ *in descending order and* $m_s=n_k$.

证明。类似地，从类型为 $(n_k;\ n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的 Z-图 P 出发，通过使用 H-算法，我们可以得到与 $\mathcal{O}_w=\mathcal{O}_{w_0^{\mathfrak{p}}}$ 对应的特殊分拆 $\mathbf{p}$。

When $n_k=0$, P is a Young diagram with shape $p=(p_1,\cdots,p_N)$ such that

$$p^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{k-1},m_{k-1}).$$

Note that this p contains only even parts, which is already a special partition of type C. Thus we have $\mathbf{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_N]$.

当 $n_k>0$, P是一个形状为 $p=(p_1,\cdots,p_N)$ 的杨图，且满足

$$p^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{s-1},m_{s-1},,2m_s,m_{s+1},m_{s+1},\cdots,m_k,m_k),$$

其中 $m_s=n_k$。对 p 执行 H-算法后，与类型 B 类似，我们有 $\mathbf{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_N]_C$，因为最后的 m_1-2m_s 个部分是偶数部分，且在 H-算法后不会改变。

结合上述两种情况，证明得证。 □

定理 6.7。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$。令 $\mathfrak{p}$ 为类型 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 的标准抛物子代数。当 $n_k\neq 1$ 时，与 $\mathfrak{p}$ 相关联的 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$ 的分拆为

$$\mathbf{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_N]_D,$$

其中 $p=(p_1,\cdots,p_N)$ 是类型为 $(n_k;\ n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的 Z-图 P 的形状，使得

$$p^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{s-1},m_{s-1},,2m_s,m_{s+1},m_{s+1},\cdots,m_k,m_k).$$

这里，$(m_1,\cdots,m_k)$ 是序列 $(n_1,n_2,..,n_k)$ 按降序排列后的排列，且 $m_s=n_k$。

When $n_k=1$, *the Richardson orbit* $\mathcal{O}$ *associated to* $\mathfrak{p}$ *has partition*

$$\bar{\mathbf{p}}=[p_1',p_2',\cdots,p_N']_D,$$

其中，$\bar{p}=(p_1',\cdots,p_N')$ 是类型为 $(0;\ n_1,\cdots,n_{k-2},n_{k-1}+1)$ 的 Z-图 P 的形状，因此

$$\bar{p}^t=(m_1,m_1,m_2,m_2,\cdots,m_{k-1},m_{k-1}).$$

这里，$(m_1,\cdots,m_{k-1})$ 是序列 $(n_1,n_2,..,n_{k-2},n_{k-1}+1)$ 按降序排列后的排列。

证明。类似地，对于类型为（n_k；n_1，$\cdots$，n_{k-1}）的 Z-图 P，通过使用 H-算法，我们可以得到与 $\mathcal{O}_w=\mathcal{O}_{w_0^{\mathfrak{p}}}$ 对应的特殊分拆 $\mathbf{p}$。在这种情况下，$\mathcal{O}_w$ 与 Z-图 P具有相同的偶图。

Since the case of $n_k=1$ can be reduced to the case of $n_k=0$, we will not talk about it here.

When $n_k = 0$, P is a Young diagram with shape $p = (p_1, \cdots, p_N)$ such that

$$p^t = (m_1, m_1, m_2, m_2, \cdots, m_{k-1}, m_{k-1}).$$

注意，这个 p 仅包含偶数部分。在对 p应用 H-算法后，与类型 B类似，我们有 $\mathfrak{p} = [p_1, p_2, \cdots, p_N]_D = p_{D^\circ}$

When $n_k > 1$, P is a Young diagram with shape $p = (p_1, \cdots, p_N)$ such that

$$p^t = (m_1, m_1, m_2, m_2, \cdots, m_{s-1}, m_{s-1,}, 2m_s, m_{s+1}, m_{s+1}, \cdots, m_k, m_k),$$

where $m_s = n_k$. After the H-algorithm on p, we have

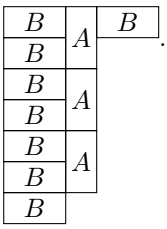
$$\mathfrak{p} = H(p) = [p_1, p_2, \cdots, p_N]_D = p_D$$

since the first $2m_s$ parts are odd parts and they will not change after the H-algorithm.

Combined the above two cases, we complete the proof. □

备注 6.8. 当对应的 Richardson 轨道是一个非常偶轨道时，其编号可以通过 [9, 定理 7.3.3(ii)] 确定，因为 $n_k = 0$ 或 1 在这种情况下成立。

例 6.9. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(22, \mathbb{C})$。假设 $\Delta \setminus I = \{\alpha_1, \alpha_8\}$。那么，相应的抛物子代数 $\mathfrak{p}_I$ 是一个类型为 (1,7,3) 的标准抛物子代数。根据定理 1.5，简单整最高权模 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 当且仅当 $P(\lambda^-)$ 与下列类型为 (3; 1, 7) 的 Z- 图具有相同的偶数方格：



$P(\lambda^-)^{\mathrm{ev}}$的形状为 $p(\lambda^-)^{\mathrm{ev}} = p^{\mathrm{ev}} =$(3, 1, 2, 1, 2, 1, 1)，其中 p是 Z-图 P的形状。

由这个 Z-图 P，我们可以得到一个 Richardson 轨道 $\mathcal{O}$，其分拆为 $\mathfrak{p} = [p_1, p_2, \cdots, p_N]_D = [5, 3^5, 2]_D = [5, 3^5, 1, 1]$。

例如，假设 $\lambda = (-20, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, 3, 2, 1) \in \mathfrak{h}^*$。那么，$L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 中是 socular 的。我们可以验证，$P(\lambda^-)$ 与类型为 (3; 1, 7) 的 Z-图 P 具有相同的偶数方格。

致谢。本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12171344）和国家重点研发计划（项目编号：2018YFA0701700 和 2018YFA0701701）的资助。作者感谢 Volodymyr Mazorchuk 就类型 A 情形下的 socular 最高权模所进行的富有帮助的讨论。作者感谢审稿人认真细致的审阅及其提出的宝贵意见。

References

[1] Bai Z Q, Ma J -J, Wang Y T. 经典李代数最高权模湮灭子簇的组合刻画. arXiv: 2304 03475, 2023 . Bai Z Q, Xiao W. 标

[2] 量广义 Verma 模的 Gelfand-Kirillov 维数与可约性. Acta Math Sin (Engl Ser), 2019, 35: 1854-1860.

[3] Bai Z Q, Xiao W, Xie X. 最高权模的 Gelfand-Kirillov 维数及伴随簇. Int Math Res Not IMRN, 2023, 2023 8101 8142 : – Bai Z Q, Xie X.
[4] $SU\ p\ q$ 2019, 2019 4392 4418 (,) 的最高权 Harish-Chandra 模的
[5] Gelfand-Kirillov 维数. Int Math Res Not IMRN, : - Baur K. 经典李代数的 Richardson 元素. J Algebra, 2006, 297 168 185 : - Brundan
[6] J, Kleshchev A. 高层级的舒尔-韦尔对偶. Selecta Math, : 2008, 14 1 57 -
[7] Brundan J, Losev I, Webster B. 张量积范畴化与超 Kazhdan-Lusztig 猜想. Int Math Res Not IMRN, 2017, 2017 6329 6410 : - Brundan J. Cartan 类型 A
[8] 中的 Mœglin 定理与戈尔迪秩多项式. Compos Math, 2011, 147: 1741-1771[9] Collingwood D J, McGovern W M. 半单李代数中的幂零轨道. Van Nostrand Reinhold 数学丛书. 纽约：Van Nostrand Reinhold Co., 1993[10] Garfinkle D. 复经典李代数本原理想分类研究. I. Compos Math, 1990, 75: 135-169[11] Garfinkle D. 复经典李代数本原理想分类研究. II. Compos Math, 1992, 81: 307-336[12] Garfinkle D. 复经典李代数本原理想分类研究. III. Compos Math, 1993, 88: 187-234
[13] 1978, 160 217 234 Hesselink W
[14] ¨ H. 经典群中的极化. Math Z, : - Hille L, Rohrle G. 经典群中在幺幂根基上具有有限个轨道的抛物子群分类. Transform Groups, 1999, 4: 35-52[15] Irving R S. 范畴 $\mathcal{O}_S$ 中的投射模：自对偶性. Trans Amer Math Soc, 1985, 291: 701-732[16] Jantzen J C. 表示论中的幂零轨道. 载于 Lie theory: Lie Algebras and Representations. Progr Math, vol. 288 ¨ 2004, 1 211 . 波士顿:
[17] Birkhauser Boston, Inc., MA, - Lusztig G. 魏尔群的一类不可约表示. Nederl Akad Wetensch Indag Math, 1979, 41: 323-335[18] Lusztig G. 有限域上约化群的特征标. Annals of Math Studies, vol. 107 1984 . 普林斯顿：Princeton University Press,
[19] Mazorchuk V, Stroppel C. 投射-内射模、Serre 函子与对称代数. J Reine Angew Math, 2008, 616 131 165 : - Mazorchuk V, Stroppel C. （诱导）胞腔模的范畴
[20] 化与广义 Verma 模的粗略结构. Adv Math, 2008, 219: 1363–1426[21] Panyushev D I. 关于球幂零轨道及其他问题. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1999, 49: 1453-1476[22] Richardson R W. 半单代数群的抛物子群中的共轭类. Bull Lond Math Soc, 1974, 6: 21–24[23] Sagan B E. 对称群：表示、组合算法与对称函数. Graduate Texts in Mathematics, vol. 203. 纽约：Springer-Verlag, 2001[24] Vogan D A. Harish-Chandra 模的 Gelfand-Kirillov 维数. Invent Math, 1978, 48: 75-98[25] Xiao W. 首权向量与广义 Verma 模之间的同态. J Algebra, 2015, 430: 62-93.

(Bai) School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, China
Email address: zqbai@suda.edu.cn

(Zhang) School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, China
Email address: shaoyizhangedu@163.com