arXiv:2305.06081v1 [math.AG] 10 May 2023

小高度除幂棱柱 Frobenius 晶体与范畴 $\mathcal{MF}$

Matti W¨urthen

2023 年 5 月 11 日

摘要

设 $\mathcal{X}$ 是混合特征完备离散赋值环 $\mathcal{O}_K$ 上的光滑 p-进形式概形，且其剩余域为完美剩余域。我们引入一个一般范畴$\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ -2]\ \mathrm{p}}(\mathcal{X})$，其对象为 p-无挠晶态系数对象，并证明该范畴等价于最近由 Du-Liu-Moon-Shimizu 引入的高度$p-2$完备棱柱 Frobenius 晶体范畴。特别地，这表明范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ -2]\ \mathrm{p}}(\mathcal{X})$ 等价于 $\mathcal{X}$ 上的晶态 Z$_p$-局部系统范畴，其 Hodge-Tate 权重属于 $\{0,\dots,p-2\}$；这将 Breuil-Liu 定理的晶态部分推广到了更高维情形。

目录

1 I引言 **1**

2 预备知识 **3**
2.1 记号.3 2.2 棱柱体位点的预备知识.3 2.3 晶体位点的预备知识.5

3 范畴 $\mathcal{MF}$ **7**

4 除法棱柱 F-晶体 1 **8**
4.1 完备棱柱 F-晶体的 Nygaard 滤过.18 4.2 除法晶体.24 4.2.1 对偶性.28

5 The 类别 $\mathcal{MF}$ 与棱柱 F-晶体 **29**
5.1 从除法棱柱 F-晶体到 $\mathcal{MF}$ 的函子.29 5.2 比较 A_{inf} 上的三元组与 A_{cris} 上的三元组.32 5.3 小分歧情形.38

参考文献 **39**

1 引言

设 K 是一个具有完美剩余域的离散赋值 p-进域。最近，在 [5], 中，Bhatt 和 Scholze 证明了绝对伽罗瓦群 G_K 的晶体 Q$_p$-表示中的 Z$_p$-格与绝对棱柱位点上的局部自由弗罗贝尼乌斯晶体之间存在对应关系。

$Spf(\mathcal{O}_K)$。这改进了 Kisin 通过所谓的 Breuil-Kisin 模所得到的分类。通过 Du-Liu-Moon-Shimizu（[13]）的工作，以及 Guo-Reinecke（[18]）独立开展的工作，这一对应关系现已推广到高维情形。更准确地说，设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 上的一个光滑 p-进形式概形。在 [13] 中证明了一般纤维 $\mathcal{X}_K$ 具有正 Hodge-Tate 权重的晶体局部系统中的格，与所谓的有限高度完备棱柱 Frobenius 晶体 [1] 相对应。回顾 [13]，一个高度为 $a \geq 0$ 的完备棱柱 Frobenius 晶体由一对 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})$ 给出，其中包含绝对棱柱位点 $\mathcal{X}$ 上结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$ 的完备模中的一个晶体，以及一个满足以下条件的 Frobenius 映射：对于任意小仿射开集 $Spf(R)$，在 $\mathfrak{S}(R)$ 上的取值，即沿 $\mathfrak{S} \to \mathcal{O}_K$ 对 R 选取的一个形式光滑变形，是一个高度为 a 的饱和无挠 Breuil-Kisin 模。特别地，这意味着 Frobenius 是单射，且其余核被 E^a 所湮灭（精确定义见定义 4.1.1）。

对于 Hodge-Tate 权重属于 $\{0, \ldots, p-2\}$ 的表示，还存在另一条研究路线，该路线使用的系数对象与晶体位点上的晶体更为接近。从历史上看，晶体表示中的格的系数对象最早由 Fontaine-Laffaille（[17]）研究；随后，Faltings 在 [14] 中将这项工作推广到了更高维情形。在这两种情形下，研究仍局限于 K 完全非分歧的情形。随后，Faltings 在 [15] 中处理了分歧情形，特别地，Breuil 通过一系列工作处理了零维情形（见 [7], [8] 和 [9]）[2]。Breuil 猜想，具有小 Hodge-Tate 权重的晶体表示（或更一般地，半稳定表示）中的格应当对应于所谓的（晶体）Breuil 模。Liu 在 [22], 中利用 Kisin 的工作证明了这一猜想。本文的主要目标之一，是证明这一结果的高维版本（即其晶体部分）。对于任意光滑的 p-进形式概形 $\mathcal{X}$，我们引入了晶体 Breuil 模的高维类比 $\mathcal{MF}^{\text{挠-自由}}_{[0,\text{一个}]}(\mathcal{X})$ 所成的范畴，其中现在我们假设 $a \leq p-2$；在局部情形 $\mathcal{X} = Spf$（R）下，其对象由 D 上的四元组 $(M, Fil^a M, \nabla, \Phi^a_M)$ 给出，而 D 是形式光滑变形 $\mathfrak{S}$（R）中 $ker(\mathfrak{S}(R) \to R)$ 的 PD 包络。这里，M 是一个有限生成的无挠模，它配备了一个平坦联络、一个滤过 $Fil^a M \subset M$ 以及一个除幂 Frobenius 映射 $\Phi^a_M : Fil^a M \to M$。

按照 Du-Liu-Moon-Shimizu 的定义，一个高度为 a 的完备棱柱 Frobenius 晶体带有如下所谓的 Nygaard 滤过，其定义为 $\mathcal{N}^i_{\mathcal{M}} := \Phi^{-1}_{\mathcal{M}}(\mathcal{I}^i_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M})$。我们利用此 Nygaard 滤过的第 a 级，构造完备棱柱 Frobenius 晶体与一类带有除幂 Frobenius 的滤过晶体之间的范畴等价（见定义 4.2.1），并将其记为 $DivCR^{\wedge,\ \phi\,\text{tor}-\text{free},\ \text{a}}_{[0,\ ]}(\mathcal{X})$。从我们的角度来看，后一范畴与范畴 $\mathcal{MF}$ 的联系最为自然。于是我们的主定理如下。

定理 1.0.1（定理 5.1.2）。存在范畴的典范等价

$$DivCR^{\wedge,\phi,\text{tor}-\text{free}}_{[0,\text{a}]}(\mathcal{X}) \to \mathcal{MF}^{\text{tor}-\text{free}}_{[0,\text{a}]}(\mathcal{X}).$$

证明通过转到局部情形，然后比较两侧相对于 $Spf(R)$ 的完美幺覆盖的下降数据来给出。在那里，证明归结为一个一般比较定理，该定理比较分别定义在 A_{inf}和 A_{cris} 上的除幂 Frobenius 模，并推广了文献中的若干类似结果（例如，参见 [20,命题 1.1、11], [12, 定理 2.2、1], [16, §2] ，以及 [10, 2.3.2] 和 [21, 命题

[1]我们在此先说明，我们对 ´etale 实现函子采用了不同于 [13] 的约定。特别是，我们采用 ´etale 实现函子的协变版本。[2]事实上，Breuil 的工作更一般地讨论了半稳定表示中的格

9.3] （Dieudonn´e 模的情形）。
作为推论，利用 [13], 的工作，我们进而得到 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]}{}_{\mathrm{a}}(\mathcal{X})$ 等价于具有较小 Hodge-Tate 权重的晶体 Z$_p$-局部系统。

推论 1.0.2. 设 $a \leq p-2$。存在一个范畴等价。

$$\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}_p - Loc^{\mathrm{cris}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}_K),$$

其中，$\mathrm{Z}_p - Loc^{\mathrm{cris}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}_K)$ 表示 Hodge-Tate 权重属于 $\{0,\ldots,a\}$ 的晶体 Z$_p$-局部系统范畴。

我们在此指出，Fontaine-Laffaille、Faltings 和 Breuil 的工作研究的是一个反变 ´ étale 实现函子，而我们的函子是协变的。
范畴 $\mathcal{MF}$ 的构造见 §3。在第 4 节中，我们首先研究完备棱柱 Frobenius 晶体的 Nygaard 滤过。在此基础上，我们引入范畴 $DivCR^{\wedge,\ \phi,\ \mathrm{tor-free}}(\mathcal{X})$，它对应于具有正 Hodge-Tate 权重的晶体局部系统。第 5 节则包含主要结果。

致谢

感谢 Johannes Ansch¨utz 和 H´el`ene Esnault 与我讨论。
本工作得到德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）TRR 326：均匀化结构的几何与算术项目（项目编号：444845124）的支持，以及德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）“非阿基米德解析空间上的向量丛与局部系统”资助项目（项目编号：446443754）的支持。

2 预备知识

2.1 记号

我们固定一个素数 $p > 2$，并用 $\mathcal{O}_K$ 表示一个混合特征 $(0,p)$ 的完备离散赋值环，其完美剩余域为 k，分式域为 K。我们还固定一个一致化元 $\pi \in \mathcal{O}_K$，并将与 π 相关联的 Breuil-Kisin 棱柱记作 $(\mathfrak{S} = W(k)[[u]], E(u))$。我们将相应的 Breuil 环记作 $\mathcal{S}$，即理想 $(E(u)) \subset \mathfrak{S}(R)$ 的 p-进完备化 PD 包（它与 $p\mathfrak{S}$ 上的 PD 结构相容）。我们还定义 $c := {}^{\phi_{(E)}\ p}$，它是 $\mathcal{S}$ 中的一个单位元。

此外，我们用 $C := K$ 表示 K 的一个固定代数闭包的 p-进完备化。于是有 Fontaine 环 $A_{\mathrm{inf}} = W(\mathcal{O}_C^{\flat}) = \mathbb{A}_{\mathcal{O}_C}$，并定义 $\tilde{\xi} = \phi(\xi)$，其中 ξ 是 $\theta\colon A_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{O}_C$ 的核的一个 ˜生成元。我们遵循如下约定：用 (A_{inf}, ξ) 表示 $\mathcal{O}_C$ 上的泛棱柱。此外，我们回顾一下环 $A_{cris} = \mathbb{A}_{\mathcal{O}_C/p}$，它可识别为 $(\xi) \subset A_{inf}$ 的 PD 包的 p-进完备化。存在棱柱的忠实平坦映射 $\mathfrak{S} \to A_{inf}$，它可扩张为映射 $\mathcal{S} \to A_{cris}$。
最后，我们所说的 $\mathcal{O}_K$ 上的光滑 p-进形式概形，是指形式概形 $\mathcal{X}$，它局部同构于 $Spf(R)$，其中 R 是一个光滑 $\mathcal{O}_K$-代数的 p-进完备化。我们用 $\mathcal{X}_K$ 表示 $\mathcal{X}$ 的赋值空间一般纤维。

2.2 棱柱体位点的预备知识

设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{O}_K$ 上的一个光滑 p-进形式概形。在本节中，我们希望比较绝对棱柱位点上的晶体与拟合成学位点上的（棱柱）晶体。

$\mathcal{X}$，推广了 [1, 命题 4.4]。关于棱柱体位点的一般术语和主要结果，请读者参阅奠基性著作 [6], [5] 以及 [1]。由于我们希望将本文的工作与论文 [13], 联系起来，因此采用该文中的约定，并用 $\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$ 表示有界棱柱的位点（见 [13, 定义 3.2]）。接下来回顾如下定义。

定义 2.2.1. [13,定义 3.11] $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模上的完备晶体是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模层 $\mathcal{M}$，满足：对于任意$(B, I) \in \mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$， $\mathcal{M}(B)$都是有限生成的、(p, I)-完备的B-模；对于 $\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$中的任意映射$(B, I) \to (C, IC)$, 典范映射 $\mathcal{M}(B)\hat{\otimes}C \to \mathcal{M}(C)$是同构。我们将完备棱柱体晶体范畴记作 $Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$。

沿用 [1], 的做法，我们主要在拟合成位点上工作，因为这对我们来说会更方便。令 $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 为由 p-完备环 A构成的位点，这些环带有一个拟合成映射 $Spf(A) \to \mathcal{X}$，其覆盖为 p-完备忠实平坦映射。回顾 [1, §4] ，存在环化拓扑的态射 $\mu : \mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$，其中 $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{qsyn}}$ 赋有环层 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}} := \mu_*\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$。此外，我们还有理想层 $\mathcal{I} = \mu_*\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}$。层 $\mathcal{O}^{pris}$ 赋有 Nygaard 滤过，这是一个穷尽且递减的滤过，定义如下:

$$\mathcal{N}^i_{\mathbb{\Delta}} := \phi^{-1}(\mathcal{I}^i), \text{ for any } i \geq 0.$$

拟合成位点有一个基，由对象 $Spf(B) \to \mathcal{X}$ 给出，其中 B 是一个 p-无挠的拟正则半完美幺（qrsp）$\mathbb{Z}_p$-代数。关于此类环的定义和基本性质，请读者参阅 [4, §4.4] 以及 [1, §3.3 和 §3.4] 。 B 的棱柱体位点有一个初始对象，由棱柱上同调 $\mathbb{\Delta}_B$ 给出，并且我们有 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}(B) = \mathbb{\Delta}_B$。此外，对于任意 $n \geq 1$，环 $B^{\otimes n} = B\hat{\otimes}\underbrace{_R \cdots \otimes_R}_{n-times} B\hat{}$ 也是 qrsp，
如此（ [4, 引理 4.27]）。

定义 2.2.2。 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}$-模中的晶体是 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}$-模 $\mathcal{M}$ 上的一个层，其满足：对于任意 qrsp 对象 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$， $\mathbb{\Delta}_B$-模 $\mathcal{M}(B)$ 是有限生成的，且在经典意义下是 (I, p)-完备的；对于任意 $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 中 qrsp 对象之间的映射 $Spf(C) \to Spf(B)$，典范映射 $\mathcal{M}(B)\hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B}\mathbb{\Delta}_C \to \mathcal{M}(C)$ 是一个同构。我们将 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}$-晶体范畴记为 $Crys(\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}})$。

~ ~利用环化拓扑的映射 $\mu : \mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$，我们得到一个函子 $\mu_* : Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) \to Crys(\{v9)$。

命题 2.2.3. 函子 $\mu_* : Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) \to Crys(\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}})$ 是范畴等价。

该命题的证明基于以下事实：在 $\mathcal{X}$ 上局部于扎里斯基拓扑时，这两类晶体都等价于同一类下降数据。假设 $\mathcal{X} = Spf(R)\tilde{}$ 是仿射的。令 $R \to R$ 为一个由 qrsp $\mathbb{Z}_p$-代数给出的 p-完全忠实平坦覆盖。于是由 [6, 引理 7.11]， $\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}}$ 是 $\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$ 的弱初始对象。对于 $n \geq 1$, 我们定义 $\mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}} := \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}}$，并将 $\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}} \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \mathbb{\Delta}^{(1)}_{\tilde{R}}$ 记为由将 $\tilde{R}$ 发送到第一或第二个因子所诱导的态射。

定义 2.2.4. 范畴 $Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$ 由二元组 (M, ϵ) 组成，其中 M 是一个有限~生成的经典 (p, I)-完备 $\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}}$-模，并且 $\epsilon : p_1^*M \xrightarrow{\sim} p_2^*M$ 是一个同构，它满足关于 $\mathbb{\Delta}^{(2)}_{\tilde{R}}$ 的显然的余循环条件。

晶体性质保证我们有求值函子 $Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) \to Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$ 和 $Crys(\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}) \to Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$，它们构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) & \xrightarrow{\quad\mu_*\quad} & Crys(\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}) & \end{array}$$

在以下命题的证明中，请注意，对于沿着 (I,p)-完全忠实平坦映射的有限生成模，存在有效下降。

命题 2.2.5. 求值函子 $Crys(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) \to Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$ 和 $Crys(\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}) \to Strat(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$ 都是范畴等价。

构造 2.2.6。我们假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射。我们将回顾两种不同的重要覆盖的构造，它们将在全文中用到。第一个构造类似于 [6, Constr. 4.17]。令 P_R 为集合 $R_{\mathcal{O}_C} = R\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_C$ 上的 A_{inf} 之上的导出 (p,ξ)- 完备多项式代数。令 B_R 为集合 P_R 上自由 δ-A_{inf}- 代数的 (p,ξ)-完备化，并令 $B_R^{\infty} = (colim_{\phi} B_R)^{\wedge}$ 为其导出 (p,ξ)-完美化完备化。则 $\tilde{R} := B_R^{\infty\wedge} \otimes_{P_R} R_{\mathcal{O}_C}$ $R \to \tilde{R}$ 是拟正则半完美幺且是准合成的。覆盖 R 关于 R 是函子性的。

作为第二种覆盖，我们回顾通常的完美幺覆盖，它是通过提取 ´etale 坐标的 p 次方根得到的。令 $\mathcal{O}_K\{t_1^{\pm},\dots,t_n^{\pm}\} \to R$ 为 ´etale。然后我们定义 $R_\infty := R\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K\{t_1^{\pm},\dots,t_n^{\pm}\}}\mathcal{O}_C\{t_1^{\pm p^{\frac{1}{\infty}}},\dots,t_n^{\pm p^{\frac{1}{\infty}}}\}$。那么 R_∞ 是一个完美幺环，且 $R \to R_\infty$ 是准合成。

有时需要使用更小的弱初始对象。回顾 [13, §2]，存在一个小的 $W(k)$-代数 R_0，使得 $R = R_0\hat{\otimes}_{W(k)}\mathcal{O}_K$。于是我们定义 $\mathfrak{S}$-代数 $\mathfrak{S}(R) := R_0[[u]]$。它带有一个 Frobenius 提升，与 $\mathfrak{S}$ 上的 Frobenius 提升相容，该提升通过将 ´étale 坐标提升至其 p 次幂而得到。$(\mathfrak{S}(R), E(u))$ 因而是一个棱镜，满足 $\mathfrak{S}(R)/E(u) = R$。它是 $\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$ 的一个弱初始对象。存在一个棱镜之间的忠实平坦态射 $\mathfrak{S}(R) \to A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)$，与将 $E(u)$ 映射到 $\tilde{\xi}$ 的映射 $\mathfrak{S} \to A_{\mathrm{inf}}$ 相容。该态射通过将坐标 t_i 映射到 $[t_i^\flat]$ 来定义，其中 $[t_i^\flat]$ 是元素 $t_i^\flat \in R_\infty^\flat$ 的 Teichmüller 提升，而该元素对应于 $t_i \in R_\infty$ 的一个固定的 p 次方根序列。

2.3 晶体位点预备知识

关于晶体位点的一般性结果，我们参考 [2]，另请参见 [3, 附录 F]。

定义 2.3.1. 设 Y 是一个 p 幂零的概形。则 $(Y/\mathbb{Z}_p)_{\mathrm{cris}}$ 表示如下位点：其对象由三元组 (A,J,f) 给出，其中 A 是经典意义下 p-进完备的 $\mathbb{Z}_p$-代数，$J \subset A$ 是一个理想，配备了与 pA 上的 PD 结构相容的除幂结构，并且 $f : Spec(A/J) \to Y$ 是一个态射。

$(Y/\mathbb{Z}_p)_{\mathrm{cris}}$的拓扑由映射$(A,J,f) \to (B,JB,g)$生成，其中 $A \to B$是p-完全忠实平坦。

令 $\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{cris}}}$为与 $(A,J,f) \mapsto A$相关联的层。若一个完备的 $\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{cris}}}$-模 $\mathcal{M}$ 满足：对于 $(Y/\mathbb{Z}_p)_{\mathrm{cris}}$ 中任意映射 $(A,J_A,f_A) \to (B,J_B,f_B)$，典范映射 $\mathcal{M}(A)\hat{\otimes}_A B \to \mathcal{M}(B)$ 是一个同构，则称其为 $\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{cris}}}$-模中的晶体。

设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是一个小的光滑仿射 p-进形式概形，定义在 $\mathcal{O}_K$ 上。如上所述，我们固定一个一致化元 $\pi \in \mathcal{O}_K$，并再次令 $(\mathfrak{S},E)$ 为与之关联的 Breuil-Kisin 棱柱

，并考虑构造 2.2.6 中的对象 $\mathfrak{S}(R)$。我们将 D 记为与 $p\mathfrak{S}(R)$ 上的 PD 结构相容的映射 $\mathfrak{S}(R) \to R$ 的核的 PD 包的 p-进完备化，并将 J_R 记为 $D \to R$ 的核。

我们记 $\mathcal{X}_n := Spec(R/p^n)$。对于任意对象 $(A, J, f) \in (Spec(R/p^n)/\mathbb{Z}_p)_{\text{cris}}$，映射 $R/p^n \to A/J$ 可提升为一个 PD-映射 $D \to A$：具体而言，首先注意到 A 是一个 $W(k)$-代数，由变形理论可知（因为 A/J 也是如此）。接着， $R/p^n \to A/J$ 可提升为映射$\mathfrak{S}(R) \to A$，进而延拓至 PD-包 D。这意味着 $(D \to R/p^n, (J_R, p^n))$ 是弱初始的。
于是，我们还有 $(Spec(R/p^n)/\mathbb{Z}_p)_{\text{cris}}$ 中自积的如下描述。对于$n \geq 1$，记 $D(n)$ 为核的 p-进完备 PD 包。

$$\underbrace{\mathfrak{S}(R) \otimes_{W(k)} \cdots \otimes_{W(k)} \mathfrak{S}(R)}_{n+1-times} \to \mathfrak{S}(R) \to R.$$

由此得到一个带有 PD-理想 $(D^{(\bullet)}, J_R(\bullet))$ 的余单纯环。我们也将由 $\mathfrak{S}(R) \to \mathfrak{S}(R) \otimes \mathfrak{S}(R)$ 诱导、映至第一个（分别地，第二个）因子的映射 $D \to D^{(1)}$ 记为 p_1（分别地，记为 p_2）。

我们还将再次利用通过取 qrsp 环的覆盖而得到的弱初始对象。令 $R \to R$ 为构造 2.2.6 中构造的函子性准合成覆盖。

对于 $n \geq 0$，我们定义 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)} := \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes(n+1)}/p}$，其中 $\tilde{R}^{\otimes(n+1)} := \tilde{R}\hat{\otimes}_R \cdots \hat{\otimes}_R \underbrace{\tilde{R}}_{(n+1)-times}$.
这是 p-进完备化的 $W((\tilde{R}/p)^{\otimes(n+1)\flat}) \twoheadrightarrow (\tilde{R}/p)^{\otimes(n+1)}$ 的 PD 包，其中 $(\tilde{R}/p)^{\otimes(n+1)\flat}$ 表示 $(\tilde{R}/p)^{\otimes(n+1)}$ 的逆极限完美化（参见 [3, 附录 F]）。由于 $p\tilde{R}^{\otimes(n+1)} \subset \tilde{R}^{\otimes(n+1)}$ 带有典范 PD 结构（相对于 $\mathbb{Z}_p$），因此存在唯一的满态射 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)} \to \tilde{R}^{\otimes(n+1)}$，使其与到 $\tilde{R}^{\otimes(n+1)}/p$ 的投影相容。通过这种方式，我们得到一个带有 PD- 理想 $(\mathrm{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)}, J_{\tilde{R}^\bullet})$ 的余单纯代数。此外，$(\mathrm{A}_{\text{cris}}(R/p), (J_{\tilde{R}}, p^n))$ 是 $((\mathcal{X}/p^n)/\mathbb{Z}_p)_{\text{cris}}$ 的一个弱初始对象，即对于任意对象 $(A, I) \in ((\mathcal{X}/p^n)/\mathbb{Z}_p)_{\text{cris}}$，存在一个 p-完全忠实平坦映射 $(A, I) \to (C, IC)$，使得存在一个态射 $(\mathrm{A}_{\text{cris}}(R/p)\ J_{\tilde{R}}) \to (C, IC)$。为证明这一点，首先注意到 A 带有一个 $\mathcal{S}$-代数结构，并且与 R 的 $\mathcal{O}_K$-代数结构相容。现在，来自构造 2.2.6 的环 B_R 是 A_{inf} 上一个多项式环的 (p, ξ)-完备化。因此，存在一个映射 $B_R \to A\hat{\otimes}_{\mathcal{S}} A_{inf}$，它提升了 $R_{\mathcal{O}_C} \to A/I \otimes \mathcal{O}_C$。于是，$(A_{A_{inf}}\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty, I(A_{A_{inf}}\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty))$ 是一个带有 PD-理想的 $\mathbb{Z}_p$-代数（在 A 上完全忠实平坦），使得存在一个映射 $\tilde{R} \to A_{A_{inf}}\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty / I(A_{A_{inf}}\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty)$。由 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p)$ 的泛性质可知，存在一个映射 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p) \to A_{A_{inf}}\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty$，它提升了映射 $R \to \tilde{R} \to A_{A_{inf}}/I\hat{\otimes}_{B_R} B_R^\infty$。
我们在此也先指出，

$$\mathbb{A}_{\text{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)} = \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}/p} = \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}}\hat{\otimes}_{A_{\text{inf}}} A_{\text{cris}},$$

这由棱柱上同调与基变换的相容性可得。

现在令 R_∞ 为构造 2.2.6 中引入的完美化覆盖。我们再次得到一个余单纯对象 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)}$，其中 $\mathrm{A}_{\text{cris}}(R_\infty/p)$ 再次是弱初始的。存在一个 p-完全忠实平坦映射 $D^{(\bullet)} \to \mathrm{A}_{\text{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)}$（也就是说，它是将映射 $\mathfrak{S}(R)^{(\bullet)} \to \mathbb{\Delta}_{R_\infty}^{(\bullet)}$ 沿 $A_{\text{inf}} \to A_{\text{cris}}$进行基扩张得到的，该映射来自构造 2.2.6）。这与 Frobenius提升相容。

下面是一个标准结果，它表明，对于上面讨论的任一种覆盖，晶体都可以描述为配备了 HPD-层化的模。

命题 2.3.2. 设 $A^{(\bullet)}$ 为 $D^{(\bullet)}$、$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)$ 或 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)}$。则范畴 $Crys(\mathcal{X}_n/\mathbb{Z}p)$ 等价于由 p-进完备的 A-模 M 组成的范畴，其中配备一个在 $A^{(1)}$ 上的同构 ϵ：$p_1^*M \xrightarrow{\cong} p_2^*M$，并满足在 $A^{(2)}$ 上显然的余循环条件。

3 范畴 $\mathcal{MF}$

现在我们将引入晶体系数对象范畴。下面的定义可视为 Breuil 在 [7] 中针对 0 维情形所引入范畴的高维版本，不同之处在于我们只考虑晶体对象（而非半稳定对象）。它也推广了 Faltings 在 [15] 中引入的范畴 $\mathcal{MF}$ 的概念。尤其是，我们还考虑非局部自由对象。

令 $a \leq p-2$。令 R 为一个小光滑 $\mathcal{O}_K$-代数的 p-进完备化，其具有 ´étale 坐标 t_1、.....、t_n，并令 D 为上一节引入的环——则 D是一个 $\mathcal{S}$-代数，其中 $\mathcal{S}$ 表示 Breuil 环。令 J_R 为 $D \to R$的核。弗罗贝尼乌斯 ϕ_D 满足 $\phi_D(J_R^{[s]}) \subset p^i D$（对于 $s \leq p-1$），因此我们有除幂 Frobenius 映射$\phi_D^s := \frac{\phi_D}{p^s}$: $J_R^{[s]} \to D$。回想一下，我们有元素 $c := \phi_D^1(E(u)) \in D$。

我们用 $\hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p} = \Omega^1_{\mathfrak{S}(R)}\hat{\otimes}_{\mathfrak{S}(R)}D$ 表示 PD 微分算子模的 p-进完备化（参见 [26, Tag 07HQ]，特别是 [26,Tag 07HW]）。它在 $\{du, dt_k\}$上自由生成。

定义 3.0.1. 范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ \mathrm{a}]}(\mathcal{X})$ 由以下数据组成：

- 一个有限生成的 p-挠无自由完备 D-模 M，赋有一个可积拟幂零联络 $\nabla: M \to M \otimes_D \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}p}$。
- 一个闭子模 $Fil^aM \subset M$，满足 $J_R^{[a]}M \subset Fil^aM$，且与 ∇ Griffith 横截，即 $J_R\nabla(Fil^aM) \subset Fil^aM$。
- 一个 ϕ_D-线性态射 $\phi^a_M: Fil^aM \to M$，它是水平的，即下图

$$\begin{array}{ccc} Fil^aM & \xrightarrow{E(u)\nabla} & Fil^aM \otimes \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^a_M} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^a_M \otimes \frac{d\phi_D}{p}} \\ M & \xrightarrow{c\nabla} & M \otimes \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p} \end{array}$$

交换，且诱导出一个同构

$$Fil^aM/J_RFil^aM \otimes_{\phi_D} D/p \xrightarrow{\cong} M/pM. \tag{3.1}$$

特别地，这意味着 Φ^a_M 的像生成 M。

然后我们定义满子范畴 $\mathcal{MF}_{\mathrm{tor-free}[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ \mathrm{a}]}(\mathcal{X})$，其对象为 $(M, Fil^aM, \nabla, \Phi^a_M)$，满足 M在 $\mathcal{S}$上是平坦的，并且 M/Fil^aM是 p-无挠的。

注 3.0.2。我们可以定义一个弗罗贝尼乌斯 Φ^0_M: $M \to M$，定义为 $\Phi^0_M(m) = c^{-a}\Phi^a_M(E^am)$。由于 M 是 p-挠自由的，因此我们有 $\Phi^a_M = \frac{\Phi^0_M}{p^r}$，从而 Φ^a_M 实际上由 Φ^0_M 确定。

以下构造类似于 Breuil 模情形下的 [11, §3] 。对于任意对象 $(M, Fil^a M, \nabla, \phi_M^a) \in \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X})$，我们可以通过如下方式定义一个完整的滤过 $Fil^i_{M,Fil^a M}$

$$Fil^i_{M,Fil^a} := \begin{cases} \{m \in M : J_R^{[a-i]} m \subset Fil^a M\} & \text{if } i \leq a \\ J_R^{[i-a]} Fil^a M & \text{if } i > a. \end{cases} \tag{3.2}$$

那么，$Fil^\bullet_{M,\ Fil^a M}$关于 ∇ 满足 Griffiths横截性。我们还可以通过设定 $\phi^i_M(m) = c^{-(a-i)}\phi^a_M(E^{a-i}m)$ 来定义 Frobenius 映射 ϕ^i_M: $Fil^i_{M,\ Fil^a M} \to M$（这与所选定的元素 E 无关）。接下来可以验证这些图表

$$\begin{array}{ccc} F^i_M & \xrightarrow{\nabla} & F^{i-1}_M \otimes \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^i_M} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^{i-1}_M \otimes \frac{d\phi_D}{p}} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p} \end{array}$$

交换。
关于晶体上同调背景下的 Griffiths横截性的深入论述，请参阅 Ogus 的著作 [24]。现在我们将用下降数据来描述范畴 $\mathcal{MF}$。为此，我们先作如下说明：设 $(D, J_R) \to (B, J)$ 是一个 p-完全平坦映射，其中 B 是一个 p-进完备环，带有一个 PD-理想 J，并带有一个与 D 上的 Frobenius 相容的 Frobenius 提升 ϕ_B。若我们随后在模 $M_B = M \hat{\otimes}_D B$ 上赋予滤过 $Fil^a M_B$，其定义为 $\sum_{r+s=a} Fil^r M \otimes J^{[s]}$ 的像的闭包，则态射 $\Phi^a_{M_B} :=$

$\sum_{r+s=a} \frac{\Phi^r_M \otimes \phi_B}{p^s}$在 $Fil^a M_B$上定义良好。这是因为 M_B是 p-无挠的，并且可以看出 $\Phi^a_{M_B}$与 $\frac{\Phi^0_M \otimes \phi_B}{p^a}$一致。滥用记号，我们也将 $\Phi^a_{M_B} = \sum_{r+s=a} \Phi^r_M \otimes \phi^s_B$记作同一符号。

设 $(D^{(\bullet)}, J_{D^{(\bullet)}})$ 为第 2.3 节中引入的余单纯对象，它由对 D取晶体自积而得。我们再次用 p_1（分别用 p_2）表示由 $\mathfrak{S}(R) \to \mathfrak{S}(R) \otimes \mathfrak{S}(R)$ 诱导的映射 $D \to D^{(1)}$，该映射指向第一个（分别指向第二个）因子。

定义 3.0.3. 设 (A, J, ϕ_A) 为一个 p-无挠的 $\mathbb{Z}_p$-代数，配备一个 PD-理想J 以及绝对 Frobenius 的一个提升 ϕ_A。我们用 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ ]\mathrm{a}}(A)$ 表示由三元组 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M)$ 构成的范畴，其中

- M是一个无挠的 A-模，而 $Fil^a M \subset M$是一个子模，满足 $J^{[a]} M \subset Fil^a M$。
- $\Phi^a_M : Fil^a M \to M$ 是一个 ϕ_A-线性映射，满足类似于定义 3.0.1 的条件。

类似于定义 3.0.1，我们还有全子范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ \mathrm{a}}(A)$，其中要求商 $M/Fil^a M$ 是 p-无挠的。
我们用 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ ]\mathrm{a}}(D^{(\bullet)})$ 表示由以下数据构成的范畴

- A triple $(M, Fil^a M, \phi_M) \in \mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\mathrm{a}]}(D)$.

- 一个同构 $\epsilon : p_1^*M \xrightarrow{\cong} p_2^*M$，满足在 $D_{(2)}$ 上通常的余循环条件。
- The isomorphism satisfies $\epsilon(F^a(p_1^*M)) = F^a(p_2^*M)$ and $\epsilon \circ \Phi^a_{p_1^*M} = \Phi^a_{p_2^*M} \circ \epsilon$, where for $i = 1, 2$, we define $F^a(p_i^*M) := \sum_{r+s=a} F^r_M \otimes J^{[s]}_{D^{(1)}}$, and the Frobenius $\Phi^a_{p_i^*M} : F^a(p_i^*M) \to p_i^*M$ by $\Phi^a_{p_i^*M} = \sum_{r+s=a} \Phi^r_M \otimes \phi^s_{D^{(1)}}$.

同样，我们也有全子范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ \mathrm{a}}(D^{(\bullet)})$。

命题 3.0.4. 范畴 $\mathcal{MF}_{\mathrm{big}[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X})$ 与范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ \mathrm{a}]}(D^{(\bullet)})$ 自然等价。该等价限制后，在 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ \mathrm{a}}(\mathcal{X})$ 与 $\mathcal{MF}_{\mathrm{tor-free}[0,\mathrm{a}]}(D^{(\bullet)})$ 之间仍给出一个等价。

证明。首先令 $(M, Fil^a M, \nabla, \phi^a_M) \in \mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ \mathrm{a}]}(\mathcal{X})$。 M上的可积联络-cor-~对应于一个 HPD-层化 $\epsilon : p_1^*M \xrightarrow{=} p_2^*M$，其由泰勒公式给出

$$m \otimes 1 \mapsto \sum_E (\prod \nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m) \otimes \prod \gamma_{e_k}(p_1(t_k) - p_2(t_k)).$$

这里， t_1，...， t_n 是 ´étale 坐标，且 $t_0 := u$ 和 $E = (e_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ 遍历所有多重指标。
利用 Griffiths横截性，可以进一步证明 $\epsilon(F^a(p_1^*M)) = F^a(p_2^*M)$（参见引理 3.1.3]）。

需要证明的是， $\epsilon\phi^a_{p_1^*M} = \phi^a_{p_2^*M}\epsilon$当且仅当 Φ^i_M 是水平的 .
这是一个微积分练习： Φ^i_M 是水平的，当且仅当

$$\nabla_{\partial_{t_k}}(\Phi^i_M(m)) = \begin{cases} \Phi^{i-1}_M(\nabla_{\partial_{t_k}}(m))(\frac{\partial_{t_k}\phi_D(t_k)}{p}) & \text{if } i > 0 \\ \Phi^i_M(\nabla_{\partial_{t_k}}(m))(\partial_{t_k}\phi_D(t_k)) & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

更一般地，利用高阶链式法则，我们可以写成

$$\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}}(\Phi^i_M(m)) = \sum_{l=1}^{e_k} \frac{1}{p^{min\{l,i\}}} \Phi^{i-l}_M(\nabla^l_{\partial_{t_k}}(m)) B_{e_k,l}(\partial_{t_k}\phi_D(t_k) \dots, \partial^{e_k-l+1}_{t_k}\phi_D(t_k)), \tag{3.3}$$

其中我们定义 $\Phi^i_M := \Phi^0_M$，其中 $i < 0$。此外，用 $B_{e_k,l}$ 表示部分贝尔多项式。所有项均定义良好。

现在令 $m \otimes x \in F^r_M \otimes I^{[s]}_{D^{(1)}} \subset F^a(p_1^*M)$，即 $r + s = a$。那么 $\Phi^a_{p_1^*M}(m \otimes x) = \Phi^r_M(m) \otimes \phi^s_{D^{(1)}}(x)$，并且我们有

$$\epsilon\Phi^a_{p_1^*M}(m \otimes x) = \sum_{E=(e_k)} (\prod \nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(\Phi^k_M(m)) \otimes \phi^s_{D^{(1)}}(x) \prod \gamma_{e_k}(p_1(t_k) - p_2(t_k)).$$

我们现在断言，

$$\begin{aligned} &\sum_{E=(e_k)} (\prod \nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(\Phi^r_M(m)) \otimes \prod \gamma_{e_k}(p_1(t_k) - p_2(t_k)) \\ =&\sum_E \Phi^{k-|E|}_M(\prod \nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m) \otimes \frac{1}{p^{min\{|E|,k\}}} \prod \gamma_{e_k}(p_1(\phi_D(t_k)) - p_2(\phi_D(t_k))). \end{aligned}$$

我们用归纳法证明这一点。为简化公式，我们记 $\delta_{e_k}(t_k)) = \gamma_{e_k}(p_1(t_k) - p_2(t_k))$ 和 $\delta_{e_k}(\phi(t_k))) = \gamma_{e_k}(p_1(\phi_D(t_r)) - p_2(\phi_D(t_r))$. 固定一个元素 $r_0 \in R$。对于任意多重指标

$E=(e_k)$，我们写作 $E'=(e_k)^{k\in\{0,\dots,n\}}$。由归纳法，我们进而得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{E=(e_k)}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(\Phi^k_M(m))\otimes\prod\delta_{e_k}(t_k))\\
=&\sum_{e_n}\left[\nabla^{e_n}_{\partial_{t_k}}\sum_{E'}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(\Phi^k_M(m))\otimes\prod\delta_{e_k}(t_k))\right]\delta_{e_n}(t_n))\\
=&\sum_{e_n}\left[\nabla^{e_n}_{\partial_{t_n}}\sum_{E'}\Phi_M^{k-|E'|}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m)\otimes\frac{1}{p^{min\{|E'|,k\}}}\prod\delta_{e_k}(\phi(t_k))\right]\delta_{e_n}(t_n))
\end{aligned}$$

利用等式 (3.3)，并令 $B_{n,\ l}=B_{n,\ l}(\partial_{t_n}\phi_D(t_n)\dots,\partial^{n-l+1}_{t_n}\phi_D(t_n))$，我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}
=&\sum_{e_n}\left[\sum_{l=1}^{e_n}\sum_{E'}\Phi_M^{k-|E'|-l}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})\nabla^l_{\partial_{t_n}}(m)\otimes\frac{1}{p^{min\{|E'|+l,k\}}}\prod\delta_{e_k}(\phi(t_k))p_2(B_{e_n,l})\right]\delta_{e_n}(t_n))\\
=&\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{E'}\Phi_M^{k-|E'|-l}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})\nabla^l_{\partial_{t_n}}(m)\otimes\frac{1}{p^{min\{|E'|+l,k\}}}\prod\delta_{e_k}(\phi(t_k))\right]\sum_{e_n=l}^{\infty}p_2(B_{e_n,l})\delta_{e_n}(t_n)\\
=&\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{E'}\Phi_M^{k-|E'|-l}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})\nabla^l_{\partial_{t_n}}(m)\otimes\frac{1}{p^{min\{|E'|+l,k\}}}\prod\delta_{e_k}(\phi(t_k))\right]\delta_l(\phi(t_n))\\
=&\sum_{E}\Phi_M^{k-|E|}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m)\otimes\frac{1}{p^{min\{|E|,k\}}}\prod\delta_{e_k}(\phi(t_k)))\\
=&\sum_{E}\Phi_M^{k-|E|}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m)\otimes\phi^{min\{|E|,k\}}_{D^{(1)}}(\prod\delta_{e_k}(t_r))).
\end{aligned}$$

∞上文用到了 $\sum p_2(B_{e_n,\ l})\delta_{e_n}(t_n)=\delta_l(\phi(t_n))$，这可由泰勒定理推出。$e_n=l$因此我们看到

$$\begin{aligned}
\epsilon\Phi^a_{p_1^*M}(m\otimes x)=&\sum_{E=(e_k)}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(\Phi^k_M(m))\otimes\phi^s_{D^{(1)}}(x)\prod\delta_{e_k}(t_r)\\
=&\sum_{E}\Phi_M^{k-|E|}(\prod\nabla^{e_k}_{\partial_{t_k}})(m)\otimes\phi^{min\{|E|,k\}}_{D^{(1)}}(\prod\delta_{e_k}(t_k)))\phi^s_{D^{(1)}}(x)\\
=&\Phi^a_{p_2^*M}\epsilon(m\otimes x).
\end{aligned}$$

反过来，也很容易看出，$\epsilon\Phi^a_{p_1^*M}=\Phi^a_{p_2^*M}\epsilon$ 蕴含 Φ^i_M 关于 ∇是水平的。

□

注 3.0.5. 上述命题中的层化 ϵ 实际上确定了 p_1^*M的完整滤过，它定义为滤过 $Fil^\bullet_{M,\ Fil^aM}$与 PD-滤过$J^{[\bullet]}_{R^{(1)}}$ 的乘积（这同样可由 Griffiths横截性和 [24, 引理 3.1.3]推出）。

现在我们希望将范畴 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}$的构造全局化。我们首先记录如下结果。

命题 3.0.6. 设 $n\geq 1$并定义 $\mathcal{X}_n=\mathcal{X}/p^n$。令 $(M,Fil^aM,\nabla,\phi^a_M)\in\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ \mathrm{a}]}(\mathcal{X})$。则 $(M/p^n,Fil^aM/p^n,\nabla/p^n,\Phi^a_M/p^n)$ 定义了一对 $(\mathcal{M}_n,Fil^a\mathcal{M}_n)$，其中$\mathcal{M}_n$ 是 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{n,\ cris}}$-模上的一个晶体，定义在 $(\mathcal{X}_n/\mathbb{Z}_p)_{\mathrm{cris}}$ 上，而 $\overline{\mathcal{M}}\subset\mathcal{M}$ 是一个子层，满足$\mathcal{I}^{[a]}_{\mathcal{X}_n}\mathcal{M}_n\subset Fil^a\mathcal{M}_n$。这里，$Fil^aM/p^n$表示 Fil^aM在 M/p^n中的像。

证明。这是标准事实。根据第 2.3 D 节，$\mathcal{X}_n$/覆盖了 ($_p$Z$_{\text{cris}}$)B 的终对象。更确切地说，对于任意 ($I, \in$) $\mathcal{X}_n$/($_p$Z$_{\text{cris}}$) ι，存在一个态射 D: ($J_R, \to$) B(I, $\mathcal{M}_n$)，并定义 B($= M/p^n \otimes_D$) :，$Fil^\bullet_M$。现在考虑 的完整滤过，$Fil^a\mathcal{M}_n$，其定义见等式（3.2）。随后我们定义 B($= Im$) : $\sum$ $Fil^r M/p^n \otimes I^{[s]} \to M/p^n \otimes B$($_{r+s=a.}$ ϵ 由于命题 3.0.4 中的 HPD-层化 ι 保持拉回滤过不变，这与 $\mathcal{M}_n$ 无关，并且容易验证这定义了 的一个子层。 □

请注意，子层 $Fil^a\mathcal{M}_n$ 的构造先验地依赖于完整的滤过 $Fil^\bullet_{M,\ Fil^a M}$，而后者又取决于所选的弱初始对象 D。然而，以下结果表明，这种不便并不严重。

引理 3.0.7. 设 P 是一个具有 Frobenius 提升 ϕ 的光滑 $\mathfrak{S}$-代数，并配备一个满射 $P \to R$，且设 $P^{pd} \to R$ 是核 J 的 p-进完备 PD 包。进一步，设 ($M, Fil^a M, \Phi^a$) $\in \mathcal{MF}_{[0,a]}(P^{pd})$。那么 $Fil^a M$ 在以下意义下是极大的：不存在满足 $Fil^a M \subsetneq \tilde{Fil}^a M$ 且使得 Ψ^a 延拓 Φ^a 的三元组 $(M, \tilde{Fil}^a M, \Psi^a) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(P^{pd})$。

证明。假设我们有一个三元组 $(M, \tilde{Fil}^a M, \Psi^a)$，扩张了 $(M, Fil^a M, \Phi^a)$。令 Q 为 $\tilde{Fil}^a M \hookrightarrow Fil^a M$ 的余核。Frobenius 映射 Φ^a 诱导出一个同构 $Fil^a M/JFil^a M \otimes_\phi P^{pd}/p \cong M/p$，同样，$\Psi^a$ 也诱导出一个同构 $\tilde{Fil}^a M/J\tilde{Fil}^a M \otimes_\phi P^{pd}/p \cong M/p$。因此，我们有 $Fil^a M/JFil^a M \otimes_\phi P^{pd}/p \xrightarrow{\cong} \tilde{Fil}^a M/J\tilde{Fil}^a M \otimes_\phi P^{pd}/p$。模掉 $J_R^{[p]}$ 后可得 $Fil^a M/JFil^a M \otimes_\phi P/p \xrightarrow{\cong} \tilde{Fil}^a M/J\tilde{Fil}^a M \otimes_\phi P/p$。这里注意，由于 P 是 p-挠自由的，P^{pd} 是先将元素 $\frac{x^{p^n}}{p^n}$ 添入 P，然后取 p-进完备化得到的。这尤其意味着 $P^{pd}/(p, J_R^{[p]}) = P/(p, \phi_P(J_R))$。此外，Frobenius 映射在 P 上是平坦的，因此我们得到 $Fil^a M/(J_R, p) = \tilde{Fil}^a M/(J_R, p)$。由中山引理，我们还可得 $Fil^a M/(J_R^{[p]}, p) = \tilde{Fil}^a M/(J_R^{[p]}, p)$。然而，$Q$ 是 $J_R^{[p]}$-挠的（因为 $Fil^a M$ 和 $\tilde{Fil}^a M$ 都包含 $J_R^{[a]}M$）。因此，我们得到 $Q/p = 0$。随后再应用一次中山引理，便得到 $Q = 0$。

□

$Fil^a M$ 的极大性后来将证明至关重要。

现在我们来讨论 Frobenius 提升的独立性。回顾以下构造（参见 [17, §1.4.] 和 [14,§II (b)]）。

构造3.0.8。令 $(M, Fil^a M, \nabla, \Phi^a_M) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathcal{X})$，并仍用 $Fil^i_{M,Fil^a M} \subset M$ 表示由等式（3.2）定义的滤过。于是，我们将通过对直和 $\bigoplus_{i \le a} Fil^i_{M,Fil^a M}$ 取商（模去以下等价关系）得到的 D-模记为 M，该等价关系将 $^pFil^{i+1}_M$ $_{,Fil^a M}$ 与 $Fil^i_{M,Fil^a M}$ 视为相同。模 $\tilde{M}$ 带有一个可积的 p-联络，而 $M \otimes_\phi D$ 继而带有一个可积的平坦联络（参见 [14, II (d)] ——事实上，这是混合特征下非阿贝尔霍奇对应的一个实例，参见 [25]）。$Fil^i M$ 上的 Frobenius 映射于是诱导出一个水平映射

$$\tilde{M} \otimes_\phi D \to M$$

˜而 Φ^a_M 就是映射 $Fil^a M \to M \otimes_\phi D \to M$。

设 (B, J, ϕ_B, f) 为一个四元组，其中 B 是 p-完备且 p-无挠的，J 是一个 PD 理想（与 pB 上的 PD 结构相容），ϕ_B 是绝对 Frobenius 的提升。

关于 B/p和 $f\colon Spf(B/J) \to \mathcal{X}$是一个态射。假设存在一个 p-完全平坦态射 $\iota : D \to B$, 它提升了 $R \to B/J$。那么考虑 $M\hat{\otimes}_D B$，其滤过为 $\sum_{r+s=a} Fil^r M\hat{\otimes}J^{[s]}$在 M_B中的闭包。我们可以定义一个弗罗贝尼乌斯 $\Phi^a_{M_B}$。具体而言,
由 [14, 定理 2.3], 联络诱导出一个典范同构

$$\alpha : \tilde{M} \otimes_{\phi_D} D\hat{\otimes}_D B \xrightarrow{\cong} \tilde{M}\hat{\otimes}_D B \otimes_{\phi_B} B,$$

利用复合映射 $D \xrightarrow{\phi_D} D \to B$ 和 $D \to B \xrightarrow{\phi_B} B$ 模 p 相等这一事实。该同构由下式给出。

$$m \otimes 1 \mapsto \sum_{E=(e_k)} \prod \nabla(\partial_{t_k})^{e_k}(m) \otimes \frac{(\iota(\phi_D(t_k)) - \phi_B(\iota(t_k))^{e_k}}{p^{min\{i,|E|\}} e_k!} \tag{3.4}$$

如果 m 是 Fil^i 中某个元素的剩余类。

令 r、$s \geq 0$, 使得 $r + s = a$。在 $Fil^r M \otimes J_B^{[s]}$ 的像上，我们随后可以通过首先将 "$\Phi^r_M \otimes \phi$" 定义为态射来定义映射 "$\Phi^r_M \otimes \phi^s_B$"

$$Fil^r M \otimes B \to \tilde{M}\hat{\otimes}_D B \otimes_{\phi_B} B \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha}} \tilde{M} \otimes_{\phi_D} D\hat{\otimes}_D B \xrightarrow{\tilde{\Phi}\otimes id} M\hat{\otimes}_D B, \tag{3.5}$$

然后令 "$\Phi^r_M \otimes \phi^s_B$" $=$"$\Phi^r_M \otimes \phi$" p^s，这由 M_B 的 p-无挠性保证定义良好。随后定义 Frobenius $\Phi^a_{M_B}\colon Fil^a M_B \to M_B$ 为 $\Phi^a_{M_B} := \sum_{r+s=a}$ "$\Phi^r_M \otimes \phi^s_B$", 容易验证其定义良好, 因为它与 "$\Phi^0_M \otimes \phi$" p^a 一致。

对于一般的光滑 p-进形式概形，范畴 $\mathcal{MF}$ 通过粘合来定义。这确实可行，依据如下命题。

命题 3.0.9. 设 $\mathcal{O}_K\{t_1, \ldots, t_n\} \to R$是 R的另一个标架，即一个 ´étale 映射˜，并设 $\mathfrak{S}\{t_1, \ldots, t_n\} \to P$是沿 $\mathfrak{S} \to \mathcal{O}_K$的 ´étale 提升，且带有通常的弗罗贝尼乌斯提升 $t_i \mapsto t_i^p$ 。设 $\tilde{D}$ 为核的 p-进完备化 PD 包，并将 -记为 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R))$。它是由定义 3.0.1 中条件所要求的、位于 $\tilde{D}$上的四元组 $(M, Fil^a M, \nabla, \Phi^a_M)$ 构成的范畴。那么存在范畴的典范等价$\mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R))^{\tilde{D}}$。

˜证明。这个函子基本上已在上文描述。选取一个与到 R 的映射相容的映射 $D \to D$。根据纤维逐点平坦性判别准则，该映射是平坦的。于是， $M\hat{\otimes}_D\tilde{D}$ 上的滤过 $Fil^a M_{\tilde{D}}$ 定义为 $M_{\tilde{D}}$˜ 中 $\sum_{r+s=a} Fil^r_M \otimes J^{[s]}_{\tilde{D}}$ 的闭包，而 D 上的弗罗贝尼乌斯映射 $\Phi^a_{M_{\tilde{D}}}$ 由等式 (3.5) 定义。由于 $D \to \tilde{D}$ 平坦，$M\hat{\otimes}_D\tilde{D}$ 是 p-挠无的，因此该映射定义良好。注意到这个映射仅相差一个由等式 (3.4) 诱导的自同构，便可看出它也诱导一个同构
$Fil^a M_{\tilde{D}}/J_{\tilde{D}} Fil^a M_{\tilde{D}} \otimes_\phi \tilde{D}/p\tilde{D} \xrightarrow{\cong} M_{\tilde{D}}/pM_{\tilde{D}}$，且该映射正是
$Fil^a M/J_D Fil^a M \otimes_{\phi_D} D/pD \xrightarrow{=} M/pM$ 的推出˜ ˜ ˜。因此，我们确实得到了 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R))^D$ 的一个对象。

˜通过选取映射 $D \to D$ ，再应用上述相同的构造，即可得到一个拟逆。为证明这些构造互为拟逆，˜ ˜将所选映射记为 $f\colon D \to D$和 $g\colon D \to D$。令 $(M, Fil^a M, \nabla, \Phi^a_M) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R))$，并令 $(M_{\tilde{D}}, Fil^a M_{\tilde{D}}, \nabla_{\tilde{D}}, \Phi^a_{\tilde{D}})$ 为 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(Spf(R))^D$ 中诱导的对象。现在沿另一方向应用该函子，可得 $M\hat{\otimes}_{gf} D$，其滤过为 $F^a =$

$\sum Fil^r_{M_{\tilde{D}}} \hat{\otimes} J_D^{[s]}$（其中 $Fil^r_{M_{\tilde{D}}}$ 仍由等式（3.2）定义）。于是联络 ∇ 诱导出一个同构 $M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{gf} D$，它将 $Fil^a M$ 映入 F^a，并且容易验证，F^a 上的弗罗贝尼乌斯限制为 $Fil^a M$ 上的弗罗贝尼乌斯。但由引理 3.0.7，$Fil^a M$ 是极大的，因此实际上可知 $Fil^a M = F^a$。 □

上面的证明特别表明，对于所有的 $n \geq 1$，在构造 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 的子层 $Fil^a \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n$ 时，可以使用 $\mathcal{M}_n(D)$ 在任意上述 D 上的完整滤过。

命题 3.0.9 现在推出以下推论，它确保我们也可以通过粘合，为任意光滑的 p-进形式概形得到一个范畴 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathcal{X})$。

推论 3.0.10。对应关系 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ a}$ 满足有效的 ´étale 下降。

最后，我们需要在拟正则半完美幺环的范围内描述范畴 $\mathcal{MF}$。这里我们再次假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射的。回顾第 2.3 节中的弱初始对象 $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)\ J_{\tilde{R}})$ 和 $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)\ J_{R_\infty})$。令 A 为这两个对象中的任意一个。现在我们定义范畴

$$\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} \text{ and } \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}}.$$

与定义 3.0.3 类似。

定义 3.0.11. 我们将由以下数据构成的范畴记为 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ ]a}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}}$

- 一个三元组 $(M, Fil^a M, \phi_M) \in \mathcal{MF}_{大[0,a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}($ $A/p))_{\sim}$
- 一个同构 $\epsilon : p_1^* M \xrightarrow{\sim} p_2^* M$，满足关于 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)_{(2)}$ 的通常余循环条件。

- 考虑完整滤过 $Fil^\bullet_{M,Fil^a M}$，其定义与等式（3.2）类似。于是，该同构对所有 $0 \leq k \leq a$ 和 $\epsilon \circ \Phi^a_{p_1^* M} = \Phi^a_{p_2^* M} \circ \epsilon$ 均满足 $\epsilon(F^k(p_1^* M)) = F^k(p_2^* M)$。这里，对于 $i = 1、2$，我们定义 $F^k(p_i^* M) := \sum F^r_M \hat{\otimes} J^{[s]}{}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)_{(1)}}$，并将弗罗贝尼乌斯 $\Phi^a_{p_i^* M} : F^a(p_i^* M) \to p_i^* M$ 定义为 $\Phi^{a}_{p_i^* M} \overset{r+s=k}{=} \sum_{r+s=a} \Phi^r_M \otimes \phi^s{}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)_{(1}}$。

同样，我们还有完整子范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ a}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})$。

备注 3.0.12。与定义 3.0.3 相比，我们必须添加层化固定整个滤过这一条件；对于 $D^{(\bullet)}$ 上的对象，这一点是自动满足的。注意，稍后我们将看到（见第 5.1 节），对于 $A = R_\infty$，这一额外条件也会自动满足。

$\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})$ 中对象的滤过再次是极大的。

引理 3.0.13。设 A 是一个完美化 $\mathcal{O}_C$-代数。那么，对于任意 $(M, Fil^a M, \epsilon, \Phi^a_M) \in \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p))$，$Fil^a M$ 在引理 3.0.7 的意义下是极大的。

证明。引理 3.0.7 的证明在此情形下同样适用。 □

~命题 3.0.14. 设 A 表示 R 或 R_∞。那么存在一个典范函子 $\mathrm{D}_A : \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} \to \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(Spf(R))$。

证明. 我们需要证明任意 $(M, Fil^a M, \epsilon, \Phi_M^a) \in \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}}$都下降为 D 上的一个对象。为此，我们先证明 $(M, Fil^a M, \epsilon)$ 可以下降，这可由下述结论得出。

断言。对于任意 $n \geq 1$，三元组 $(M/p^n, Fil^a M/p^n, \epsilon/p^n)$ 定义了一对 $(\mathcal{M}_n, Fil^a \mathcal{M}_n)$，其中包含一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{cris,\ n}}$-模的晶体，并配备一个子模层 $Fil^a \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n$，使得 $\mathcal{I}_{mathcal X_{cris,}}$
$_n \mathcal{M}_n \subset Fil^a \mathcal{M}_{n_\circ}$

为说明这一点，我们首先回顾，$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)/p^n$ 是$(\mathcal{X}_n/\mathrm{Z}_p/p^n)_{\mathrm{cris}}$的一个弱初始对象。因此，对于任意对象$(B, J) \in (\mathcal{X}_n/\mathrm{Z}_p/p^n)_{\mathrm{cris}}$，存在一个忠实平坦覆盖$(B, J) \to (C, JC)$，使得存在一个态射$(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)/p^n, J_{\tilde{R}}) \to (C, JC)$。现在考虑 M/p^n的完整滤过$Fil^\bullet_{M,Fil^a M}$。那么，层化 ϵ在滤过环 C 上定义了一个滤过模的下降数据（该环配备了PD-滤过$(JC)^{[\bullet]}$）。C上的滤过模$(M_C, Fil^\bullet_{M_C})$对应于Rees代数 $R_C := \bigoplus J_C^{[n]} C z^n \subset C[z]$上的分次模 $M = \bigoplus_{n>0} Fil^n_{M_C} z^n$。现在，由于 $J_C = JC$，代数 R_C仅仅是沿映射 $B \to C$对Rees代数 R_B 取推出所得，其中 $R_B = \bigoplus J_B^{[n]}$。因此， $R_B \to R_C$是忠实平坦的，并且根据分次环上分次模的fpqc下降，滤过模$(M_C, Fil^\bullet_{M_C})$下降为 B上的一个滤过模。特别地，取 p-进极限后，我们得到滤过环 D 上的一个滤过模$(M_D, Fil^\bullet_D)$，其在 $D^{(1)}$上带有一个层化 ϵ_D，并且该层化保持滤过不变，即 ϵ_D 将滤过拉回 $p_1^* Fil^k$ 映射到 $p_2^* Fil^k$。这意味着相对于由 ϵ 诱导的联络 ∇，该滤过满足Griffiths横截性。因此，特别地， $J_D \nabla(Fil^a) \subset Fil^a_D$..

因此，我们只需证明弗罗贝尼乌斯也能下降。另请注意，只需下降 $\Phi^0 : M \to M$，因为随后总能通过除以 p^r得到除幂Frobenius。首先假设 $B = \tilde{R}$，并考虑 qrsp 代数 $\tilde{R}\hat{}$
$\otimes_R R_\infty$。余单纯环之间的态射 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}\hat{}\otimes_R R_\infty/p)^{(\bullet)}$ 是 p-完全忠实平坦的，并且与 Frobenius 提升相容。$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}\hat{}\otimes_R R_\infty/p)^{(\bullet)}$ 也同样如此。因此，我们首先在 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}\hat{}\otimes_R R_\infty/p)$ 上得到带有下降数据的弗罗贝尼乌斯，然后通过 p-完全忠实平坦下降，将其下降到 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)}$。之后，还可以沿着由将坐标 t_i 映至 $[t_i^b]$ 所诱导的 $D \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)$ 进一步下降该弗罗贝尼乌斯。这就得到了所需的函子 $\mathrm{D}_{\tilde{R}}$。

为了构造函子 D_{R_∞}，现在考虑与 Frobenius 提升相容的余单纯环的 p-完全忠实平坦映射 $D^{(\bullet)} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)}$。通过下降理论，我们再次得到一个函子 $\mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} \to \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(D^{(\bullet)})$。 □

˜注 3.0.15. 函子 $\mathrm{D}_{\tilde{R}}$ 确实是典范的。具体而言，假设 D 的定义方式与 D相同，但使用另一组 ´etale 坐标 $T \subset R$。那么存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{MF}^{big}_{[0,a]}\ (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{MF}^{big}_{[0,a]}\ (Spf(R)) & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & \mathcal{MF}^{big}_{[0,a]}\ \ {}_{(Spf(R))^D} \end{array}$$

其中，对角函子是通过重复前述证明中的构造得到的，使用 $R \to R_\infty$ 或 $R \to R_{\infty,\ T}$，其中 $R_{\infty,\ T}$ 现在是完美幺环，

通过提取 T 中元素的根得到。

˜为此，记 $M = \mathcal{M}(D)$为下降到 D 上的对象，记 $\mathcal{M}(D)$为$\tilde{D}$上的对象。于是可以证明，在典范同构f: $\mathcal{M}(D)\hat{\otimes}_D \mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,T) \cong \mathcal{M}(\tilde{D})\hat{\otimes}_{\tilde{D}}\mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,T)$下， $M\hat{\otimes}_D\mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,T)$上的弗罗贝尼乌斯与 $\mathcal{M}(\tilde{D})\hat{\otimes}_{\tilde{D}}\mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,T)$上的弗罗贝尼乌斯相容。

也就是说，写作 $\mathcal{M}(\tilde{D}) = M\otimes_D \tilde{D}$，并将映射 $D \to \mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,\ T)$记为 α，将映射 $D \to \tilde{D} \to \mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,\ T)$记为 β。为简化记号，我们还将$\mathsf{A} := \mathsf{A}_{cris}(\tilde{R}\hat{\otimes}_{R_\infty}\hat{\otimes}R_\infty,\ T)$记作$\mathsf{A}$。于是我们断言，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} M\hat{\otimes}_\alpha\mathbb{A} & \xrightarrow{\Phi_M\otimes\phi} & M\hat{\otimes}_\alpha\mathbb{A} \\ {\scriptstyle f}\downarrow\cong & & {\scriptstyle f}\downarrow\cong \\ M\hat{\otimes}_\beta\mathbb{A} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & M\hat{\otimes}_\beta\mathbb{A}. \end{array} \tag{3.6}$$

˜这里将 Φ 定义为

$$M\otimes_\beta \mathbb{A} \to \tilde{M}\otimes_\beta \mathbb{A}\otimes_{\phi_\mathbb{A}}\mathbb{A} \xrightarrow[\cong]{\iota} \tilde{M}\otimes_{\phi_D} D\otimes_\beta \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi_M} M\otimes_\beta \mathbb{A},$$

其中， ι 由式 (3.4) 定义。注意，这是由 Φ_M通过等价关系$\mathcal{MF}^{big}_{[0,\ \mathrm{a}]}(Spf(R)) \longleftrightarrow \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ \mathrm{a}]}(Spf(R))^{\tilde{D}}$诱导的$\mathcal{M}$（$\tilde{D}$）上弗罗贝尼乌斯的基扩张。下面说明如何证明式 (3.6) 确实是交换图。我们只讨论单个坐标的情形；更高维的情形可像命题 3.0.4 的证明中那样用归纳法处理。

˜首先注意到， $\Phi\circ f$ 由下式给出

$$m\otimes 1 \mapsto \quad \sum_{i,j}\Phi_M(\nabla^{i+j}_{\partial_t}(m))\otimes\gamma_i(\phi_\mathbb{A}(\alpha(t)) - \phi_\mathbb{A}(\beta(t)))\gamma_j(\phi_\mathbb{A}(\beta(t)) - \beta(\phi_D(t))) \tag{3.7}$$

$$= \qquad \sum_k \Phi_M(\nabla^k_{\partial_t}(m))\otimes\gamma_k(\phi_\mathbb{A}(\alpha(t)) - \beta(\phi_D(t))), \tag{3.8}$$

其中，我们再次用 γ 表示除幂。
另一方面， $f\circ\Phi_M$ 由下式给出

$$m\otimes 1 \mapsto \qquad \sum_k \nabla^k_{\partial_t}(\Phi_M(m))\otimes\gamma_k(\alpha(t) - \beta(t)) \tag{3.9}$$

但是现在，利用高阶链式法则（类似于命题 3.0.4 的证明），可以将其改写为

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Phi(\nabla^l(m))\otimes\sum_{k=l}^{\infty}\beta(B_{k,l})\gamma_k(\alpha(t)-\beta(t)) = \sum_l \Phi_M(\nabla^l(m))\otimes\gamma_l(\alpha(\phi_D(t)) - \beta(\phi_D(t))$$

其中，再次地，$B_{k,l} := B_{k,l}(\partial_t\phi_D(t)\ldots,\partial_t^{k-l+1}\phi_D(t))$ 表示部分贝尔多项式。˜利用 $\alpha\phi_D = \phi_\mathbb{A}\alpha$，我们看到这与 $(\Phi(f(m\otimes 1))$ 一致。

我们尚未找到证明方法，无法证明对象在 $\mathsf{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)}$ 上的 M/Fil^aM 的 p-无挠性会导出相应对象在 D 上的商的 p-无挠性，因为这一性质似乎难以下降。不过，对于完美化覆盖，这很容易证明。

命题 3.0.16. 函子 D_{R_∞} 限制为一个函子

$$\mathbb{D}_{R_\infty} : \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} \to \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\mathrm{a}]}(Spf(R)),$$

这是一个范畴等价。

证明。在此情形下，对于任意 $(M, Fil^a M, \epsilon, \Phi^a_M) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(D^{(\bullet)})$，完整滤过 $Fil^\bullet_{M,Fil^a M}$ 到 $\mathrm{A_{cris}}(R_\infty/p)$ 的滤过基变换就是通常的基变换，即 $Fil^\bullet_{M,Fil^a M} \otimes \mathrm{A_{cris}}(R_\infty/p)$ 的闭包；可以看出，这与 $Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)}$ 关联的完整滤过一致。由此可知，滤过基变换函子是 D_{R_∞} 的拟逆。 □

为了证明我们的主定理，我们需要用到挠对象。因此，我们作如下定义。

定义 3.0.17. 设 $Spf(A) \in \mathcal{X}_{qsyn}$，其中 A是一个 p-无挠 qrsp $\mathcal{O}_C$-代数。我们定义 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,a]}(\mathrm{A_{cris}}(A/p)^{(\bullet)})$ 为由四元组 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M, \epsilon)$ 的直和构成的范畴，其中

- M 是一个 $\mathrm{A_{cris}}(A/p)/p^n$-模，对某个 $n \geq 1$，它是 A_{cris}/p^n-平坦的。
- $Fil^a M \subset M$是一个子模，使得 $J_A^{[a]} M \subset Fil^a M$和 $M/Fil^a M$是 Z_p/p^n-平坦的 .
- $\Phi^a_M : Fil^a M \to M$ 是一个弗罗贝尼乌斯线性映射，它诱导出一个同构

$$Fil^a M/J_A Fil^a M \otimes_{\phi_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)}} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A/p)/p \xrightarrow{\cong} M/pM. \tag{3.10}$$

此外，我们要求它满足以下条件

$$\Phi^a_M(xm) = c_\xi^{-a} \phi^a_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)}(x) \Phi^a_M(\xi^a m), \tag{3.11}$$

其中$c_\xi := {}^{\phi}(\underline{\xi})\ p$。

- ϵ： $p_1^* M \cong p_2^* M$是一个同构，满足对于所有$0 \leq k \leq a$和 $\epsilon \circ \Phi^a_{p_1^* M} = \Phi^a_{p_2^* M} \circ \epsilon$， $\epsilon(F^a(p_1^* M)) = F^a(p_2^* M)$，其中再次以 $F^a(p_1^* M)$表示相对于与 $Fil^a M$相关联的完整滤过$Fil^\bullet_{M,\, Fil^a M}$的滤过拉回。

最后，我们将范畴 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathrm{A_{cris}}(A/p)^{(\bullet)})$ 定义为同时包含 $\mathcal{MF}_{\mathrm{tor}[0,a]}(\mathrm{A_{cris}}(A/p)^{(\bullet)})$ 和 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ a}(\mathrm{A_{cris}}(A/p)^{(\bullet)})$ 作为满子范畴的最小范畴。

注 3.0.18。对于包含在 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ a}(\mathcal{X})$ 中的对象，条件 3.11 总是成立的。事实上，如果 M 是 p- 挠无的，将 $\Phi^a(xm)$ 与 $\phi_D(\xi)^a$ 相乘，我们得到 $\phi(E)^a \Phi^a_M(xm) = \Phi^a(\xi^a xm) = \phi(x)\Phi^a(xm)$。然后除以 p^a，便得到 $c_\xi^a \Phi^a(xm) = \phi^a_D(x)\Phi^a_M(\xi^a m)$。还需注意，3.11 不依赖于指定元素 ξ（即，如果它对某一个指定元素成立，那么对任何其他指定元素也成立）。

备注 3.0.19。显然， $\mathcal{MF}_{\text{挠-自由[0,的]}}$对象的模 p^n约化属于 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,a]}$。本文中，挠范畴将仅用于给出主要结果的证明。一般而言，我们认为构造一个表现良好且能够整体化的范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,a]}(Spf(R))$ 似乎很困难。问题在于一般情形下构造定义良好的基变换函子。

如果限制于 Faltings 意义下所谓的滤自由对象（见下文备注 3.0.20），则可以定义挠对象的全局范畴。

我们以一些评论结束本节，探讨此处所述对象与不同作者的早期研究有何关联。

注释 3.0.20。1. 可以证明，范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ \mathrm{a}}(\mathcal{O}_K)$ 等价于无 p-挠的晶体 Breuil 模范畴。回顾一下，Breuil 模由一个四元组 $(M, Fil^a M, \phi_M, N_M)$ 给出，其中 M是 Breuil 环$\mathcal{S}$上的一个模，$Fil^a M \subset M$是其子模，满足 $E(u)^a M \subset FilM$，并配备一个除幂 Frobenius $\phi_M\colon FilM \to M$和一个单值算子 $N_M\colon M \to M$，满足若干条件，这些条件与定义 3.0.1 中的条件类似。当 $N_M(M) \subset (u\mathcal{S} + Fil^1\mathcal{S})M$ 时，该 Breuil 模称为晶体的。

2. 在 [15] Faltings 中，Faltings 通过仅考虑所谓的局部滤过自由对象，研究了范畴 $\mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]\ \mathrm{a}}(\mathcal{X})$ 的一个限制性更强的版本：考虑以下范畴 $\mathcal{MF}^{a,\mathrm{fil-free}}(\mathcal{X})$，其对象定义为

- 有限局部自由晶体 $\mathcal{E}$，配备递减穷尽滤过$\{Fil^i(\mathcal{E})\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $(\mathcal{E}, Fil^\bullet(\mathcal{E}))$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{cris}}}$ 上的滤过模，并且N局部存在滤过模之间的同构$\mathcal{E} \cong \bigoplus_{n=0} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{cris}}(q_n)}$，其中 $0 \le q_n \le a$ 且 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{cris}}}(q_n)$ 表示平凡模 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{cris}}}$，其滤过平移了 q_n。

- 对于前一定义中的任意 (B, J, ϕ_B, f)，我们都有 Frobenius 映射，其像生成整个 $\lim_{\longleftarrow n} \mathcal{E}(B/J^n)$$\Phi^i : \varprojlim_n Fil^i\mathcal{E}(B/J^n) \to \varprojlim_n \mathcal{E}(B/J^n)$,

存在一个函子

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MF}^{a,\mathrm{fil-free}}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{MF}^{\text{Tor-无挠}}_{[0,\text{个}]}(\mathcal{X}) \\ (\mathcal{E}, Fil^\bullet(\mathcal{E}), \{\Phi^i\}_i) & \longmapsto & (\mathcal{E}, Fil^a\mathcal{E}, \Phi^a) \end{array}。$$

可以证明，这个函子是全忠实的。

3. 假设 K 是完全非分歧的，即 $W(k) = \mathcal{O}_K$。于是存在 p-挠无关的 Faltings-Fontaine-Laffaille 模范畴（见 [17], [14], , 尤其是 [27, §4]），这里记作 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X})'$；在小仿射情形下（即 $\mathcal{X} = Spf(R)$），其对象由 $(M, \nabla, \{F^i_M\}_i, \{\Phi^i_M\}_i)$ 组成，其中 $0 \le i \le a$。这里，M 是一个直和 $M = R^n$，配备一个可积联络 ∇；而 $F^\bullet_M$ 是由直因子构成的递减完备滤过，它相对于 ∇ 满足 Griffiths横截性；$\Phi^i : F^i_M \to M$ 是水平除幂 Frobenius 映射（针对 R 上选定的某个 Frobenius 提升），并满足某些性质。

令 $D = R\hat{\otimes}_{W(k)}\mathcal{S}$ 为 $R[[u]] \twoheadrightarrow R$ 的 p-进完备 PD 包络。那么根据命题 3.0.9，$\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(Spf(R))$ 与范畴 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(Spf(R))^D$ 正典等价。存在一个函子 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(Spf(R))' \to \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(Spf(R))^D$，它将 $(M, \nabla, \{F^i_M\}_i, \{\Phi^i_M\}_i)$ 映至由下式定义的四元组 $(M_D, \nabla_{M_D}, Fil^a M_D, \Phi^a_{M_D})$：

- $M_D \coloneqq M \otimes_R D$。
- $\nabla_{M_D} = \nabla \otimes id + id \otimes d$，其中 $d\colon D \to \hat{\Omega}^1_{D/\mathbb{Z}_p}$ 是泛 PD 微分。
- $Fil^a M_D \coloneqq \sum_{r+s=a} F^r M \otimes J_R^{[s]}$。
- $\Phi^a_{M_D} \coloneqq \sum_{r+s=a} \Phi^r_M \otimes \phi^s_D$。

同样可以证明，这个函子是全忠实的。此外，它可以粘合为一个函子$\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ $' \to \mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathcal{X})$，用于全局 $\mathcal{X}$。

4 除以 p-晶体

在整个截面中，我们固定一个光滑的 p-adic 形式概形 $\mathcal{X}$ over $\mathcal{O}_K$。

4.1 完备棱柱 F-晶体的 Nygaard 滤过

我们首先回顾 [13]中的一些概念。

定义 4.1.1. [13, 定义 3.16] 在 $\mathcal{X}$ 上，一个高度为 $r \geq 0$ 的 p-挠无挠完备棱镜 F-晶体，是指一个拟相干 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模中的完备晶体 $\mathcal{M}$，连同一个弗罗贝尼乌斯线性映射 $\Phi_{\mathcal{M}}$:$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得

- $\mathcal{M}_{(\mathfrak{S}(R)\ E)}$ 是有限生成的、无挠的且饱和的，这意味着

$$\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R)) = \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))\left[\frac{1}{p}\right] \cap \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))\left[\frac{1}{E}\right].$$

- 映射 $\phi^*_{\mathfrak{S}\ (R)}\ \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R)) \to \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 是单射的，其余核为 E^r-挠。

对于一般的光滑形式 p-进概形 $\mathcal{X}$，棱镜 F-晶体是一个对 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})$，它在扎里斯基局部满足上述条件。
p-挠率自由完备棱柱 F-晶体的范畴记为 $CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$。

注 4.1.2。• 在 [13], 中，还假设完备弗罗贝尼乌斯晶体在 (p, E) 之外是投射的。这实际上在我们的情形下是自动成立的（见引理 4.1.8）。

- 根据 [13, 引理 3.16], $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})$ 是饱和的，当且仅当 $\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))/p$ 是 E-挠自由的。特别地，这意味着 $\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 是饱和的，当且仅当 $\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 在 $\mathfrak{S}$ 上平坦；而这又等价于要求 (p, E)（或等价地 (E, p)）是 $\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 的正则序列。

- 令 $R \to R_\infty$ 为通常的完美化覆盖。于是，利用忠实平坦映射$\mathfrak{S}(R) \to \mathbb{\Delta}_{R_\infty}$，可以看出，上述定义中的条件也可以替换为以下要求： $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_{R_\infty})$ 是有限生成、无挠且饱和的（即在 A_{inf} 上是 (p, I)-完全平坦的），并且弗罗贝尼乌斯的线性化 $\tilde{}$ 在 $\mathbb{\Delta}_{R_\infty}$ 上是单射，其余核为 ξ^a-挠元。

定义 4.1.3。范畴 $CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 由对 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})$ 构成，其中 $\mathcal{M}$是 $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 上的 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}$-模完备晶体， $\Phi_{\mathcal{M}}$ 是弗罗贝尼乌斯线性映射，并且对于任意具有 qrsp 的 $Spf(B)$ $\in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ B，

- $\mathcal{M}(B)$ 是 $\mathbb{\Delta}_B$ 上一个有限生成的无挠模，并且是饱和的，意味着 g

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(B)\left[\frac{1}{p}\right] \cap \mathcal{M}(B)\left[\frac{1}{I_B}\right],$$

- 映射 $\phi^*_{\mathbb{\Delta}_B}\mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(B)$ 是单射且为 I_B^r-扭元。

我们希望证明，上文引入的两个范畴实际上是等价的。 .

引理 4.1.4. 假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小的，且 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$。˜设 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 满足 B qrsp，并设 ξ 是 $I \subset \mathbb{\Delta}_B$的一个生成元。那么 $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)$ 是饱和的，即】【。

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(B)[\tilde{\xi}^{-1}] \cap \mathcal{M}(B)[p^{-1}]$$

˜，且（ξ， p）是 $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)$ 的正则序列。

证明。设 $R \to R_\infty$ 为完美幺环，它是通过提取´的 p次方根并将底域扩张至 $\mathcal{O}_C$ 得到的´étale 坐标。先假设 B 位于 R_∞ 上方，即存在与来自 R 的结构映射相容的 p-完全忠实平坦映射 $R_\infty \to B$ 。那么 $\mathbb{\Delta}_B$ 在 $\mathfrak{S}(R)$ 上平坦，因为 $\mathfrak{S}(R) \to \mathbb{\Delta}_{R_\infty} \to \mathbb{\Delta}_B$ 是一系列（p， E）-完全平坦映射的复合，且 $\mathfrak{S}(R)$ 是诺特环。但于是，根据 [13, 引理 3, $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B) = \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R)) \hat{\otimes}\mathbb{\Delta}_B$ 是˜饱和的，因此 (ξ, p) 是 $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)$ 的正则序列。
对于ξ，一般的 B，正则序列 对于 $\mathcal{M}(B_\infty) \hat{\otimes}_{R_\infty} \mathcal{M}(B)$ 那么 $\hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B}\mathbb{\Delta}_{B_\infty}$ 而言，即 $\mathcal{M}(B_\infty)/I = \mathcal{M}(B)/I\hat{\otimes}\mathbb{\Delta}_{B_\infty}/I$ 是 p-挠无的。但由于 $\mathbb{\Delta}_B/I \to \mathbb{\Delta}_{B_\infty}/I$ 是 p-完全忠实平坦的，因此可以看出， $\mathcal{M}(B)/I$ 也是 p-挠无的（具体而言，通过忠实平坦性，可以推导出对于所有 $n \geq 1$， $\mathcal{M}(B)/(I, p^n)$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$ 平坦的）。 □

上面的引理推出以下结论。

推论 4.1.5. 函子 μ_* （见命题 2.2.3）诱导出一个自然的范畴等价

$$CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}) \longleftrightarrow CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}).$$

我们还将考虑挠对象。

定义 4.1.6. 我们用 $CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 表示如下范畴（它属于由所有带弗罗贝尼乌斯线性映射的棱镜晶体构成的显然的大范畴）：其对象是弗罗贝尼乌斯模 $(\mathcal{M}, \Phi)$ 的直和，并满足以下条件。

- $\mathcal{M}$ 对于某个 $n \geq 1$， • $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的。
- 对于任意 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$，若 B 为 qrsp，则 $\mathcal{M}(B)$ 和 $\mathcal{M}(B)/p$ 均为 I_B-挠无挠的。∼
- 这对 $(\mathcal{M}, \Phi)$ 是可容许的，即 $\phi^*\mathcal{N}^r_M \xrightarrow{=} \mathcal{I}^r_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M}$ 是一个同构。这里 $\mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}$表示 Nygaard 滤过（见下文）
- 对于任意 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$，若 B 为 qrsp，则 $\Phi_{\mathcal{M}(B)}$ 的线性化是单射，且其余核是 I^r_B-挠的。

最后，我们将 $CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 记为包含 $CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 和 $CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 作为满子范畴的最小范畴。

注 4.1.7. • 上面的前两个条件等价于要求 $\mathcal{M}(R_\infty)$ 在 A_{inf}/p^n 上平坦。

- 由于我们也在考虑挠对象，因此这里稍微偏离了 [13] 的记号。在该文献中，范畴 $CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor}}_{[0,r]}{}_{-}{}^{]\,\mathrm{free}}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$ 记作 $CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$。注意，根据命题 4.1.14， $CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor}}_{[0,r]}{}_{-}{}^{]\,\mathrm{free}}(\mathcal{X})$ 中的任意对象都是可容许的。

$CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$中的对象在$(I,p)$之外总是投射的。

引理 4.1.8. 设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,p-tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$。则 $M = \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 在 E 之外是投射的。

如果$(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,\text{tor}-\text{自由}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$，那么 $M = \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$在$(p,E)$之外是投射的，即$M[p^{-1}]$（分别是 $M[E^{-1}]^{\wedge}_{p}$）是一个投射的 $\mathfrak{S}(R)[p^{-1}]$-模（分别是一个投射的 $\mathfrak{S}(R)[E^{-1}]^{\wedge}_{p}$-模）。

证明。第二个结论由 [13, 命题4.13]（它给出在 p之外的投射性）以及第一个结论（它给出在 E之外的投射性）推出。
第一个结论由 [16, §2] 中的论证推出（另见命题5.3.1的证明）；这些论证尤其表明，在特征为 p 的正则局部环上，具有可逆弗罗贝尼乌斯的模是投射的。 □

推论 4.1.9. 设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 为 p-挠的。则对于任意 qrsp $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$，$\mathbb{\Delta}_B[\frac{1}{I_B}]/p$-模 $\mathcal{M}(B)[\frac{1}{I_B}]$ 是投射的。若 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,\text{tor}-\text{free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}})$，则 $M = \mathcal{M}(B)$ 在 (p,I_B) 之外是投射的。

证明。这由前一个引理以及 [23, 定理 1.6] 得出。 □

对于任意完备棱柱 F-晶体 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}})$，我们都有一个 Nygaard 滤过，定义为

$$\mathcal{N}^i_{\mathcal{M}} := \Phi^{-1}_{\mathcal{M}}(\mathcal{I}^i_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M}).$$

命题 4.1.10. 设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,\text{tor}-\text{free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$，且 $B \to C$ 是 $\mathcal{X}_{\text{qsyn}}$ 中 qrsp 环的一个态射，满足以下条件之一：

1. 映射 $B \to C$ 是 p-完全忠实平坦的。

2. $B = R_\infty$，其中 $R \to R_\infty$ 是构造 2.2.6 中定义的完美幺覆盖。

于是我们有

$$\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(C) = \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(B)\hat{\otimes}N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$$

对于任意 $k \geq 1$，在典范识别 $\mathcal{M}(B)\hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B}\mathbb{\Delta}_C \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(C)$ 下。这里，$\sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(B)\hat{\otimes}N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$ 表示 $\sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(B) \otimes N^s_{\mathbb{\Delta}_C} \to \mathcal{M}(B)\hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B}\mathbb{\Delta}_C$ 的像的闭包。

证明。首先，假设 $B \to C$ 是 p-完全忠实平坦的。令 $M := \mathcal{M}(B)$。根据定义，$\sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_M\hat{\otimes}N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$是 $\sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_M \otimes N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$在 $\mathcal{M}(C)$中的闭包。此外，$\mathcal{N}^k_{M_{\mathbb{\Delta}_C}}$在 $\mathcal{M}(C)$中是闭的，因为它是闭子模 $\tilde{\xi}^k\mathcal{M}(C)$在 Frobenius 映射（其为连续映射）下的原像。因此，我们有

$$\sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_M\hat{\otimes}N^s_{\mathbb{\Delta}_C} \subset \mathcal{N}^k_{M_{\mathbb{\Delta}_C}}$$

并希望证明这甚至是一个等式。为简化记号，我们记为 $Fil^k M_{\mathbb{\Delta}_C} := \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_M\hat{\otimes}N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$。

断言。我们有 $Fil^k M_{\mathbb{\Delta}_C}[\tilde{\xi}^{-1}]^{\wedge}_p = \mathcal{N}^k_{M_{\mathbb{\Delta}_C}}[\tilde{\xi}^{-1}]^{\wedge}_p$和 $Fil^k M_{\mathbb{\Delta}_C}[p^{-1}] = \mathcal{N}^k_{M_{\mathbb{\Delta}_C}}[p^{-1}]$。

断言的第一部分很容易，因为 $N_M^k[\tilde{\xi}^{-1}] = M$。

对于第二部分，注意到 $\mathbb{\Delta}_B$-模 $M[p^{-1}]$ 是有限投射的，因此经过局部化后，我们甚至可以假设它在一组基 $v_1,\dots,v_n$ 上是自由的。设 H 为表示 $\Phi_{M[p^{-1}]}$（即将 Φ_M 线性延拓到 $M[p^{-1}]$ 上）的矩阵。令 $m = (m_1,\dots,m_n) \in M[p^{-1}]\hat{\otimes}\mathbb{\Delta}_C[p^{-1}] \cong \mathbb{\Delta}_C[p^{-1}]^n$ 为一个满足以下条件的元素：

$\Phi(m) = f(H)(\phi_{\mathbb{\Delta}_C[p^{-1}]}(m_1)\dots,\phi_{\mathbb{\Delta}_C[p^{-1}]}(m_n))^t = \sum_i f(Hv_i)\phi(m_i)$ 可被 $\tilde{\xi}^k$ 整除。

由于 H 在相差 ξ的幂次意义下可逆，因此元素 $f(Hv_i)$线性无关。因此，对所有 i，$\tilde{\xi}^k$必须整除 $f(Hv_i)\phi(m_i)$。写作 $Hv_i = \sum_n h_{ij}v_j$后，我们看到对所有 i和 j，$\tilde{\xi}^k$$_{j=1}$必须整除 $f(h_{ij})\phi(m_i)$。现在我们断言，当且仅当 ξ^s 整除 h_{ij}时，$f(h_{ij})$能被某个$\tilde{\xi}$的幂次ξ^s整除。也就是说，f 模 ξ 是单射，因为 $\mathbb{\Delta}_B/\xi \to \mathbb{\Delta}_C/\xi$是 p-完全忠实平坦的（这意味着对所有 $n \geq 1$，映射模 p^n 都是单射，因此映射本身也是单射，因为 $\mathbb{\Delta}_B/p$ 是经典的 p-完备，这是因为 $\mathbb{\Delta}_B$ 有界）。令$\tilde{}$，则 $r_i \in \mathbb{N}$是使ξ^{r_i}整除 $\phi(m_i)$的最大数。若 $r_i < k$，则对所有 j，h_{ij}必须被 $\tilde{\xi}^{k-r_i}$整除。但这就意味着 m属于 $Fil^k M_{\mathbb{\Delta}_C}[p^{-1}]$。断言得证。

现在，$M_{\mathbb{\Delta}_C}$ 是饱和的，即

$$M_{\mathbb{\Delta}_C} = M_{\mathbb{\Delta}_C}\left[\frac{1}{\xi}\right] \cap M_{\mathbb{\Delta}_C}[p^{-1}].$$

此外，我们还得到 $\tilde{\xi}^k M_{\mathbb{\Delta}_C} = \tilde{\xi}^k M_{\mathbb{\Delta}_C}\left[\frac{1}{\tilde{\xi}}\right] \cap \tilde{\xi}^k M_{\mathbb{\Delta}_C}[p^{-1}]$，因此可知 $\mathcal{N}^k_{M_{\mathbb{\Delta}_C}}$ 也是饱和的。类似地，很容易验证 $Fil^k M_{\mathbb{\Delta}_C}$ 也是饱和的。因此，上述断言意味着

$$\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(C) = \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(B)\hat{\otimes} N^s_{\mathbb{\Delta}_C}.$$

现在对于 (2)，我们先考虑态射 $g : \mathfrak{S}(R) \to \mathbb{\Delta}_{R_\infty} \to \mathbb{\Delta}_C$。由于 R 是整环，且 $R \to C$ 是经典意义下的平坦模（$\mathfrak{S}(R)$ 是诺特环），我们再次得到 g 模 I 是单射。因此，我们可以像上面那样证明有

$$\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(\mathbb{\Delta}_A) = \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(\mathfrak{S}(R))\hat{\otimes} N^s_{\mathbb{\Delta}_A},$$

对于 $A = R_\infty$ 或 $A = C$ 均成立——这里滥用一下记号，用 $\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 表示晶体在与 $\mathcal{M}$ 相关联的棱柱体位点上的取值。但接下来也很容易推出

$$\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(C) = \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(R_\infty)\hat{\otimes} N^s_{\mathbb{\Delta}_C}.$$

□

对于挠对象，我们记录如下。

命题 4.1.11. 设 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 在 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}/p^n$ 上是局部自由的，其中 $n \geq 1$。设 $B \to C$ 是 $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 中 qrsp 环之间的一个映射，它要么是 p- 完全忠实平坦的，要么是 $B = R_\infty$。那么，对于任意 $k \geq 0$，我们有

$$\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(C) = \sum_{r+s=k} \mathcal{N}^r_{\mathcal{M}}(B)\hat{\otimes} N^s_{\mathbb{\Delta}_C}$$

在典范识别 $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)\hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B}\mathbb{\Delta}_C \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_C)$ 下。

证明。对于晶体 $\mathcal{M}[p^{-1}]$，前一个命题中断言的证明在此情形下同样适用。

□

我们还有以下结果，稍后会用到。

引理 4.1.12. 设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$，且 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$，其中 B 为 qrsp。则对所有 $k \geq 0$， $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)/\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(\mathbb{\Delta}_B)$ 都是 p-挠无关的。
此外，设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$，使得 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的，其中 $n \geq 1$，并设此时 B 为完美幺环，且是 R 上的准合成环。那么 $\mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)/\mathcal{N}^k_{\mathcal{M}}(\mathbb{\Delta}_B)$ 也是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的。

˜证明。设 $\xi \in I \subset \mathbb{\Delta}_B$ 为一个生成元，并设 $M := \mathcal{M}(\mathbb{\Delta}_B)$。现在，若 $M/\mathcal{N}^r_M$ 不是 p- 挠无关的，则存在一个 $x \in M \backslash \mathcal{N}^r_M$，使得 $px \in \mathcal{N}^r_M$。因此，对于某个 $y \in M$，有 $p\Phi_M(x) = \tilde{\xi}^k y$。但 M 是饱和的，所以这意味着 $\tilde{\xi}^k$ 必须整除 $\Phi_M(x)$，矛盾。
对于第二部分，现在设 $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi,tor]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 且 B 为完美化的，使得 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的，并假设 $M/\mathcal{N}^k_M$ 不是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的。这意味着映射 $M/(p,\mathcal{N}^k_M) \xrightarrow{\cdot p^{n-1}} p^{n-1}M/\mathcal{N}^k_M$ 不是单射。因此，存在某个非零的 $x \in M/p$，它不在 $\mathcal{N}^k_M$ 的像中，且满足 $p^{n-1}\tilde{x} \in \mathcal{N}^k_M$，其中 $\tilde{x} \in M$ 是某个提升。但随后，如上所述，我们得到 $p^{n-1}\Phi(\tilde{x}) = \tilde{\xi}^k y$，其中 $y \in M$ 是某个元素。

由于 M 和 $M[\tilde{\xi}^{-1}]$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的，取 $Tor^{\mathbb{Z}_p}(-,\mathbb{F}_p)$ 可得如下交换图，其行均为正合行

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \hookrightarrow & M[\tilde{\xi}^{-1}] & \longrightarrow & M[\tilde{\xi}^{-1}]/M & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(p^{n-1})M & \hookrightarrow & (p^{n-1})M[\tilde{\xi}^{-1}] & \longrightarrow & M[\tilde{\xi}^{-1}]/M[p] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

这表明我们有 $(p^{n-1})M = (p^{n-1})M[\tilde{\xi}^{-1}] \cap M$。由此可得 $(p^{n-1})\,{}^{\Phi_{(\tilde{x})}}\tilde{\xi}^k \in (p^{n-1})M$，因此存在某个 $z \in M$，使得 $p^{n-1}z = (p^{n-1})\frac{\Phi(\tilde{x})}{\tilde{\xi}^k}$。但这样一来，我们便有 $z = {}^{\Phi_{(\tilde{x})}}\tilde{\xi}^k$模 p，这意味着 ${}^{\Phi_{(x)}}\tilde{\xi}^k \in M/p$。现在，由于 B 是完美化的，很容易看出，M/p的 Nygaard 滤过是 M的 Nygaard 滤过 $\mathcal{N}^k_M$模 p后的约化。因此，${}^{\Phi_{(x)}}\tilde{\xi}^k \in M/p$ 这一事实与假设 $x \notin Image(\mathcal{N}^k_M \to M/p)$ 矛盾。 □

引理 4.1.13. 设 R 是一个 p-挠无关的拟正则半完美幺 $\mathbb{Z}_p$-代数。设$i \geq 0$。那么，由 $\phi_{\mathbb{\Delta}_R}$ 的线性化诱导的态射 $\phi^*_{\mathbb{\Delta}_R}N^i_{\mathbb{\Delta}} \to I^a\mathbb{\Delta}_R$是一个同构。

证明. 由于满射性显然，我们只需证明 $\phi^*_{\mathbb{\Delta}_R}N^i_{\mathbb{\Delta}} \to \mathbb{\Delta}_R$是单射。设 K 为其核。于是 K 是（导出的）(p,I)-完备的，因此由中山引理，只需证明 $K/p = 0$。此外，由于 $\mathbb{\Delta}_R$ 是 p-挠无关的， K/p 就是$\phi^*_{\mathbb{\Delta}_R}N^i_{\mathbb{\Delta}}/p \to \mathbb{\Delta}_R/p$的核。现在我们证明 $Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}_R/p, \mathbb{\Delta}_R/(N^i_{\mathbb{\Delta}}, p)) = 0$，其中 $\mathbb{\Delta}^{\phi}_R$表示配备由 $\phi_{\mathbb{\Delta}_R}$诱导的模结构的$\mathbb{\Delta}_R$ 。我们对 i使用归纳法。首先假设 $i = 1$。那么 $\mathbb{\Delta}_R/N^1_{\mathbb{\Delta}_R} = R$。此外，沿忠实平坦映射（见 [6, 引理 7.10]）进行基变换，得到 $R/p \to \mathbb{\Delta}_R/(p, I)$

$$Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}_R/p, R/p) \otimes_{R/p} \mathbb{\Delta}_R/(I,p) = Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}_R/p, \mathbb{\Delta}_R/(I,p)),$$

因此，只需证明后者为零。现在， $\phi^*_{\mathbb{\Delta}}(I) = I \otimes_{\phi} \mathbb{\Delta}$ 根据引理 3.6], 是一个平凡的秩 1 模，而生成元由一个元素 f 给出，它映射到 $\phi(I)\mathbb{\Delta}_R$ 的生成元 $\phi(d)$。然而，由于 $\mathbb{\Delta}_R/p$ 是 $\phi(d)$-挠无的，映射 $\phi^*_{\mathbb{\Delta}}(I)/p \to \phi(I/p)\mathbb{\Delta}_R$是一个同构，从而得到 $Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}_R/p, \mathbb{\Delta}_R/(I,p)) = 0$。进而

得到 $Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}_R^{\phi}/p, R/p) = 0$——事实上，对所有 $j>0$，我们甚至有 $Tor_j^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}_R^{\phi}/p, R/p) = 0$，因为 $\mathbb{\Delta}_R/(I,p)$ 的投射维数为 1。
现在，对于 $i>0$ 的情形，我们首先指出，下面的序列

$$0 \to gr_N^i/p \to \mathbb{\Delta}_R/(N^{i+1},p) \to \mathbb{\Delta}_R/(N^i,p) \to 0$$

是正合的。这是因为 $\mathbb{\Delta}_R/N^i$ 是 p-无挠的，而这又可由 d´evissage 从 $\mathbb{\Delta}_R/N^1 = R$ 和 $gr_N^i \cong Fil^i\bar{\mathbb{\Delta}}_R\{i\}$ 均为 p-无挠推出（参见 [6, 定理 12.2]）。现在，考虑与投影映射 $\mathbb{\Delta}_R/p \to R/p$ 相关联的 Tor 谱序列

$$Tor_n^{R/p}(Tor_m^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}_R^{\phi}/p, R/p), gr_N^i/p) \Longrightarrow Tor_{n+m}^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}_R^{\phi}/p, gr_N^i/p).$$

由于对所有 $j>0$，$Tor_j^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}_R^{\phi}/p, R/p) = 0$，因此该谱序列退化为

$$Tor_m^{R/p}(\mathbb{\Delta}_R/(I,p), gr_N^i/p) \cong Tor_m^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, gr_N^i/p).$$

但由于 $R/p \to \mathbb{\Delta}_R/(I,p)$ 忠实平坦，这意味着对所有 $m>0$，$Tor_m^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, gr_N^i/p) = 0$。因此，通过 d´evissage 可得，对所有 $i>0$，$Tor_1^{\mathbb{\Delta}_R/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, \mathbb{\Delta}_R/N_{\mathbb{\Delta}}^i/p) = 0$。 □

命题 **4.1.14** $\mathcal{M}$ $\Phi_{\mathcal{M}} \in CR_{[0,a]}^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}$ $\mathcal{X}$ $\phi^*\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^a \to \ldots$ 设 (,) ( )。那么该态射是一个 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^a\mathcal{M}$ 同构。

证明。我们不妨假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 很小。我们首先证明 $\phi^*\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^a \to \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^a\mathcal{M}$ 是满态射。设 $R \to R_\infty$ 是一个由完美化幺环给出的准合成覆盖。我们将证明 $\phi^*_{A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)}N_M^r \to \xi^r M$ 是满射。由于 $coker(\phi^*M \to M)$ 是 ξ^r-挠的，我们知道任意元素 $m \in \xi^r M$ 都可以写成 $m = \sum \alpha_i \Phi_M(m_i)$，其中某个$i\alpha_i \in A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)$。但由于 $\phi_{A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)}$ 是一个同构，我们有

$$m = \sum \phi^{-1}_{A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)}(\alpha_i)\Phi_M(m_i) = \Phi_M(\sum \phi^{-1}_{A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)}(\alpha_i)m_i).$$

现在令 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 为某个对象，其带有 B 一个 qrsp $\mathbb{Z}_p$-代数。假设存在一个映射 $R_\infty \to B$ in $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$。我们有 $I_{R_\infty}M_{\mathbb{\Delta}_B} = (I_{A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)}M)\hat{\otimes}\mathbb{\Delta}_B$，并且根据命题 4.1.10 (2)，$N_{M_{\mathbb{\Delta}_B}}^a = \sum_{r+s=a} N_M^r \otimes N_{\mathbb{\Delta}_B}^s$。这给出了 $\phi^*N_{M_{\mathbb{\Delta}_B}}^a \to I_{\mathbb{\Delta}_B^a}M(\mathbb{\Delta}_B)$ 的满射性。因此我们看到，映射 $\phi^*\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^a \to \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^a\mathcal{M}$ 在限制到 R_∞后变成了一个满射。

现在令 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$为任意 qrsp 对象。我们将证明 $\phi^*\mathcal{N}_{\mathcal{M}}^a(B) \to \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^a\mathcal{M}(B)$ 是单射。置 $M := \mathcal{M}(B)$。令 K为 $\phi^*\mathcal{N}_M^a \to \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^a M$的核。它是一个完备模，因此只需证明 $K/p = 0$。根据引理 4.1.12，$M/\mathcal{N}_M^a$是 p-无挠的，这意味着 K/p与 $\phi^*\mathcal{N}_M^a/p \to M/p$ 的核相同。现在 $\Phi_M\colon \phi^*M \to M$是单射，因此 K是映射 $\phi^*\mathcal{N}_M^a \to \phi^*M$的核。因此，只需证明 $Tor_1^{\mathbb{\Delta}_B/p}(\mathbb{\Delta}_B^{\phi}/p, M/(N_M^a,p)) = 0$，其中 $\mathbb{\Delta}_B^{\phi}$表示 $\mathbb{\Delta}_B$，并配备由 ϕ给出的模结构。证明随后类似于引理 4.1.13 的证明。存在一个谱序列（为简化记号，我们写作 $\mathbb{\Delta}_B = \mathbb{\Delta}$）。

$$Tor_m^{\mathbb{\Delta}/(N_{\mathbb{\Delta}}^a,p)}(Tor_n^{\mathbb{\Delta}/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, \mathbb{\Delta}/(N_{\mathbb{\Delta}}^a,p)), M/(N_M^a,p)) \Longrightarrow Tor_{n+m}^{\mathbb{\Delta}/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, M/(N_M^a,p)).$$

现在，由引理 4.1.13 的证明可知，对于 $n>0$，有 $\mathbb{\Delta}/p\otimes_{\phi}\mathbb{\Delta}/(N_{\mathbb{\Delta}}^a,p) = \mathbb{\Delta}/(I^a,p)$，且 $Tor_n^{\mathbb{\Delta}/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, \mathbb{\Delta}/(N_{\mathbb{\Delta}}^a,p)) = 0$。此外，根据纤维逐点平坦性判别准则，映射 $\mathbb{\Delta}/(N_{\mathbb{\Delta}}^a,p) \to \mathbb{\Delta}/(I^a,p)$ 是忠实平坦的。因此，上述谱序列推出，对于所有 $m>0$，都有 $Tor_m^{\mathbb{\Delta}/p}(\mathbb{\Delta}^{\phi}/p, M/(N_M^a,p)) = 0$。

□

4.2 除法晶体

本节将说明范畴 $CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 等价于一个除法棱柱 F-晶体范畴（其对象对应于具有正 Hodge-Tate 权重的晶体局部系统）。我们首先定义以下大范畴。

定义 4.2.1. 在 $\mathcal{X}$ 上，高度为 $a \geq 0$ 的除法棱镜 F-晶体是一个三元组 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}})$，满足以下条件。

- $\mathcal{M}$是 $\mathcal{O}_{\text{pris}}$-模中的有限生成完备晶体。
- $Fil^a\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ 是一个子模，使得 $\mathcal{N}^a_{\mathbb{\Delta}} \cdot \mathcal{M} \subset Fil^a\mathcal{M}$。$\sim$
- $\Phi^a_{\mathcal{M}}: Fil^a\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个$\phi_{\mathcal{O}^{\text{pris}}}$-线性映射，其线性化 $\phi^* Fil^a\mathcal{M} \xrightarrow{=} \mathcal{M}$ 是一个同构，并且 $Fil^a\mathcal{M}$ 是极大的，即不存在更大的子层$Fil^a\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{M}$，以及一个映射 $\Psi: \mathcal{F} \to \mathcal{M}$，使其能够延拓$\Phi^a_{\mathcal{M}}$。

我们用 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ big}_{[0,r]}$，表示除过的棱镜 F-晶体范畴。

与之前一样，我们随后定义 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ \text{tor}-\text{free}}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 和 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ tor}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 这两个 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ big}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 的子范畴，其中前者由除法棱镜 F-晶体 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}})$ 构成，对任意 qrsp 对象 $Spf(R) \subset \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$，$\mathcal{M}(B)$ 都是 p-挠无的且饱和的。范畴 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ tor}_{[0,r]}$，包含对象 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}})$ 的直和，其中对于某个 $n \geq 1$，$\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的且饱和的。

最后，$DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 是包含 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ tor}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 和 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ \text{tor}-\text{free}}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 的最小子范畴，它是 $DivCR^{\wedge,\ \phi\ big}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 的子范畴。

例 4.2.2. • 首先回顾 Breuil-Kisin 扭转 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\}$（[5, 例 4.5]），非正式地可写作 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\} = \bigotimes (\phi^n)^*\mathcal{I}$。若定义 $Fil^1\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\} = \sum_{n\geq 0}\mathcal{N}^1_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\}$，便可看出 $\phi^*\mathcal{N}^1_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\} = \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{1\}$。因此，我们得到一个除法棱镜 F-晶体的结构。

- 更一般地，对于任意 $s \geq 1$，我们都有弗罗贝尼乌斯映射 $\mathcal{N}^s_{\mathbb{\Delta}}\{s\} \to \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{s\}$。

现在设 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,r]}(\mathcal{X})$ 是一个高度为 r 的完备棱镜 F-晶体。将 $\mathcal{N}^a_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ 与可逆模 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\{a\}$ 张量积，得到 $Fil^a(\mathcal{M}\{a\}) := \mathcal{N}^a_{\mathcal{M}}\{a\} \subset \mathcal{M}\{a\}$，并可看出

$$\begin{aligned}\phi^* Fil^a(\mathcal{M}\{a\}) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M} \otimes \bigotimes_{n\geq 1}(\phi^n)^*\mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}} \\ &= \mathcal{M} \otimes \mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}} \bigotimes_{n\geq 1}(\phi^n)^*\mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}} \\ &= \mathcal{M}\{a\},\end{aligned}$$

其中第一个映射由 $\Phi_{\mathcal{M}}$ 诱导（由命题 4.1.14 可知，这是一个同构）。我们还用到了 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}} \otimes \mathcal{M}$，这可由 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}$-挠无子的事实推出。由此，我们得到一个整除棱镜 F-晶体 $(\mathcal{M}\{a\}, Fil^a(\mathcal{M}\{a\})\ \Phi_{\mathcal{M}\{a\}})$】【。

为了更精确地构造 $\Phi_{M\{a\}}$，回顾 [5, 例 4.5]：对于任意 qrsp $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$，模 $(\phi^n)^*(I_{\mathbb{\Delta}_B})$ 在基变换到 B/I_n,$_{n-1}$ 后变成平凡的，其中 $I_n = \prod \phi^i(I_{\mathbb{\Delta}_B})$。我们有 $B = \lim_n B/I_n$，因此可以先模 $I_n{}_{i=1}$ 定义 $\Phi_{M\{a\}}$

以与上文相同的方式，并通过取极限得到映射 $\Phi_{M\{a\}}$。

反过来，设 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,r]}$ 是一个除幂完备棱镜F-晶体。那么在 $\mathcal{M}\{-a\} = \mathcal{M}\otimes \bigotimes_{n\geq 0} (\phi^n)^*\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-a}$ 上，我们通过 $\Phi_{\mathcal{M}\{-a\}}$得到一个弗罗贝尼乌斯结构。

$$\begin{aligned}\phi^*\mathcal{M}\{-a\} &= \phi^*\mathcal{M}\otimes\bigotimes_{n\geq 1}(\phi^n)^*\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-a}\\ &= \mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}}\phi^*\mathcal{M}\otimes\bigotimes_{n\geq 0}(\phi^n)^*\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-a} \to (\phi^*Fil^a\mathcal{M})\{-a\} \xrightarrow[\Phi_{\mathcal{M}}]{\cong} \qquad \mathcal{M}\{-a\},\end{aligned}$$

其中，倒数第二个箭头由 $\mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}}\phi^*\mathcal{M} \to \phi^*Fil^a\mathcal{M}$ 诱导，而 $\mathcal{I}^a_{\mathbb{\Delta}}\phi^*\mathcal{M} \to \phi^*Fil^a\mathcal{M}$ 来源于沿 Frobenius 映射进行的基变换 $\mathcal{N}^a_{\mathbb{\Delta}}\mathcal{M} \subset Fil^a\mathcal{M}$。容易看出，$(\mathcal{M}\{-a\}, \Phi_{\mathcal{M}\{-a\}})$ 是 $CR^{[\wedge,\phi]}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 的任意一个对象。

命题 4.2.3. 上述构造互为拟逆，因此给出了范畴等价。

$$CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \longleftrightarrow DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}).$$

证明。我们将函子记为 $F\colon CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \rightleftarrows DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) : G$。

首先我们验证 $F\circ G = id$。设 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$。记 $\Phi_{\mathcal{M}\{-a\}}$: $\mathcal{M}\{-a\} \to \mathcal{M}\{-a\}$ 为上文构造的弗罗贝尼乌斯晶体。容易看出，$Fil^a\mathcal{M}\{-a\} \subset \mathcal{M}\{-a\}$ 包含于 $\mathcal{N}^a_{\mathcal{M}\{-a\}} = \Phi^{-1}_{\mathcal{M}\{-a\}}(\mathcal{I}^a)$。利用 $Fil^a\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$的极大性，可推出 $Fil^a\mathcal{M}\{-a\} = \mathcal{N}^a_{\mathcal{M}\{-a\}}$ 以及$F(G((\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}))) = (\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}})$。

关于 $G\circ F = id$ 的证明留给读者。 □

利用引理 4.1.8，我们得到如下结果。

引理 4.2.4. 设 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,r]^\circ}$ 那么，对于任意 qrsp $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$, $\mathcal{M}(B)$ 在 (I,p) 之外是投射的。

设 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,r]^\circ}$ 由命题 4.2.3 可知， $\mathcal{M}$ 上存在一个完整滤过 $Fil^\bullet\mathcal{M}$ ，它源自 $\mathcal{M}\{-a\}$ 的完整 Nygaard 滤过。对于任意 qrsp$B \in \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$，可见该滤过满足

$$Fil^i\mathcal{M}(B) := \begin{cases}\{m \in \mathcal{M}(B) : \mathcal{N}^{a-i}_{\mathbb{\Delta}}(B)m \subset Fil^a\mathcal{M}(B)\} & \text{if } i \leq a\\ \mathcal{N}^{i-a}_{\mathbb{\Delta}}(B)Fil^a\mathcal{M}(B) & \text{if } i > a.\end{cases}$$

事实上，对于任意完备弗罗贝尼乌斯晶体 $(\mathcal{F}, \Phi_F)$ 以及任意 $0 \leq i \leq a$，可见$\mathcal{N}^i_{\mathcal{F}}(B)$ $= \{m \in \mathcal{F}(B) : \mathcal{N}^{a-i}_{\mathcal{F}}(B)m \subset \mathcal{N}^a_{\mathcal{F}}(B)\}$（利用了 $\mathcal{F}(B)$ 的 I-无挠性）。
这使得 $\mathcal{M}$ 成为 Nygaard 滤过环层上的滤过模层$\mathcal{O}^{\text{pris}}$。此外还有弗罗贝尼乌斯态射 $\Phi^i_{\mathcal{M}}\colon Fil^i_{\mathcal{M},\ Fil^a\mathcal{M}}\{i-a\} \to \mathcal{M}\{i-a\}$，对于 $i \leq a$，它们定义为

$$\phi^*Fil^i_{\mathcal{M},Fil^a\mathcal{M}}\{i-a\} = \mathcal{I}^{a-i}_{\mathbb{\Delta}}(\phi^*Fil^i_{\mathcal{M},Fil^a\mathcal{M}})\{i-a\} \to (\phi^*Fil^a\mathcal{M})\{i-a\} \xrightarrow[\Phi_{\mathcal{M}}]{\cong} \mathcal{M}\{i-1\}.$$

这里倒数第二个箭头由 $\mathcal{N}_{\mathbb{\Delta}}^{a-i}Fil^i_{\mathcal{M},\ Fil^a\mathcal{M}} \to Fil^a\mathcal{M}$ 的弗罗贝尼乌斯推出得到。

我们需要知道，局部被除的棱镜 F-晶体可以由棱镜层化来描述。

定义 4.2.5. 设 A 为一个 qrsp p-无挠 $\mathbb{Z}_p$-代数。我们定义 $DivCR^{\wedge,\ \phi\,\mathrm{tor-free}\,,}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_A)$ 为由三元组 (M, Fil^aM, Φ_M) 构成的范畴，其中

- M 是一个有限生成的饱和 $\mathbb{\Delta}_A$-模，经典意义下是 (I,p)-完备的，并且在 (I,p) 之外是投射的。
- $Fil^aM \subset M$是一个子模，满足 $\mathcal{N}^a_{\mathbb{\Delta}_A} M \subset Fil^aM$.$\sim$
- Φ_M: $Fil^aM \to M$是一个 ϕ_A-线性映射，其线性化 $\phi^*Fil^aM \xrightarrow{=} M$是一个同构。

我们也类似于定义 4.1.3 定义范畴 $DivCR^{\wedge,\ \phi\,tor\,,}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_A)$ 和 $DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_A)$，但不再要求极大性条件。相反，我们将满足 $Fil^aM \overset{[0,a]}{\subset}$ 与之前一样为极大的对象构成的全子范畴记为$DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_A)^{max}$ 。

注 4.2.6。当 A 是完美化时，很容易看出，$DivCR^{\wedge,\ \phi\,tor\,,}(\mathbb{\Delta}_A)$ 中对象的每个滤过都是自动极大的，因为此时 $\phi_{\mathbb{\Delta}_A}$ 是同构，所以只要 $Fil^aM \overset{[0,a]}{\subset} \tilde{Fil}^aM$ 是一个更大的滤过，同构 $\phi^*Fil^aM \cong \phi^*\tilde{Fil}^aM$ 就会迫使 $Fil^aM = \tilde{Fil}^aM$。

与上文相同，对于任意 $(M, Fil^aM, \Phi_M) \in DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,r]}(\mathbb{\Delta}_A)$，我们定义 $Fil^\bullet_{M,Fil^aM}$为如下递减滤过:

$$Fil^i_{M,Fil^aM} := \begin{cases} \{m \in M : \mathcal{N}^{a-i}_{\mathbb{\Delta}_A} m \subset Fil^aM\} & \text{if } i \le a \\ \mathcal{N}^{i-a}_{\mathbb{\Delta}_A} Fil^aM & \text{if } i > a. \end{cases}$$

存在 Frobenius 映射 Φ^i_ξ: $Fil^i_{M,\ Fil^aM} \to M$，其定义为 $\Phi^i_\xi(m) = \Phi^a(\xi^{a-i}m)$，其中$\xi$ 是 $A_{\mathrm{inf}}(S)$ 的 Nygaard 滤过的生成元，其中 $S \to A$ 是一个映射到 A 的某个完美化幺环。现在设 $A \to B$ 是一个 p-挠无子的 qrsp $\mathbb{Z}_p$-代数之间的态射。那么对于任意 $0 \le k \le a$，Frobenius 映射 $\Phi^{a-k}_\xi \otimes \frac{\phi_{\mathbb{\Delta}_B}}{\tilde{\xi}^k}$: $Fil^{a-k}_{M\ ,\ Fil^aM}\tilde{\otimes}\mathcal{N}^k_{\mathbb{\Delta}_B} \to M_{\mathbb{\Delta}_B}$，可以看出其$\tilde{}$与 ξ 的选择无关。这里我们再次记 $\xi = \phi(\xi)$。我们有一个基变换函子。

$$DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_A) \to DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_B),$$

将 (M, Fil^aM, Φ^a_M) 映射为三元组 $(M_{\mathbb{\Delta}_B}, Fil^aM_{\mathbb{\Delta}_B}, \Phi^a_{M_{\mathbb{\Delta}_B}})$，其中 $Fil^aM_{\mathbb{\Delta}_B}$ 定义为 $\bigoplus_{r+s=a} Fil^i_{M,Fil^rM}\tilde{\otimes}\mathcal{N}^s_{\mathbb{\Delta}_B} \to M_{\mathbb{\Delta}_B}$ 的像，而 Φ^a_M 则由.....诱导得到。

$\oplus_{r+s=a}\Phi^r_\xi \otimes \frac{\phi}{\tilde{\xi}^s}$.

$\tilde{}$假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射，并令 $R \to R$ 为由 qrsp $\mathbb{Z}_p$-代数 $\tilde{R}$给出的 p-完全忠实平坦覆盖。我们再次将 $\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}$ 记为$\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$中的余单纯棱镜，其中 $\mathbb{\Delta}^{(i)}_{\tilde{R}} := \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes i+1}}$。我们进一步将由典范包含 $\tilde{R} \to \tilde{R}\tilde{\otimes}_R\tilde{R}$ 诱导的映射记为 $\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}} \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}\hat{\otimes}_R\tilde{R}}$。

定义 4.2.7。范畴 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})$ 是如下定义对象的范畴。

- 一个除幂 F-模 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}})$。
- 一个同构 $\epsilon: p_1^*(M, Fil^a M, \Phi^a_M) \xrightarrow{\cong} p_2^*(M, Fil^a M, \Phi^a_M)$，是 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_{(1)\,R_\infty})$ 中对象之间的同构，并满足在 $\mathbb{\Delta}_{(2)\,\tilde{R}}$ 上显然的余循环条件。

我们有如下引理。

引理 4.2.8. 设 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{[\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}]}(\mathcal{X})$。那么对于 $\mathcal{X}_{\mathrm{qsyn}}$ 中任意 qrsp $\mathbb{Z}_p$-代数之间的 p-完全忠实平坦态射 $B \to C$，我们有

$$Fil^a\mathcal{M}(C) = \sum_{r+s=a} Fil^r\mathcal{M}\{-s\}(B)\hat{\otimes}\mathcal{N}^s_{\mathbb{\Delta}}\{s\}(C), \tag{4.1}$$

在典范识别 $\mathcal{M}(B)\hat{\otimes}_B C \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(C)$ 下，其中我们再次记作

$$\sum_{r+s=a} Fil^r\mathcal{M}\{-s\}(B)\hat{\otimes}\mathcal{N}^s_{\mathbb{\Delta}}\{s\}(C)$$

$\sum_{r+s=a} Fil^r\mathcal{M}\{-s\}(B)\otimes\mathcal{N}^s_{\mathbb{\Delta}}\{s\}(C)$的像的闭包。此外，弗罗贝尼乌斯$\sum_{r+s=a}\Phi^r\otimes\phi^s$诱导。

证明。由命题 4.1.10 和命题 4.2.3 中的范畴等价可得。 □

利用上述引理，我们看到存在一个求值函子 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \to DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})^{\max}$。事实上，这个函子是范畴等价，即除幂 Frobenius 模满足有效下降。

命题 4.2.9。设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射的。那么求值给出一个范畴等价

$$DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \longleftrightarrow DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})^{max}.$$

证明。上文给出的 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}$ 与 $CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}$ 之间的范畴等价的构造，也可以在下降数据层面进行，从而得到一个范畴等价

$$DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})^{max} \longleftrightarrow CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}).$$

另一方面，对于完备的 F-晶体，我们有有效下降，这意味着通过取值可得到一个范畴等价

$$CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \longleftrightarrow CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}).$$

将上述范畴等价结合起来即可得到结论。 □

注 4.2.10. 设 $(M, Fil^a M, \phi^a_M, \epsilon) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})^{max}$。那么，完整滤过$Fil^\bullet_{M,Fil^a M}$是由 $CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}$ 中相应对象的 Nygaard 滤过所诱导的。因此可知，ϵ事实上自动与完整乘积滤过相容，即对于所有 $k \geq 0$，它都将 $p_1^* Fil^k M$映射到 $p_2^* Fil^k M$。

我们通过讨论除法棱镜晶体的 ´étale实现函子来结束本节。

ˆ 定义 4.2.11。我们用 $\mathbb{Z}_p - Loc(\mathcal{X}_K)$ 表示一般纤维 $\mathcal{X}_K$ 的 pro-´etale site 上有限局部自由的 $\mathbb{Z}_p$-层范畴。
我们也用 $\mathbb{Z}_p - Loc^{\mathrm{cris}}_{[0,a]}(\mathcal{X}_K)$ 表示在 $\mathcal{X}_K$ 上具有 $[0,a]$ 中的 Hodge-Tate 权的晶体局部系统范畴（晶体局部系统的定义见 [13, Def. A.11.] 或 [18, Def. 2.25] ）。

我们在此说明，我们采用约定：$\mathbb{Z}_p(1)$ 的霍奇-泰特权重等于 1。我们用 $LF(\mathcal{X}, \mathcal{O}^{\mathrm{pris}}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}}]^{\wedge}_p)^{\phi=1}$ 表示有限局部自由的 $\mathcal{O}^{\mathrm{pris}}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}}]^{\wedge}_p$-晶体$\mathcal{E}$ 范畴，它们带有一个弗罗贝尼乌斯，其线性化 $\phi^*\mathcal{E} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$ 是一个同构。

命题 4.2.12. 范畴 $LF(\mathcal{X}, \mathcal{O}^{\mathrm{pris}}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}}]^{\wedge}_p)^{\phi=1}$ 与 $\mathbb{Z}_p - Loc(\mathcal{X}_K)$ 有典范的对应。

证明。参见 [5, §3]。 □

对任意 $k \geq 0$，有 $\mathcal{N}^k_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}] = \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]$。因此，对任意 $(\mathcal{M}, Fil^a\mathcal{M}, \Phi^a_{\mathcal{M}})$，也有 $Fil^a\mathcal{M}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}] = \mathcal{M}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]$。于是存在一个 ´étale 实现函子

$$T_{\acute{e}t} : DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}_p - Loc(\mathcal{X}_K).$$

命题 4.2.13. 设 $F_a : CR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \to DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 是命题 4.2.3 中的范畴等价。对任意 $\mathcal{M} \in CR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$，我们有 $T_{\acute{e}t}(F_a(\mathcal{M})) = T_{\acute{e}t}(\mathcal{M})(a)$。特别地，´étale 实现函子限制为$DivCR^{\wedge,\ \phi\ \mathrm{tor-free}\ ,}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 与 $\mathbb{Z}_p - Loc^{\mathrm{cris}}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 之间的范畴等价，其中后者是$\mathcal{X}_K$ 上 Hodge-Tate 权重属于 $[0,a]$ 的晶体 $\mathbb{Z}_p$ 局部系统范畴。

证明。第一个陈述很容易验证。关于晶体局部系统的陈述则由 [13, 定理 1.3] 得出。这里我们只需指出，我们使用的是协变的´etale 实现函子。也就是说，根据 $T_{\acute{e}t} : CR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}_p - Loc(\mathcal{X})$，我们指的是函子 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}}) \mapsto (\mathcal{M}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}}]^{\wedge}_p)^{\Phi=id}$，而在 [13] 中，作者取的是该局部系统的对偶。特别地，这里使用的 ´etale 实现函子将 $CR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 映到具有负 Hodge-Tate 权重的晶体局部系统。 □

4.2.1 对偶性

本节的目标是通过对偶性，提供一种从完备 F-晶体过渡到除幂 F-晶体的替代方法。我们仅对局部自由对象作简要说明——或许可以将其推广到所有完备 F-晶体。

考虑以下构造：首先，令 $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in CR^{\wedge,\ \phi}_{[0,\ ]a}(\mathcal{X})$ 为高度 a 的有限局部自由对象。在对偶晶体上，我们有一个滤过 $Fil^a\mathcal{M}^\vee \subset \mathcal{M}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{pris}})$，定义为 $Fil^a\mathcal{M}^\vee = \{f \in \mathcal{M}^\vee : f(\mathcal{N}^a_{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{N}^a_{\mathbb{\Delta}}\}$。对任意 $f \in Fil^a\mathcal{M}^\vee$，我们定义 $F : \mathcal{I}^a\mathcal{M} \to \mathcal{I}^a\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$，使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \phi_{\mathcal{M}} : \ \phi^*\mathcal{N}^a_{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\ \cong\ } & \mathcal{I}^a\mathcal{M} \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle F} & \\ & \mathcal{I}^a\mathcal{O}^{pris} & \end{array}$$

因此，我们可以定义一个 ϕ-线性映射 $\phi_{\mathcal{M}^\vee}: Fil^a\mathcal{M}^\vee \to \mathcal{M}^\vee$，令 $\phi_{\mathcal{M}^\vee}(f) = \mathcal{I}^{-a}F$。容易看出，这定义了一个对象 $(\mathcal{M}^\vee, Fil^a\mathcal{M}^\vee, \phi_{\mathcal{M}^\vee}) \in DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$。
反过来，设 $(\mathcal{M}, \overline{\mathcal{M}}, \phi_{\mathcal{M}}) \in DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 是一个局部自由除法晶体。对于一个截面 $f \in \mathcal{M}^\vee$，我们定义 $\phi_{\mathcal{M}^\vee}(f)$ 为唯一的态射，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{M}} & \hookrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}^{pris} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathcal{M}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{M} & & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{M}^\vee}(f)} & & \mathcal{O}^{pris} \end{array}$$

具体而言，$\phi_{\mathcal{M}^\vee}(f)$ 是态射

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \phi^*\overline{\mathcal{M}} \hookrightarrow \phi^*\mathcal{M} \xrightarrow{f\otimes\phi} \mathcal{O}.$$

我们看到，$(\mathcal{M}^\vee, \phi_{\mathcal{M}^\vee})$ 是一个高度为 r 的完备棱柱 F-晶体。于是有如下结果，其证明留给读者。

命题 4.2.14. 上述对偶函子给出了范畴之间的一个等价关系。

$$\mathbb{D} : CR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\cong} DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X})^{opp}.$$

此外，对偶函子与 ´etale实现函子相容，即典范映射

$$T_{\acute{e}t}(\mathbb{D}(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})) \to T_{\acute{e}t}(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})^\vee$$

是 $\mathcal{X}_K$ 上 $\mathbb{Z}_p$-局部系统的同构。

5 类别 $\mathcal{MF}$ 与棱柱 F-晶体

5.1 从除法棱柱 F-晶体到 $\mathcal{MF}$的函子

现在我们说明如何将一个 $\mathcal{MF}_{[0,a]}$ 类别中的对象与一个 $DivCR^{\wedge,\ \phi}_{[0,a]}$ 中的对象对应起来。回顾一下，对于 $\mathcal{O}_C$ 上的泛棱柱，我们使用记号 $C = \hat{}\overline{K}$ 和 $(A_{\text{inf}} = \mathbb{A}_{\mathcal{O}_C}, \tilde{\xi})$，其中采用约定 $\xi = \phi(\xi)$，这里 ξ 是 Fontaine 的 θ 映射 $\theta: A_{\text{inf}} \to \mathcal{O}_C$ 的核的一个生成元。我们进一步将 $A_{\text{cris}} = A_{\text{inf}}\{\frac{\xi}{p}\}^\wedge$ 记为 ξ 在 A_{inf} 中的 p-进完备 PD 包络，并将 $J_{A_{\text{cris}}}$ 记为由 ξ 的除幂生成的理想。设 B 是 $\mathcal{O}_C$ 上的一个无 p 扭的 qrsp 代数。根据 $\mathbb{A}_B$ 的泛性质，典范投影 $B \to B/p$ 诱导出一个典范映射 $c : \mathbb{A}_B \to \mathbb{A}_{B/p} = \mathbf{A}_{\text{cris}}(B/p)$。由于棱柱上同调与底棱柱的基变换相容，因此该映射恰好是沿着 $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_C} \to \mathbb{A}_B$ 对自然映射 $A_{\text{inf}} = \mathbb{A}_{\mathcal{O}_C} \to \mathbb{A}_{\mathcal{O}_C/p} = A_{\text{cris}}$ 取推出所得的映射。
存在一个满射 $\mathbb{A}_{B/p} = \mathbb{A}_B \hat{\otimes}_{A_{\text{inf}}} A_{\text{cris}} \twoheadrightarrow (\mathbb{A}_B/N^1_{\mathbb{A}_B}) \hat{\otimes} (A_{\text{cris}}/J_{A_{\text{cris}}}) = B$，其核是一个 PD-理想，我们将其记为 $J_B \subset \mathbb{A}_{B/p}$ （这是第 3 节中已考虑过的泛映射）。

以下引理由 $\mathbf{A}_{\text{cris}}(B/p) = \mathbb{A}_B \hat{\otimes}_{A_{\text{inf}}} A_{\text{cris}}$ 这一事实可轻易得出。

引理 5.1.1. 设 $Spf(B) \in \mathcal{X}_{\text{qsyn}}$，其中 B 是一个 qrsp $\mathcal{O}_C$-代数。那么对 $i \le p-1$，有 $J_B^{[i]} = c(N^i_{\mathbb{A}_B}) + Fil^p A_{\text{cris}} \cdot B$。

现在我们来到了主要结果。

定理 5.1.2. 设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 上的光滑 p-进形式概形。设 $a \leq p-2$。那么存在一个自然的范畴等价

$$DivCR^{\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \longleftrightarrow \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathcal{X}). \tag{5.1}$$

证明。根据扎里斯基下降，要描述该函子，只需为仿射 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 定义该函子，并检验其关于 R 的自然性。

因此，假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$，并令 $R \to \tilde{R}$ 为构造 2.2.6 中讨论的准合成覆盖。回顾一下，$DivCR^{\wedge,\phi\,\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathcal{X})$ 自然等价于范畴 $DivCR^{\wedge,\phi\,\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}})^{\max}$。另一方面，回顾命题 3.0.14，我们有一个函子 $\mathrm{D}_{\tilde{R}}$：$\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}} \to \mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,a]}(\mathcal{X})$，它关于 R 是自然的。这里我们再次记 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)} := \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}^{\otimes n+1}/p)$。回顾一下，$\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}^{\otimes n}/p} \cong \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}^{\otimes n}/p)$ 是典范的，并且我们有一个自然映射

$$c : \mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}} \to \mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}/p} = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)},$$

使得 $c(\mathcal{N}^a_{\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}}}) \subset J^{[a]}_{\tilde{R}}$，对于 $a \leq p-1$。

现在，若 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}})$，我们可以构造一个三元组 $(M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}, Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}, \Phi^a_{M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}})$，其中 $M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} = M \hat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)} = M \hat{\otimes}_{A_{\mathrm{inf}}} A_{\mathrm{cris}}$ 以及 $Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} \subset M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}$ 是由.....生成的子模

$$\begin{aligned}
&Im(Fil^a M \otimes \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}) + J^{[p]}_{\tilde{R}^{\otimes n}} \cdot M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} \\
=&Im(Fil^a M \otimes \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}) + J^{[a]}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}} \cdot M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} \\
=&Im(Fil^a M \otimes \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}) + Fil^a A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}.
\end{aligned}$$

$Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}$ 上的弗罗贝尼乌斯定义如下：首先，注意到 $Fil^a M$ 上的弗罗贝尼乌斯可以写作

$$Fil^a M \hookrightarrow M \xrightarrow{\Phi^0} M \xrightarrow{\frac{1}{\xi^a}} M,$$

其中 $\Phi^0 : M \to M$ 定义为 $M \xrightarrow{\cdot \xi^a} Fil^a M \xrightarrow{\Phi^a} M$。这表明 $Fil^a M \otimes A_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\Phi^a \otimes \phi} M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}$ 可经由 $Im(Fil^a M \otimes \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)})$ 分解。

然后，我们注意到，利用 M 的 ξ-挠无性，$Fil^a A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} = M \otimes Fil^a A_{\mathrm{cris}} \subset M \hat{\otimes}_{A_{\mathrm{inf}}} A_{\mathrm{cris}}$。接着，我们将 $M \otimes Fil^a A_{\mathrm{cris}}$ 上的弗罗贝尼乌斯定义为 $\Phi^0 \otimes \overset{\phi}{\xi}{}^a$。容易看出，这样定义的弗罗贝尼乌斯映射在交集上相一致

$$Im(Fil^a M \otimes \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}) \cap Fil^a A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}},$$

因此，我们得到一个良定义的弗罗贝尼乌斯映射 $Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}} \to M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}$。可以看出，该弗罗贝尼乌斯满足条件 3.10 和 3.11。此外，弗罗贝尼乌斯诱导出一个同构

$$\begin{aligned}
&Fil^a M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}/J_{\tilde{R}^{\otimes n+1}} \otimes_\phi \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}/p = \\
&Fil^a M/\mathcal{N}^1_{\mathbb{\Delta}} \otimes_\phi \mathbb{\Delta}^{(n)}_{\tilde{R}}/p \otimes_{\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}}/p} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}/p \cong M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}/pM_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}.
\end{aligned}$$

此外，弗罗贝尼乌斯的定义是规范的（即独立于 ξ），因为可以验证它是由

$$\sum_{r+s=a} \Phi^r_M \otimes \phi^s : \bigoplus_{r+s=a} Fil^r M\{-s\} \otimes J^{[s]}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)})\{s\} \to M_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}}.$$

我们指出， $\mathcal{O}\{1\}$ 在全局上是平凡的（$\mathcal{X}/p$）$_{\mathbb{\Delta}}$，而且 ϕ^s 可规范地识别为除幂 Frobenius $\frac{\phi}{p^s}$: $\mathcal{N}^{s}(\mathcal{X}/p)_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{O}_{(\mathcal{X}/p)_{\mathbb{\Delta}}}$在 $\mathcal{I}_{\mathcal{X}_{\mathrm{cris}}}$上的限制，其取值于 $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(n)}$。

现在，如果 $(M, Fil^a M, \Phi_M^a) \in DivCR^{\wedge,\ \phi\,\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]}(\mathbb{\Delta}_{\tilde{R}})$，我们还可以对完整滤过 $Fil^i M$ 进行基变换，方法是令 $Fil^i M_{\mathbb{A}} := Im(Fil^i M \hat{\otimes} \mathrm{A}) + Fil^p A_{cris} \cdot M_{\mathbb{A}}$。我们断言，这些完整滤过是相容的。

引理 5.1.3. 我们有 $Fil^i M_{\mathbb{A}} = \{m \in M_{\mathbb{A}}:\ J^{[i-a]}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}} m \subset Fil^a M_{\mathbb{A}}\} = Fil^i_{M_{\mathbb{A}}, Fil^a M_{\mathbb{A}}}$对于$i \leq a$。

证明。首先注意到映射 $M \to M_{\mathbb{A}}$ 是单射，并且对于任意 $m \in M_{\mathbb{A}}$，我们可以将其写为 $m = x + y$，其中 $x \in M$ 和 $y \in Fil^p A_{cris} \cdot M_{\mathbb{A}}$。现在假设对于所有 $u \in J^{[i-a]}_{\tilde{R}^{\otimes n+1}}$，均有 $um \in Fil^a M_{\mathbb{A}}$。令 $u \in N^{i-a}_{\mathbb{\Delta}}$。模去 $Fil^p A_{cris}$ 后，我们得到 ux 模 $N^p_{\mathbb{\Delta}} \cdot M$ 同余于 $Fil^a M$ 中的一个元素。但由于 $N^p_{\mathbb{\Delta}} \cdot M \subset Fil^a M$，这意味着 $ux \in Fil^a M$，因此 $x \in Fil^i M$。 □

令 $p_1, p_2 \colon \mathbb{\Delta}_{\tilde{R}} \to \mathbb{\Delta}^{(1)}_{\tilde{R}}$ 为由包含映射 $\tilde{R} \to \tilde{R} \hat{\otimes} \tilde{R}$诱导的映射。利用前一个引理可知，$p_j^*(M, Fil^a M, \Phi_M^a) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(1)}_{\tilde{R}})$ 映射到 $(p_j^{pd})^*(M_{\mathbb{A}}, Fil^a M_{\mathbb{A}}, \Phi^a_{M_{\mathbb{A}}}) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathrm{A}^{(1)})$，其中我们用 p_1^{pd}（分别用 p_2^{pd}）表示映射 $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{(1)}$，该映射由将 $\tilde{R}$ 映到 $\tilde{R} \hat{\otimes} \tilde{R}$ 的第一个（分别是第二个）因子诱导。

另请注意，根据注 4.2.10，对于任意对象 $(M, Fil^a M, \phi^a_M, \epsilon) \in DivCR^{\wedge,\ \phi\,\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{R_\infty})$，下降数据 ϵ 总是保持完整的乘积滤过。因此，引理 5.1.3 表明，这对于 A_{cris} 上诱导的对象也成立。

由此，我们得到一个典范函子

$$DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}) \to \mathcal{MF}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)})$$

它限制为一个典范函子。

$$DivCR^{\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{\tilde{R}}) \to \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}}.$$

将此函子限制到具有极大滤过的对象上，并与函子 $\mathrm{D}_{\tilde{R}}$: $\mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\tilde{R}/p)^{(\bullet)}) \to \mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathcal{X})$（见命题 3.0.14）复合，便得到所需的函子

$$DivCR^{\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathcal{X}) \to \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,a]}(\mathcal{X}).$$

此构造关于 R 是自然的。这里我们指出，先验地，复合函子只映入 $\mathcal{MF}^{big}_{[0,\ a]}(\mathcal{X})$。然而，注意到对于挠无关的棱镜除法 F-晶体 $(\mathcal{M}, Fil^a \mathcal{M}, \Phi^a)$，对所有 $\mathrm{qrsp} Spf(B) \in \mathcal{X}_{qsyn}$，商 $\mathcal{M}(B)/Fil^a \mathcal{M}(B)$ 都是 p- 挠无关的，因此可知它映入 $\mathcal{MF}^{\mathrm{big}}_{[0,\ a]}(\mathcal{X})$ 的对象，其商也为 p- 挠无关。

现在，我们将在采用下一节的结果作为前提的情况下，给出定理 5.1.2 的证明。假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射的。为了证明函子 5.1 是范畴等价，我们实际上可以使用 R 的任意覆盖。因此，我们不再使用上文考虑的典范覆盖 $R \to R$，而改用完美幺覆盖 $R \to R_\infty$。接着，考虑 $\mathbb{\Delta}^{(\bullet)}_{R_\infty}$ 中的余单纯对象 $\mathcal{X}_{\mathbb{\Delta}}$，它是通过对覆盖 $R \to R_\infty$ 取 Čech 神经而得到的。注意，根据注 4.2.6，在完美化情形下，滤过会自动成为极大的。

现在，基变换函子 $DivCR^{\wedge}{}_{,[0,a]}^{\phi}(\mathbb{\Delta}_{R_\infty}) \to \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p))$，其定义方式与上文所考虑的覆盖 R 相同，根据推论 5.2.6 是一个范畴等价。此外，对于 $i>0$，根据命题 5.2.3，基变换函子 $DivCR^{\wedge}{}_{,[0,a]}^{\phi}(\mathbb{\Delta}_{R_\infty}^{(i)}) \to \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(i)})$ 是全忠实的。结合这两条结论可得，$DivCR^{\wedge}{}_{,[0,a]}^{\phi}(\mathbb{\Delta}_{R_\infty}^{(\bullet)}) \to \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})$ 是一个范畴等价。这里再次指出，根据注 4.2.10，对于任意对象 $(M, Fil^a M, \phi_M^a, \epsilon) \in DivCR^{\wedge}{}_{[0,\ ]}^{\phi\ \mathrm{tor-free}}$, a $(\mathbb{\Delta}_{R_\infty}^{(\bullet)})$，下降数据 ϵ 总是保持整个乘积滤过不变。因此，我们看到，这对于 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})$ 中的任意对象也自动成立，即我们有 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)}) = \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})^{\mathrm{full}}$。

因此，我们得到一个函子的交换图

$$\begin{tikzcd}
DivCR_{[0,\mathrm{a}]}^{\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}}(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}^{\mathrm{tor-free}}(\mathcal{X}) \arrow[d, "\cong"] \\
DivCR_{[0,\mathrm{a}]}^{\wedge,\phi,\mathrm{tor-free}}(\mathbb{\Delta}_{R_\infty}^{(\bullet)}) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}^{\mathrm{tor-free}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_\infty/p)^{(\bullet)})
\end{tikzcd}$$

其中，上方的函子是函子 5.1，下方的函子是沿 $\mathbb{\Delta}_{R_\infty^{\otimes n}} \to \mathbb{\Delta}_{R_\infty^{\otimes n}/p}$ 的基变换函子。右侧的垂直函子是来自命题 3.0.16 的范畴等价。

证明至此完成。 □

现在我们定义 ´etale 实现函子

$$T_{\acute{e}t}^{\mathcal{MF}} : \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}) \to Loc_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}_K)$$

作为函子 $\mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathcal{X}) \to DivCR^{\wedge}{}_{,[0,a]}^{\phi}(\mathcal{X})$ 与 ´etale 实现函子 $T_{\acute{e}t}$：$DivCR^{\wedge}{}_{,[0,a]}^{\phi}(\mathcal{X}) \to Loc_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}_K)$ 的复合，适用于除幂棱柱 Frobenius 晶体。利用 [18] 和 [13] 的结果（特别是参见 [13, 定理 1.3]），我们进而得到以下关于 p-挠无对象的结果。

定理 5.1.4。设 $\mathcal{X}$是 $\mathcal{O}_K$上的光滑 p-进形式概形。设 $a \le p-2$。则 ´étale 实现函子

$$T_{\acute{e}t}^{\mathcal{MF}} : \mathcal{MF}_{[0,\mathrm{a}]}^{\mathrm{tor-free}}(\mathcal{X}) \to Loc_{\mathbb{Z}_p,[0,a]}^{crys,\mathrm{tor-free}}(\mathcal{X}_K)$$

是一个范畴等价。

5.2 比较 A_{inf} 上的三元组与 A_{cris}上的三元组

本节包含证明函子 5.1 是范畴等价所需的主要技术结果。为此，我们需要比较 A_{inf} 上的对象与 A_{cris}上的对象。文献中已有类似结果（例如见 [7], [20], [12], [10], [16], [27]），不过其一般性尚不足以满足我们的需要。然而，证明往往与上述工作类似，并受其启发。本节中，我们始终用 B 表示一个 qrsp p-无挠 $\mathcal{O}_C$-代数。回顾上一节，我们有一个典范映射 c：$\mathbb{\Delta}_B \to \mathbb{\Delta}_{B/p} = \mathbb{\Delta}_B \hat{\otimes}_{A_{\mathrm{inf}}} A_{\mathrm{cris}} = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(B/p)$，并考虑上一节构造的除幂 Frobenius 模的基变换函子。对于 $\mathbb{\Delta}_B$上的一个三元组 $(M, Fil^a M, \Phi_M^a)$，我们将其在基变换函子下的本质像记为 $(M, Fil^a M, \Phi_M^a)_{\mathrm{cris}} = (M_{\mathrm{cris}}, Fil^a M_{\mathrm{cris}}, \Phi_{M_{\mathrm{cris}}}^a)$。我们先处理 p-挠对象的情形。

引理 5.2.1. 沿 $\mathbb{\Delta}_B \to \mathbb{\Delta}_{B/p}$ 作基变换会诱导出一个全忠实函子

$$DivCR^{\wedge,\phi,p-tor}_{[0,a]}(\mathbb{\Delta}_B) \longrightarrow \mathcal{MF}^{p-tor}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathbb{\Delta}_{B/p})$$

被 p 消灭的对象。

证明。模去 p 后，自然映射 $\mathbb{\Delta}_B \to \mathbb{\Delta}_{B/p}$ 可分解为

$$(\mathbb{\Delta}_B)/p \xrightarrow{f} (\mathbb{\Delta}_B)/(p,\xi^p) \xrightarrow{g} A_{\mathrm{cris}}(B/p)/p.$$

我们将证明，沿 f 作基变换是全忠实的，而沿 g 作基变换会诱导出范畴等价。

为简化记号，我们记 $P := (\mathbb{\Delta}_B)/p$ ，并用 σ 表示 P 的绝对 Frobenius。接着，我们赋予环 P/ξ^p 以滤过 F^i_P，该滤过由 Nygaard 滤过的像给出。我们定义范畴 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$，其对象为三元组 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M)$，其中

- M 是一个有限生成的 P/ξ^p-模，且作为 $\mathcal{O}^\flat_C/\xi^p$-模是平坦的。
- $Fil^a M \subset M$ 是一个子模，使得 $F^a_P \cdot M \subset Fil^a M$。
- $\Phi^a_M \colon Fil^a M \to M$ 是一个弗罗贝尼乌斯线性映射，使得 $\phi^*_{P/\xi^p} Fil^a M \xrightarrow{\sim} M$ 是一个同构。

我们还沿着 $P \to P/\xi^p$ 有一个基变换函子。也就是说，如果 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M)$ 是 P 上的三元组，我们定义 $Fil^a(M/\xi^p) = Im(Fil^a M/\xi^p) \to M/\xi^p$。此外，由于 $\xi^a M \subset Fil^a M \text{and} a < p$，我们看到 $\Phi^a_M(\xi^p M) \subset \xi^p M$。由此可知，$\Phi^a_M \otimes \phi \colon Fil^a M \otimes P/\xi^p \to M_{P/\xi^p}$ 在 $Fil^a(M_{P/\xi^p})$ 上分解，这给出了弗罗贝尼乌斯 $\Phi^a_{P/\xi^p} \colon Fil^a(M_{P/\xi^p}) \to M$，并且立即可见，其线性化再次是一个同构。

断言。基变换函子 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P) \to DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$ 是到其本质像上的范畴等价。

我们将构造一个拟逆。该构造类似于 [16, §2]。设 $(M_0, Fil^a M_0, \Phi_0) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$。接着，我们通过归纳定义构造一个射影系统 $(M_n, Fil^a M_n)$:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= Fil^a M_n \otimes_{P,\sigma} P \\ Fil^a M_{n+1} &= ker(M_{n+1} \to M_n \to M_n/Fil^a M_n). \end{aligned}$$

我们归纳地得到

$$M_{n+1}/Fil^a M_{n+1} = M_n/Fil^a M_n = M/Fil^a M \tag{5.2}$$

$$Fil^a M_{n+1}/\xi = Fil^a M_n/\xi \tag{5.3}$$

$$M/\xi^p = M_n/\xi^p. \tag{5.4}$$

由此可得（利用 $\xi \in Rad(P)$），过渡映射是满射的。接着，我们定义 $(M, Fil^a M) := \varprojlim_n (M_n, Fil^a M_n)$。容易验证 $\mathcal{N}^a_P M \subset Fil^a M$。我们还有一个态射

$$P \otimes_\sigma Fil^a M = P \otimes_\sigma (\varprojlim_n Fil^a M_n) \to \varprojlim_n (P \otimes_\sigma Fil^a M_n) = M. \tag{5.5}$$

现在假设 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P)$。接下来我们断言，将上述构造应用于 $(M/\xi^p, Fil^a(M_{P/\xi^p}), \Phi^a_{M/\xi^p})$，即可恢复原来的三元组。这

由条件 (5.4) 得出。

现在，态射 g 是沿态射 $\mathcal{O}_C^\flat/(\xi^p) \to A_{\mathrm{cris}}/p$ 进行基变换得到的；该态射是忠实平坦的，因为 A_{cris}/p 是一个自由的 $\mathcal{O}_C^\flat/\xi^p$-模。沿典范投影 $A_{\mathrm{cris}}/p \to \mathcal{O}_C^\flat/\xi^p$ 进行基变换可得，g 是典范满射 $A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p \xrightarrow{h} (\mathbb{A}_B)/(p,\xi^p)$ 的一个截面。

映射 h和 g诱导出基变换函子。对于三元组 $(M, Fil^a M, \Phi^a) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$，我们定义 $(M_{\mathrm{cris}}, Fil^a M_{\mathrm{cris}}, \Phi^a)$，其中 M_{cris}只是沿 g的基变换，而 $Fil^a M_{\mathrm{cris}} = (Fil^a M) \otimes A_{\mathrm{cris}} + Fil^p A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathrm{cris}}$中的弗罗贝尼乌斯则是由 Φ^a 到 A_{cris} 的基扩张诱导的（在 $Fil^p A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathrm{cris}}$上作用为零）。

另一方面， $h^* : \mathcal{MF}_{[0,a]}(A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p) \to DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$ 的定义与之前讨论的沿 $P \to P/\xi^p$的基变换函子相同。
断言。函子 g^* 和 h^* 互为拟逆。

由于 $h \circ g = id$，很容易看出 $h^* g^*$ 是恒等函子。因此，设 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M) \in \mathcal{MF}_{[0,a]}(A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p)$。注意， Φ^a 经由 $Fil^a M \otimes P/\xi^p$ 分解，且 $A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p$ 上的 Frobenius 分解为 $A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p \xrightarrow{h} P/\xi^p \xrightarrow{\phi} P/\xi^p \xrightarrow{g} A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p$。这表明 $M \cong \phi^*_{A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p} Fil^a M \cong \phi^*_{P/\xi^p} Fil^a(M_{P/\xi^p}) \otimes_g A_{\mathrm{cris}}(R/p)/p \cong g^* h^* M$。可以验证，这也固定了 $Fil^a M$。 □

当 B 是完美化的时，我们可以改进上述结果。

命题 5.2.2. 假设 B 是完美化的。那么函子

$$DivCR^{\wedge,\phi,p-tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B) \longleftrightarrow \mathcal{MF}^{p-tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$$

是范畴等价。此外，它还将其限制为一个等价关系。

$$DivVect^{\wedge,\phi,p-tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B) \longleftrightarrow \mathcal{MF}^{p-tor,lf}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$$

由这些满子范畴中局部自由对象所构成的部分。

证明。为了证明第一个陈述，我们需要说明，在前一个命题的证明中考虑的基变换函子 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P) \to DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$ 现在是一个范畴等价。回顾一下，对于任意三元组 $(M_0, Fil^a M_0, \Phi_0) \in DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P/\xi^p)$，我们可以在 P 上构造一个三元组 $(M, Fil^a M, \Phi^a_M)$，其中 Φ^a_M 由 5.5 给出。现在我们希望证明这个三元组总是属于 $DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(P)$。首先注意到， Φ^a_M 现在是一个同构，因为弗罗贝尼乌斯在 P 上是同构，而 B 是完美化的。因此，我们只需要证明 M 是饱和的；对于 p-挠对象，这仅意味着 ξ-无挠性。为了证明 M 是 ξ-无挠的，我们证明以下结论：对于任意 $n \geq 1$，由过渡映射 $M_{n+1} \to M_n$ 诱导的映射 $M_{n+1}[\xi] \to M_n[\xi]$ 是零映射。具体而言，首先我们将 $Tor_1^P(-, P/\xi)$ 应用于正合序列。

$$0 \to Fil^a M_0 \to M_0 \to Q_0 \to 0,$$

以得到正合列

$$0 \to Tor_1^P(Fil^a M_0, P/\xi) \hookrightarrow (\xi^{p-1}) M_0 \to \ldots,$$

利用 M_0 在 $\mathcal{O}_C^\flat/\xi^p$ 上是平坦的。再利用 $\xi^a M_0 \subset Fil^a M_0$ 和 $a \leq p-2$，我们得到 $Tor_1^P($ $Fil^a M_0, P/\xi) \subset \xi Fil^a M_0$。对忠实平坦的弗罗贝尼乌斯$\phi_P$进行基变换后，得到 $Tor_1^P(M_1,$ $P/\xi^p) \subset \xi^p M_1$。特别地，这也意味着 $M_1[\xi] \subset \xi^p M_1$。这意味着 $Tor_1^P(\xi^p M_1, P/\xi) \to Tor_1^P$ $(M_1, P/\xi)$ 是满射，进而意味着自然映射 $Tor_1^P(M_1, P/\xi) \to Tor_1^P(M_1/\xi^p, P/\xi)$ 是零映射。但后一个映射正是映射 $Tor_1^P(M_1, P/\xi) \to Tor_1^P(M_0, P/\xi)$，它由过渡映射诱导（因为 $M_1/\xi^p = \phi_P^* Fil^a M_0 \otimes P/\xi^p = \phi_{P/\xi^p}^* Fil^a M_0 = M_0$）。对于 $n > 1$，我们现在有交换图

$$\begin{array}{ccc} Tor_1^P(Fil^a M_n, P/\xi) & \hookrightarrow & Tor_1^P(M_n, P/\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Tor_1^P(Fil^a M_{n-1}, P/\xi) & \hookrightarrow & Tor_1^P(M_{n-1}, P/\xi) \end{array}$$

由归纳法，我们可以假设右侧的垂直箭头是零映射。沿着 ϕ_P对左侧垂直映射作基变换，得到 $Tor_1^P(M_{n+1}, P/\xi^p) \to Tor_1^P(M_n, P/\xi^p)$ 是零映射。但由于 ξ-挠元包含于 ξ^p-挠元中，我们看到 $M_{n+1}[\xi] \to M_n[\xi]$ 也是零映射。

对于命题的第二部分，假设 M_0 在 P/ξ^p上有限投射。由 M的 ξ-无挠性可知，对所有 $n \geq 1$，有 $Tor_1^{P/\xi^{p^n}}(M/\xi^{p^n}, P/\xi^p) = 0$。因此，由于 $M/\xi^p = M_0$ 在 P/ξ^p上平坦，局部平坦性判据推出，对于所有 $n \geq 1$，M/ξ^{p^n} 在 P/ξ^{p^n}上有限平坦。由于 M_0 甚至是有限投射的，([26, Tag 0D4B]) 遂推出 $M = \varprojlim_n M/\xi^{p^n}$ 在 P上有限投射。由于 σ是忠实平坦的，我们还得到 $Fil^a M$是有限投射的。

□

命题 5.2.3. 设 B 为拟正则半完美幺 $\mathcal{O}_C$-代数。函子

$$DivCR_{[0,a]}^{\wedge,\phi,tor}(\mathbb{A}_B) \longrightarrow \mathcal{MF}_{[0,a]}^{\mathrm{tor}}(\mathbb{A}_{B/p})$$
$$DivCR_{[0,a]}^{\wedge,\phi}(\mathbb{A}_B) \longrightarrow \mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$$

沿 $\mathbb{A}_B \to \mathbb{A}_{B/p}$ 进行基扩张所诱导的函子是正合且全忠实的。

证明。设

$$0 \to (M', Fil^a M', \Phi_{M'}^a) \to (M, Fil^a M, \Phi_M^a) \to (M'', Fil^a M'', \Phi_{M''}^a) \to 0$$

是 $DivCR_{[0,a]}^{\wedge,\ \phi\ tor\ ,}(\mathbb{A}_B)$ 中的一个正合序列。由于 M'' 是由 p-挠对象逐次扩张得到的，因此我们得到 $Tor_1^{A_{\mathrm{inf}}}(A_{\mathrm{cris}}, M'') = 0$。也就是说，任何被 p 湮灭的对象 N 都是平坦的 $\mathcal{O}_C^\flat$-模，由此我们得到 $Tor_1^{A_{\mathrm{inf}}}(A_{\mathrm{cris}}, N) = 0$，这里利用了 A_{cris} 是 p-无挠的这一事实。因此，该序列

$$0 \to M'_{\mathrm{cris}} \to M_{\mathrm{cris}} \to M''_{\mathrm{cris}} \to 0$$

是正合的。现在，由于 $\mathcal{N}^{\leq a}\mathbb{A}_B M \subset Fil^a M$，我们有 $M/Fil^a M$ 是 ξ^a-挠的。由此可得 $M_{\mathrm{cris}}/Fil^a M_{\mathrm{cris}} = M/Fil^a M$，同样也可得 $M'_{\mathrm{cris}}/Fil^a M'_{\mathrm{cris}} = M'/Fil^a M'$ 和 $M''_{\mathrm{cris}}/Fil^a M''_{\mathrm{cris}} = M''/Fil^a M''$。因此，序列

$$0 \to M'_{\mathrm{cris}}/Fil^a M'_{\mathrm{cris}} \to M_{\mathrm{cris}}/Fil^a M_{\mathrm{cris}} \to M''_{\mathrm{cris}}/Fil^a M''_{\mathrm{cris}} \to 0$$

是正合的，这也由此推出该序列正合。

$$0 \to Fil^a M'_{\mathrm{cris}} \to Fil^a M_{\mathrm{cris}} \to Fil^a M''_{\mathrm{cris}} \to 0.$$

由引理 5.2.1 的滤过论证，即可得到完全忠实性。 □

设 B 是完美化的，且 $n>0$。若 H 是 A_{inf}/p^n-平坦的，则称对象 $(H,Fil^aH,\Phi^a)\in DivCR^{\wedge,\ \phi\,\mathrm{tor}}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B)$ 为 A_{inf}/p^n-平坦。由引理 4.1.12 可知，H/Fil^aH 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的。若 H 是A_{cris}/p^n-平坦的且 H/Fil^aH 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的，则称对象 $(H,Fil^aH,\Phi^a)\in\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathbb{A}_{B/p})$ 为 A_{cris}/p^n-平坦。

构造 5.2.4。以下构造推广了引理 5.2.1 的证明中针对模 p 对象的构造。设 B 是完美化的，并令 $(H,Fil^aH,\Phi^a)\in\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathbb{A}_{B/p})$ 为 A_{cris}/p^k-平坦的。我们希望证明它来自 $\mathbb{A}_B$ 上的一个对象。我们如下构造一个 $\mathbb{A}_B$-线性逆系统:

首先令 $M_{-1}=M_0:=H$ 和 $F^aM_{-1}=F^aM_0=Fil^aH$。对于 $n\geq 1$，随后我们归纳地定义 $M_n:=\phi^*_{\mathbb{A}_B}F^aM_{n-1}$，并将 F^aM_n 定义为下述映射的核

$$M_n=\phi^*_{\mathbb{A}_B}F^aM_{n-1}\to\phi^*_{\mathbb{A}_B}F^aM_0\xrightarrow[Frob]{rel}\phi^*_{\mathbb{A}_{B/p}}F^aM_0\xrightarrow{\Phi^a}M_0\to M_0/F^aM_0,$$

其中，第二个映射正是由 $\mathbb{A}_{B/p}$ 在 $\mathbb{A}_B$ 上的相对 Frobenius 诱导的，而第一个映射是过渡映射 $F^aM_{n-1}\to F^aM_0$ 的弗罗贝尼乌斯拉回。过渡映射 $M_n\to M_{n-1}$ 定义为

$$M_1=\phi^*_{\mathbb{A}_B}F^aM_0\xrightarrow[Frob]{rel}\phi^*_{\mathbb{A}_{B/p}}F^aM_0\xrightarrow{\Phi^a}M_0$$

并且对于 $n>1$，它是沿着 $\phi_{\mathbb{A}_B}$ 对 $F^aM_{n-1}\to F^aM_{n-2}$ 的拉回。于是我们置 $M:=\lim\limits_{\leftarrow n}M_n$，并置 $F^aM:=\lim\limits_{\leftarrow n}F^aM_n$。我们还得到一个映射 $\Phi^a_M:\phi^*_{\mathbb{A}_B}F^aM\to M$。

对于任意 A_{cris}/p^k-平坦的（H,Fil^aH,Φ^a）$\in\mathcal{MF}^{\mathrm{tor}}_{[0,\mathrm{a}]}$（$\mathbb{A}_{B/p}$），我们也将其在 $\mathbb{A}_B$ 上对应的三元组记为 $\mathcal{F}$（（H,Fil^aH,Φ^a））。

断言。1. 三元组 $\mathcal{F}$（（H,Fil^aH,Φ^a））是 $DivCR^{\wedge\text{中的}\ \phi\,\mathrm{tor},}_{[0,a]}$（$\mathbb{A}_B$）中的 A_{inf}/p^k-平坦对象。

2. 存在一个典范同构 $\mathcal{F}$（（H,Fil^aH,Φ^a））$_{\mathrm{cris}}\xrightarrow{\sim}$（$H,Fil^aH,\Phi^a$）。

3. 自然映射

$$\mathcal{F}((H,Fil^aH,\Phi^a))/p^{k-1}\xrightarrow{\cong}\mathcal{F}((H/p^{k-1},Fil^aH/p^{k-1},\Phi^a/p^{k-1}))$$

是一个同构。

该断言将通过对 k 作归纳法来证明。我们首先假设 $k=1$，并证明该构造实际上直接给出了范畴等价

$$G:\mathcal{MF}^{p-tor}_{[0,\mathrm{a}]}(\mathbb{A}_{B/p})\longrightarrow DivCR^{\wedge,\phi,p-tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B),$$

这是此前构造的。具体而言，回顾一下，我们有 $\mathbb{A}_{B/p}/p=\mathbb{A}_B/(p,\xi^p)[\delta_i,i\in\mathbb{N}]/(\delta_i^p)$。随后，函子 G 由将引理 5.2.1 的证明中的构造应用于 P/ξ^p 上的三元组 $(H,Fil^aH,\Phi^a)/Fil^pA_{\mathrm{cris}}$ 而得到。设 $(M'_n,F^aM'_n)$ 为与 $(H,Fil^aH,\Phi^a)/Fil^pA_{\mathrm{cris}}$ 相关联的逆系统。由此容易看出，存在一个逆系统的态射 $(M'_n)_n\to(M_n)_n$，使得所有映射 $M'_n\to M_n$ 都是单射。具体而言，回顾一下，(M'_n) 是通过设定 $M'_0=H/Fil^pA_{\mathrm{cris}}\cdot H$ 和 $F^aM'_0=Fil^aH/Fil^pA_{\mathrm{cris}}\cdot H$ 来定义的，随后递归地定义 $M'_n:=\phi^*_PF^aM'_{n-1}$ 和 $F^aM'_n:=ker(M'_n\to H/Fil^aH)$。此外，我们有 $M_0=M'_0\otimes_{P/\xi^p}P_{\mathrm{cris}}$ 和 $F^aM_0=F^aM'_0\otimes P_{\mathrm{cris}}+Fil^pA_{\mathrm{cris}}\cdot M_0$。然后，我们递归地得到交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} M'_n = \phi_P^* F^a M'_{n-1} & \longrightarrow & \phi_P^* F^a M'_0 & \xrightarrow{\cong} & M'_0 & \longrightarrow & M'_0/F^a M'_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ M_n = \phi_P^* F^a M_{n-1} & \longrightarrow \phi_P^* F^a M_0 \xrightarrow[Frob]{rel} & \phi_{P_{\mathrm{cris}}}^* F^a M_0 & \xrightarrow{\Phi^a} & M_0 & \longrightarrow & M_0/F^a M_0 \end{array}$$

由此可见，映射 $M'_n \to M_n$ 将 $F^a M'_n$ 映入 $F^a M_n$。取逆极限后，我们便得到映射 ι: $(M', F^a M') \to (M, F^a M)$，可以看出它与 Frobenius 映射相容。此外，可以归纳得出，对于所有 $n \geq 1$，$M'_n \to M_n$ 都是单射。因此，由逆极限函子的左正合性可知，映射 $M' \to M$ 也是单射。为了证明它也是满射，我们注意到相对 Frobenius 映射 $\phi_P^* P_{\mathrm{cris}} \to P_{\mathrm{cris}}$ 分解为

$$\phi_P^* P_{\mathrm{cris}} = P/\xi^{p^2}[\delta_i; i \in \mathbb{N}]/(\delta_i^p) \to P/\xi^p \to P_{\mathrm{cris}},$$

其中，第一个映射将所有 δ_i 映为零，并且是到 P/ξ^{p^2}上的典范投影。由此可以归纳得到，M_n 在 M_{n-1} 中的像等于 $\iota(M'_{n-1})$。这表明映射 ι: $(M', F^a M') \to (M, F^a M)$ 是一个同构，从而证明了在 p-挠情形下断言的第 (1) 和 (2) 部分。此外，我们注意到，这也表明（由于 $(M'_n)_n$ 的过渡映射均为满射）逆系统 $(M_n)_n$ 满足 Mittag-Leffler 条件，因此 $R^1 \varprojlim_n M_n = 0$。

现在假设 $k > 1$。如前所述，我们将三元组 $\mathcal{F}((H, Fil^a H, \Phi^a))$ 记作 $(M, F^a M, \Phi_M^a)$。我们首先证明 M 在 $\mathbb{Z}_p/p^k$上是平坦的。由于 H 和 $H/Fil^a H$（因而 $Fil^a H$也）在 $\mathbb{Z}_p/p^k$上是平坦的，归纳可知，对所有 $n \geq 0$，M_n 都是平坦的。因此，对所有 n，我们都有相容的正合序列

$$0 \to M_n^{(1)} \to M_n \to M_n^{(k-1)} \to 0,$$

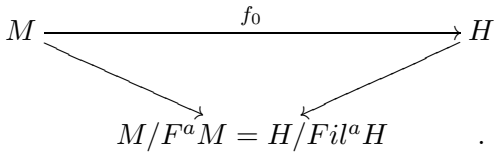
其中我们记 $M_n^{(r)} := M_n/p^r$。我们指出，逆系统的构造显然与模 p^r 约化相容，因此 $M_n^{(r)}$ 正是与 $(H/p^r, Fil^a H/p^r, \Phi^a/p^r)$ 相关联的逆系统。左侧的映射 $M_n^{(1)} \to M_n$ 由乘以 p^{k-1} 给出。特别地，其像可识别为 $p^{k-1}M_n$。显然，我们有 $\varprojlim_n (p^{k-1}M_n) = p^{k-1}(\varprojlim_n M_n)$。对上述相容的$n$

正合序列应用逆极限函子，并利用 $R^1 \varprojlim_n M_n^{(1)} = 0$，可得一个正合序列

$$0 \to p^{k-1}M \to M \to \varprojlim_n M_n^{(k-1)} \to 0.$$

这表明 $M/p^{k-1} = \varprojlim_n M(k)_n = \mathcal{F}((H/p^{k-1}, Fil^a H/p^{k-1}, \Phi^a/p^{k-1}))$。归纳地，$n$我们得到，对所有 $r < k$，均有 $M/p^{k-r} = \mathcal{F}((H/p^{k-r}, Fil^a H/p^{k-r}, \Phi^a/p^{k-r}))$，这就证明了断言的第 (3) 部分。这也进一步表明，核 $p^{k-1}M$ 可识别为映射$M/p \xrightarrow{\cdot p^{k-1}} M$，由此可知 M 在 $\mathbb{Z}_p/p^k$ 上是平坦的。于是，由纤维逐点平坦性判别准则可知，M 在 A_{inf}/p^k 上是平坦的。由于 $(M, F^a M, \Phi^a M)/p = \mathcal{F}((H/p, Fil^a H/p, \Phi^a/p))$ 是 $DivCR^{\wedge, \phi\,\mathrm{tor}}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B)$ 中的一个对象，这足以说明 $(M, F^a M, \Phi^a M)$ 同样确实是 $DivCR^{\wedge, \phi\,\mathrm{tor}}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B)$ 中的一个对象。

我们仍需证明该断言的第 (2) 部分。过渡映射 $f_0 : M \to H$ 诱导出映射 $M_{\mathrm{cris}} \to H$，它将 $F^a M_{\mathrm{cris}} = Im(F^a M \otimes A_{\mathrm{cris}}) + Fil^a A_{\mathrm{cris}} \cdot M_{\mathrm{cris}}$映入 $Fil^a H$，因为 f_0 适合交换图



回顾第 5.1 节， F^aM_{cris}上的弗罗贝尼乌斯定义如下：在 $Im(F^aM\otimes A_{\text{cris}})$ 上，它由 $\Phi^a_M\otimes\phi$诱导，这很容易看出与 Fil^aH上的弗罗贝尼乌斯相容。在 $Fil^aA_{\text{cris}}\cdot M_{\text{cris}} = Fil^aA_{\text{cris}}\otimes_{A_{inf}} M$上，它定义为 $\frac{\phi_{A_{\text{cris}}}()^a}{\phi\,\xi}\otimes\Phi^0_M$。但这也与 Fil^aH 上的弗罗贝尼乌斯相容，因为 Φ^a_H 满足等式 (3.11)。

综上，我们得到一个映射 $g\colon (M,F^aM,\Phi^a_M)_{\text{cris}}\to(H,Fil^aH,\Phi^a_H)$，它属于 $\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$。利用该构造 $\mathcal{F}$ 与模 p约化的相容性，并结合引理 5.2.1，可知 g 模 p是同构。因此，根据中山引理， g 是同构。

命题 5.2.5. 设 B 是一个完美幺环。那么函子

$$DivCR^{\wedge,\phi,tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B)\longleftrightarrow\mathcal{MF}^{tor}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$$

是范畴等价。

证明. 上述构造给出了一个拟逆。 □

由 d´evissage，我们进而也得到 p-挠无对象之间的等价。

推论 5.2.6. 设 B 是一个完美幺环。那么基变换函子

$$DivCR^{\wedge,\phi}_{[0,a]}(\mathbb{A}_B)\longleftrightarrow\mathcal{MF}_{[0,a]}(\mathbb{A}_{B/p})$$

是范畴等价。

5.3 小分歧情形

本节将简要考察分歧次数 e of K 较小的情形，即假设 $ea<p-1$。这里的结果可由先前的一些工作直接推出（尤其是运用 [12] and [16]中的论证），但为方便读者，我们仍将其记录下来。

我们首先证明，在这种情况下，每个完备棱镜 F-晶体都是投射的。 [13, Rmk. 3.37]中也提到了这一点。我们将运用 [16, §2]中的一个论证，给出一个简单直接的证明。

命题 5.3.1. 设 $\mathcal{X}=Spf(R)$ 是小仿射。假设 $ea<p-1$ and let $(\mathcal{M},\Phi_{\mathcal{M}})\in CR^{\wedge}{}^{\phi}_{[0,a]}(\mathcal{X}_{\mathbb{A}})$，使得对于某个 $n\geq 0$， $M=\mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 是 $\mathbb{Z}_p/p^n$-平坦的。那么 M 是 $\mathfrak{S}(R)/p^n$ 上的投射模。特别地， $\mathcal{M}$ 是有限局部自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}/p^n$-模中的一个晶体。

证明。我们回顾 Faltings 的论证。首先注意，我们可以假设 M 是 p-挠的。因此，我们有一个 $\mathfrak{S}(R)/p$ 上的模 M，以及一个单射映射 $\Phi_M\colon\phi^*M\to M$，使得 $Q:=coker(\Phi_M)$ 是 u^{ea}-挠的。在极大理想 $\mathfrak{m}$ 处局部化 $A:=\mathfrak{S}(R)/p$ 后，我们进一步假设 A 是正则局部环。现在，要证明 M 是 A 上的投射模，只需验证对所有 $i>0$，都有 $N=Ext^i_A(M,A)=0$。在 $supp(N)$ 中的一个极小素理想 $\mathfrak{p}$ 处进一步局部化后，我们可以假设 N 有有限长度。此外，由于 A 上的弗罗贝尼乌斯 ϕ 忠实平坦，我们有 $Ext^i(\phi^*M,A)\cong\phi^*Ext^i(M,A)$。对 Ext 取长正合序列，并利用 Q 是 u^{ea}-挠的这一点，可得 $u^{ea}N=u^{ea}\phi^*N$。另一方面，利用 u 是 A 中的正则元，以及 §2], 中 [16, 给出的论证，可得长度满足 $l(u^{ae}\phi^*N)\geq l(N)(p-ae)^{ht(\mathfrak{p})}$。但这样便有 $l(N)\geq l(u^{ea}N)=l(u^{ea}\phi^*N)\geq l(N)(p-ae)^{ht(\mathfrak{p})}$。这就迫使 $N=0$ 成立。 □

推论 5.3.2. 设 $\mathcal{M} \in \mathcal{MF}^{\mathrm{tor-free}}_{[0,\ ]}{}_{\mathrm{a}}(\mathcal{X})$。那么 $\mathcal{M}$ 是有限局部自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{cris}}}$-模范畴中的一个晶体。

我们还将简要讨论挠对象的 ´étale实现函子。记 $\mathbb{Z}_p - Mod^{tor}(\mathcal{X})$ 为 $(\mathcal{X}_K)^{pro\acute{e}t}$ 上的 p-挠 ^$\mathbb{Z}_p$-模范畴。

命题 5.3.3. 假设 $ea < p-1$。设 $\mathcal{X}$ 是一个在 $\mathcal{O}_K$ 上的光滑 p-进形式概形。那么 ´étale 实现函子

$$T_{\acute{e}t} : CR^{\wedge,\phi,tor}_{[0,a]}(\mathcal{X}_{\mathbb{A}}) \to \mathbb{Z}_p - Mod^{tor}(\mathcal{X})$$

是全忠实的。

证明。我们可以假设 $\mathcal{X} = Spf(R)$ 是小仿射的。由 d´evissage，只需证明该命题对 p-挠对象成立。因此，设 $(\mathcal{M}, \Phi_{\mathcal{M}})$、$(\mathcal{N}, \Phi_{\mathcal{N}}) \in CR^{\wedge}_{[0,a]}$、$_{\phi\ p-tor}$、$(\mathcal{X}_{\mathbb{A}})$，并假设存在映射 $f: \mathcal{M}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{A}}}] \to \mathcal{N}[\frac{1}{\mathcal{I}_{\mathbb{A}}}]$，且与 Frobenius 映射相容。我们需要证明 $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$。为此，只需考察在 $\mathfrak{S}(R)$ 处的取值。记 $M = \mathcal{M}(\mathfrak{S}(R))$ 和 $N = \mathcal{N}(\mathfrak{S}(R))$。现在存在一个 $r \geq 0$，使得 $u^r f(M) \subset N$。假设 $f(M) \not\subset N$，并令 r 为极小的。则 $r > 0$，且存在一个 $x \in f(M)$，使得 $u^{r-1}x \notin N$。特别地，$u^r x \notin uN$，由此可得（利用 $u^{ea}N \subset Im(\Phi_N)$）

$$\Phi_N(u^r x) \notin u^{ea+1}N$$

（参见 [12, 引理 3.2.4] 的证明）。
另一方面，令 $x = f(y)$ 为某个 $y \in M$，我们有

$$\Phi_{N[\frac{1}{u}]}(u^r x) = u^{pr} f(\Phi_{M[\frac{1}{u}]}(y)) = u^{(p-1)r} u^r f(\Phi_{M[\frac{1}{u}]}(y)) \in u^{ea+1}N$$

因为 $ea + 1 \leq p - 1$。这就产生了矛盾。因此，我们必须有 $f(M) \subset N$。 □

参考文献

[1] Johannes Ansch¨utz 和 Arthur-C´esar Le Bras。《棱柱 Dieudonn´e 理论》。Forum Math. Pi，11:e2，2023。[2] Pierre Berthelot。《特征 $p > 0$ 概形的晶体上同调》，数学讲义第 407 卷。施普林格出版社，1974。[3] Bhargav Bhatt 和 Jacob Lurie。绝对棱柱上同调，2022。[4] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 和 Peter Scholze。拓扑 Hochschild 同调与积分 p-进 Hodge 理论。Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.，129：199–310，2019。[5] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。棱柱 F-晶体与晶体 Galois 表示。arXiv 预印本，（2106.14735），2021。[6] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。棱柱与棱柱上同调。《数学年刊》，196(3)：1135–1275，2022。[7] Christophe Breuil。半稳定 p-进表示的构造。Ann. Sci.´Ec. Norm. Sup´er.，第 4 辑，31(3)：281–327，1998。

[8] Christophe Breuil。半稳定表示与强可除模。In- vent. math.，136，1999。[9] Christophe Breuil。 p-可除群、有限群与滤过模。《数学年刊》，152：489–549，2000。[10] Bryden Cais 和 Eike Lau。 p-可除群的 Dieudonn´e 晶体与 Wach 模。Proc. Lond. Math. Soc. (3)，114(4)：733–763，2017。[11] Bryden Cais 和 Tong Liu。通过晶体上同调研究 Breuil-Kisin 模。Trans. Amer. Math. Soc.，371(2)：1199–1230，2019。[12] Xavier Caruso 和 Tong Liu。拟半稳定表示。Bull. Soc. Math. France，137(2)：185–223，2009。[13] Heng Du、Tong Liu、Yong Suk Moon 和 Koji Shimizu。完备棱柱 F-晶体与晶体 Z$_p$-局部系统。arXiv 预印本，（2203.03444），2022。[14] Gerd Faltings。晶体上同调与 p 进 Galois 表示。代数分析、几何与数论（J. I. Igusa 编），第 25–80 页，1989。[15] Gerd Faltings。在高度分歧赋值环上的积分晶体上同调。J. Amer. Math. Soc.，12(1)：117–144，1999。[16] Gerd Faltings。半稳定情形下的 MF 范畴。Izv. Math.，80:5:849—-868，2016。[17] Fontaine, Jean-Marc 和 Laffaille, Guy。 p-进表示的构造。Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er.，第 4 辑，15(4)：547–608，1982。[18] Haoyang Guo 和 Emanuel Reinecke。研究晶体局部系统的棱柱方法。arXiv 预印本，（2203.09490），2022。[19] Mark Kisin。晶体表示与 f-晶体。载于 Victor Ginzburg 编，《代数几何与数论：献给 Vladimir Drinfeld 五十岁生日》，第 459–496 页。Birkh¨auser Boston，Boston, MA，2006。[20] Mark Kisin。有限平坦群概形的模空间与模性。《数学年刊》(2)，170(3)：1085–1180，2009。[21] Eike Lau。半完备环与完美化环上的 Dieudonn´e 理论。Compos. Math.，154(9)：1974—-2004，2018。[22] Tong Liu。半稳定表示中的格：Breuil 猜想的证明。Compos. Math.，144(1)：61—-88，2008。[23] Akhil Mathew。刚性几何中几乎完美复形的忠实平坦下降。J. Pure Appl. Algebra，226(5)，2022。[24]Arthur Ogus。F-晶体、Griffiths横截性与 Hodge 分解。Ast´erisque，221：196 页，1994。[25] Atsushi Shiho。局部 Ogus-Vologodsky 对应推广札记。J. Math. Sci. Univ. Tokyo，22：793—-875，2015。

[26] Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu, 2018年。[27] Takeshi Tsuji。《结晶 Z$_p$-表示与带有 Frobe- nius 的 A_{inf}-表示》。载于《 p-进 Hodge 理论》，Simons Symp.，第 161–319 页。Springer，Cham， [2020] ©2020。法兰克福歌德大学数学研究所，60325 Frankfurt am Main，德国
wuerthen@math.uni-frankfurt.de