arXiv:2305.06060v1 [math.NT] 10 May 2023

Local Galois representations associated to additive polynomials

Takahiro Tsushima

Abstract

For an additive polynomial and a positive integer, we define an irreducible smooth representation of a Weil group of a non-archimedean local field. We study several invariants of this representation. We deduce a necessary and sufficient condition for it to be primitive.

1 Introduction

设 p 为一个素数， q 为其幂。域 $\mathbb{F}_q$ 上的加性多项式 $R(x)$ 是一个单变量多项式，其系数属于 $\mathbb{F}_q$，满足 $R(x+y) = R(x) + R(y)$。已知 $R(x)$ 具有形式 $\sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i}$ ($a_e \neq 0$)，其中 $e \geq 0$ 为一个整数。设 F 为一个剩余域为 $\mathbb{F}_q$ 的非阿基米德局部域。取 F 的一个可分闭包 $\overline{F}$。设 W_F 为 $\overline{F}/F$ 的韦伊群。令 $v_F(\cdot)$ 表示 F 上的标准化赋值。取一个素数 $\ell \neq p$。对于一个非平凡特征 $\psi\colon \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$、一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的非零加性多项式 $R(x)$，以及一个与 p 互素的正整数 m，当 $v_F(p)$ 充分大时，我们定义一个在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上、次数为 p^e 的不可约光滑 W_F-表示 $\tau_{\psi,R,m}$。当 F 具有正特征时，这一结论无条件成立。整数 m 与 $\tau_{\psi,R,m}$ 的 Swan 导子指数有关。随着 m 变化，$\tau_{\psi,R,m}$ 的同构类也随之变化。

令 C_R 表示在 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_q} = \mathsf{Spec}\,\mathbb{F}_q[a,x]$ 中由 $a^p - a = xR(x)$ 定义的代数仿射曲线。[6] 和 [1] 对这条曲线进行了详细研究。例如，已证明 C_R 的光滑紧化在 $(p,e) \neq (2,0)$ 时是超奇异的。C_R 的自同构群包含一个由循环群和一个额外特殊p-群构成的半直积 Q_R （(2.5)）。令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包。则半直积群 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ 在基变换 $C_{R,\mathbb{F}} := C_R \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ 上作为自同态作用，其中 $1 \in \mathbb{Z}$ 在 $C_{R,\mathbb{F}}$ 上作为 $\mathbb{F}_q$ 上的弗罗贝尼乌斯自同态作用。Q_R 的中心 $Z(Q_R)$ 与 $\mathbb{F}_p$ 等同；当 $\zeta \in \mathbb{F}_p$ 时，它在 C_R 上的作用为 $a \mapsto a+\zeta$。令 $H^1_c(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 为 $C_{R,\mathbb{F}}$ 的第一 ℓ上同调群（紧支撑）。$Z(Q_R)$ 中的每个元素都在 $\mathbb{Z}$ 对 Q_R 的作用下保持不变。因此，其 ψ-等型分量 $H^1_c(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ 可视为一个 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$-表示。

我们构造一个定义在 F 上的具体伽罗瓦扩张，其韦伊群与 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ 中关联于整数 m 的一个子群同构（定义 3.1 和 (3.8)）。具体而言，我们将在 (3.12) 中定义一个同态 $\Theta_{R,m}\colon W_F \to Q_R \rtimes \mathbb{Z}$。因此，我们将 $\tau_{\psi,R,m}$ 定义为它们的复合映射。

$$W_F \xrightarrow{\Theta_{R,m}} Q_R \rtimes \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H^1_c(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]).$$

Keywords: Local Galois representations, additive polynomials, symplectic modules
2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 11F80; Secondary: 14H37.

这是一个 W_F 的光滑不可约表示，其次数为 p^e。

我们阐述引入并研究 $\tau_{\psi、R、m}$ 的动机及原因。众所周知，Lubin–Tate 曲线中同心仿射域的约化属于这一类具有特殊 R 的曲线 C_R。例如，参见 [16] 和 [17]。当 R 是单项式且$m = 1$时，表示 $\tau_{\psi、R、m}$ 已在 [9] 和 [10] 中得到了详细研究。在这些论文中，Lubin–Tate 空间中某个仿射域的约化在某种意义上与 C_R 相关，并且明确给出了在局部朗兰兹对应下与 $\tau_{\psi、R、m}$ 相对应的 $\mathrm{GL}_{p^e}(F)$ 的超尖表示 π。同态 Θ_R、1 与 $R(x) = x^{p^e}$ $(e \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ 确实出现在文献 [9] 的研究中。如果一个群的不可约表示不同构于任何真子群的任意表示的诱导表示，则称该表示为本原表示。文献 [9] 和 [10] 中的表示 $\tau_{\psi、R、m}$ 是本原的，而这一性质使得从类型理论的角度描述 π 变得复杂。对于一般的 $\tau_{\psi、R、m}$，开展同样的研究是一个有趣的问题。在这一方向上，了解 $\tau_{\psi、R、m}$ 何时为本原表示将具有重要价值。我们预期，另一种 C_R 将与 Lubin–Tate 空间中的同心仿射域相关，正如 [9] 中所示。

We briefly explain the content of each section. In §2, we state several things on the curves C_R and the extra-special p-subgroups contained in the automorphism groups of the curves.

在 §3.1 和 §3.2 中，我们构造上述伽罗瓦扩张，并定义$\tau_{\psi、R、m}$。令 $d_R := \gcd\{p^i + 1 \mid a_i \neq 0\}$。我们证明，$\tau_{\psi、R、m}$ 的 Swan 导子指数等于 $m(p^e + 1)/d_R$（推论 3.15）。在 §3.3 中，我们研究 $\tau_{\psi、R、m}$的本原性。特别地，我们给出了$\tau_{\psi、R、m}$ 为本原的充要条件。基于此，我们给出了$\tau_{\psi、R、m}$ 为本原的例子（例 3.29）。这一充要条件是：与$\tau_{\psi、R、m}$ 相关联的辛模（V_R、ω_R）是完全各向异性的（推论 3.28）。如果 R 是单项式，则在 §3.4 中对（V_R、ω_R）进行了更为详细的研究。在命题 3.44 中，我们利用 Künneth 公式，从几何角度构造了 [11, §9] 意义下的一个主模。

Our aim in §4 is to show the following theorem.

Theorem 1.1. *Assume $p \neq 2$. The following two conditions are equivalent.*

(1) *There exists a non-trivial finite étale morphism*

$$C_R \to C_{R_1};\ (a, x) \mapsto (a - \Delta(x), r(x)),$$

where $\Delta(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ and $r(x)$ $R_1(x)$ are additive polynomials over $\mathbb{F}_q$ such that $d_{R,m} \mid d_{R_1}$ and $r(\alpha x) = \alpha r(x)$ for any $\alpha \in \mu_{d_{R,m}}$.

(2) *The W_F-representation $\tau_{\psi,R,m}$ is imprimitive.*

If $\tau_{\psi,R,m}$ is imprimitive, it is written as a form of an induced representation of a certain explicit $W_{F'}$-representation $\tau'_{\psi,R_1,m}$ associated to a finite extension F'/F. The proof of the above theorem depends on several geometric properties of C_R developed in [6] and [1]. See the beginning of §4 for more details.

Notation

设 k 为一个域。令 $\mu(k)$ 表示 k 中所有单位根的集合。对于正整数r，令 $\mu_r(k) := \{x \in k \mid x^r = 1\}$。

对于正整数 i，设 $\mathbb{A}_k^i$ 和 $\mathbb{P}_k^i$ 分别为 k 上的一个 i 维仿射空间和一个射影空间。对于 k 上的一个概形 X 以及一个域扩张 l/k，记 X_l 为 X 到 l 的基变换。对于代数簇 X 的一个闭子集 Z，我们将 Z 视为具有既约概形结构的闭子概形。

Throughout this paper, we set $q := p^f$ with a positive integer f. For a positive integer i, we simply write $\mathrm{Nr}_{q^i/q}$ and $\mathrm{Tr}_{q^i/q}$ for the norm map and the trace map from $\mathbb{F}_{q^i}$ to $\mathbb{F}_q$, respectively.

Let X be a scheme over $\mathbb{F}_q$, let $F_q\colon X \to X$ be the q-th power Frobenius endomorphism. Let $\mathbb{F}$ be an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$. Let $\mathrm{Fr}_q\colon X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{F}}$ be the base change of F_q. This endomorphism Fr_q is called the Frobenius endomorphism of X over $\mathbb{F}_q$.

For a Galois extension l/k, let $\mathrm{Gal}(l/k)$ denote the Galois group of the extension.

2 Extra-special p-groups and affine curves

Definition 2.1. Let k be a field. A polynomial $f(x) \in k[x]$ is called additive if $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Let $\mathscr{A}_k$ be the set of all additive polynomials with coefficients in k.

Let p be a prime number. We simply $\mathscr{A}_q$ for $\mathscr{A}_{\mathbb{F}_q}$. Let $R(x) := \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i} \in \mathscr{A}_q$ with $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $a_e \neq 0$. Let

$$E_R(x) := R(x)^{p^e} + \sum_{i=0}^{e} (a_i x)^{p^{e-i}} \in \mathscr{A}_q. \tag{2.1}$$

We always assume

$$(p, e) \neq (2, 0). \tag{2.2}$$

We simply write μ_r for $\mu_r(\mathbb{F})$ for a positive integer r. Let

$$d_R := \gcd\{p^i + 1 \mid a_i \neq 0\}.$$

If $a_i \neq 0$, we have $\alpha^{p^i} = \alpha^{-1}$ and $\alpha^{p^{e-i}} = \alpha$ for $\alpha \in \mu_{d_R}$. Hence we have

$$\alpha R(\alpha x) = R(x), \quad E_R(\alpha x) = \alpha E_R(x) \quad \text{for } \alpha \in \mu_{d_R}. \tag{2.3}$$

Let

$$f_R(x, y) := -\sum_{i=0}^{e-1} \left(\sum_{j=0}^{e-i-1} (a_i x^{p^i} y)^{p^j} + (xR(y))^{p^i} \right) \in \mathbb{F}_q[x, y].$$

This is linear with respect to x and y. By (2.3), we have

$$f_R(\alpha x, \alpha y) = f_R(x, y) \quad \text{for } \alpha \in \mu_{d_R}. \tag{2.4}$$

Lemma 2.2. *We have $f_R(x,y)^p - f_R(x,y) = -x^{p^e} E_R(y) + xR(y) + yR(x)$. In particular, if $E_R(y) = 0$, we have $f_R(x,y)^p - f_R(x,y) = xR(y) + yR(x)$.*

证明。前一个等式由此得出

$$\begin{aligned} f_R(x,y)^p - f_R(x,y) &= xR(y) - (xR(y))^{p^e} + \sum_{i=0}^{e-1} (a_i x^{p^i} y - (a_i x^{p^i} y)^{p^{e-i}}) \\ &= -x^{p^e} E_R(y) + xR(y) + yR(x). \end{aligned}$$

□

定义2.3. (1) 设 $V_R := \{\beta \in \mathbb{F} \mid E_R(\beta) = 0\}$，它是一个 $(2e)$ 维的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。

(2) Let

$$Q_R := \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}^3 \mid \alpha \in \mu_{d_R},\ \beta \in V_R,\ \gamma^p - \gamma = \beta R(\beta)\right\}$$

be the group whose group law is given by

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) := (\alpha_1\alpha_2, \beta_1 + \alpha_1\beta_2, \gamma_1 + \gamma_2 + f_R(\beta_1, \alpha_1\beta_2)).$$

This is well-defined according to (2.3) and Lemma 2.2.

(3) Let $H_R := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_R \mid \alpha = 1\}$, which is a normal subgroup of Q_R.

If $e = 0$, we have $p \neq 2$ by (2.2). We have $H_R = \mathbb{F}_p \subset Q_R = \mu_2 \times \mathbb{F}_p$ if $e = 0$.
For a group G and elements $g, g' \in G$, let $[g, g'] := gg'g^{-1}g'^{-1}$.

引理 2.4. 对于 $g = (1, \beta, \gamma)$ $g' = (1, \beta', \gamma') \in H_R$，我们有 $[g, g'] = (1, 0, f_R(\beta, \beta') - f_R(\beta', \beta))$。特别地，我们有 $f_R(\beta, \beta') - f_R(\beta', \beta) \in \mathbb{F}_p$。

Proof. This is directly checked. We omit the details. □

For a group G, let $Z(G)$ denote its center and $[G, G]$ the commutator subgroup of G.

Definition 2.5. A non-abelian p-group G is called an *extra-special p-group* if $[G, G] = Z(G)$ and $|Z(G)| = p$.

Lemma 2.6. *Assume $e \geq 1$.*

(1) 群 H_R 是非阿贝尔群。我们有 $Z(H_R) = Z(Q_R) = \{(1, 0, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{F}_p\}$。商 $H_R/Z(H_R)$ 同构于 V_R。(2) 群 H_R 是一个特殊的 p-群。配对 ω_R: $V_R \times V_R \to \mathbb{F}_p$; $(\beta, \beta') \mapsto f_R(\beta, \beta') - f_R(\beta', \beta)$ 是一个非退化辛形式。

证明。我们证明 (1)。令 $X_\beta := \{x \in \mathbb{F} \mid f_R(\beta, x) = f_R(x, \beta)\}$ 对于 $\beta \in V_R$。那么，当 $\beta \neq 0$ 时，X_β 是一个维数为 $2e - 1$ 的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。由于 V_R 的维数为 $2e$，我们有 $V_R \nsubseteq X_\beta$ 对于 $\beta \in V_R \setminus \{0\}$。根据引理 2.4，这意味着 H_R 是非阿贝尔的。

显然，我们有 $Z := \{(1, 0, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{F}_p\} \subset Z(Q_R) \subset Z(H_R)$。只需证明$Z(H_R) \subset Z$。设 $(1, \beta, \gamma) \in Z(H_R)$。由引理 2.4，我们有 $V_R \subset X_\beta$。这意味着 $\beta = 0$。因此，我们得到 $Z(H_R) \subset Z$。最后一个断言很容易验证。

We show (2). By Lemma 2.4, we have $[H_R, H_R] \subset Z(H_R)$. Since H_R is non-abelian, $[H_R, H_R]$ is non-trivial. Hence we have $[H_R, H_R] = Z(H_R)$ by $|Z(H_R)| = p$. Hence H_R is extra-special. Assume $\omega_R(\beta, \beta') = 0$ for any $\beta' \in V_R$. We take an element $(1, \beta, \gamma) \in H_R$. By Lemma 2.4, we have $(1, \beta, \gamma) \in Z(H_R)$. Hence we have $\beta = 0$ by (1). □

Definition 2.7. (1) Let C_R be the affine curve over $\mathbb{F}_q$ defined by $a^p - a = xR(x)$.

(2) Let Q_R act on $C_{R,\mathbb{F}}$ by

$$(a, x) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = \left(a + f_R(x, \beta) + \gamma, \alpha^{-1}(x + \beta)\right), \tag{2.5}$$

for $(a, x) \in C_{R,\ \mathbb{F}}$ 以及 $(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_R$。这由 (2.3) 和引理 2.2 保证定义良好。 .

曲线 C_R 在 [6]和 [1]中进行了研究。

We take a prime number $\ell \neq p$. For a finite abelian group A, let $A^\vee$ denote the character group $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$. For a representation M of A over $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ and $\chi \in A^\vee$, let $M[\chi]$ denote the χ-isotypic part of M.

According to Lemma 2.6(1), we identify a character $\psi \in \mathbb{F}_p^\vee$ with a character of $Z(H_R)$.

Lemma 2.8. *Let $\psi \in \mathbb{F}_p^\vee \setminus \{1\}$.*

(1) 设 $W \subset V_R$ 为一个维数为 e的 $\mathbb{F}_p$-子空间，且相对于 ω_R 是全迷向的。设 $W' \subset H_R$ 为 W 在自然映射$H_R \to V_R$下的原像；$(1, \beta, \gamma) \mapsto \beta$。设 $\xi \in W'^\vee$ 为 $\psi \in Z(H_R)^\vee$ 的一个扩张。设$\rho_\psi :=$ 诱导表示$\mathrm{ind}_{W'}^{H_R}\xi$。则 ρ_ψ 是包含 ψ的 H_R 的唯一不可约表示（在同构意义下）。特别地，$\rho_\psi|_{Z(H_R)}$ 是 ψ 的一个倍数。

(2) *The ψ-isotypic part $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ is isomorphic to ρ_ψ as H_R-representations.*

Proof. By Lemma 2.6(2) and [8, 16.14(2) Satz], the claim (1) follows. By [16, Remark 3.29], we have $\dim H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi] = p^e$. Hence the claim (2) follows from (1). □

The representation ρ_ψ induces a projective representation $\bar{\rho}\colon H_R/Z(H_R) \to \mathrm{PGL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Lemma 2.9. *The map $\bar{\rho}$ is injective.*

证明。与 [14, 定理 6], 的证明中一样，我们有 $\mathrm{Tr}\,\rho_\psi(x) = 0$ 对于 $x \in H_R \setminus Z(H_R)$。假设 $\bar{\rho}(xZ(H_R)) = 1$ 对于 $x \in H_R$。那么 $\rho_\psi(x)$ 是一个非零标量矩阵。因此，$\mathrm{Tr}\,\rho_\psi(x) \neq 0$。这意味着 $x \in Z(H_R)$。 □

令 $\mathbb{Z} \ni 1$ 通过拉回 Fr_q^* 作用于 $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。令 $\mathbb{Z} \ni 1$ 通过 $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha^{q^{-1}}, \beta^{q^{-1}}, \gamma^{q^{-1}})$ 作用于 Q_R。半直积 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ 以 $[\psi]$ 的方式作用于 $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。令 $\overline{C}_R$ 表示 C_R 的光滑紧化。

Proposition 2.10. *The projective curve $\overline{C}_R$ is supersingular. In particular, this curve has positive genus. The natural map $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^1(\overline{C}_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ is an isomorphism.*

Proof. The former claim is shown in [6, Theorems (9.4) and (13.7)] ([1, Proposition 8.5]). The last claim follows from [16, Lemmas 3.27 and 3.28(3)]. □

3 Local Galois representation

在本节中，我们定义一个不可约光滑的 W_F-表示 $\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 并确定与之相关的若干不变量。在 §3.2.2 中，我们确定 $\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 的 Swan 导子指数。在 §3.3 中，我们确定与 $\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 相关联的辛模，并给出 $\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 为本原的充要条件。由此，我们得到若干 $\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 为本原的例子。若 R 是一个单项式，我们计算在 [11] （引理 3.36）中定义的与 (V_R, ω_R) 相对应的根系的不变量。

3.1 伽罗瓦扩张

对于一个赋值域 K，令 $\mathcal{O}_K$ 表示 K 的赋值环。

设 F 是一个非阿基米德局部域。设 $\overline{F}$ 是 F的一个可分闭包。令 $\widehat{\overline{F}}$ 表示 $\overline{F}$的完备化。令 $v(\cdot)$表示 $\overline{F}$ 上的唯一赋值，使得对于 F的一个一致化元 ϖ，有$v(\varpi)=1$，我们现在固定该一致化元。我们简记 $\mathcal{O}$为 $\mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}}$。令$\mathfrak{p}$为 $\mathcal{O}$的极大理想。

令 q 为 $\mathcal{O}_F$的剩余域的基数。

我们取 $R(x)=\sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i} \in \mathscr{A}_q$。对于一个元素 $a\in\mathbb{F}_q$，令 $\widetilde{a}\in\mu(F)\cup\{0\}$ 为其 Teichmüller 提升。令

$$\widetilde{R}(x):=\sum_{i=0}^{e}\widetilde{a}_i x^{p^i},\quad \widetilde{E}_R(x):=\widetilde{R}(x)^{p^e}+\sum_{i=0}^{e}(\widetilde{a}_i x)^{p^{e-i}}\in\mathcal{O}_F[x].$$

与 (2.3) 类似，我们有

$$\alpha\widetilde{R}(\alpha x)=\widetilde{R}(x),\quad \widetilde{E}_R(\alpha x)=\alpha\widetilde{E}_R(x)\quad \text{for } \alpha\in\mu_{d_R}(\overline{F}). \tag{3.1}$$

定义 3.1。设 m 是一个与 p互素的正整数。设$\alpha_{R,\varpi},\beta_{R,m,\varpi},\gamma_{R,m,\varpi}\in\overline{F}$为满足下列条件的元素

$$\alpha_{R,\varpi}^{d_R}=\varpi,\quad \widetilde{E}_R(\beta_{R,m,\varpi})=\alpha_{R,\varpi}^{-m},\quad \gamma_{R,m,\varpi}^{p}-\gamma_{R,m,\varpi}=\beta_{R,m,\varpi}\widetilde{R}(\beta_{R,m,\varpi}).$$

For simplicity, we write $\alpha_R,\beta_{R,m},\gamma_{R,m}$ for $\alpha_{R,\varpi},\beta_{R,m,\varpi},\gamma_{R,m,\varpi}$, respectively.

Remark 3.2. By $\deg\widetilde{E}_R(x)=p^{2e}$ and $\deg\widetilde{R}(x)=p^e$, we have

$$v(\alpha_R)=\frac{1}{d_R},\quad v(\beta_{R,m})=-\frac{m}{p^{2e}d_R},\quad v(\gamma_{R,m})=-\frac{m(p^e+1)}{p^{2e+1}d_R}.$$

The integer m controls the depth of ramification of the resulting field extension $F(\alpha_R,\beta_{R,m},\gamma_{R,m})/F$. We will understand this later in §3.2.2.

Let

$$\widetilde{f}(x,y):=-\sum_{i=0}^{e-1}\left(\sum_{j=0}^{e-i-1}(\widetilde{a}_j x^{p^i}y)^{p^j}+(x\widetilde{R}(y))^{p^i}\right).$$

Let $\mathfrak{p}[x]:=\mathfrak{p}\mathcal{O}[x]$ and $\mathfrak{p}[x,y]:=\mathfrak{p}\mathcal{O}[x,y]$. We assume that

$$\beta_R^{p^e},_m(\widetilde{E}_R(\beta_R,_m+x)-\widetilde{E}_R(\beta_R,_m)-\widetilde{E}_R(x))\quad \beta_R,_m(\widetilde{R}(\beta_R,_m+x)-\widetilde{R}(\beta_R,_m)-\widetilde{R}(x)),\widetilde{f}(\beta_R,_m,x)^p-\widetilde{f}(\beta_R,_m,x)+\beta_R^{p^e},_m\widetilde{E}_R(x)-x\widetilde{R}(\beta_R,_m)-\beta_R,_m\widetilde{R}(x)$$ 包含于 $\mathfrak{p}[x]$和

$$\widetilde{}(\gamma_R,_m+f(\beta_R,_m,y)+x)^p-\gamma_R,_m^p-f(\beta_R,_m,y)^p-x^p\in\mathfrak{p}[x,y]. \tag{3.2}$$

For $r\in\mathbb{Q}_{\geq 0}$ and $f,g\in\overline{F}$, we write $f\equiv g \mod r+$ if $v(f-g)>r$. For a local field K contained in $\overline{F}$, let W_K be the Weil group of $\overline{F}/K$. For $\sigma\in W_K$, let $n_\sigma\in\mathbb{Z}$ be the integer such that $\sigma(x)\equiv x^{q^{-n_\sigma}} \mod 0+$ for $x\in\mathcal{O}_{\overline{F}}$. Let $v_K(\cdot)$ denote the normalized valuation on K.

Definition 3.3. For $\sigma\in W_F$, we set

$$\begin{aligned} &a_{R,\sigma}:=\sigma(\alpha_R)/\alpha_R\in\mu_{d_R}(\overline{F}),\quad b_{R,\sigma}:=a_{R,\sigma}^m\sigma(\beta_{R,m})-\beta_{R,m},\\ &c_{R,\sigma}:=\sigma(\gamma_{R,m})-\gamma_{R,m}-\widetilde{f}(\beta_{R,m},b_{R,\sigma}).\end{aligned} \tag{3.3}$$

在下文中，我们分别将 $a_\sigma,b_\sigma,c_\sigma$ 简记为 $a_{R,\sigma},b_{R,\sigma},c_{R,\sigma}$。

对于一个元素 $x \in \mathcal{O}$，令 $\bar{x}$ 表示 x 在映射 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 下的像。在以下证明中，为简便起见，我们通常分别用 α、β 和 γ 表示 α_R、$\beta_{R,\,m}$ 和 $\gamma_{R,\,m}$。

Lemma 3.4. *We have $b_\sigma, c_\sigma \in \mathcal{O}$, $E_R(\bar{b}_\sigma) = 0$ and $\bar{c}_\sigma^{\,p} - \bar{c}_\sigma = \bar{b}_\sigma R(\bar{b}_\sigma)$.*

Proof. Using (3.1), the equality $\widetilde{E}_R(\beta) = \alpha^{-m}$ in Definition 3.1 and (3.3),

$$\widetilde{E}_R(\beta + b_\sigma) = \widetilde{E}_R(a_\sigma^m \sigma(\beta)) = a_\sigma^m \widetilde{E}_R(\sigma(\beta)) = a_\sigma^m \sigma(\alpha)^{-m} = \alpha^{-m} = \widetilde{E}_R(\beta).$$

利用 $v(\beta) < 0$ 备注 3.2 和 (3.2)，我们有 $\Delta(x) := E_R(\beta + x) - E_R(\beta) - E_R(x) \in \mathfrak{p}[x]$。令 $x = b_\sigma$ 并应用前述关系，我们推得 $E_R(b_\sigma) + \Delta(b_\sigma) = 0$。因此，$b_\sigma \in \mathcal{O}$ 且 $E_R(b_\sigma) = 0$。

By (3.2), we have

$$\beta\widetilde{R}(\beta+b_\sigma) \equiv \beta\widetilde{R}(\beta)+\beta\widetilde{R}(b_\sigma), \quad \widetilde{f}(\beta, b_\sigma)^p - \widetilde{f}(\beta, b_\sigma) \equiv b_\sigma\widetilde{R}(\beta)+\beta\widetilde{R}(b_\sigma) \mod 0+. \tag{3.4}$$

Substituting $y = b_\sigma \in \mathcal{O}$ to (3.2), we obtain

$$\Delta_1(x) := (\gamma + \widetilde{f}(\beta, b_\sigma) + x)^p - \gamma^p - \widetilde{f}(\beta, b_\sigma)^p - x^p \in \mathfrak{p}[x].$$

We have $\sigma(\beta)\widetilde{R}(\sigma(\beta)) = (\beta + b_\sigma)\widetilde{R}(\beta + b_\sigma)$ by substituting (3.3) and using (3.1). By multiplying the first congruence in (3.4) by $b_\sigma\beta^{-1}$, we obtain $b_\sigma\widetilde{R}(\beta + b_\sigma) \equiv b_\sigma\widetilde{R}(\beta) + b_\sigma\widetilde{R}(b_\sigma) \mod 0+$. Hence, we compute

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)^p - \sigma(\gamma) &= \sigma(\beta)\widetilde{R}(\sigma(\beta)) = (\beta + b_\sigma)\widetilde{R}(\beta + b_\sigma) \\
&\equiv \beta\widetilde{R}(\beta) + b_\sigma\widetilde{R}(\beta) + \beta\widetilde{R}(b_\sigma) + b_\sigma\widetilde{R}(b_\sigma) \\
&\equiv \gamma^p - \gamma + \widetilde{f}(\beta, b_\sigma)^p - \widetilde{f}(\beta, b_\sigma) + b_\sigma\widetilde{R}(b_\sigma) \\
&\equiv \sigma(\gamma)^p - \sigma(\gamma) - (c_\sigma^p - c_\sigma + \Delta_1(c_\sigma)) + b_\sigma\widetilde{R}(b_\sigma) \mod 0+,
\end{aligned}$$

where we have used (3.3) for the last congruence. Hence we obtain $c_\sigma^p - c_\sigma + \Delta_1(c_\sigma) \equiv b_\sigma\widetilde{R}(b_\sigma) \mod 0+$. By $b_\sigma \in \mathcal{O}$, we have $c_\sigma \in \mathcal{O}$ and $\bar{c}_\sigma^{\,p} - \bar{c}_\sigma = \bar{b}_\sigma R(\bar{b}_\sigma)$. □

Assume that

$$\begin{aligned}
&(x + \beta_{R,m})^{p^i} - x^{p^i} - \beta_{R,m}^{p^i} \in \mathfrak{p}[x] \quad \text{for } 1 \le i \le e-1, \\
&\widetilde{f}(\beta_{R,m}, x + y) - \widetilde{f}(\beta_{R,m}, x) - \widetilde{f}(\beta_{R,m}, y) \in \mathfrak{p}[x, y],
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Let

$$\Theta_{R,m,\varpi} \colon W_F \to Q_R \rtimes \mathbb{Z};\ \sigma \mapsto ((\bar{a}_\sigma^m, \bar{b}_\sigma, \bar{c}_\sigma), n_\sigma). \tag{3.6}$$

Lemma 3.5. *The map $\Theta_{R,m,\varpi}$ is a homomorphism.*

证明。设 $\sigma, \sigma' \in W_F$。回顾一下，对于 $x \in \mathcal{O}_{\overline{F}}$，$\sigma(x) \equiv x^{q^{-n_\sigma}}$ 模 $0+$。根据定义 2.3(2)，我们只需验证以下内容。

$$\bar{a}_{\sigma\sigma'} = \bar{a}_\sigma \bar{a}_{\sigma'}^{q^{-n_\sigma}}, \quad \bar{b}_{\sigma\sigma'} = \bar{a}_\sigma^m \bar{b}_{\sigma'}^{q^{-n_\sigma}} + \bar{b}_\sigma, \quad \bar{c}_{\sigma\sigma'} = \bar{c}_\sigma + \bar{c}_{\sigma'}^{q^{-n_\sigma}} + f_R(\bar{b}_\sigma, \bar{a}_\sigma^m \bar{b}_{\sigma'}^{-n_\sigma}). \tag{3.7}$$

容易验证， $a_{\sigma\sigma'} = \sigma(a_{\sigma'})a_\sigma$ 且 $b_{\sigma\sigma'} = a_\sigma^m \sigma(b_{\sigma'}) + b_\sigma$。因此，等式 (3.7) 中的前两个等式成立。我们计算得到

$$\begin{aligned} c_{\sigma\sigma'} &= c_\sigma + \sigma(c_{\sigma'}) + \sigma(\widetilde{f}(\beta, b_{\sigma'})) + \widetilde{f}(\beta, b_\sigma) - \widetilde{f}(\beta, b_{\sigma\sigma'}) \\ &\equiv c_\sigma + \sigma(c_{\sigma'}) + \sigma(\widetilde{f}(\beta, b_{\sigma'})) - \widetilde{f}(\beta, a_\sigma^m \sigma(b_{\sigma'})) \mod 0+, \end{aligned}$$

where we use the second condition in (3.5) for the second congruence. We have

$$\begin{aligned} \sigma(\widetilde{f}(\beta, b_{\sigma'})) &= -\sum_{i=0}^{e-1} \sum_{j=0}^{e-i-1} (\widetilde{a}_j \sigma(b_{\sigma'}) \sigma(\beta)^{p^i})^{p^j} - \sum_{i=0}^{e-1} (\sigma(\beta) \widetilde{R}(\sigma(b_{\sigma'})))^{p^i} \\ &\equiv \widetilde{f}(b_\sigma, a_\sigma^m \sigma(b_{\sigma'})) + \widetilde{f}(\beta, a_\sigma^m \sigma(b_{\sigma'})) \mod 0+, \end{aligned}$$

其中，我们在第二个同余式中代入 $\sigma(\beta) = a_\sigma^{-m}(\beta + b_\sigma)$、(3.5) 和 (3.1)。由于 $\widetilde{f}(x, y)$ 是 $f_R(x, y)$ 到 $\mathcal{O}_F[x, y]$ 的一个提升，因此 (3.7) 中最后一个等式成立。

□

Lemma 3.6. *If $v(p)$ is large enough, the conditions* (3.2) *and* (3.5) *are satisfied.*

Proof. There exists $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ such that the coefficients of all polynomials in (3.2) and (3.5) have the form: $p \cdot \beta_{R,m}^s \cdot a$ with $a \in \mathcal{O}_{\overline{F}}$ by Remark 3.2. Since the valuation of $v(\beta_{R,m})$ is independent of F, the claim follows. □

In the sequel, we assume that the conditions (3.2) and (3.5) are satisfied. Let F^{ur} denote the maximal unramified extension of F in $\overline{F}$.

Lemma 3.7. *The extension $F^{\mathrm{ur}}(\alpha_R^m, \beta_{R,m}, \gamma_{R,m})/F$ is Galois.*

证明。设 $L_0 := F^{\mathrm{ur}}(\alpha^m, \beta, \gamma)$，且 $L := L_0$ 是 L_0 的完备化。令 $\sigma \in G_F$。注意到 $a_\sigma \in \mu_{d_R}(\overline{F}) \subset F^{\text{非分歧}}$，由 $p \nmid d_R$ 可知。因此 $\sigma(\alpha^m) = a_\sigma^m \alpha^m \in L_0$。我们证明 $\sigma(\beta)$ $\sigma(\gamma) \in L_0$。只需证明

$$b_\sigma, c_\sigma \in L_0,$$

since

$$\sigma(\beta) = \frac{b_\sigma + \beta}{a_\sigma^m}, \quad \sigma(\gamma) = \gamma + c_\sigma + \widetilde{f}(\beta, b_\sigma)$$

由（3.3）得。与引理 3.4 的证明类似，我们有（$E_R + \Delta$）（b_σ）$= 0$，E（x）：=（$E_R + \Delta$）（x）$\in \mathcal{O}_{L_0}[x]$，且 deg E（x）$= p^{2e}$。方程 E（x）$\equiv 0$ mod $0+$ 有 p^{2e} 个不同的根。因此，根据 Hensel 引理，E（x）$= 0$ 在 $\mathcal{O}_L$ 中有 p^{2e} 个不同的根。因此，我们有$b_\sigma \in L \cap \overline{F} = L_0$。与引理 3.4 的证明类似，我们有

$$f(c_\sigma) := c_\sigma^p - c_\sigma + \Delta_1(c_\sigma) - y = 0 \text{ with } y \in \mathcal{O}_{L_0},$$

where $f(x) \in \mathcal{O}_{L_0}[x]$ with $\deg f(x) = p$. We have $y \equiv b_\sigma \widetilde{R}(b_\sigma) \mod 0+$. The equation $f(x) \equiv x^p - x - y \equiv x^p - x - b_\sigma \widetilde{R}(b_\sigma) \equiv 0 \mod 0+$ has p different roots. By Hensel's lemma, $f(x) = 0$ has p different roots in $\mathcal{O}_L$. Hence we have $c_\sigma \in L \cap \overline{F} = L_0$. □

定义 3.8. 设

$$d_{R,m} := \frac{d_R}{\gcd(d_R, m)}, \quad Q_{R,m} := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_R \mid \alpha \in \mu_{d_{R,m}}\}.$$

引理 3.9。我们有如下同构。

$$W(F^{\mathrm{ur}}(\alpha_R^m,\beta_{R,m},\gamma_{R,m})/F)\xrightarrow{\sim} Q_{R,m}\rtimes\mathbb{Z};\ \sigma\mapsto((\bar{a}_\sigma^m,\bar{b}_\sigma,\bar{c}_\sigma),n_\sigma). \tag{3.8}$$

证明。我们使用引理 3.4 的证明中的记号。令

$$I:=\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ur}}(\alpha^m,\beta,\gamma)/F^{\mathrm{ur}})$$

且 Θ: $I\to Q_{R,m}$ 是 (3.8) 的限制。首先，我们证明 Θ 是单射。假设对于 $\sigma\in I$，$\Theta(\sigma)=1$。我们将证明 $\sigma=1$。根据假设，$\bar{a}_\sigma^m=1$, $b_\sigma=0$ 且 $\bar{c}_\sigma=0$。对于一个与 p 互素的整数 r，我们有一个自然同构 $\mu_r(\overline{F})\xrightarrow{\sim}\mu_r$。由 $\bar{a}_\sigma^m=1$ 以及 (3.3) 中的 $a_\sigma\in\mu_{d_R}(\overline{F})$，我们得到 $a_\sigma^m=1$ 且 $\sigma(\alpha^m)=\alpha^m$。回顾引理 3.4 的证明中的等式 $E_R(b_\sigma)+\Delta(b_\sigma)=0$，其中 $\Delta(x)\in\mathfrak{p}[x]$ 没有常数项。由 $b_\sigma=0$，我们有 $v(b_\sigma)>0$。假设 $b_\sigma\neq0$。那么，由 $E_R'(0)\neq0$ 以及 $v(b_\sigma)>0$，可得 $v(b_\sigma)=v(E_R(b_\sigma)+\Delta(b_\sigma))$。这意味着 $v(b_\sigma)=\infty$，从而产生矛盾。因此，$b_\sigma=0$ 且 $\sigma(\beta)=\beta$。根据 (3.2) 中取 $y=0$ 时的最后一个条件，

$$\Lambda(x):=(\gamma+x)^p-\gamma^p-x^p\in\mathfrak{p}[x].$$

根据定义 3.1，我们有 $\sigma(\gamma)^p-\sigma(\gamma)=\gamma^p-\gamma$。因此，$(\gamma+c_\sigma)^p-\gamma^p=c_\sigma$ 以及 $c_\sigma^p+\Lambda(c_\sigma)=c_\sigma$。由于 $\Lambda(x)\in\mathfrak{p}[x]$ 没有常数项，如果 $0<v(c_\sigma)<\infty$，则有 $v(c_\sigma^p+\Lambda(c_\sigma))>v(c_\sigma)$，这是不可能发生的。因此，$c_\sigma=0$ 以及 $\sigma(\gamma)=\gamma$。我们得到 $\sigma=1$。因此，Θ 是单射。容易验证，$F_{\mathrm{ur}}(\alpha^m,\beta,\gamma)/F^{\mathrm{ur}}$ 是次数为 $d_{R,m}p^{2e+1}$ 的全分歧扩张。因此，Θ 是同构。由蛇形引理，(3.8) 是同构。 □

3.2 与加性多项式相关的伽罗瓦表示

3.2.1 伽罗瓦表示的构造

We assume that (3.2) and (3.5) are satisfied. If the characteristic of F is positive, these are unconditional. If the characteristic of F is zero, these conditions are satisfied if the absolute ramification index of F is large enough as in Lemma 3.6.

定义 3.10. 设 $\psi\in\mathbb{F}_p^\vee\setminus\{1\}$。我们将 $\tau_{\psi,R,m,\varpi}$ 定义为一个 W_F-表示，它是通过 $\Theta_{R,m,\varpi}$ 将式 (3.6) 中的不可约 $Q_R\rtimes\mathbb{Z}$-表示 $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ 膨胀得到的。为简便起见，我们将 $\tau_{\psi,R,m,\varpi}$ 简记为 $\tau_{\psi,R,m}$。

For a non-archimedean local field K, let I_K denote the inertia subgroup of K. Then $\mathrm{Ker}\,\tau_{\psi,R,m}$ contains the open compact subgroup $I_{F(\alpha_R^m,\beta_{R,m},\gamma_{R,m})}$. Hence the representation $\tau_{\psi,R,m}$ is a smooth irreducible representation of W_F by Lemma 2.8(1).

Let $G_F:=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. We consider a general setting in the following lemma.

Lemma 3.11. *Let $\widetilde{\tau}$ be a continuous representation of G_F over $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ such that there exists an unramified continuous character ϕ of G_F such that $(\widetilde{\tau}\otimes\phi)(G_F)$ is finite. Assume that $\tau:=\widetilde{\tau}|_{W_F}$ is irreducible. Then $\widetilde{\tau}\otimes\phi$ is primitive if and only if τ is primitive.*

证明。令 $\widetilde{\tau}':=\widetilde{\tau}\otimes\phi$ 和 $\tau':=\tau\otimes\phi|_{W_F}$。子群 $\mathrm{Ker}\ \widetilde{\tau}'$ 由 $|G_F/\mathrm{Ker}\ \widetilde{\tau}'|<\infty$ 可知是开子群。因此 $\mathrm{Ker}\ \tau'\subset W_F$ 是开子群。所以 τ' 是光滑的。因此 τ 也是光滑的。由于 τ 不可约且光滑，我们有 $\dim\tau<\infty$。我们将证明，$\widetilde{\tau}'$ 是非本原的，当且仅当 τ 是非本原的。

首先，假设存在一个同构 $\widetilde{\tau}' \simeq$ 诱导表示$_H^{G_F}\eta'$，其对应于一个真子群 H。我们可以验证核 $\widetilde{\tau}' \subset H$。因此， H 是开集。因此，我们可以写成 $H = G_{F'}$，其中 F'/F 是一个有限扩张。因此，我们得到一个同构 $\tau \simeq$诱导表示$_{W_{F'}}^{W_F}(\eta'|_{W_{F'}} \otimes \phi^{-1}|_{W_{F'}})$。

反之，假设 $\tau \simeq \mathrm{Ind}_H^{W_F}\sigma$。按照上文的方法，将$G_F$替换为 W_F，由 $\dim \tau < \infty$ 可知，子群 H是 W_F的有限指数开子群。因此，我们可以写成 $H = W_{F'}$，其中 F'/F是有限扩张。令 $\sigma' := \sigma \otimes \phi|_{W_{F'}}$。我们有 $\tau' \simeq \mathrm{Ind}_{W_{F'}}^{W_F}\sigma'$。弗罗贝尼乌斯互反律意味着 $\sigma'(W_{F'}) \subset \tau'(W_F)$。根据假设，像 $\sigma'(W_{F'})$是有限的。因此，光滑的 $W_{F'}$-表示 σ'可以延拓为 $G_{F'}$的光滑表示，记作 $\widetilde{\sigma}$ ([2, Proposition 28.6])。$\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\widetilde{\sigma}$在 W_F 上的限制同构于 $\mathrm{Ind}_{W_{F'}}^{W_F}\sigma' \simeq \tau'$。$\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\widetilde{\sigma}$和 $\widetilde{\tau}'$都是光滑不可约的 G_F-表示，且它们在 W_F 上的限制同构于 τ'。因此，根据 [2,Lemma 28.6.2(2)]，我们得到一个作为 G_F-表示的同构 $\widetilde{\tau}' \simeq \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\widetilde{\sigma}$。 □

Lemma 3.12. *The eigenvalues of* Fr_q^* *on* $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ *have the forms* $\zeta\sqrt{q}$ *with roots of unity* ζ*. The automorphism* Fr_q^* *is semi-simple.*

Proof. The claims follow from Proposition 2.10. □

The cohomology group $H_c^1(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ is regarded as a representation of $Q_{R,m} \rtimes \widehat{\mathbb{Z}}$. By inflating this by a natural map $G_F \to Q_{R,m} \rtimes \widehat{\mathbb{Z}}$ extending $\Theta_{R,m,\varpi}$, we obtain a continuous representation of G_F. We denote this representation by $\widetilde{\tau}_{\psi,R,m}$. Let $\phi\colon G_F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ be the unramified character sending a geometric Frobenius to $\sqrt{q}^{-1}$. The image of G_F by the twist $\widetilde{\tau}' := \widetilde{\tau}_{\psi,R,m} \otimes \phi$ is finite by Lemma 3.12. By fixing an isomorphism $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$, we obtain a continuous representation $\widetilde{\tau}'_{\mathbb{C}}$ of G_F over $\mathbb{C}$ by $\widetilde{\tau}'$. Then $\widetilde{\tau}'_{\mathbb{C}}$ is primitive if and only if $\widetilde{\tau}_{\psi,R,m}$ is primitive.

Corollary 3.13. *The* W_F*-representation* $\tau_{\psi,R,m}$ *is primitive if and only if the continuous* G_F*-representation* $\widetilde{\tau}'_{\mathbb{C}}$ *is primitive.*

Proof. Clearly $\widetilde{\tau}'_{\mathbb{C}}$ is primitive if and only if $\widetilde{\tau}'$ is primitive. We obtain the claim by applying Lemma 3.11 with $\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}_{\psi,R,m}$ and $\tau = \tau_{\psi,R,m}$. □

3.2.2 Swan conductor exponent

In the sequel, we compute the Swan conductor exponent $\mathrm{Sw}(\tau_{\psi,R,m})$.

We simply write α, β, γ for $\alpha_R, \beta_{R,m}, \gamma_{R,m}$ in Definition 3.1, respectively. We consider the unramified field extension F_r/F of degree r such that $N := F_r(\alpha, \beta, \gamma)$ is Galois over F. Let $T := F_r(\alpha)$ and $M := T(\beta)$. Then we have

$$F \subset F_r \subset T \subset M \subset N.$$

Let L/K be a Galois extension of non-archimedean local fields with Galois group G. Let $\{G^i\}_{i\geq -1}$ denote the upper numbering ramification groups of G in [15, IV§3]. Let $\psi_{L/K}$ denote the Herbrand function of L/K.

引理 3.14. 设 $G := \mathrm{Gal}(N/F)$. 则我们有

$$\psi_{N/F}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \leq 0, \\ d_R t & \text{if } 0 < t \leq \frac{m}{d_R}, \\ p^{2e}d_R t - (p^{2e}-1)m & \text{if } \frac{m}{d_R} < t \leq \frac{p^e+1}{p^e}\frac{m}{d_R}, \\ p^{2e+1}d_R t - (p^e+1)(p^{e+1}-1)m & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$G^i = \begin{cases} G & \text{if } i = -1, \\ \mathrm{Gal}(N/F_r) & \text{if } -1 < i \le 0, \\ \mathrm{Gal}(N/T) & \text{if } 0 < i \le \frac{m}{d_R}, \\ \mathrm{Gal}(N/M) & \text{if } \frac{m}{d_R} < i \le \frac{p^e+1}{p^e}\frac{m}{d_R}, \\ \{1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。我们很容易得到

$$\psi_{T/F}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \le 0, \\ d_R t & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于有限伽罗瓦扩张 L/K，令 $\{\mathrm{Gal}(L/K)_u\}_{u\ge -1}$ 为下编号分歧子群。令 $1 \ne \sigma \in \mathrm{Gal}(M/T)$。令 $b_\sigma = \sigma(\beta) - \beta$，如前所述。由引理 3.4 的证明可知，我们有 $v_E(\beta + b_\sigma) = E_R(\beta)$。若 $v(b_\sigma) > 0$，则通过引理 3.9 证明中的相同论证，我们得到 $b_\sigma = 0$。这意味着 $\sigma = 1$。由 (3.2)，我们有 $v(b_\sigma) = 0$。由 $v_M(\beta) = -m$，我们有 $v_M(\sigma(\varpi_M) - \varpi_M) = m + 1$。因此

$$\mathrm{Gal}(M/T)_u = \begin{cases} \mathrm{Gal}(M/T) & \text{if } u \le m, \\ \{1\} & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \psi_{M/T}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \le m, \\ p^{2e}t - (p^{2e}-1)m & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $1 \ne \sigma \in \mathrm{Gal}(N/M)$。若 $v_N(\sigma(\gamma) - \gamma) > 0$，则与引理 3.9 的证明相同，我们得到 $\sigma(\gamma) = \gamma$。这意味着 $\sigma = 1$。因此 $v_N(\sigma(\gamma) - \gamma) = 0$。令 ϖ_N 为 N 的一个一致化元。由 $v_N(\gamma^{-1}) = (p^e+1)m$，我们有 $v_N(\sigma(\varpi_N) - \varpi_N) = (p^e+1)m + 1$。于是

$$\mathrm{Gal}(N/M)_u = \begin{cases} \mathrm{Gal}(N/M) & \text{if } u \le (p^e+1)m, \\ \{1\} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\psi_{N/M}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \le (p^e+1)m, \\ pt - (p-1)(p^e+1)m & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence the former claim follows from $\psi_{N/F} = \psi_{N/M} \circ \psi_{M/T} \circ \psi_{T/F}$.

We can check

$$G_u = \begin{cases} G & \text{if } u = -1, \\ \mathrm{Gal}(N/F_r) & \text{if } -1 < u \le 0, \\ \mathrm{Gal}(N/T) & \text{if } 0 < u \le m, \\ \mathrm{Gal}(N/M) & \text{if } m < u \le (p^e+1)m, \\ \{1\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

by using the former claim and [15, Propositions 12(c), 13(c) and 15 in IV§3]. Hence the latter claim follows from $G^i = G_{\psi_{N/F}(i)}$. □

Corollary 3.15. *We have* $\mathrm{Sw}(\tau_{\psi,R,m}) = m(p^e+1)/d_R$.

证明。回顾一下，扭 $\tau_{\psi,R,m} \otimes \phi$ 通过一个有限群 $Q_R \rtimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Gal}(F_r(\alpha,\beta,\gamma)/F)$ 分解，其中 r 是某个整数。由于 ϕ 是非分歧的，我们有 $\mathrm{Sw}(\tau_{\psi,R,m}) = \mathrm{Sw}(\tau_{\psi,R,m}\otimes\phi)$。根据引理 3.14 和定理 7.7] （§2VI 中的练习 2），我们有 $\mathrm{Sw}(\tau_{\psi,R,m}\otimes\phi) = m(p^e+1)/d_R$。

□

3.3 Symplectic module associated to Galois representation

令 $\rho\colon\ W_F \to \mathrm{PGL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 表示 $\tau_{\psi,R,m}\colon\ W_F \to \mathrm{GL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 与自然映射 $\mathrm{GL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{PGL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的复合。

Let ρ' be the projective representation associated to $\widetilde{\tau}' = \widetilde{\tau}_{\psi,R,m} \otimes \phi$.

Lemma 3.16. *We have $\rho(W_F) = \rho'(G_F)$, which is finite.*

Proof. Since $\widetilde{\tau}'$ is a smooth irreducible G_F-representation, we have $\widetilde{\tau}'(G_F) = (\tau_{\psi,R,m} \otimes \phi)(W_F)$ ([2, the proof of Lemma 2 in 28.6]). This implies the claim. □

Let F_ρ denote the kernel field of ρ and T_ρ the maximal tamely ramified extension of F in F_ρ. Let

$$H := \mathrm{Gal}(F_\rho/T_\rho) \subset G := \mathrm{Gal}(F_\rho/F).$$

The homomorphism ρ induces an injection $\bar{\rho}\colon G \to \mathrm{PGL}_{p^e}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Let V_R be as in Lemma 2.6.

Let τ denote the composite

$$Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H^1_{\mathrm{c}}(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H^1_{\mathrm{c}}(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi])/\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

Lemma 3.17. *We have an isomorphism $\bar{\rho}(H) \simeq V_R$.*

Proof. Let $L := F^{\mathrm{ur}}(\alpha_R^m, \beta_{R,m}, \gamma_{R,m})$ and $K := F^{\mathrm{ur}}(\alpha_R^m)$. By (3.8), we have

$$W(L/F) \simeq Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}, \quad W(L/K) \simeq H_R.$$

子域 K 是 L 中 F 的最大温和分歧扩张。我们有 $F_\rho \subset L$ 和 $T_\rho = F_\rho \cap K$。我们有同构 $G = W(F_\rho/F) \simeq W_F/$核 $\rho \simeq (Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z})/$核 τ 以及 $H = \mathrm{Gal}(F_\rho/T_\rho) \simeq H_R/(H_R \cap$核 $\tau)$。根据引理 2.9，我们有 $H_R \cap$核 $\tau = Z(H_R)$。因此，由同构 $V_R \xrightarrow{\sim} H_R/Z(H_R)$；$\beta \mapsto (1, \beta, 0)$ 可得所述结论。

□

Let

$$\mathscr{H}_0 := G/H = \mathrm{Gal}(T_\rho/F).$$

Let $\sigma \in \mathscr{H}_0$. We take a lifting $\widetilde{\sigma} \in G \twoheadrightarrow \mathscr{H}_0$ of σ. Let $\mathscr{H}_0$ act on H by $\sigma \cdot \sigma' := \widetilde{\sigma}\sigma'\widetilde{\sigma}^{-1}$ for $\sigma' \in H$. This is well-defined because H is abelian by Lemma 3.17. We regard $H \simeq V_R$ as an $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_0]$-module.

By Lemma 3.12, we can take a positive integer r such that $r\mathbb{Z} \subset \mathrm{Ker}\,\tau$ and $x^{q^r} = x$ for $x \in \mu_{d_{R,m}}$. Let $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ act on $\mu_{d_{R,m}}$ by $1 \cdot x = x^{q^{-1}}$. We take a generator $\alpha \in \mu_{d_{R,m}}$. Let

$$\mathscr{H} := \mu_{d_{R,m}} \rtimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \left\langle \sigma, \tau \mid \sigma^r = 1,\ \tau^{d_{R,m}} = 1,\ \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q \right\rangle, \tag{3.9}$$

where the isomorphism is given by $(\alpha, 0) \mapsto \tau$ and $(1, -1) \mapsto \sigma$. The groups $\mathscr{H}_0$ and $\mathscr{H}$ are supersolvable. We consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z} & \longrightarrow & (Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z})/\,\mathrm{Ker}\,\tau \simeq G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{H} \simeq (Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z})/(H_R \rtimes r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & (Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z})/(\mathrm{Ker}\,\tau \cdot H_R) \simeq \mathscr{H}_0, \end{array}$$

其中每个映射都是典范的且为满射。

引理 3.18. 元素 $\varphi(\alpha,0)$ 和 $\varphi(1,-1)$ 在 $\mathscr{H}_0$ 中分别通过 $x \mapsto \alpha x$ 和 $x \mapsto x^q$ 对 $H \simeq V_R$（其中 $x \in V_R$）起作用。

Proof. These are directly checked. □

We can regard V_R as an $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module via φ. Let ω_R be as in Lemma 2.6(2).

Lemma 3.19. *We have $\omega_R(hx, hx') = \omega_R(x, x')$ for $h \in \mathscr{H}$.*

Proof. The claim for $h = \alpha$ follows from (2.4). For $h = (1, -1)$, the claim follows from $\omega_R(x^q, x'^q) = (f_R(x, x') - f_R(x', x))^q = f_R(x, x') - f_R(x', x) = \omega_R(x, x')$. □

定义 3.20. 设 G 为一个有限群。设 V 为一个 $\mathbb{F}_p[G]$-模，且 $\dim_{\mathbb{F}_p} V < \infty$。设 ω: $V \times V \to \mathbb{F}_p$ 为一个辛形式。若 ω 非退化，且对 $g \in G$ 和 $v, v' \in V$ 满足 $\omega(gv, gv') = \omega(v, v')$，则称这一对 (V, ω) 为辛的。

Lemma 3.21. *The $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module (V_R, ω_R) is symplectic.*

Proof. The claim follows from Lemma 2.6(2) and Lemma 3.19. □

Definition 3.22. The $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_0]$-module (V_R, ω_R) is called a symplectic module associated to $\tau_{\psi,R,m}$.

Definition 3.23. Let $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F};\ x \mapsto x^q$. For $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$, we set $f^\sigma(x) := \sum_{i=0}^n \sigma(a_i) x^i$.

Let k be a field. We say that a polynomial $f(x) \in k[x]$ is reduced if the ring $k[x]/(f(x))$ is reduced.

Lemma 3.24. *Let $E(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$ be a reduced polynomial. Let $V := \{\beta \in \mathbb{F} \mid E(\beta) = 0\}$.*

(1) *Assume that $E(x)$ is monic and V is stable under σ. Then we have $E(x) \in \mathbb{F}_q[x]$.*

(2) *Let r be a positive integer. Assume that V is stable under μ_r-multiplication. Then we have $E(\alpha x) = \alpha E(x)$ for $\alpha \in \mu_r$.*

Proof. Recall that $f(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$ is reduced if and only if $f'(0) \neq 0$.

We show (1). By the assumption, we have $E^\sigma(\beta) = (E(\beta^{q^{-1}}))^q = 0$ for any $\beta \in V$. Since $E(x)$ is separable, there exists $\alpha \in \mathbb{F}^\times$ such that $E^\sigma(x) = \alpha E(x)$. Since $E(x)$ is monic, we have $\alpha = 1$. Hence we have the claim.

We show (2). Let $\alpha \in \mu_r$. By the assumption, $E(\alpha\beta) = 0$ for any $\beta \in V$. Since $E(x)$ is separable, we have $E(\alpha x) = cE(x)$ with a constant $c \in \mathbb{F}^\times$. By considering the derivatives of $E(\alpha x)$, $cE(x)$ and substituting $x = 0$, we have $\alpha = c$ by $E'(0) \neq 0$. Hence the claim follows. □

Definition 3.25. Let $f(x) \in \mathscr{A}_q$.

(1) 如果存在分解 $f(x) = f_1(f_2(x))$，且 $f_i(x) \in \mathscr{A}_q$，那么当对于 $i \in \{1, 2\}$ 有 $\deg f_i > 1$ 时，称该分解为非平凡的。(2) 如果 $f(x) \in \mathscr{A}_q$ 不存在非平凡分解 $f(x) = f_1(f_2(x))$，且 $f_i(x) \in \mathscr{A}_q$，则称 $f(x) \in \mathscr{A}_q$ 为素的。

定义 3.26. 设 (V,ω) 是一个辛 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模。若 V 不存在非零全迷向 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-子模，则称 (V,ω) 是完全各向异性的。

For an $\mathbb{F}_p$-subspace $W \subset V$, let $W^\perp := \{v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \text{ for all } w \in W\}$.

Proposition 3.27. *The symplectic $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module (V_R,ω_R) is completely anisotropic if and only if there does not exist a non-trivial decomposition $E_R(x) = f_1(f_2(x))$ with $f_i(x) \in \mathscr{A}_q$ such that $f_2(\alpha x) = \alpha f_2(x)$ for $\alpha \in \mu_{d_{R,m}}$ and $V_{f_2} := \{\beta \in \mathbb{F} \mid f_2(\beta) = 0\}$ satisfies $V_{f_2} \subset V_{f_2}^\perp$.*

Proof. Assume that there exists such a decomposition $E_R(x) = f_1(f_2(x))$. Since the decomposition is non-trivial, we have $V_{f_2} \neq \{0\}$. Hence V_{f_2} is a non-zero totally isotropic $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-submodule of V_R. Hence V_R is not completely anisotropic.

假设 V_R 不是完全各向异性的。我们取一个非零的全迷向$\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-子模 $V' \subset V_R$。由第 1]，章中的 [13, 4，存在一个首一约化多项式 $f(x) \in \mathscr{A}_\mathbb{F}$，使得 $V' = \{\beta \in \mathbb{F} \mid f(\beta) = 0\}$。由于 V'在 σ作用下稳定，根据引理 3.24(1)，我们有 $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$。由于 V'在 τ作用下稳定，根据引理 3.18 和引理 3.24(2)，对于$\alpha \in \mu_{d_R}$、$_m$，我们有 $f(\alpha x) = \alpha f(x)$。根据定理 1]中的 [13,，存在 $f_1(x)$ $r(x) \in \mathscr{A}_q$，使得 $E_R(x) = f_1(f(x)) + r(x)$，且 deg $r(x)$ <deg $f(x)$。对于 $f(x)$的任意一个根$\beta \in V'$，由 $E_R(\beta) = 0$，我们有 $r(\beta) = 0$。由于 $f(x)$是可分的，因此 $r(x)$可被 $f(x)$整除。因此，由 deg $r(x)$ <deg $f(x)$，我们有 $r(x) \equiv 0$。根据定义，我们有 $V' \subset V'^\perp$。至此，逆命题得证。 □

推论 3.28. (1) W_F-表示$\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 是本原的，当且仅当辛 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模（$V_R$,$\omega_R$）是完全各向异性的。

(2) W_F-表示$\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 是本原的，当且仅当不存在非平凡分解 $E_R(x) = f_1(f_2(x))$，其中 f_i $(x) \in \mathscr{A}_q$，且满足 $f_2(\alpha x) = \alpha f_2(x)$，对于$\alpha \in \mu_{d_{R,\ m}}$，并且 $V_{f_2} := \{\beta \in \mathbb{F} \mid f_2(\beta) = 0\}$ 满足 $V_{f_2} \subset V_{f_2}^\perp$。

(3) 若 $E_R(x) \in \mathscr{A}_q$ 是素数，则 W_F-表示$\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 是本原的。

(4) 若 $R(x) = a_e x^{p^e}$ 且 $\mathbb{F}_p(\mu_{d_{R,\ m}}) = \mathbb{F}_{p^{2e}}$，则 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模 V_R 是不可约的。 W_F-表示$\tau_{\psi,\ R,\ m}$ 是本原的。若 gcd$(p^e+1, m) = 1$，则条件$\mathbb{F}_p(\mu_{d_{R,\ m}}) = \mathbb{F}_{p^{2e}}$ 成立。

证明。断言 (1) 由推论 3.13、引理 3.17 以及 [11, 定理 4.1] 得出。

断言 (2) 由断言 (1) 和命题 3.27 得出。断言 (3) 立即由 (2) 得出。

我们证明 (4)。假设存在一个非零的 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-子模 $W \subset V_R$ ={$\beta \in \mathbb{F}$ |($a_e x^{p^e}$) $^{p^e} + a_e x = 0$}。取一个非零元素 $\beta \in W$。根据 $\mathbb{F}_p(\mu_{d_{R,\ m}}) = \mathbb{F}_{p^{2e}}$，有 $\mathbb{F}_{p^{2e}}\beta = \mathbb{F}_p(\mu_{d_{R,\ m}})$ $\beta \subset W$。由于 V_R 是一个次数为 p^{2e} 的可分多项式 $E_R(x)$ 的根集，因此有 $|V_R| = p^{2e}$。于是 $W = V_R = \mathbb{F}_{p^{2e}}\beta$。故第一个断言成立。第二个断言由第一个断言和 [11, 定理 4.1] 得出。如果 gcd$(p^e+1, m) = 1$，则有 $d_{R,\ m} = d_R = p^e + 1$。因此，第三个断言由$\mathbb{F}_p(\mu_{p^e+1})$ $= \mathbb{F}_{p^{2e}}$ 得出。 □

例 3.29. 对于正整数 s，我们考虑集合

$$\mathcal{A}_{q,s} := \left\{ \varphi(x) \in \mathbb{F}_q[x] \;\middle|\; \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{p^{si}} \right\},$$

其被视为一个环，其乘法为 $\varphi_1 \circ \varphi_2 := \varphi_1(\varphi_2(x))$，其中 $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{A}_{q,\ s}$。接下来，我们给出一些使得 $E_R(x)$ 为素的例子。我们记 $d_R = p^t + 1$with $t \geq 0$。于是有 $E_R \in \mathcal{A}_{q,\ t}$。我们记 $q = p^f$。假设 $f \mid t$。我们有

$$E_R(x) = \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^{e+i}} + \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^{e-i}}. \tag{3.10}$$

根据 $f \mid t$，我们有环同构 $\Phi\colon \mathcal{A}_{q,\ t} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q[y]$；$\sum_{i=0}^{r} c_i x^{p^{ti}} \mapsto \sum_{i=0}^{r} c_i y^i$，其中 $\mathbb{F}_q[y]$ 是通常意义下的多项式环。多项式 $E_R(x) \in \mathscr{A}_q$ 是素的，当且仅当 $\Phi(E_R(x))$ 在通常意义下是 $\mathbb{F}_q[y]$ 中的不可约多项式。回顾一下，若多项式 $\sum_{i=0}^{r} c_i y^i \in \mathbb{F}_q[y]$ 满足对于 $0 \leq i \leq r$ 有 $c_i = c_{r-i}$，则称其为互反多项式。由 (3.10)，我们知道 $\Phi(E_R(x))$ 是一个互反多项式。首一不可约互反多项式的数量在 [3, 定理 2 和 3] 中计算。

In general, we do not know a necessary and sufficient condition on $R(x)$ for $E_R(x)$ to be prime. The number of prime elements in $\mathcal{A}_{q,s}$ is calculated in [4] and [12].

Proposition 3.30. *Assume $d_{R,m} \in \{1, 2\}$. There exists an unramified finite extension F'/F such that $\tau_{\psi,R,m}|_{W_{F'}}$ is imprimitive.*

证明。对于正整数 r，令 F_r 为 F 的次数为 r 的非分歧扩张。取一个非零元素 $\beta \in V_R$。令 t 为满足 $\mathbb{F}_{q^t} = \mathbb{F}_q(\beta)$ 的正整数。令 $\mathscr{H}_t \subset \mathscr{H}$ 为由 σ^t、τ 生成的子群。由于 $d_{R,\ m} \leq 2$，子空间 $W_R := \mathbb{F}_p\beta \subset V_R$ 是一个全迷向的 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_t]$-子模。因此，$V_R$ 不是一个完全各向异性的 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_t]$-模。于是，根据 [11, 定理 4.1]，$\tau_{\psi,\ R,\ m}|_{W_{F_t}}$ 是非本原的。 □

Lemma 3.31. *The W_{T_ρ}-representation $\tau_{\psi,R,m}|_{W_{T_\rho}}$ is imprimitive.*

Proof. We take a non-zero element $\beta \in V_R$. Then $\mathbb{F}_p\beta$ is a totally isotropic symplectic submodule of the symplectic module V_R associated to $\tau_{\psi,R,m}|_{W_{T_\rho}}$. Hence $\tau_{\psi,R,m}|_{W_{T_\rho}}$ is imprimitive by Corollary 3.28(1). □

3.4 Root system associated to irreducible $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module

A root system associated to an irreducible $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module is defined in [11]. We determine the root system associated to V_R in the situation of Corollary 3.28(3).

We recall the definition of a root system.

Definition 3.32. ([11, §7])

(1) Let Φ be the group of the automorphisms of the torus $(\mathbb{F}^\times)^2$ generated by the automorphisms $\theta\colon (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha^p, \beta^p)$ and $\sigma\colon (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha^{q^{-1}}, \beta)$. A Φ-orbit of $(\mathbb{F}^\times)^2$ is called a *root system*.

(2) Let $W = \Phi(\alpha, \beta)$ be a root system. Let

$a = a(W)$ be the minimal positive integer with $\alpha^{q^a} = \alpha$,

$b = b(W)$ the minimal positive integer with $\alpha^{p^b} = \alpha^{q^x}$, $\beta^{p^b} = \beta$ with $x \in \mathbb{Z}$, and

$c = c(W)$ the minimal non-negative integer with $\alpha^{p^b} = \alpha^{q^c}$.

令 $e' = e'(W)$ 和 $f' = f'(W)$ 分别为 α 和 β 的阶。这些整数与 W 中的 (α, β) 无关。

(3) 令 $\mathscr{H}_{d,\ r}:=\langle\sigma、\ \tau\mid\tau^d=1、\ \ \sigma^r=1、\ \ \sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^q\rangle$，其中 $q^r\equiv 1$（模 d）。

(4) We say that a root system W *belongs to* $\mathscr{H}_{d,r}$ if $e'\mid d$ and $af'\mid r$.

(5) Let $W=\Phi(\alpha,\beta)$ be a root system which belongs to $\mathscr{H}_{d,r}$. Let $\overline{M(W)}$ be the $\mathbb{F}$-module with the basis

$$\{\theta^i\sigma^j m\mid 0\le i\le b-1,\ 0\le j\le a-1\}$$

and with the action of $\mathscr{H}$ by

$$\tau m=\alpha m,\quad \sigma^a m=\beta m,\quad \theta^b m=\sigma^{-c}m.$$

Theorem 3.33. *([11, Theorems 7.1 and 7.2])*

(1) *There exists an irreducible $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_{d,r}]$-module $M(W)$ such that $M(W)\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}$ is isomorphic to $\overline{M(W)}$ as $\mathbb{F}[\mathscr{H}_{d,r}]$-modules.*

(2) *The map $W\mapsto M(W)$ defines a one-to-one correspondence between the set of root systems belonging to $\mathscr{H}_{d,r}$ and the set of isomorphism classes of irreducible $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_{d,r}]$-modules.*

We go back to the original situation. Assume that $R(x)=a_e x^{p^e}$ and $\mathbb{F}_p(\mu_{d_{R,m}})=\mathbb{F}_{p^{2e}}$. Let $\mathscr{H}$ be as in (3.9). In the above notation, we have $\mathscr{H}=\mathscr{H}_{d_{R,m},r}$. As in Corollary 3.28(3), the $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module V_R is irreducible.

Proposition 3.34. *We write $q=p^f$. Let $e_1:=\gcd(f,2e)$ and $\beta:=\mathrm{Nr}_{q/p^{e_1}}(-a_e^{-(p^e-1)})$. Let $\alpha\in\mu_{d_{R,m}}$ be a primitive $d_{R,m}$-th root of unity. We consider the root system $W:=\Phi(\alpha,\beta)$.*

(1) *We have $a(W)=2e/e_1$ and $b(W)=e_1$. Further, $c(W)$ is the minimal non-negative integer such that $fc(W)\equiv e_1\pmod{2e}$.*

(2) *The root system W belongs to $\mathscr{H}$.*

(3) *We have an isomorphism $V_R\simeq M(W)$ as $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-modules.*

证明。我们证明 (1)。我们将 a、b、c 分别简记为 $a(W)$ $b(W)$ $c(W)$。根据定义，a 是满足 $\alpha^{q^a}=\alpha$ 的最小自然数。根据 $\mathbb{F}_p(\alpha)=\mathbb{F}_{p^{2e}}$，$a$ 是满足 $fa\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2e)$ 的最小正整数。因此，我们得到 $a=2e/e_1$。

By definition, b is the minimal natural integer such that $\alpha^{p^b}=\alpha^{q^x}$ with some integer x and $\beta^{p^b}=\beta$. The first condition implies that $fx\equiv b\pmod{2e}$. Hence b is divisible by e_1. By $\beta\in\mathbb{F}_{p^{e_1}}^\times$, we have $\beta^{p^b}=\beta$ if $e_1\mid b$. Hence $b=e_1$.

By definition, c is the minimal non-negative integer such that $\alpha^{p^b}=\alpha^{q^c}$. This is equivalent to $e_1=b\equiv fc\pmod{2e}$.

We show (2). The order e' of α equals $d_{R,m}$. Let f' be the order of β. It suffices to show $af'\mid r$. By the choice of r, we have $\alpha^{q^r}=\alpha$. Hence $2e\mid fr$ by $\mathbb{F}_{p^{2e}}=\mathbb{F}_p(\alpha)$, and $a\mid r$. These imply that $\mathbb{F}_{p^{2e}}\subset\mathbb{F}_{q^a}\subset\mathbb{F}_{q^r}$.

设 $\eta\in V_R\setminus\{0\}$。根据 $\eta^{p^{2e}}=-a^{-(p^e-1)_e}$　　η、$a_e\in\mathbb{F}_q^\times$ 和 $2e\mid fr$，我们计算得出

$$\eta^{q^r}=(\eta^{p^{2e}-1})^{\frac{q^r-1}{p^{2e}-1}}\eta=\mathrm{Nr}_{q^r/p^{2e}}(-a_e^{-(p^e-1)})\eta=\mathrm{Nr}_{q^a/p^{2e}}(-a_e^{-(p^e-1)})^{r/a}\eta. \tag{3.11}$$

限制映射 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^a}/\mathbb{F}_{p^{2e}}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_{p^{e_1}})$ 是一个同构，这是由于 $a = 2e/e_1$。根据 $a_e \in \mathbb{F}_q^\times$，我们有 $\mathrm{Nr}_{q^a/p^{2e}}(-a^{-(p^e-1)_e}) = \beta$。因此，根据 (3.11)，$\eta^{q^r} = \beta^{r/a}\eta$。由于根据引理 3.18，$\eta^{q^r} = \eta$，我们得到 $\beta^{r/a} = 1$。因此，$f' \mid (r/a)$。

我们证明 (3)。令 $\eta \in V_R \setminus \{0\}$。与 (3.11) 类似，我们有 $\sigma^a\eta = \eta^{q^a} = \beta\eta$。根据定义和引理 3.18，我们有 $\tau\eta = \alpha\eta$。由 (2)，$\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模 V_R 满足 [11, 引理 7.3] 中的假设。因此，根据 [11, 引理 7.3]，$\{0\} \neq M(W) \subset V_R$。由推论 3.28(4) 中 V_R 的不可约性，我们得到 $M(W) = V_R$。

□

定理 8.1]确定了不可约 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模具有辛形式的充要条件，其中 [11, 。我们回顾这一结果。

定理 3.35.（*[11, 定理 8.1]*）设 $W = \Phi(\alpha, \beta)$ 为一个根系。不可约$\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模 $M(W)$ 具有辛形式，当且仅当

(A) $a(W) \equiv 0 \pmod 2$, $\alpha \in \mu_{q^{a(W)/2}+1}$ *and* $\beta = -1$,

(B) $b(W)$ $c(W) \equiv 0 \pmod 2$, $\alpha \in \mu_{p^{b(W)/2}+q^{c(W)/2}}$ *and* $\beta \in \mu_{p^{b(W)/2}+1}$, *or*

(C) $b(W) \equiv 0 \pmod 2$, $c(W) \equiv a(W) \pmod 2$, $\alpha \in \mu_{p^{b(W)/2}+q^{(a(W)+c(W))/2}}$ *and* $\beta \in \mu_{p^{b(W)/2}+1}$.

There are two isomorphism classes of symplectic structures on $M(W)$ in the case A, $p \neq 2$ and one in all other cases.

Lemma 3.36. *Let W be as in Proposition 3.34. Let $v_2(\cdot)$ denote the 2-adic valuation on $\mathbb{Q}$.*

(1) *Assume $v_2(e) \geq v_2(f)$. Then the module $M(W)$ is of type A in Theorem 3.35.*

(2) *Assume $v_2(e) < v_2(f)$. Then we have $a(W) \equiv 1 \pmod 2$, $b(W) \equiv 0 \pmod 2$ and $(b(W)/2) \mid e$. Hence we have $\beta \in \mu_{p^{b(W)/2}+1}$.*

(i) *If $c(W) \equiv 0 \pmod 2$, the module $M(W)$ is of type B in Theorem 3.35.*

(ii) *If $c(W) \equiv 1 \pmod 2$, the module $M(W)$ is of type C in Theorem 3.35.*

证明。我们证明 (1)。回顾一下，$e_1 =$ 最大公约数$(f, 2e)$ 和 $\beta = \mathrm{Nr}_{q/p_1}(-a^{-(p^e-1)_e})$。我们有$a(W) = 2e/e_1 \equiv 0$(模 2)。我们有 $e_1 \mid e$和 $f/e_1 \equiv 1$(模 2)。由 $(p^{e_1}-1)$ 得 $\mid (p^e-1)$,

$$\beta = (-1)^{\frac{f}{e_1}}\left(a_e^{-\frac{p^e-1}{p^{e_1}-1}}\right)^{q-1} = -1,$$

其中最后一个等式使用了 $a_e \in \mathbb{F}_q^\times$。由 $fa(W)/2 = fe/e_1$和 $q = p^f$，可得 $\alpha^{q^{a(W)/2}+1} = \alpha^{p^{fe/e_1}+1}$。由于 fe/e_1可被 e整除，且 f/e_1为奇数，因此 $d_{R,\ m} \mid (p^e+1) \mid (p^{fe/e_1}+1)$。于是得到 $\alpha \in \mu_{q^{a(W)/2}+1}$。因此结论成立。

我们证明 (2)。回顾 $b(W) = e_1$。前面的断言显然成立。由 $(e_1/2) \mid e$，可得 $(p^{e_1/2}-1) \mid (p^e-1)$。根据 β 和 $a_e \in \mathbb{F}_q^\times$ 的定义，我们得到

$$\beta^{p^{\frac{e_1}{2}}+1} = \left(a_e^{-\frac{p^e-1}{p^{e_1/2}-1}}\right)^{q-1} = 1.$$

因此 $\beta \in \mu_{p^{b(W)/2}+1}$。假设 $c(W)$ 是偶数。根据命题 3.34(1)，我们写作 $(c(W)/2)f = (e_1/2)+le$，其中 $l \in \mathbb{Z}$。由 $e_1 =$ 最大公约数$(f, 2e)$ 可知，l 是奇数。因此 $(p^e+1) \mid (p^{le}+1)$。这意味着 $\alpha \in \mu_{p^{b(W)/2}+q^{c(W)/2}}$。由此得到 (2)(i)。其余结论可用类似方法证明。

□

3.4.1 Künneth formula and primary module

Classification results in [11] We recall classification results on completely anisotropic symplectic modules given in [11] restricted to the case $p \neq 2$.
定理3.37。（*[11, 定理9.1]*）设（V, ω）是 $= \bigoplus_{i=1}^{n}$（V_i, ω_i）的不可约辛 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模的直和。假设 $p \neq 2$。那么（V, ω）是完全各向异性的，当且仅当，对于每个同构类，在 $V_1, \ldots, V_n$中，B型或C型模至多出现一次，而A型模至多出现两次。

假设 $p \neq 2$。根据定理 3.35，令 $(M(W), 0)$ 表示 $M(W)$ 上唯一的 B 型或 C 型辛模。在 $p \neq 2$ 且 $M(W)$ 为 A 型的情况下，令 $(M(W), 0)$、$(M(W), 1)$ 表示 $M(W)$ 上的两个辛模。我们用 $(M(W), 2)$ 表示 $M(W) \oplus M(W)$ 上的完全各向异性辛模，其中 $M(W)$ 为 A 型。

Theorem 3.38. *([11, Theorem 8.2]) Each completely anisotropic symplectic $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module is isomorphic to one and only one symplectic module of the form*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (M(W_i), \nu_i),$$

where $W_1, \ldots, W_n$ are mutually different root systems belonging to $\mathscr{H}$.

Let k be a positive integer. Let $R := \{R_i\}_{1 \leq i \leq k}$ with $R_i \in \mathscr{A}_q$. We consider the k-dimensional affine smooth variety X_R defined by

$$a^p - a = \sum_{i=1}^{k} x_i R_i(x_i)$$

在 $\mathbb{A}^{k+1}_{\mathbb{F}_q}$ 中。乘积群 $Q_R := Q_{R_1} \times \cdots \times Q_{R_k}$ 以与 (2.5) 类似的方式自然地作用于 X_R。令 $\mathbb{Z}$ 自然地作用于 Q_R。令 $\psi \in \mathbb{F}_p^{\vee} \setminus \{1\}$。我们将 $H_c^k(X_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ 视为一个 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$-表示。记号与 (3.3) 中相同。令 $m = \{m_i\}_{1 \leq i \leq k}$，其中 m_i 是一个正整数。我们有同态

$$\Theta_{R,m} \colon W_F \to Q_R \rtimes \mathbb{Z};\ \sigma \mapsto ((a_{R_i,\sigma}^{m_i}, b_{R_i,\sigma}, c_{R_i,\sigma})_{1 \leq i \leq k}, n_\sigma). \tag{3.12}$$

Definition 3.39. We define a smooth W_F-representation $\tau_{\psi,R,m}$ to be the inflation of the $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$-representation $H_c^k(X_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ by $\Theta_{R,m}$.

Lemma 3.40. *We have an isomorphism $\tau_{\psi,R,m} \simeq \bigotimes_{i=1}^{k} \tau_{\psi,R_i,m_i}$ as W_F-representations.*

Proof. Let $Q_{R_i,\mathbb{Z}} := Q_{R_i} \rtimes \mathbb{Z}$ and $\Theta_{R_i,m_i} \colon W_F \to Q_{R_i,\mathbb{Z}}$ be as in (3.6). Let

$$\delta' \colon Q_R \rtimes \mathbb{Z} \to Q_{R_1,\mathbb{Z}} \times \cdots \times Q_{R_k,\mathbb{Z}};\ ((g_i)_{1 \leq i \leq k}, n) \mapsto (g_i, n)_{1 \leq i \leq k}.$$

Each $H_c^1(C_{R_i,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ is regarded as a $Q_{R_i,\mathbb{Z}}$-representation. By the Künneth formula, we have an isomorphism $H_c^k(X_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi] \simeq \bigotimes_{i=1}^{k} (H_c^1(C_{R_i,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi])$ as $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$-representations, where the right hand side is regarded as a $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$-representation via δ'. We consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} W_F & \xrightarrow{\delta} & W_F^k \\ {\scriptstyle \Theta_{R,m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_{R_1,m_1} \times \cdots \times \Theta_{R_k,m_k}} \\ Q_R \rtimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta'} & Q_{R_1,\mathbb{Z}} \times \cdots \times Q_{R_k,\mathbb{Z}}, \end{array}$$

where δ is the diagonal map. Hence the claim follows. □

注 3.41. 设 $+\colon \prod_{i=1}^k Z(Q_{R_i}) \to \mathbb{F}_p;\ (1,0,\gamma_i)_{1\le i\le k} \mapsto \sum_{i=1}^k \gamma_i$ 且 $\overline{Q}_R :=$ $Q_R/$ 核 $+$。$Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ 在 $H_c^k(X_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的作用可通过 $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ 分解。令 $\overline{H}_R$ 表示 $H_{R_1} \times \cdots \times H_{R_k}$ 在 $Q_R \to \overline{Q}_R$ 下的像。群 $\overline{H}_R$ 是一个超特殊 p-群。商群 $\overline{H}_R/Z(\overline{H}_R)$ 与 $\bigoplus_{i=1}^k V_{R_i}$ 同构。此外，$\overline{Q}_R/\overline{H}_R$ 是超可解的。

Lemma 3.42. *The W_F-representation $\tau_{\psi,R,m}$ is irreducible.*

Proof. The $\overline{H}_R$-representation $H_c^k(X_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ is irreducible by [8, 16.14(2) Satz]. The claim follows from this. □

Let ρ_{ψ,R_i,m_i} denote the projective representation associated to τ_{ψ,R_i,m_i}. Let F_i denote the kernel field of ρ_{ψ,R_i,m_i} and T_i the maximal tamely ramified extension of F in F_i. The field T_i is called the tame kernel field of ρ_{ψ,R_i,m_i}. Let $F_R := F_1 \cdots F_k$.

Lemma 3.43. *Let $\rho_{\psi,R,m}$ be the projective representation associated to $\tau_{\psi,R,m}$. The kernel field of $\rho_{\psi,R,m}$ is F_R.*

Proof. By Lemma 3.40, we can check $\operatorname{Ker}\rho_{\psi,R,m} = \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker}\rho_{\psi,R_i,m_i}$. The claim follows from this. □

设 T_R 为 F_R 中 F 的最大温和分歧扩张。我们有一个限制映射 $V_R \hookrightarrow \prod_{i=1}^k \mathrm{Gal}(F_i/T_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^k V_{R_i}$。那么 $V_R := \mathrm{Gal}(F_R/T_R)$ 具有一个在 $\mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}(T_R/F)]$ 的作用下保持不变的双线性形式（[11, §4]）。V_R 上的形式由 $\omega_R := \sum_{i=1}^k \omega_{R_i}$ 给出。

Let ω_{R_i} be the form on V_{R_i} in Lemma 2.6(2). We give a recipe to make an example of $(M(W), 2)$ below.

Proposition 3.44. *Assume $k = 2$. Let $R_i(x) = a_{e,i}x^{p^e} \neq 0$ for $i \in \{1,2\}$. Assume*

$$m_1 \neq m_2, \quad d := d_{R_1,m_1} = d_{R_2,m_2}.$$

(1) *We have an isomorphism $V_R \simeq V_{R_1} \oplus V_{R_2}$.*

(2) *We have $T_R = T_1 \cdot T_2$.*

(3) *Assume that $p \neq 2$, $v_2(e) \geq v_2(f)$ and $\mathbb{F}_p(\mu_d) = \mathbb{F}_{p^{2e}}$. If (V_R, ω_R) is completely anisotropic as a symplectic $\mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}(T_R/F)]$-module, V_R is isomorphic to a primary module $(M(W), 2)$ with a root system W.*

证明。由引理 2.9 和引理 3.12，存在一个非分歧有限扩张 $E$of F，使得 $F_i \subset E(\alpha_{R_i}^{m_i}, \beta_{R_i,m_i})$ 对于 $i = 1$、2 和 $E(\alpha_{R_i}^{m_i}, \beta_{R_i,m_i})/E$ 是伽罗瓦扩张。我们令 $T := E(\alpha_{R_i}^{m_i}) = E(\varpi^{1/d})$，并令 $E_i := T(\beta_{R_i,m_i})$，其中 $i = 1$ 为 2。令 $n_i := m_i d/d_R =$ $m_i/$最大公约数(d_R, m_i)。令 $\{\mathrm{Gal}(E_i/T)^v\}_{v\geq -1}$ 为 $\mathrm{Gal}(E_i/T)$ 的上编号分歧子群。与引理 3.14 的证明类似，我们有

$$\mathrm{Gal}(E_i/T)^v = \begin{cases} \mathrm{Gal}(E_i/T) & \text{if } v \leq n_i, \\ \{1\} & \text{if } v > n_i. \end{cases}$$

设 $H := E_1 \cap E_2$。由于 E_i/T 是伽罗瓦扩张，因此 H/T 也是伽罗瓦扩张。根据 [15, IV§3], 中的命题 14，子群 $\mathrm{Gal}(H/T)^v$ 在 $v \leq n_i$ 时等于 $\mathrm{Gal}(H/T)$，在 $v > n_i$ 时等于 $\{1\}$。因此，我们由 $n_1 \neq n_2$ 得出 $\mathrm{Gal}(H/T) = \{1\}$。我们得到 $H = T$。因此，我们有一个同构。

$\mathrm{Gal}(E_1E_2/T) \simeq \mathrm{Gal}(E_1/T) \times \mathrm{Gal}(E_2/T) \simeq V_{R_1} \oplus V_{R_2}$。扩张 E_1E_2/T 是全分歧扩张，且其次数是 p 次幂。因此， T 是 $E_1 \cdot E_2$ 中 E 的最大温和分歧扩张。因此， $T_R = F_R \cap T$。我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(E_1E_2/T) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Gal}(E_1/T) \times \mathrm{Gal}(E_2/T) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Gal}(F_R/T_R) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Gal}(F_1/T_1) \times \mathrm{Gal}(F_2/T_2), \end{array}$$

where every map is the restriction map. The right vertical isomorphism follows from Lemma 3.17. Clearly g is injective. By the commutative diagram, g is bijective. Hence we obtain (1).

By the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F_R/T_R) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F_R/F) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(T_R/F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \\ 1 & \longrightarrow & V_{R_1} \oplus V_{R_2} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F_1/F) \times \mathrm{Gal}(F_2/F) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(T_1/F) \times \mathrm{Gal}(T_2/F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

and injectivity of g_1, the map g_2 is injective. Hence $T_R = T_1T_2$.

我们证明 (3)。设 $r := [E : F]$ 和 $\mathscr{H}_{d,r} := \mu_d \rtimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ 如 (3.9) 中所示。我们将 $\mathrm{Gal}(T/F)$ 与 $\mathscr{H}_{d,r}$ 进行等同。根据 $T_R \subset T$， V_R, V_{R_i} 自然地视为 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_{d,r}]$-模。设 α 为一个本原 d-次单位根。令 $W := \Phi(\alpha, -1)$。于是，我们得到一个作为 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_{d,r}]$-模的同构 $V_{R_i} \simeq M(W)$，并且由命题 3.34(3)、引理 3.36(1) 和 $d_{R_1,m_1} = d_{R_2,m_2}$ 可知， V_{R_i} 是 A 型的。这意味着存在一个作为 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}_{d,r}]$-模的同构$V_{R_1} \simeq V_{R_2}$。因此，根据 (V_R, ω_R) 是完全各向异性的假设以及 $(M(W), 2)$ 的定义，即可得出所要证明的结论。□

例 3.45. 假设 $p \neq 2$。令 $e = f = 1$, $R_1(x) = x^p$ 和 $R_2(x) = ax^p \in \mathbb{F}_p[x] \setminus \{0\}$ $m_1 \neq m_2$ $d_{R_1\,m_1} = d_{R_2\,m_2} = p+1$ $V_{R_i} = \{x \in$。我们假设 and ,,。对于 , , 我们有。$\mathbb{F} \mid x^{p^2} + x = 0\}$ $i = 1\ 2$

设 $W \subset V_{R_1} \oplus V_{R_2}$ 为一个全迷向的 $\mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}(T_R/F)]$-子空间。假设 $W \neq \{0\}$。取一个非零元素 $(x_1, x_2) \in W$。我们有 $f_{R_1}(x, y) = -xy^p$, $f_{R_2}(x, y) = -axy^p$, 因此对于任意 $\xi \in \mu_{p+1}$, 有 $\omega_R((x_1, x_2), (\xi x_1, \xi x_2)) = (x_1^{p+1} + ax_2^{p+1})(\xi - \xi^p) = 0$。因此 $x_1^{p+1} + ax_2^{p+1} = 0$ 且 $x_2 \neq 0$。存在 $\eta \in \mathbb{F}$ 使得 $\eta^{p+1} = -a$ 且$x_1 = \eta x_2$。根据 $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{F}_p(\mu_{p+1})$, 我们有 $W_1 := \{(\eta x, x) \mid x \in V_{R_2}\} \subset W$。我们还有 $W_2 := \{(\eta^p x, x) \mid x \in V_{R_2}\} \subset W$。令 $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ 为勒让德符号。若 $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, 则有 $\eta \in \mathbb{F}_p$ 且 $\eta^2 = -a$。这意味着 $\left(\frac{-a}{p}\right) = 1$。

Assume $\left(\frac{-a}{p}\right) = -1$. Then $W = W_1 \oplus W_2 = V_{R_1} \oplus V_{R_2}$ by $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. This is a contradiction. Hence $V_{R_1} \oplus V_{R_2}$ is completely anisotropic if $\left(\frac{-a}{p}\right) = -1$.

If $\left(\frac{-a}{p}\right) = 1$, we have $W_1 = W_2$, which is the unique non-zero totally isotropic $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-subspace. Hence $V_{R_1} \oplus V_{R_2}$ is not completely anisotropic.

4 Geometric interpretation of imprimitivity

Through this section, we always assume $p \neq 2$. Our aim in this section is to show Theorem 4.13. To show the theorem, we use the explicit understanding of the automorphism group of C_R and the mechanism of taking quotients of C_R by certain abelian groups, which are developed in [1] and [6].

4.1 Quotient of C_R and description of $\tau_{\psi,R,m}$

Let C_R be as in (2.7). In this subsection, we always assume that there exists a finite étale morphism

$$\phi\colon C_R \to C_{R_1};\ (a,x) \mapsto (a-\Delta(x), r(x)), \tag{4.1}$$

其中，$\Delta(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ 和 $r(x)$ $R_1(x) \in \mathscr{A}_q$ 满足 $d_{R,m} \mid d_{R_1}$ 且 $r(\alpha x) = \alpha r(x)$ 对于$\alpha \in \mu_{d_{R,m}}$ 成立。由于 ϕ 是 ´étale 的，$r(x)$ 是一个无重因子多项式。因此，$r'(0) \neq 0$。根据上述假设，

$$xR(x) = r(x)R_1(r(x)) + \Delta(x)^p - \Delta(x) \tag{4.2}$$

$$r'(0) \neq 0, \quad d_{R,m} \mid d_{R_1}, \quad r(\alpha x) = \alpha r(x) \quad \text{for } \alpha \in \mu_{d_{R,m}}. \tag{4.3}$$

Let e' be a non-negative integer such that $\deg R_1(x) = p^{e'}$ and $e' \leq e$. Then $\deg r(x) = p^{e-e'}$ by (4.2).

对于 $\alpha \in \mu_{d_{R,\ 根据、\ m}} \mid d_{R_1}$ 和 (2.3)，有 $\alpha R_1(\alpha x) = R_1(x)$。因此，对于 $\alpha \in \mu_{d_{R,\ m}}$，根据 (4.2)，有 $\Delta(\alpha x) - \Delta(x) \in \mathbb{F}_p$。我们有 $\Delta(\alpha x) = \Delta(x)$，因为 $\Delta(\alpha x) - \Delta(x)$ 的常数项为零。

Lemma 4.1. *Let $\phi\colon C_R \to C_R;\ (x,a) \mapsto (x+c, a+g(x))$ be the automorphism with $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ and $c \in \mathbb{F}$. Then we have $E_R(c) = 0$.*

证明。我们有 $g(x)^p - g(x) = cR(x) + xR(c) + cR(c)$。令 $\mathcal{P}\colon\ \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x];\quad f(x) \mapsto f(x)^p - f(x)$。根据 $E_R(x)$ 的定义，我们得到 $cR(x) + xR(c) + cR(c) \equiv E_R(c)^{1/p^e} x$模 $\mathcal{P}(\mathbb{F}[x])$。因此，我们必须有 $E_R(c) = 0$。 □

Lemma 4.2. *We have $E_{R_1}(r(x)) \mid E_R(x)$.*

Proof. Let $\beta \in \mathbb{F}$ be an element such that $E_{R_1}(r(\beta)) = 0$. We take an element $\gamma \in \mathbb{F}$ such that $\gamma^p - \gamma = r(\beta)R_1(r(\beta))$. The curve $C_{R,\mathbb{F}}$ admits the automorphism ϕ defined by

$$\phi(a,x) = (a + f_{R_1}(r(x), r(\beta)) + \Delta(x+\beta) - \Delta(x) + \gamma, x+\beta)\,.$$

This is well-defined by Lemma 2.2 and (4.2). By Lemma 4.1, we have $E_R(\beta) = 0$. Since $E_{R_1}(r(x))$ is separable, the claim follows. □

Lemma 4.3. *Let $\alpha, \alpha' \in \mu_{d_{R,m}}$. Assume $E_{R_1}(r(\alpha y)) = 0$ for a certain $y \in \mathbb{F}$. Then we have the equality*

$$\Delta(\alpha' x + \alpha y) + f_{R_1}(r(\alpha' x), r(\alpha y)) = \Delta(x) + \Delta(y) + f_R(\alpha' x, \alpha y).$$

证明。根据 $\Delta(\alpha' x + \alpha y) = \Delta(x + (\alpha/\alpha')y)$ 和 (2.4)，由 (4.3) 我们可以假设 $\alpha' = 1$。根据引理 4.2，我们有 $E_R(\alpha y) = 0$。令 $\Delta_1(x)$ 和 $\Delta_2(x)$ 分别表示所需等式的左边和右边。由于根据定义，$f_R(0, x') \equiv 0$ 在 $\mathbb{F}_q[x']$ 中，因此 $\Delta_1(0) = \Delta(\alpha y) = \Delta(y) = \Delta_2(0)$。因此，只需证明 $\Delta_1(x)^p - \Delta_1(x) = \Delta_2(x)^p - \Delta_2(x)$。根据引理 4.2 和假设，$E_{R_1}(r(\alpha y)) = E_R(\alpha y) = 0$。因此，对于 $i = 1$，每个 $\Delta_i(x)^p - \Delta_i(x)$ 都等于 $(x+\alpha y)R(x+\alpha y) - r(y)R_1(r(y)) - r(x)R_1(r(x))$，根据引理 2.2。故该断言得证。 □

Let

$$U_R := \{x \in \mathbb{F} \mid r(x) = 0\} \subset V_R' := \{x \in \mathbb{F} \mid E_{R_1}(r(x)) = 0\}.$$

We have $V_R' \subset V_R$ by Lemma 4.2. Then U_R and V_R' are regarded as $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-modules by $r(x)$ $R_1(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ and (4.3).

Lemma 4.4. *We have $V'_R \subset U_R^{\perp}$. In particular, the $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module U_R is totally isotropic.*

证明。设 $\beta \in U_R$ 和 $\beta' \in V'_R$。根据引理 4.3, $r(\beta) = 0$ 且 $E_{R_1}(r(\beta')) = 0$, 我们有 $f_R(\beta', \beta) = f_R(\beta, \beta') = \Delta(\beta + \beta') - \Delta(\beta) - \Delta(\beta')$。因此 $\omega_R(\beta, \beta') = 0$。 □

Let

$$Q'_{R,m} := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{R,m} \mid \beta \in V'_R\}.$$

Then $Q'_{R,m}$ is a subgroup of $Q_{R,m}$ of index $p^{e-e'}$, because of (4.3) and $[V_R : V'_R] = p^{e-e'}$. We have the map

$$\pi\colon Q'_{R,m} \to Q_{R_1,m};\ (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha, r(\beta), \gamma - \Delta(\beta)).$$

Corollary 4.5. *The map π is a homomorphism.*

Proof. The claim follows from Lemma 4.3 and (4.3). □

We have

$$U'_R := \{(1, \beta, \Delta(\beta)) \in Q'_{R,m} \mid \beta \in U_R\} = \operatorname{Ker} \pi. \tag{4.4}$$

The space V'_R is stable by the q-th power map. Hence we can consider the semidirect product $Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$. The map π induces $\pi'\colon Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z} \to Q_{R_1,m} \rtimes \mathbb{Z}$.

C_R的商。设 ϕ如（4.1）中所述。根据（.），我们可以验证 ϕ可经由C_R, $\mathbb{F} \to$ $C_{R\,\mathbb{F}}/U'_R \xrightarrow{\bar{\phi}} C_{R_1\,\mathbb{F}}$ 2 5 $\bar{\phi}$ $C_{R\,\mathbb{F}}/U'_R \xrightarrow{\sim} C_{R_1\,\mathbb{F}}$ ，分解。由此得到一个同构：，。

引理 4.6. 我们有 $\phi((a, x)g) = \phi(a, x)\pi'(g)$ 对于 $g \in Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$.

Proof. The claim follows from Lemma 4.3. □

令 $\tau'_{\psi,R_1,m}$ 表示 $Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$-表示, 它是通过 π' 对 $Q_{R_1,m} \rtimes \mathbb{Z}$-表示 $H^1_c(C_{R_1,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$ 进行膨胀所得。根据 (3.6), 我们有同态 $\Theta_{R,m}$: $W_F \to Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$。我们将 W_F-表示 $\tau''_{\psi,R_1,m}$ 定义为通过 $\Theta_{R,m}$ 对 $\operatorname{Ind}_{Q'_R}^{Q_{R\,m} \rtimes \mathbb{Z}}$, ,$_m \rtimes \mathbb{Z} \tau'_{\psi,R_1,m}$ 进行膨胀所得。由 $[Q_{R,m}$ 可得 $\dim \tau''_{\psi,R_1,m} = p^e : Q'_{R,m}] = p^{e-e'}$, 且 $\dim \tau'_{\psi,R_1,m} = p^{e'}$。

Proposition 4.7. *We have an isomorphism $\tau_{\psi,R,m} \simeq \tau''_{\psi,R_1,m}$ as W_F-representations.*

Proof. By Lemma 4.6, we have the injection

$$\tau'_{\psi,R_1,m} = H^1_c(C_{R_1,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi] \xrightarrow{\phi^*} H^1_c(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]$$

as $Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$-representations. Hence we have a non-zero homomorphism

$$\operatorname{Ind}_{Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}}^{Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}} \tau'_{\psi,R_1,m} \to H^1_c(C_{R,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi] \tag{4.5}$$

as $Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$-representations by Frobenius reciprocity. Since the target is irreducible by Lemma 2.8(2), the map (4.5) is surjective. By comparing the dimensions, (4.5) is an isomorphism. By inflating it by $\Theta_{R,m}$, we obtain the claim. □

We consider the open subgroup $W' := \Theta_{R,m}^{-1}(Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}) \subset W_F$ of index $p^{e-e'}$. We can write $W' = W_{F'}$ with a finite field extension F'/F of degree $p^{e-e'}$. Let

$$\tau'_{\psi,R_1,m} \colon W_{F'} \xrightarrow{\Theta_{R,m}} Q'_{R,m} \rtimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi'} Q_{R_1,m} \rtimes \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H^1_{\mathrm{c}}(C_{R_1,\mathbb{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi]) \tag{4.6}$$

be the composite.

Corollary 4.8. *We have an isomorphism $\tau_{\psi,R,m} \simeq \mathrm{Ind}_{W_{F'}}^{W_F} \tau'_{\psi,R_1,m}$ as W_F-representations. If $e' < e$, the W_F-representation $\tau_{\psi,R,m}$ is imprimitive.*

Proof. The assertion follows from Proposition 4.7. □

4.2 Totally isotropic subspace and geometry of C_R

Let $(1, \beta, \gamma) \in H_R$ so, as in Definition 2.3(2), we know that $\gamma^p - \gamma = \beta R(\beta)$. We obtain $(f_R(\beta,\beta) - 2\gamma)^p = f_R(\beta,\beta) - 2\gamma$ by definition of the pairing ω_R (Lemma 2.6(2)). Assume

$$\beta \neq 0, \quad \gamma = \frac{f_R(\beta,\beta)}{2}. \tag{4.7}$$

The following lemma is given in [6, Propositions (9.1) and (13.5)] and [1, Proposition 7.2]. This lemma gives an algorithm of taking quotients of C_R by certain abelian groups.

引理 4.9. 设 C_R 如定义 2.7 中所述。假设 $e \geq 1$。

(1) 设

$$u := x^p - \beta^{p-1}x, \quad v := a + (x/\beta)(\gamma(x/\beta) - f_R(x,\beta)). \tag{4.8}$$

那么，存在一个 $P_1(u)$，其次数为 p^{e-1}，使得 $v^p - v = uP_1(u)$。

(2) 令 $U := \{(1, \xi\beta, \xi^2\gamma) \in H_R \mid \xi \in \mathbb{F}_p\} = \langle (1,\beta,\gamma) \rangle$。那么商 $C_{R,\mathbb{F}}/U$ 同构于 $C_{P_1,\mathbb{F}}$。

证明。我们证明 (1)。令 $x_1 := x/\beta$ 和 $u_1 := u/\beta^p$。则 $u_1 = x_1^p - x_1$。我们计算即将到来的assistant to=final codeconst x = 1;

$$\begin{aligned} v^p - v &= xR(x) + \gamma^p x_1^{2p} - \gamma x_1^2 - x_1^p f_R(x,\beta)^p + x_1 f_R(x,\beta) \\ &= xR(x) + \gamma(x_1^{2p} - x_1^2) + \beta^{-2p+1}R(\beta)x^{2p} \\ &\quad - u_1 f_R(x,\beta) - (x/\beta)^p(\beta R(x) + xR(\beta)) \\ &= u\beta^{-p}(-\beta R(x) + \beta^{-p+1}R(\beta)x^p + \gamma(x_1^p + x_1) - f_R(x,\beta)), \end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了 $\gamma^p - \gamma = \beta R(\beta)$ 和引理 2.2。令 $P(x) := \beta^{-p}(-\beta R(x) + \beta^{-p+1}R(\beta)x^p + \gamma(x_1^p + x_1) - f_R(x,\beta))$。由于 $P(x)$ 是可加的，因此存在 $P_1(u) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$，使得 $P(x) = P_1(u) + \alpha x$，其中 α 为常数。由 (4.7)，我们有 $P(\beta) = \beta^{-p}(2\gamma - f_R(\beta,\beta)) = 0$。因此，$\alpha = 0$。由 $\deg P(x) = p^e$，我们有 $\deg P_1(u) = p^{e-1}$。因此得到 (1)。

We show (2). We easily check that the finite étale morphism of degree p: $C_{R,\mathbb{F}} \to C_{P_1,\mathbb{F}}$; $(a,x) \mapsto (v,u)$ factors through $C_{R,\mathbb{F}} \to C_{R,\mathbb{F}}/U \to C_{P_1,\mathbb{F}}$. Hence we obtain the claim. Since $C_{R,\mathbb{F}} \to C_{R,\mathbb{F}}/U$ is a finite étale morphism of degree p, the claim follows. □

Let

$$\Delta_0(x) := -(x/\beta)(\gamma(x/\beta) - f_R(x,\beta)).$$

We have

$$xR(x) = uP_1(u) + \Delta_0(x)^p - \Delta_0(x) \tag{4.9}$$

by Lemma 4.9(1). We write $u(x)$ for u.

Let $(1,\beta',\gamma') \in H_R$ be an element satisfying (4.7). Assume $\omega_R(\beta,\beta') = 0$. Then $(1,\beta,\gamma)$ commutes with $(1,\beta',\gamma')$. Hence the action of $(1,\beta',\gamma')$ induces the automorphism of $C_{P_1,\mathbb{F}} \simeq C_{R,\mathbb{F}}/U$ ((2.5)).

Lemma 4.10. *Let* $\pi(\beta',\gamma') := (1, u(\beta')\ \gamma' - \Delta_0(\beta'))$.

(1) *We have* $\pi(\beta',\gamma') \in H_{P_1}$ *and* $f_{P_1}(u(\beta')\ u(\beta')) = 2(\gamma' - \Delta_0(\beta'))$.

(2) *The action of* $(1,\beta',\gamma')$ *on* $C_{R,\mathbb{F}}$ *induces* $\pi(\beta',\gamma')$ *on* $C_{P_1,\mathbb{F}}$.

证明。令 $\Delta_1(x) := f_R(x,\beta') - \Delta_0(x+\beta') + \Delta_0(x)$。根据 (4.8)，$(1,\beta',\gamma')$ 对$C_{R,\mathbb{F}}$的作用诱导出 $C_{P_1,\mathbb{F}}$ 的自同构，其由 $u \mapsto u + u(\beta')$ 和 $v \mapsto v + \Delta_1(x) + \gamma'$ 在 $C_{P_1,\mathbb{F}}$ 上给出。我们可以容易地验证，$\Delta_1(x) - \Delta_1(0)$ 是一个加性多项式，满足$\Delta_1(\beta) - \Delta_1(0) = \omega_R(\beta,\beta') = 0$。因此，存在 $g(u) \in \mathbb{F}_q[u]$，使得 $\Delta_1(x) = g(u(x)) + \Delta_1(0)$。引理4.1意味着 $E_{P_1}(u(\beta')) = 0$。因此 $u(\beta') \in V_{P_1}$。我们证明 (1)。前一个断言由 (4.9) 得出。以与引理 4.3 相同的方式，利用 $\Delta_0(0) = E_{P_1}(u(\beta')) = E_R(\beta') = 0$，我们得到

$$\Delta_0(x+\beta') + f_{P_1}(u(x), u(\beta')) = \Delta_0(x) + \Delta_0(\beta') + f_R(x,\beta'). \tag{4.10}$$

Substituting $x = \beta'$, and using $\Delta_0(2\beta') = 4\Delta_0(\beta')$ and (4.7) for (β',γ'), we obtain the latter claim in (1).

By (4.10), we have

$$v + f_R(x,\beta') - \Delta_0(x+\beta') + \Delta_0(x) + \gamma' = v + f_{P_1}(u(x), u(\beta')) + \gamma' - \Delta_0(\beta').$$

Hence the claim (2) follows from (2.5). □

Assume that V_R is not completely anisotropic. Let U_R be a non-zero totally isotropic $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-submodule in V_R. There exists a monic reduced polynomial $r(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$ such that $U_R = \{x \in \mathbb{F} \mid r(x) = 0\}$ by [13, Theorem 7]. Since U_R is an $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-module, we have

$$r(\alpha x) = \alpha r(x) \text{ for } \alpha \in \mu_{d_{R,m}} \text{ and } r(x) \in \mathbb{F}_q[x] \tag{4.11}$$

by Lemma 3.24. We write $\deg r(x) = p^{e-e'}$ with a non-negative integer $0 \le e' < e$.

我们取 $\beta_1, \ldots, \beta_{e-e'}$ 作为 U_R 在 $\mathbb{F}_p$ 上的一组基。设 $(1,\beta_i,\gamma_i) \in H_R$ 是满足 (4.7) 的一个元素。令 $U_i := \{(1, \xi\beta_i, \xi^2\gamma_i) \mid \xi \in \mathbb{F}_p\} \subset H_R$，它是一个子群。由于 U_R 是全迷向的，根据引理 2.6(2)，我们有 $\omega_R(\beta_i,\beta_j) = 0$。因此，对于任意 $g_i \in U_i$ 和 $g_j \in U_j$，有 $g_i g_j = g_j g_i$。令

$$U'_R := U_1 \cdots U_{e-e'} \subset H_R, \tag{4.12}$$

which is an abelian subgroup.

命题 4.11. 假设 V_R 不是完全各向异性的。那么存在$R_1(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$，其次数为 $p^{e'}$，以及一个多项式 $\Delta(x) \in \mathbb{F}[x]$，使得 $\Delta(0) = 0$，并且商 $C_{R,\mathbb{F}}/U'_R$ 同构于仿射曲线 $C_{R_1,\mathbb{F}}$，该同构由 $\pi\colon C_{R,\mathbb{F}} \to C_{R_1,\mathbb{F}}$ 诱导；$(a,x) \mapsto (a - \Delta(x)\ r(x))$。特别地，我们有$xR(x) = r(x)R_1(r(x)) + \Delta(x)^p - \Delta(x)$。此外，我们有 $d_{R,m} \mid d_{R_1}$。

证明。通过依次应用引理 4.9 和 4.10，商 $C_{R,\mathbb{F}}/U'_R$ 与曲线 $C_{R_1,\mathbb{F}}$ 同构，其中具有某个 $R_1(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$，并且我们得到 $\pi\colon C_{R,\mathbb{F}} \to C_{R_1,\mathbb{F}};\ (a,x) \mapsto (a-\Delta(x),\ r(x))$。由（4.8），我们有 $\Delta(0) = 0$。由于 U_R 是一个 $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$-模，子群 $A := \{(\alpha, 0, 0) \in Q_{R,m} \mid \alpha \in \mu_{d_R,m}\}$ 正规化 U'_R。因此，A 在商 $C_{R_1,\mathbb{F}}$ 上作用。我们回顾一下，$b^p - b = yR_1(y)$ 是 $C_{R_1,\mathbb{F}}$ 的定义方程。然后，$A \ni (\alpha, 0, 0)$ 在 $C_{R_1,\mathbb{F}}$ 上的作用由（4.11）通过态射 π 给出，即 $b \mapsto b + \Delta(x) - \Delta(\alpha^{-1}x)$ $y = r(x) \mapsto r(\alpha^{-1}x) = \alpha^{-1}y$。根据定理（4.1）和（13.3）或定理 4.3，我们必有 $\alpha \in \mu_{d_{R_1}}$。因此，最后一个断言得证。 □

Corollary 4.12. *Let the assumption be as in Proposition 4.11. We have* $\Delta(x)\ R_1(x) \in \mathbb{F}_q[x]$.

证明。我们使用定义 3.23 中的相同记号。我们考虑命题 4.11 中的等式 $xR(x) = r(x)R_1(r(x)) + \Delta(x)^p - \Delta(x)$。设 $S(x) := -R_1^q(x) + R_1(x)$ 且 $\Pi(x) := \Delta^\sigma(x) - \Delta(x)$。我们有 $S(x) \in \mathscr{A}_{\mathbb{F}}$。根据 $r(x)\ R(x) \in \mathbb{F}_q[x]$,

$$\Pi(x)^p - \Pi(x) = r(x)S(r(x)). \tag{4.13}$$

假设 $S(x) \neq 0$。我们有非恒定态射 $f\colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \to C_{S,\mathbb{F}}$；由 $\deg r(x) > 0$，得 $x \mapsto (\Pi(x)\ r(x))$。令 $\overline{C}_{S,\mathbb{F}}$ 为 $C_{S,\mathbb{F}}$的光滑紧化。态射 f可延拓为非恒定态射 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}} \to \overline{C}_{S,\mathbb{F}}$。因此这是一个有限态射。由黎曼–赫尔维茨公式，我们知道 $\overline{C}_{S,\mathbb{F}}$ 的亏格等于零。由引理 2.10，这导致矛盾。因此 $S(x) \equiv 0$ 且 $R_1(x) \in \mathbb{F}_q[x]$。由 (4.13)，我们有 $\Pi(x) \in \mathbb{F}_p$。如命题 4.11 中的 $\Delta(0) = 0$，我们有 $\Pi(0) = 0$。因此 $\Pi(x) \equiv 0$。由此得证。

□

4.3 Theorem

Finally, we summarize the contents of §4.1 and §4.2 as a theorem.

Theorem 4.13. *Assume* $p \neq 2$. *The following conditions are equivalent.*

(1) *There exists a non-trivial finite étale morphism*

$$C_R \to C_{R_1};\ (a,x) \mapsto (a - \Delta(x), r(x)),$$

where $\Delta(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ *and* $r(x)\ R_1(x) \in \mathscr{A}_q$ *satisfy* $d_{R,m} \mid d_{R_1}$ *and* $r(\alpha x) = \alpha r(x)$ *for* $\alpha \in \mu_{d_{R,m}}$.

(2) *The* $\mathbb{F}_p[\mathscr{H}]$*-module* (V_R, ω_R) *is not completely anisotropic.*

(3) *The* W_F*-representation* $\tau_{\psi,R,m}$ *is imprimitive.*

If the above equivalent conditions are satisfied, the W_F*-representation* $\tau_{\psi,R,m}$ *is isomorphic to* $\mathrm{Ind}_{W_{F'}}^{W_F} \tau'_{\psi,R_1,m}$, *where* $\tau'_{\psi,R_1,m}$ *is given in* (4.6).

Proof. Assume (1). Since $C_R \to C_{R_1}$ is non-trivial, we have $e' < e$, where $\deg r(x) = p^{e-e'}$. Then we have (2) by Lemma 4.4. Assume (2). We obtain (1) by (4.11), Proposition 4.11 and Corollary 4.12.

The equivalence of (2) and (3) follows from Corollary 3.28(1).

The last claim follows from Corollary 4.8. □

Acknowledgements

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 20K03529/21H00973.

References

[1] I. Bouw、W. Ho、B. Malmskog、R. Scheidler、P. Srinivasan 和 C. Vincent，《具有多个自同构的一类阿廷-施赖尔曲线的ζ函数》，数论方向，87–124，女性数学家协会丛书，第3卷，施普林格，2016年。[2] C.J. Bushnell 和 G. Henniart，GL(2) 的局部朗兰兹猜想，《数学综合研究丛书》第335卷，施普林格。[3] L. Carlitz，关于有限域上不可约互反多项式的一些定理，《纯粹与应用数学杂志》227（1967），212–220。[4] R. S. Coulter、G. Havas 和 M. Henderson，关于次线性化多项式的分解，《澳大利亚数学会杂志》76（2004），第3期，317–328。[5] P. Deligne，étale上同调， ´布瓦-马里代数几何研讨会 S´G´A 4 1/2。´《数学讲义》，569。柏林：施普林格出版社，1977年。´G. van der Geer 和 M. van der Vlugt，里德-穆勒码与超奇异曲线 I，《数学汇刊》84（1992），第3期，333–367。[6] G. Henniart，局部域的韦伊群表示，《奥赛数学出版物》79.02，（1979）。[7] B. Huppert，《有限群 I》，数学科学基础丛书，第134卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1967年。´N. Imai 和 T. Tsushima，卢宾-泰特完美空间中的仿射域与简单超尖表示。II：野分歧情形，《数学年刊》380，第1–2期（2021），751–788。[8]N. Imai 和 T. Tsushima，斯旺导子为一的局部伽罗瓦表示，arXiv:1509.02960v[9] math.NT[10] 。4 [H. Koch，局部域伽罗瓦群本原表示的分类，《数学创刊》40（1977），第2期，195–216。]R. W. K. Odoni，关于有限域上的加性多项式，《爱丁堡数学会会刊》（2）42（1999），第1期，1–16。[11] O. Ore，关于一类特殊多项式，《美国数学会汇刊》35（1933），559–584。[12] J. F. Rigby，含有大于群中心的正规幂零子群的本原线性群，《伦敦数学会杂志》35（1960），389–400。[13] J. P. Serre，《局部域》，第二版，埃尔曼出版社，巴黎，1968年。

[16] T. Tsushima，偶数等特征下卢宾-泰特曲线中仿射域的良约化，I，《数论杂志》214（2020年），414–439。

[17] J. Weinstein, *Semistable models for modular curves of arbitrary level*, Invent. Math. 205 (2016), no. 2, 459–526.

Takahiro Tsushima
Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Chiba University 1-33 Yayoi-cho, Inage, Chiba, 263-8522, Japan
tsushima@math.s.chiba-u.ac.jp