arXiv:2305.06072v1 [math.NT] 10 May 2023

形式幂级数的k次幂的显式表达式、递推表达式与行列式表达式及其在广义伯努利数中的应用

SAID ZRIAA 和 MOHAMMED MOUCOUF

Abstract. 本文中，作者给出了计算形式幂级数 k次幂的闭式表达和递推表达式，其中一些表达式以若干矩阵的行列式表示。由此，我们得到了任意形式幂级数之单位元的倒数。我们将这些结果应用于广义伯努利数和伯努利数，推导出这些著名数列的新闭式表达及若干递推关系。此外，我们还给出了若干行列式形式的恒等式。利用这些结果，我们提出了欧拉一个著名恒等式的优雅推广。我们还指出了第二类斯特林数与广义伯努利数之间的一些联系。

1. Formal power series

$n \times n$ 上三角赫森伯格矩阵（Toeplitz-Hessenberg matrix）在含幺交换环上是以下矩阵的转置。

$$TH_n(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

其中我们假设 $a_0 \neq 0$。这类矩阵在纯数学和应用数学中都具有重要意义。它们在各种应用中均会出现（例如，参见 [3, 5, 12, 13]）。由于在多种应用中频繁使用，托普利兹–黑森伯格矩阵的行列式具有重要意义。利用行列式的基本性质，显然，对于所有 $n \geq 1$:

$$\det(TH_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_0^{i-1} a_i \det(TH_{n-i}) \quad \text{with} \quad \det(TH_0) = 1.$$

除了上述递推公式外，还存在一个用于计算 $\det(TH_n)$ 的显式公式，在文献中称为 Trudi 公式 [16], 。它指出，对于任意正整数 n

$$\det(TH_n) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} l! \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}}{k_1! k_2! \cdots k_n!} (-a_0)^{n-l} \quad \text{with} \quad k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0.$$

另一个等价公式是

$$\det(TH_n) = \sum_{k=1}^{n} (-a_0)^{n-k} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \quad \text{with} \quad i_1, i_2, \cdots, i_k \geq 1.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13F25、15A15、05A19、11B68；次要分类：11C20、11Y55、11B73。
*Key words and phrases.*形式幂级数、托普利兹–黑森伯格矩阵、特鲁迪公式、欧拉公式、组合恒等式、伯努利数、斯特林数、闭式表达式、行列式表达式。

注意，当 $a_0 = 1$ 时，Trudi 公式也称为 Brioschi 公式 [16]。

利用 Trudi 公式可以导出若干涉及多项式系数的组合恒等式。在我们的研究结果中，可以利用这一恒等式推导出各种新的代数恒等式。

形式幂级数理论至今仍然是一个令人兴奋的研究课题。因此，由于形式幂级数自然地出现在各种应用中，它已成为数学众多领域中的一个重要主题（参见 [7, 8, 17, 20, 22] 及其中的参考文献）。它们是理论计算机科学中的一种强大工具。形式幂级数与数论以及许多其他领域密切相关，例如特殊函数和组合数学（更多详情请参见 [9, 17, 21] 及其中引用的参考文献）。这一重要理论的基础由拉格朗日、棣莫弗和 L. 欧拉奠定。关于形式幂级数的系统化理论及其严谨的数学基础，推荐阅读 Niven 的优秀综述著作 [17] 。在数论中，有许多具体情形表明形式幂级数是一种有用的工具。在加法数论中，利用幂级数表示某些函数更加方便。例如，利用形式幂级数研究整数分拆问题，可以得到巧妙的结果。著名数学家欧拉于 1748 年开创了分拆理论，并借助 q 级数发现了著名分拆函数 $p(n)$ 的普通生成函数。G. E. Andrews [1] 将欧拉的结果表述为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1}$$

The pentagonal number theorem is one of Euler's most profound results, it relates the product and the power series representations of Euler's function

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

其中，

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n = m(3m+1)/2,\ m \in \mathbb{Z} \text{ even}, \\ -1, & \text{if} \quad n = m(3m+1)/2,\ m \in \mathbb{Z} \text{ odd}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here the generalized pentagonal numbers are the exponents of nonzero terms.
On the other hand, it is clear that

$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right\}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)x^n\right)=1$$

Also by a simple manipulation of formal power series, we can easily obtain that

$$p(m)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{p\Big(m-(3n^2-n)/2\Big)+p\Big(m-(3n^2+n)/2\Big)\right\}$$

This identity leads to an efficient method of calculating the partition function $p(n)$. We note that this formula is known in the large literature as Euler's pentagonal number recurrence.
需要指出的是，通过计算 $p(n)$ 的普通生成函数的倒数，我们可以用行列式公式表示函数 $p(n)$。更确切地说，利用我们的一个结果，可以得到：

$$p(n)=(-1)^n\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

and

$$a_n=(-1)^n\begin{vmatrix} p(1) & p(2) & \cdots & \cdots & \cdots & p(n)\\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & p(2)\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & p(1)\end{vmatrix}.$$

现在，令 $S=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$ 为含幺交换环 R 上的任意形式幂级数。对于任意非负整数 k，我们将 S 的 k 次幂写作

$$S^k=a_0(k)+a_1(k)X+a_2(k)X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_i(k)X^i$$

其中，系数 $a_m(k)$ 可以通过递归计算得到。

$$\begin{cases} a_0(k) &= a_0^k,\\ a_m(k) &= \dfrac{1}{ma_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(ik-m+i)a_ia_{m-i}(k), \quad m\geq 1.\end{cases} \tag{1.1}$$

这个恒等式是用于计算给定形式幂级数的 k 次幂的最优美、最古老的公式之一。它通常被称为 J.C.P. Miller公式，例如，它出现在 P. Henrici [11], 的著名著作中，但实际上，这个有趣恒等式的历史由来已久。在 [9] 中，H. W. Gould 将该公式归功于欧拉，并对这一优美的递推关系提供了详尽的历史介绍和深入的讨论。

关系式 (1.1) 提供了一种高效确定 $a_m(k)$ 的方法。然而，该方法仅在 m 和 a_0 是环 R 中的单位元时才适用。本文旨在提出一种无需任何假设的通用新方法，用于计算形式幂级数的 k 次幂。

在本节中， R 将表示一个交换含幺环。设 k 和 r 为两个整数，并考虑由下式定义的线性映射。

$$[.]_k^r:\begin{array}{ccc} R[X] & \longrightarrow & R[X]\\ X^i & \longmapsto & X^{k-(r-i)}\binom{k}{r-i}\end{array}$$

for $k\leq p$, we use the convention that

$$X^{k-p}\binom{k}{p}=\delta_{k,p} \tag{1.2}$$

然后利用 [14], 的一个重要结果，我们得到以下定理，它给出了形式幂级数的 k 次幂的闭式表达式。

定理 1.1. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 R 中的一个元素序列，且 a_0 可逆。对于任意整数 k，以下形式幂级数的 k 次幂

$$S=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$$

如下所示:

$$S^k=[\mathcal{X}_0]_k^0(a_0)+[\mathcal{X}_1]_k^1(a_0)X+[\mathcal{X}_2]_k^2(a_0)X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}[\mathcal{X}_i]_k^i(a_0)X^i \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{X}_n$ 是多项式

$$\delta(-X,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ -X & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -X & a_1 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

以及 $\mathcal{X}_0=1$。另一方面，我们有

$$\delta(-X,a_1,\ldots,a_n)=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} l!\frac{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}X^{n-l}$$

更明确地说

$$[\mathcal{X}_n]_k^n(a_0)=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} k(k-1)\cdots(k-l+1)\frac{a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}a_0^{k-l}$$

证明。显然，典范映射

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots]\longrightarrow a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots$$

是从无限半循环矩阵环到形式幂级数环的一个同构。因此，该结果由 [14, 定理 2.5] 立即得出。□

注释 1.2. 需要注意的是，如果 a_0 不可逆，最后一个定理对于计算形式幂级数的非负 k 次幂仍然有效。在这种情况下，我们只需考虑以下映射。

$$[.]_k^r:\begin{array}{ccc} R[X] & \longrightarrow & R(X) \\ X^i & \longmapsto & X^{k-(r-i)}\binom{k}{r-i} \end{array}$$

作为定理 (1.1) 的一个推论，我们重新得到了一个著名公式，该公式在 [11] 中归功于 Wronski，在 [16] 中归功于 Trudi。这个著名公式也可以在 [12, 第347] 页以及 [18,引理 2.4]中找到。鉴于该公式的重要性，文献中已有多种不同的证明。感兴趣的读者可以参考例如 [11, 18, 19]。接下来，我们将利用一些重要的代数工具，给出 Wronski 公式一个新颖而优雅的证明。

定理 1.3. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 R 中的一个元素序列，满足 a_0 可逆。形式幂级数的逆元

$$S=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$$

表示为:

$$S^{-1}=b_0+b_1X+b_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}b_iX^i$$

其中,

$$b_n=\frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

此外， b_n 可以显式表示为

$$b_n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{p}{k_1,\ldots,k_n}(-1)^p a_0^{-1-p} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}$$

证明。我们首先证明，对于所有多项式 $P(X)$，都有

$$[P(X)]^r_{-1}(a_0) = \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} P(-a_0)$$

Now, it is clear that

$$[X^i]^r_{-1} = X^{i-(r+1)}(-1)^{r+i}$$

Let $P(X) = \sum_{i=0}^s c_i X^i$, then by linearity

$$\begin{aligned}
[P(X)]^r_{-1}(a_0) &= \sum_{i=0}^s c_i [X^i]^r_{-1}(a_0) \\
&= \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} \sum_{i=0}^s c_i (-a_0)^i \\
&= \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} P(-a_0)
\end{aligned}$$

Consequently, we have

$$\begin{aligned}
b_n &= [\mathcal{X}_n]^n_{-1}(a_0) \\
&= \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \mathcal{X}_n(-a_0) \\
&= \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \delta(a_0, a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

□

A direct consequence of Theorem (1.3) is the following

Theorem 1.4.

$$\left(1 - \sum_{n=1}^k a_n X^n\right)^{-1} = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n X^n$$

其中,

$$b_n = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ki_k=n} \frac{(i_1+i_2+\cdots+i_k)!}{i_1! i_2! \cdots i_k!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_k^{i_k}$$

As a consequence, we can provide the following corollary

推论 1.5. 对每个正整数 $k \geq 1$ 和每个非负整数 n，我们有

$$\binom{n+k-1}{n} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=p \\ i_1+2i_2+\cdots+ki_k=n}} (-1)^{n-p} \binom{p}{i_1,\ldots,i_k} \binom{k}{1}^{i_1} \binom{k}{2}^{i_2} \cdots \binom{k}{k}^{i_k}$$

Proof. It is easy to check that

$$(1-X)^{-k} = 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{n+k-1}{n} X^n$$

On the other hand, we have

$$(1-X)^{-k} = \left(1 - \sum_{n=1}^k \binom{k}{n}(-1)^{n-1} X^n\right)^{-1}$$

From this the result follows easily. □

下面的定理提供了另一种方法，用于求得形式幂级数的 k 次幂的闭式表达式。

定理 1.6. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是 R 中元素构成的一个序列。对于所有非负整数 k，形式幂级数的 k 次幂

$$S = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$$

are given as follows:

$$S^k = \boldsymbol{a}_0^{(k)} + \boldsymbol{a}_1^{(k)}X + \boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} \boldsymbol{a}_i^{(k)}X^i$$

其中,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_0^{(k)} &= a_0^k\binom{k}{0}, \\ \boldsymbol{a}_n^{(k)} &= \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_0^{k-p}\binom{k}{p} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{p!}{k_1!\ldots k_n!}a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}, \quad n\geq 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Proof. Taking into account the canonical isomorphism

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] \longrightarrow a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$$

从无限半循环矩阵环到形式幂级数环，并利用 [15], 的定理 3.1，我们很容易得到该结果。□

The following theorem provides another elegant simple formula for computing the kth power of any formal power series

定理 1.7. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是 R 中元素构成的一个序列。对于所有非负整数 k，形式幂级数的 k 次幂

$$S = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$$

are given as follows:

$$S^k = \boldsymbol{a}_0^{(k)} + \boldsymbol{a}_1^{(k)}X + \boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} \boldsymbol{a}_i^{(k)}X^i$$

where the sequence $\{\boldsymbol{a}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ *is determined by:*

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)} = a_{n+1}\widehat{\boldsymbol{a}}_0^{(k)} + \cdots + a_{i+1}\widehat{\boldsymbol{a}}_{n-i}^{(k)} + \cdots + a_1\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k)}$$

and

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{a}}_0^{(k)} &= a_0^{k-1}\binom{k}{1}, \\ \widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k)} &= \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_0^{k-p-1}\binom{k}{p+1} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{p!}{k_1!\ldots k_n!}a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}, \quad n\geq 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

证明。通过考虑无限半循环矩阵环与形式幂级数环之间的典范同构，以及 [15], 的公式（13）和（16），我们可以容易地得到所需结果。□

我们继续给出一个重要结果，用于计算任意形式幂级数的 k 次幂。下面，我们给出一个新的递推关系。

定理 1.8. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是 R 中元素构成的一个序列。对于所有非负整数 k, 形式幂级数的 k 次幂

$$S = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$$

are given as follows:

$$S^k = \boldsymbol{a}_0^{(k)} + \boldsymbol{a}_1^{(k)}X + \boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} \boldsymbol{a}_i^{(k)}X^i$$

where the sequence $\{\boldsymbol{a}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ *is determined recursively by:*

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)} = a_{n+1}a_0^{k-1}\binom{k}{1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{l=1}^{k-1} a_0^{l-1}\boldsymbol{a}_{n+1-i}^{(k-l)}$$

Proof. We have by Theorem(1.7)

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)} = a_{n+1}a_0^{k-1}\binom{k}{1} + \sum_{i=1}^{n} a_i\widehat{\boldsymbol{a}}_{n+1-i}^{(k)}$$

Since

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_0^{k-p-1}\binom{k}{p+1} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{p!}{k_1!\ldots k_n!}a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}$$

Then we have

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k)} = \boldsymbol{a}_n^{(k-1)} + a_0\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k-1)}$$

Applying repeatedly the same procedure, we obtain

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} a_0^{l-1}\boldsymbol{a}_n^{(k-l)} + a_0^{k-1}\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(0)}$$

and since $\widehat{\boldsymbol{a}}_n^{(0)} = 0$, we immediately have

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)} = a_{n+1}a_0^{k-1}\binom{k}{1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{l=1}^{k-1} a_0^{l-1}\boldsymbol{a}_{n+1-i}^{(k-l)}$$

as claimed. □

Another interesting result is given in the following theorem

Theorem 1.9. *Let* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *be a sequence of elements of* R *and* k *be an integer. Let*

$$S = 1 + a_1X + a_2X^2 + \cdots = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$$

and

$$S^k = 1 + \boldsymbol{b}_1^{(k)}X + \boldsymbol{b}_2^{(k)}X^2 + \cdots = 1 + \sum_{i\geq 1} \boldsymbol{b}_i^{(k)}X^i$$

则序列 $\{\boldsymbol{b}_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ 满足以下关系:

$$\boldsymbol{b}_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j}\binom{n-k}{n-j}\boldsymbol{b}_n^{(j)}$$

and

$$\binom{n+k}{n}\boldsymbol{b}_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k}{n+j}\binom{n+j}{n}\binom{n-k}{n-j}\boldsymbol{b}_n^{(j)}$$

证明。显然,

$$S^k = \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} (S-1)^i = \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} S^j$$

如果 $[X^n]S$ 表示幂级数 S 中 X^n 的系数，那么不难验证:

$$[X^n]S^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} [X^n]S^j$$

Thus

$$\boldsymbol{b}_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \boldsymbol{b}_n^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \boldsymbol{b}_n^{(j)}$$

Now, we can write

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} = \binom{k}{j} \sum_{i=j}^{n} \binom{k-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

Using some basic tools, we easily see that

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{k-j}{i-j} (-1)^{i-j} = \binom{k-j-1}{n-j} (-1)^{n-j} = \binom{n-k}{n-j}$$

Then

$$\boldsymbol{b}_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} \binom{n-k}{n-j} \boldsymbol{b}_n^{(j)}$$

as claimed. By the first identity, we have

$$\binom{n+k}{n} \boldsymbol{b}_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} \binom{n+k}{n} \binom{n-k}{n-j} \boldsymbol{b}_n^{(j)}$$

Using the relation

$$\binom{k}{j} \binom{n+k}{n} = \binom{n+j}{j} \binom{n+k}{n+j}$$

we obtain the second desired formula. □

在交换含幵环中，定义任意形式幂级数的形式导数是很有用的。为此，若令 $S = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$，则 S 的形式导数定义为$S' = \sum_{i\geq 0}(i+1)a_i X^i$。对于任意形式幂级数 F和 G，乘积法则成立，即

$$(FG)' = F'G + FG'$$

为证明这一结论，令 $F = \sum_{i\geq 0} f_i X^i$ 和 $G = \sum_{i\geq 0} g_i X^i$。则乘积 $FG = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} f_i g_j X^{i+j}$ 的导数为

$$\begin{aligned}(FG)' &= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} (i+j) f_i g_j X^{i+j-1} \\ &= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} i f_i g_j X^{i-1+j} + \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} f_i j g_j X^{i+j-1} \\ &= F'G + FG'\end{aligned}$$

利用归纳法，我们可以很容易地证明，对于所有正整数 k

$$(F^k)' = kF'F^{k-1}$$

若 $S=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$ 可逆，则对于所有整数 k，容易验证 S^k 的导数为

$$(S^k)'=kS'S^{k-1}$$

这是由 $S^kS^{-k}=1$ 和乘积法则直接得出的结果。

形式幂级数理论为若干情形提供了优雅的代数框架。它涵盖了大量代数运算，这些运算常用于为一些看似困难的问题给出异常简洁的证明。我们注意到，在一般的含幺交换环中研究形式幂级数相当困难，尤其是在证明某些关系时，因为我们可用的标准技巧很少。相比之下，形式导数应当被视为一种重要工具，因为我们可以利用它得到若干引人注目的结果。例如，下面的结果可以利用这一有用的运算轻松推导出来，但要用标准微积分方法证明却很困难。

定理 1.10. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 R 中的元素构成的一个序列，且 a_0 可逆。对于所有整数 k，下列形式幂级数的 k 次幂

$$S=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$$

are

$$S^k=\boldsymbol{a}_0^k+\boldsymbol{a}_1^{(k)}X+\boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}\boldsymbol{a}_i^{(k)}X^i$$

where the sequence $\{\boldsymbol{a}_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ *satisfies the following relation:*

$$n\boldsymbol{a}_n^{(k)}=k\sum_{i=1}^{n}ia_i\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k-1)}.$$

Proof. The formal derivative of

$$S^k=\boldsymbol{a}_0^k+\boldsymbol{a}_1^{(k)}X+\boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2+\cdots=\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{a}_n^{(k)}X^n$$

gives

$$k\bigg(\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{a}_n^{(k-1)}X^n\bigg)\bigg(\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}X^n\bigg)=\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

This yields

$$\sum_{n\geq 0}\bigg(\sum_{i=0}^{n}k(i+1)a_{i+1}\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k-1)}\bigg)X^n=\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

Equating the coefficients, we obtain

$$\sum_{i=0}^{n}k(i+1)a_{i+1}\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k-1)}=(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}$$

Then the formula of this theorem follows. □

以下定理并非新结果，而是欧拉在本节开头介绍的结论。让我们在一个更一般的背景下证明这一优美的结果，即在一个含幺交换环中。

定理 1.11. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 R 中的一个元素序列，满足 a_0 可逆。对于所有整数 k，下列形式幂级数的 k 次幂

$$S=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}a_iX^i$$

are

$$S^k=\boldsymbol{a}_0^k+\boldsymbol{a}_1^{(k)}X+\boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2+\cdots=\sum_{i\geq 0}\boldsymbol{a}_i^{(k)}X^i$$

其中，序列 $\{\boldsymbol{a}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ 满足以下关系：

$$(n+1)a_0\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}(k(i+1)-(n-i))a_{i+1}\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k)}, \quad n\geq 0.$$

证明。我们有

$$S^k = \boldsymbol{a}_0^k + \boldsymbol{a}_1^{(k)}X + \boldsymbol{a}_2^{(k)}X^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0}\boldsymbol{a}_n^{(k)}X^n$$

形式导数给出

$$kS^{k-1}S^{'} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

将此公式两边乘以 S，得到

$$kS^kS^{'} = \Big(\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0}a_nX^n\Big)$$

Thus

$$kS^kS^{'} - \Big(\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 1}a_nX^n\Big) = a_0\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

该方程展开后为

$$k\Big(\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{a}_n^{(k)}X^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}X^n\Big) - \Big(\sum_{n\geq 0}n\boldsymbol{a}_n^{(k)}X^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0}a_{n+1}X^n\Big) = a_0\sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

简单变形可得

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n}k(i+1)a_{i+1}\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k)} - a_{i+1}(n-i)\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k)}\Big)X^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_0\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

Therefore

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n}(k(i+1)-(n-i))a_{i+1}\boldsymbol{a}_{n-i}^{(k)}\Big)X^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_0\boldsymbol{a}_{n+1}^{(k)}X^n$$

This gives the desired identity. □

2. Applications to Bernoulli numbers and Stirling numbers of the second kind

The Bernoulli numbers have numerous interesting applications in combinatorics and number theory. These numbers have been extensively studied and successfully applied, over the last two centuries, in pure and applied mathematics. Therefore, a very large literature has been devoted to the study of Bernoulli numbers. It is practically impossible to provide a nearly complete bibliography on these well known numbers.

The Bernoulli numbers B_n can be defined formally by [7]

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^{-1} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_nX^n$$

在关于伯努利数的浩瀚文献中，有若干关于这些数的显式表示的结果。关于一篇出色且易读的综述，以及一些极为有趣的历史轶事，感兴趣的读者可参阅 [10]。此外，还有大量涉及这些数的二项式卷积的奇妙恒等式，其中最著名的是欧拉公式

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_iB_{n-i} = (1-n)B_n - nB_{n-1} \text{ for } n\in\{0,1,2,\ldots\} \tag{2.1}$$

这等价于

$$\sum_{i=2}^{n-2}\binom{n}{i}B_iB_{n-i}=-(n+1)B_n \text{ for } n\in\{4,5,6,\ldots\}$$

在数学中，第二类斯特林数出现在各种组合数学和数论问题中。这些有用的数由著名数学家詹姆斯·斯特林引入。关于第二类斯特林数的精彩论述，可以参见这部广为人知的研究专著 [6]。

The Stirling numbers of the second kind $S(n,k)$ can be defined formally by [4]

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}X^n\right)^k=\sum_{n\geq k}\frac{1}{n!}S(n,k)X^n$$

In many situations of number theory and calculus, we encounter the Bernoulli numbers. For examp.....这些著名的数有助于表示幂和 $1^m+2^m+\cdots+n^m$ a s

$$1^m+2^m+\cdots+n^m=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}(n+1)^{m-j+1}B_j,\ \ m\geq 0,n\geq 0.$$

这个恒等式就是著名的伯努利公式。值得指出的是，也可以利用第二类斯特林数直接计算幂和。

$$1^m+2^m+\cdots+n^m=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}j!S(m,j),\ \ m\geq 0,n\geq 0.$$

伯努利数的一个显著特点是，它们会出现在著名的黎曼ζ函数的求值中，具体公式如下：

$$\zeta(2m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m},$$

and

$$\zeta(-m)=-\frac{1}{m+1}B_{m+1}.$$

其中 $m\in\{1,2,3,\ldots\}$。ζ函数与伯努利数之间的密切关系，使得这些数具有若干深刻的算术性质。

对于任意整数 m，广义伯努利数 $B_n^{(m)}$可以通过 [7] 定义。

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^{-m}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(m)}X^n \tag{2.2}$$

广义伯努利数是经典伯努利数的自然推广。它们在数学中具有各种有趣的性质。此外，广义伯努利数还具有显著的算术性质，参见例如 [2]。由相应的定义可容易地看出，

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_nX^n\right)^{m}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(m)}X^n \tag{2.3}$$

上一节的结果可用于推导大量优雅的公式和行列式恒等式，这些公式和恒等式涉及伯努利数与第二类斯特林数，并涵盖了著名及新出现的代数恒等式。

定理 2.1. 对于每个整数 $n\geq 0$，伯努利数可以表示为

$$B_n=n!\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{-1}{2!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{-1}{(n+1)!}\right)^{k_n}$$

Moreover

$$B_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

证明。利用定理 1.3 可轻易得出。 □

表达式 (2.4) 并非新结果，例如它已见于 [12, 18]。定理1.3 的另一项应用见下述结果。

定理 2.2。设 n 为正整数，则有

$$\frac{1}{(n+1)!} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=p \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{p}{k_1,\ldots,k_n} (-1)^p \left(\frac{1}{1!}B_1\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2!}B_2\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{n!}B_n\right)^{k_n}$$

and

$$\frac{(-1)^n}{(n+1)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!}B_1 & \frac{1}{2!}B_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{n!}B_n \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}B_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{1!}B_1 \end{vmatrix}.$$

证明。根据定义，有

$$\left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} B_n X^n\right)^{-1} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)!} X^n$$

考虑到定理 1.3，本定理的恒等式及其行列式表达式便可得出。□

Theorem 2.3. *Let m be an integer and n be a nonnegative integers. Then*

$$\frac{1}{n!}B_n^{(m)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} (-1)^l \binom{m+l-1}{l} \frac{l!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(i+1)!}\right)^{k_i}$$

证明。利用公式（2.2）并直接应用定理（1.1）可得

$$\frac{1}{n!}B_n^{(m)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{-m}{l} l! \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(i+1)!}\right)^{k_i}$$

由于 $\binom{-m}{l}(-1)^l = \binom{m+l-1}{l}$，因此我们得到该结果。 □

定理 2.4. 设 m 为整数，且 n 为非负整数，则

$$\frac{1}{n!}B_n^{(m)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{m}{l} \frac{l!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i!}B_i\right)^{k_i}$$

Proof. Formula (2.2) tells us that

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_nX^n\right)^m = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(m)}X^n$$

and the result of Theorem (1.1) gives

$$\frac{1}{n!}B_n^{(m)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{m}{l} l! \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i!}B_i\right)^{k_i}$$

and so the result is shown. □

Theorem 2.5. *Let n, m be two positive integers, then*

$$\frac{(-1)^n}{n!}B_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!}B_1^{(-m)} & \frac{1}{2!}B_2^{(-m)} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{n!}B_n^{(-m)} \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}B_2^{(-m)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{1!}B_1^{(-m)} \end{vmatrix}.$$

其中，

$$\frac{1}{n!}B_n^{(m)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=l \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} (-1)^l \frac{l!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \left(\frac{1}{1!}B_1^{(-m)}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2!}B_2^{(-m)}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{n!}B_n^{(-m)}\right)^{k_n}$$

Proof. By Formula (2.2), it is clear that

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^m = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(-m)}X^n$$

Then we obtain the following identity

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^{-m} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(m)}X^n$$

this identity entails

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(-m)}X^n\right)^{-1} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(m)}X^n$$

Therefore the result follows directly from Theorem 1.3. □

定理 2.6. 设 n 和 k 为两个正整数，且 $n \geq k \geq 1$。我们有以下众所周知的恒等式

$$S(n,k) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{n!}\right)^{k_n}$$

因此，有

$$S(n+1,k+1)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n+1-k}\binom{n+1}{i}S(n+1-i,k)$$

Proof. Using Theorem 1.1, we have

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}X^n\right)^k=\sum_{n\geq 0}[\mathcal{X}_n]_k^n(0)X^n$$

On the other hand, it is clear that

$$[\mathcal{X}_n]_k^n(0)=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{1}{n!}\right)^{k_n}$$

注意，如果 $n<k$，那么 $[\mathcal{X}_n]_k^n(0)=0$。因此，通过比较 x^n 的系数，我们得到

$$\frac{1}{n!}S(n,k)=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}}\frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{1}{n!}\right)^{k_n}$$

因此，我们得到了第一个恒等式。第二个恒等式直接由文献 [15]中的引理 2.2 得出。□

第二类斯特林数最引人注目的特点之一，是它们与广义伯努利数之间的联系。

定理 2.7. 对所有 $k\geq 0$ 和 $n\geq 1$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+k}{n-i}B_{n-i}^{(k)}S(i+k,k)=0$$

特别地

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{n-i}B_{n-i}=0$$

证明。根据定义，我们有

$$\frac{1}{k!}X^k\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^k=\sum_{n\geq k}\frac{1}{n!}S(n,k)X^n$$

不难验证

$$\left\{1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k)}X^n\right\}\left\{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+k)!}S(n+k,k)X^n\right\}=\frac{1}{k!}$$

因此

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}B_{n-i}^{(k)}\frac{1}{(i+k)!}S(i+k,k)\right)X^n=\frac{1}{k!}$$

证明至此完成。 □

定理 2.8. 对于所有的 $k\geq 0$ 和 $n\geq 1$

$$\binom{n+k}{k}B_n^{(-k)}=S(n+k,k)$$

and

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+k}{n-i}\binom{i+k}{i}B_{n-i}^{(k)}B_i^{(-k)}=0$$

证明。公式（2.2）表明，对于任意整数 m，广义伯努利数可以形式化地定义为

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^m=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}B_n^{(-m)}X^n$$

On the other hand, we have

$$\frac{1}{k!}X^k\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^k=\sum_{n\geq k}\frac{1}{n!}S(n,k)X^n$$

Therefore

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{k!n!}B_n^{(-k)}X^{n+k}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+k)!}S(n+k,k)X^{n+k}$$

This completes the proof of the first statement. The second statement is a consequence of Theorem(2.7) □

Theorem 2.9. *For all $k\geq 1$ and $n\geq 1$, we have*

$$B_n^{(k)}=\binom{k}{1}B_n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}B_i\sum_{l=1}^{k-1}B_{n-i}^{(k-l)}$$

and

$$B_n^{(-k)}=\binom{k}{1}\frac{1}{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}\sum_{l=1}^{k-1}B_{n-i}^{(-k-l)}$$

Proof. The first identity follows easily from Theorem(1.8) and Formula (2.3). To prove the second identity, we first applied Theorem(1.8) to Formula (2.2) and we obtain

$$\frac{1}{n!}B_n^{(-k)}=\binom{k}{1}\frac{1}{(n+1)!}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i+1)!}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(n-i)!}B_{n-i}^{(-k-l)}$$

which implies

$$B_n^{(-k)}=\binom{k}{1}\frac{1}{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i+1)i!}\frac{n!}{(n-i)!}\sum_{l=1}^{k-1}B_{n-i}^{(-k-l)}$$

Therefore

$$B_n^{(-k)}=\binom{k}{1}\frac{1}{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}\sum_{l=1}^{k-1}B_{n-i}^{(-k-l)}$$

By the above, this theorem is proved. □

The following result is an immediate consequence of Theorem (1.9).

定理 2.10。设 k 为一个整数。则广义伯努利数满足以下两个公式。

$$B_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{n-j}B_n^{(j)},\ \ n\geq 0,$$

and

$$\binom{n+k}{n}B_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{n+j}\binom{n+j}{n}\binom{n-k}{n-j}B_n^{(j)},\ \ n\geq 0.$$

定理 2.11. 设 k 为一个整数。则广义伯努利数满足以下性质。

$$B_{n+1}^{(k)}=k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{i+1}B_{n-i}^{(k-1)}.$$

and

$$B_{n+1}^{(-k)} = k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+2}B_{n-i}^{(-k-1)}.$$

Proof. This result is a direct application Theorem (1.10) and the following relations

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_nX^n\right)^k = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k)}X^n$$

and

$$\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^k = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(-k)}X^n$$

□

定理 2.12。设 k 为一个整数。那么，广义伯努利数满足以下关系。

$$B_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}\left(k\binom{n}{i}-\binom{n}{i+1}\right)B_{i+1}B_{n-i}^{(k)}.$$

$$B_{n+1}^{(-k)} = \sum_{i=0}^{n}\left(k\binom{n}{i}-\binom{n}{i+1}\right)\frac{1}{i+2}B_{n-i}^{(-k)}.$$

Proof. 考虑到定理（1.11）和公式（2.3），我们得到以下关系。 n

$$\frac{1}{n!}B_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}(k(i+1)-(n-i))\frac{1}{(i+1)!}B_{i+1}\frac{1}{(n-i)!}B_{n-i}^{(k)}.$$

which implies

$$B_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{kn!(i+1)}{(i+1)!(n-i)!}-\frac{n!(n-i)}{(i+1)!(n-i)!}\right)B_{i+1}B_{n-i}^{(k)}.$$

and

$$B_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{kn!}{i!(n-i)!}-\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}\right)B_{i+1}B_{n-i}^{(k)}.$$

这只是第一个陈述。第二个陈述的证明可以借助公式（2.2），按照第一个恒等式的证明方法进行验证。□

在以下结果中，我们为广义伯努利数提供了一个更有趣且可能更实用的递推公式。该递推公式使我们能够高效地计算这些数。此外，这个递推表达式还可用于生成有趣且实用的恒等式。例如，我们利用它给出了欧拉所提出的一个已知恒等式的推广。

定理 2.13. 设 k 为一个不等于 0 的整数。对于所有正整数 $n \geq 1$，我们有

$$B_n^{(k+1)} = \left(1-\frac{n}{k}\right)B_n^{(k)} - nB_{n-1}^{(k)}.$$

Proof. Let

$$b_k(X) = \left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^{-k}$$

Taking the derivative, we obtain

$$b_k^{'}(X) = -k\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right)^{-k-1}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{(n+2)!}X^n\right)$$

Thus

$$Xb_k^{'}(X) = -kb_{k+1}(X)\left(\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!})X^n\right)$$

and hence

$$\begin{aligned} Xb_k^{'}(X) &= -kXb_{k+1}(X)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}X^{n-1}\right) + kb_{k+1}(X)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right) \\ &= -kXb_{k+1}(X)\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right) + kb_{k+1}(X)\left(-1 + 1\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}X^n\right) \\ &= -kXb_k(X) - kb_{k+1}(X) + kb_k(X) \end{aligned}$$

因此

$$kb_{k+1}(X) = k(1-X)b_k(X) - Xb_k^{'}(X)$$

我们知道

$$b_k(X) = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k)}X^n$$

由此可得

$$k\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k+1)}X^n\right) = k(1-X)\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k)}X^n\right) - X\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}B_{n+1}^{(k)}X^n\right)$$

通过比较系数，我们很容易得到

$$kB_n^{(k+1)} = kB_n^{(k)} - knB_{n-1}^{(k)} - nB_n^{(k)} \text{ for } n \geq 1$$

and

$$B_n^{(k+1)} = \left(1 - \frac{n}{k}\right)B_n^{(k)} - nB_{n-1}^{(k)} \text{ for } n \geq 1.$$

如所声称。 □

为本节开头所引用的欧拉恒等式 (2.1) 提供一种自然的推广，或许会引起极大的兴趣。以下结果旨在给出这一推广恒等式。

Theorem 2.14. *Let k be an integer, not equal to 0, and n a nonnegative integer. The generalized Bernoulli numbers and the Bernoulli numbers can be related by the following relation*

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_iB_{n-i}^{(k)} = \left(1 - \frac{n}{k}\right)B_n^{(k)} - nB_{n-1}^{(k)}, \ \ n \geq 0$$

or equivalently

$$\sum_{i=2}^{n-2}\binom{n}{i}B_iB_{n-i}^{(k)} = -\frac{n}{k}B_n^{(k)} - \frac{1}{2}nB_{n-1}^{(k)} + \frac{1}{2}knB_{n-1} - B_n, \ \ n \geq 4.$$

Proof. We start this proof by writing the following obvious identity

$$\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_n^{(k+1)}X^n\right) = \left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}B_nX^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}B_n^{(k)}X^n\right)$$

由此，我们可以推导出

$$B_n^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_iB_{n-i}^{(k)}$$

另一方面，由定理 (2.13) 可得

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_iB_{n-i}^{(k)}=\left(1-\frac{n}{k}\right)B_n^{(k)}-nB_{n-1}^{(k)}$$

Therefore we reach the desired formula. □

References

[1] G. E. Andrews，欧拉五边形数定理，《数学杂志》，56，279–284（1983）。[2] L. Carlitz，关于诺尔伦德多项式 $B_n^{(x)}$ 的若干性质，《数学通讯》，33，297–311 （1967）。[3] X. W. Chang 、 M. J. Gander 、 S. Karaa，带状黑森伯格–托普利兹矩阵 QR 分解的渐近性质。《数值线性代数及其应用》，12（2005），659–682。[4] C. A. Charalambides，《计数组合学》，Chapman and Hall/CRC，2002。[5] H. Chen，通过行列式研究伯努利数，《国际数学教育科学与技术杂志》，34，291–297（2003）。[6] L. Comtet，《高级组合学：有限展开与无限展开的艺术》，Reidel，多德雷赫特，1974。[7] G. Everest、A. Van Der Poorten、I. Shparlinski 和 T. Ward，《递推数列》，美国数学学会，数学调查与专著104，2003。[8] I. M. Gessel，拉格朗日反演，《组合理论杂志A辑》，144，212–249（2016）。[9] H. W. Gould，泰勒级数和狄利克雷级数幂的系数恒等式，《美国数学月刊》，81，3–14（1974）。[10] H. W. Gould，伯努利数的显式公式，《美国数学月刊》，79，44–51（1972）。[11] P. Henrici，《应用与计算复分析》，第1卷，Wiley，纽约，1974。[12] A. Inselberg，关于幂级数中出现的托普利兹–黑森伯格矩阵的行列式，《数学分析及其应用杂志》，63（1978），347–353。[13] A. J. E. M. Janssen，非负黑森伯格–托普利兹矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值的渐近性质，《IEEE信息论汇刊》，35（1989），1340–1344。[14] M. Mou.couf，半循环矩阵和 r-循环矩阵的 k 次幂的闭式表达式。arXiv:2006.16198[math.RA]（2020）。[15] M. Mou.couf，半循环矩阵和 r-循环矩阵的任意正次幂。《线性与多重线性代数》。DOI:10.1080/03081087.2021.1968329（2021）。[16] T. Muir，《行列式理论的历史发展》，共四卷，Dover Publications，纽约，1960。[17] I. Niven，形式幂级数，《美国数学月刊》，76，871–889（1969）。[18] F. Qi 和 R. J. Chapman，伯努利多项式的两种闭式表达式，《数论杂志》，159，89–100（2016）。[19] F. Qi，关于元素涉及伯努利数的某些托普利兹–黑森伯格行列式的符号，《离散数学贡献》，18（2023），第1期，即将出版。[20] J. Riordan，《组合恒等式》，Wiley，纽约，1968。[21] B. Sambale，形式幂级数入门，《德国数学家协会年报》，125，3–69（2023）。[22] D. Zeitlin，关于卷积数与和，《美国数学月刊》，74，235–246（1967）。

Said Zriaa and Mohammed Mouçouf,
University Chouaib Doukkali. Department of Mathematics,Faculty of science Eljadida, Morocco
Email address: saidzriaa1992@gmail.com*Email address*: moucouf@hotmail.com