arXiv:2305.06083v1 [math.QA] 10 May 2023

小拟量子群的表示

HUA SUN、HUI-XIANG CHEN 和 YINHUO ZHA NG

Abstract. 本文研究小型~量子群 $\overline{U}_q$ 和小拟量子群 U_q的表示论，其中 q 是一个本原 n次单位根，且 $n > 2$ 为奇数。本文描述并分类了所有有限维不可分解的$\sim U_q$-模。此外，给出了 U_q-模张量积的分解规则~。最后，我们描述了投射类环 $r_p(U_q)$ 和格林环 $r(U_q)$的结构。我们证明 $r(\overline{U}_q)$同构于 $r(U_q)$的一个子环，并且稳定格林环$\sim r_{st}(U_q)$与 $r_{st}(\overline{U}_q)$同构。

1. 引言

近年来，低秩融合范畴的分类取得了突破性进展。例如，Ostrik 对秩二融合范畴进行了分类，见 [16], ，并对秩三刚性融合范畴进行了分类，见 [17]。Rowell、Strong 和 Wang 对秩小于 4 的酉模范畴进行了分类，见 [18]。在 [4], 中，Chen 和 Zhang 证明，一个有限张量范畴 $\mathcal{C}$ （不一定是刚性的）由其结构不变量数据唯一确定，即 $(r(\mathcal{C})\ A(\mathcal{C})\ \phi, a_{i,j,l})$，其中，$r(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的格林环， $A(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的 Auslander 代数， ϕ 是一个代数映射，它将 $A(\mathcal{C}) \otimes_{\Bbbk} A(\mathcal{C})$ 映射到与 $\mathcal{C}$ 相关联的代数 $M(\mathcal{C})$，而 $a_{i,j,l}$ 是一族起结合子作用的“可逆”矩阵。因此，固定秩的有限张量范畴（不一定是刚性的）的分类，理论上可以通过对上述结构不变量数据进行分类来实现。然而，在实践中，对所有不变量数据进行分类相当困难，尤其是结合子，因为它们同时依赖于格林环和 Auslander 代数。因此，我们不禁要问，能否从一个有限张量范畴出发，确定所有具有相同格林环或相同 Auslander 代数的有限张量范畴。在这种情况下，固定秩的融合范畴或半单范畴的分类，就是对具有相同 Auslander 代数的范畴进行分类。从 Hopf 代数到拟 Hopf 代数的 3-余循环扭曲研究，使得将 Hopf 代数的表示范畴变形为一个与之非张量等价、但具有相同格林环的拟 Hopf 代数的表示范畴成为可能，参见 [11, 例 2.38] 和 [15, 引理 51]。事实上，这一过程是通过 3- 余循环改变 Hopf 代数表示范畴的结合子，同时保持格林环和 Auslander 代数不变。关于这一现象的另一个不同例子来自

*Key words and phrases.*准量子群、不可分解模、张量积、格林环。
2010 *Mathematics Subject Classification.* 16G30, 16T99.

来自群代数 $\Bbbk Q_8$ 和 $\Bbbk D_8$，且未进行 3-余循环扭曲。这两个群代数的表示范畴并不同构于张量等价，但它们具有相同的格林环和相同的 Auslander 代数（在代数闭域上）。受这些例子的启发，我们考察拟 Hopf 代数的其他构造方式。在 [22] 中，作者利用 Andruskiewitch-Schneider 的 Hopf 代数构造了一类有限维拟 Hopf 代数，并发现了小量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的一个拟版本 $\widetilde{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$，称为小拟量子群。由于这个小拟量子群并非由小量子群的直接扭曲得到，我们不禁想知道它们是否具有相同的格林环。因此，我们研究了小量子群 $\overline{U}_q := u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示论，以及当 $|q| > 2$ 为奇数时，小拟量子群 $U_q := \widetilde{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示论。结果表明，这两者并不具有相同的格林环，但具有相同的稳定格林环。

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们首先回顾一些概念、$\widetilde{\ }$、$\overline{U}_q$ 和 U_q的结构。然后，我们给出 $\widetilde{U}_q$的一组中心正交幂等元$\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$，使得 $\sum_{i=0}^{n-1} e_i = 1$。因此，$\widetilde{U}_q$分解为代数 $U_q e_i$的一个$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$直积，即 $U_q = U_q e_0 \times U_q e_1 \times \cdots \times U_q e_{n-1}$。第3节中，我们首先描述有限维不可分解的 $\overline{U}_q$-模。然后，我们找出 $0 \leqslant i \leqslant n$ 下 $U_q e_i$ 上的所有不可分解模$\widetilde{\ }$，从而对 U_q-模中的不可分解模$\widetilde{\ }$进行分类。第 4 节中，我们研究有限维不可分解 U_q-模的张量积$\widetilde{\ }$，并给出所有这类张量积模的分解规则。我们证明，格林环 $r(\overline{U}_q)$同构于格林环 $r(U_q)$的一个子环$\widetilde{\ }$，且稳定格林环$\sim r_{st}(U_q)$与 $r_{st}(\overline{U}_q)$同构。第 5 节中，我们分别描述 $r(\overline{U}_q)$和 $r(U_q)$这两个格林环，以及投射类环 $r_p(U_q)$的结构。我们证明，$r_p(U_q)$由 $2n+1$ 个满足某些关系的元素生成$\widetilde{\ }$，而 $r(\overline{U}_q)$和 $r(U_q)$则分别由无穷多个满足某些关系的元素生成。

2. 预备知识

在全文中，我们始终假设底域 $\Bbbk$ 是特征为 char($\Bbbk$)=0 的代数闭域。除非另有说明，所有代数和 Hopf 代数均定义在 $\Bbbk$ 上；所有模均为有限维左模；dim 和 $\otimes$ 分别表示 $\dim_{\Bbbk}$ 和 $\otimes_{\Bbbk}$。关于表示论和 Hopf 代数的基本概念及记号，请参阅 [1, 13, 14]。特别地，对于 Hopf 代数，我们将分别用 ε、Δ 和 S 表示余单位、余乘法和反么。令 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbb{Z}^+$ 表示全体正整数的集合，并令 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示一个整数 n。对于任意实数 t，令 $[t]$ 表示 t 的整数部分，即 $[t]$ 是满足 $[t] \leqslant t$ 的最大整数。

设 $0 \neq q \in \Bbbk$。对于任意非负整数 n，定义 $(n)_q$，其中 $(0)_q = 0$，且当 $n > 0$ 时，$(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$。注意，当 $q = 1$ 时，$(n)_q = n$，并且

$$(n)_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

当 $q \neq 1$ 时。

2.1. 格林环与稳定格林环。

对于代数 A，我们用 Mod$A$ 表示有限维 A-模的范畴。对于任意 $M \in \text{Mod}A$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}$ 满足 $n \geqslant 0$， nM 表示 n 个 M 的直和。因此，如果 $n = 0$，则 $nM = 0$。令 $P(M)$ 表示 M 的投射覆盖。

Hopf 代数 H 的格林环 $r(H)$定义为由 Mod$H$ 中 V 的同构类 $[V]$ 生成的阿贝尔群，并模去关系$[U \oplus V] = [U] + [V]$, $U, V \in \text{Mod}H$。 $r(H)$的乘法由 $[U][V] = [U \otimes V]$决定，即 H-模的张量积。于是， $r(H)$是一个以 $[\Bbbk]$为单位元的结合环。 H 的投射类环 $r_p(H)$定义为由投射模和单模生成的 $r(H)$的子环（参见 [3]）。注意， $r(H)$是一个自由阿贝尔群，其基为 $\mathbb{Z}\text{Ind}(H)\}$，其中 Ind$(H)$表示 Mod$H$ 中不可分解对象所构成的范畴。

回顾一下，稳定模范畴 Mod$H$ 是 Mod$H$ 关于所有经由投射模分解的态射所构成的商范畴。该范畴是三角范畴，其幺半结构由 Mod$H$ 的幺半结构诱导而来。稳定模范畴 Mod$H$ 的格林环记为 $r_{st}(H)$，称为 H 的稳定格林环。

2.2. 小量子群 $\overline{U}_q$。设 $q \in \Bbbk$，其中 $q \neq \pm 1$。李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的量子包络代数 $U_q = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 作为一个代数，由 E、 F、 K 和 K^{-1} 生成，并满足以下关系：

$$KEK^{-1} = q^2E,\ KFK^{-1} = q^{-2}F,\ [E,F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}},\ KK^{-1} = K^{-1}K = 1.$$

U_q 是一个 Hopf 代数，其余代数结构和反么由以下公式给出。

$$\triangle(K) = K \otimes K,\ \triangle(E) = E \otimes K + 1 \otimes E,\ \triangle(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F,$$
$$\varepsilon(K) = 1,\ \varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0,\ S(K) = K^{-1},\ S(E) = -EK^{-1},\ S(F) = -KF.$$

注意， K 和 K^{-1} 是群状元，而 E、 F 是斜本原元。

现在，设 $q \in \Bbbk$ 为一个阶数为 $|q| > 2$ 的单位根。若 $|q|$ 为奇数，则令 $n = |q|$；若 $|q|$ 为偶数，则令 $n = \frac{|q|}{2}$。于是 q^2 是一个本原 n^{th} 次单位根。设 I 为由 E^n、 F^n 和 $K^n - 1$ 在 U_q 中生成的理想。则 I 是 U_q 的一个霍普夫理想，因此可以得到一个商霍普夫代数$\overline{U}_q = U_q/I$，称为小量子群。有关详细内容，可参阅 [13]。当 $|q| = 2n$ 时，由 E^n、 F^n 和 $K^{2n} - 1$ 在 U_q 中生成的理想 I' 也是 U_q 的一个霍普夫理想，因此可以构造另一个 $\widehat{}$ 商霍普夫代数 $U_q = U_q/I'$。在这种情况下，$\overline{U}_q$ 是 $\frown U_q$ 的一个商霍普夫代数。因此，范畴 Mod$\overline{U}_q$ 可以视为范畴 ModU_q 的一个幺半满子范畴 $\widehat{}$，且格林环 $r(\overline{U}_q)$ 是格林环 $\frown$ $\frown r(U_q)$ 的一个子环。有限维不可分解 U_q-模已在 [19] 和 $\widehat{}$ 中分类，这些模的分解规则则在 [12] 中给出。格林环 $r(U_q)$ 已在 [20] 中计算。根据 [12]， $r(U_q)$ 不是一个交换环。然而，范畴 Mod$\overline{U}_q$ 是辫范畴，因此格林环 $r(\overline{U}_q)$ 是交换的。

$\widetilde{}$2.3. 小拟量子群 U_q。设 $q \in \Bbbk$，其中 $q \neq \pm 1$，并设 $U_q = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 为李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的量子包络代数，其定义如上一节所述。

小节。设 $n > 2$ 和 d 为两个正奇整数。设 $m = nd$ 和$G = \mathbb{Z}_m = \langle K\rangle$ 为由 K生成的 m 阶循环群。在 $\Bbbk$ 中固定一个本原 m^{th} 次单位根 ξ_m。设 $\mathfrak{m} = m^2$，并设 $\xi_{\mathbf{m}}$ 为一个本原 $\mathfrak{m}^{th}$ 次单位根，使得 $\xi_{\mathbf{m}}^m = \xi_m$。

接下来，令 $q = \xi_m^d$。那么 q 是一个本原 n^{th} 单位根。令 $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{\mathbf{m}} = \langle \mathbf{K}\rangle$和 $K = \mathbf{K}^m$。令 $h_1 = h_2 = \mathbf{K}^m \in \mathbb{G}$, $\chi_1(\mathbf{K}) = \xi_{\mathbf{m}}^{2d} \in \hat{\mathbb{G}}$，以及 $\chi_2(\mathbf{K}) = \xi_{\mathbf{m}}^{-2d} \in \hat{\mathbb{G}}$，其中 $\mathbb{G}$ 是 $\mathbb{G}$的特征标群。令 $W = \{kn|0 \leqslant k < d\}$。根据 [22, 定义 5.1], ，对于任意固定的 $c \in W$ 和 $\lambda = \frac{1}{q^{-1}-q} \in \Bbbk$，可以构造一个拟霍普夫代数，称为小拟量子群，记为 U_q。此外，根据 [22, 命题 5.2], ， U_q 的霍普夫代数结构如下所示。

对于固定的 $c \in W$，分别定义函数 Φ_1、Φ_2： $G \times G \to \Bbbk^*$、 Υ、$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$： $G \to \Bbbk^*$ 和 ϕ_c： $G \times G \times G \to \Bbbk^*$，定义如下:

$$\Phi_1(K^s, K^r) = \xi_{\mathbf{m}}^{cr\varphi_{11}(K^s)}, \quad \Phi_2(K^s, K^r) = \xi_{\mathbf{m}}^{cr\varphi_{21}(K^s)}, \quad \Upsilon(K^s) = \xi_{\mathbf{m}}^{-csm},$$
$$\mathbf{F}_1(K^s) = \xi_{\mathbf{m}}^{-c(s-2d)\varphi_{11}(K^s)}, \quad \mathbf{F}_2(K^s) = \xi_{\mathbf{m}}^{-c(s+2d)\varphi_{21}(K^s)},$$
$$\phi_c(K^s, K^t, K^r) = \xi_m^{cr[\frac{s+t}{m}]}.$$

其中 $0 \leqslant s$、t、$r < m$、$\varphi_{11}(K^{\overline{s)} = (}s-2d) - (s-2d)$，$\overline{\varphi_{21}(K^s)} = (s+2d) - (s+2d)$，并且 $(s \pm 2d)$ 是 $(s \pm 2d)$ 除以 m 所得的余数。

对于任意满足 $0 \leqslant t < m$ 的 $g = K^t \in G$，定义一个特征标 χ_g： $G \to \Bbbk^*$，其定义为

$$\chi_g(K^r) = \xi_m^{tr}, \ 0 \leqslant r < m,$$

并令 $1_g = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} \chi_g(h)h \in \Bbbk G$。令 I 为由 E^n、F^n 和 $K^{dn} - 1$ 生成的 U_q 的理想，并令 $\widetilde{U}_q := U_q/I$ 为相应的商代数。则 $\Bbbk G \subset \widetilde{U}_q$。容易看出，$\dim(\widetilde{U}_q) = dn^3$。可以验证， $\widetilde{U}_q = U_q/I$ 是一个拟 Hopf 代数，其余乘法和余单位由以下方式给出。

$$\begin{aligned}
&\Delta(E) = \textstyle\sum_{f,g\in G} \Phi_1(f,g)E1_f \otimes 1_g + K \otimes E, && \varepsilon(E) = 0,\\
&\Delta(F) = \textstyle\sum_{f,g\in G} \Phi_2(f,g)\chi_g(K)F1_f \otimes 1_g + 1 \otimes F, && \varepsilon(F) = 0,\\
&\Delta(K) = K \otimes K, && \varepsilon(K) = 1.
\end{aligned}$$

反么（$S, \alpha, \mathbf{1}$）由 $\alpha = \sum_{g\in G} \Upsilon(g)1_g$ 给出，且

$$S(F) = \chi^{-1}(K)\textstyle\sum_{g\in G} \chi_g(K)\mathbf{F}_2(g)F1_g,\ S(E) = \sum_{g\in G} \mathbf{F}_1(g)E1_g,\ S(K) = K^{-1}.$$

此外， U_q 的结合子由下式给出

$$\Phi_c = \Sigma_{f,g,h\in G}\phi_c(f,g,h)(1_f \otimes 1_g \otimes 1_h).$$

除非另有说明，全文假设 $c = d = n > 2$ 为奇数，并令 $H = \widetilde{U}_q$ 为上述小拟量子群。则 $m = n^2$。令 $\mathfrak{q} = \xi_{m^2}$ 于是 $\mathfrak{q}$ 是一个本原 m^{th} 次单位根，且 $q = \mathfrak{q}^n$。

对于任意 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，令 $e_i = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} q^{ti}K^{tn}$.。容易验证，$\{e_i|0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ 构成一组正交中心幂等元，并且 $\sum_{i=0}^{n-1} e_i = 1$。因此，作为代数，有 $H \cong He_0 \times He_1 \times \cdots \times He_{n-1}$。令 $E_i := Ee_i$， $F_i := Fe_i$， $K_i := Ke_i$ 属于 He_i， $0 \leqslant i \leqslant n$。于是我们得到如下引理。

引理 2.1. 对于任意 $0 \leqslant i \leqslant n-1$， He_i由 E_i、 F_i、 K_i 作为代数生成，并满足以下关系。

$$K_iE_iK_i^{-1} = q^2E_i,\ K_iF_iK_i^{-1} = q^{-2}F_i,\ [E_i, F_i] = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$
$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = e_i,\ E_i^n = F_i^n = 0, K_i^n = q^{n-i}e_i,$$

其中 e_i 是 He_i的单位元。

证明。由于 H 由 E、 F 作为代数生成， K由 He_i 、E_i、 F_i生成。直接计算可知，引理中的关系在K_i中成立。因此，dim(He_i) He_i。由于 $\leqslant n^3$作为代数，且由 dim($H \cong He_0 \times He_1 \times \cdots \times He_{n-1}$) H可得 dim($= n^4$) He_i对所有 $= n^3$ 成立。因此，引理得证。 $0 \leqslant i \leqslant n-1$

引理 2.2. 设 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant r \leqslant n-1$。那么

$$F_iE_i^r = E_i^rF_i + E_i^{r-1}(\frac{1-q^{-2r}}{(1-q^{-2})(q-q^{-1})}K_i^{-1} - \frac{1-q^{2r}}{(1-q^2)(q-q^{-1})}K_i).$$

因此，

$$FE^r = E^rF + E^{r-1}(\frac{1-q^{-2r}}{(1-q^{-2})(q-q^{-1})}K^{-1} - \frac{1-q^{2r}}{(1-q^2)(q-q^{-1})}K).$$

证明。由引理 2.1 以及对 r 的归纳可得。 □

记 Ind$H$ 为不可分解 H-模的范畴。由于 $H \cong He_0 \times He_1 \times \cdots \times He_{n-1}$ 作为代数，ModHe_i 可以自然地视为 Mod$H$ 的一个满子范畴。因此，不可分解 He_i-模的范畴 IndHe_i 是 Ind$H$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 的一个子范畴。由此，我们得到以下推论。

推论 2.3. 设 M 是一个 H-模。

(1) $M \in$ Ind$H$ 当且仅当对于某个 $0 \leqslant i \leqslant n-1$， $M \in$ IndHe_i。(2) M 是一个简单的 H-模，当且仅当对于某个$0 \leqslant i \leqslant n-1$， M 是一个简单的 He_i-模。

3. 不可分解 H-模

本节中，我们研究 H上的所有不可分解模。对于一个 H-模M 和 $x \in M$，令 $\langle x \rangle$ 表示由 x生成的 M 的子模。

由于 $|q| = n$ 是奇数，由引理 2.1可知，$He_0 \cong \overline{U}_q$ 作为代数。具体而言，存在一个代数同构 ψ ，从 He_0 到$\overline{U}_q$ ，其定义如下:

$$\psi(K_0) = K,\ \psi(E_0) = E,\ \psi(F_0) = F,\ \psi(K_0^{-1}) = K^{-1}.$$

因此，根据上述讨论，Mod$\overline{U}_q$ 可以视为 Mod$H$ 的一个子范畴。因此，每个 $\overline{U}_q$-模都是一个 H-模。

3.1. 不可分解的 $\overline{U}_q$-模。在本小节中，我们研究不可分解的 $\overline{U}_q$-模。在本小节中，始终假设 $n > 2$ 为奇数，且 $q \in \Bbbk$ 为单位根，满足 $|q| = n$ 或 $|q| = 2n$。因此， q^2 是一个本原的 n^{th}次单位根。由此，可以构造一个 Hopf 代数 $H_n(1, q^2)$（参见 [5, 6]）。根据 [2, 命题 4.5],，存在一个 Hopf 代数满同态 ϕ: $H_n(1, q^2) \to \overline{U}_q$，其由以下条件确定。

$$\phi(a) = E, \phi(b) = K, \phi(c) = K, \phi(d) = q^{-2}(q - q^{-1})FK$$

其中，$\mathrm{Ker}(\phi) = (\Bbbk C)^+ H_n(1, q^2)$，其中 C 是 $H_n(1, q^2)$中的中心群状元构成的群。因此， $H_n(1, q^2)/(\Bbbk C)^+ H_n(1, q^2) \cong \overline{U}_q$。在此同构下，在下文中我们将 $H_n(1, q^2)/(\Bbbk C)^+ H_n(1, q^2)$与 $\overline{U}_q$ 等同。因此，$\mathrm{Mod}\overline{U}_q$ 可视为 $\mathrm{Mod}H_n(1, q^2)$的一个幺半满子范畴。注意， C 是由 bc^{-1}生成的 n 阶循环群。因此，一个 $\overline{U}_q$-模恰好是一个满足 $(b - c)M = 0$ 的 $H_n(1,q^2)$- 模 M。

由 [7], 可以得到 $H_n(1, q^2)$ 上有限维不可分解模的分类，仍用相同符号表示。

从有限维不可分解 $H_n(1, q^2)$-模的结构可以看出，有限维不可分解 $H_n(1, q^2)$-模 M 满足$(b - c)M = 0$，当且仅当其每个简单因子 S 都满足$(b - c)S = 0$；当且仅当 M 存在一个简单因子 S 满足$(b - c)S = 0$。特别地，$H_n(1, q^2)$-模 $V(l, r)$是一个 $\overline{U}_q$-模，当且仅当 $n|2r + l - 1$。因此，我们可以描述所有有限维不可分解 $\overline{U}_q$-模。不可分解模的记号参见 [7] 。令 ∞ 为一个满足 $\infty \notin \Bbbk$ 的符号，并令$\overline{\Bbbk} = \Bbbk \cup \{\infty\}$。

- 单模： $V_l := V(l, \frac{3n}{4} + (-1)^{l-1}\frac{n}{4} - \frac{l-1}{2})$， $1 \leqslant l \leqslant n$。此外， V_n既是投射的，也是单射的。
- 非简单投射模： $P_l := P(V_l) = P(l, \frac{3n}{4} + (-1)^{l-1}\frac{n}{4} - \frac{l-1}{2})$,$1 \leqslant l \leqslant n-1$。此外， P_l 也是 V_l的单射包络。令 $P_n = V_n$在此情形下。
- 弦模：$\Omega^{\pm s}V_l$, $s \geqslant 1$,$1 \leqslant l \leqslant n - 1$。
- 带状模： $M_s(l, \eta) := M_s(l, \frac{3n}{4} + (-1)^{l-1}\frac{n}{4} - \frac{l-1}{2}, \eta)$, $1 \leqslant l \leqslant n - 1$,$s \geq 1$, $\eta \in \overline{\Bbbk}$.

3.2. 简单 H-模。在本小节中，我们研究简单的 H-模。从上一小节可知，存在 n 个简单的 He_0-模 V_l, $1 \leqslant l \leqslant n$。因此，通过从 He_0 到$\overline{U}_q$的代数同构 ψ， V_l 是一个 l维简单的H-模，其标准基为 $\{m_1, m_2, \cdots, m_l\}$，使得 H-模作用由以下内容确定:

$$Em_i = \begin{cases} m_{i+1}, & 1 \leqslant i < l, \\ 0, & i = l, \end{cases} \quad Fm_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \beta_{i-1}(l)m_{i-1}, & 1 < i \leqslant l, \end{cases}$$
$$Km_i = q^{2i-l-1}m_i, \ 1 \leqslant i \leqslant l,$$

其中 $\beta_i(l) = \alpha_{i(l)}\overline{q^{2i-l} - q^{2i-l-2}}$和 $\alpha_i(l) = (i)q^2(1 - q^{2(i-l)})$, $1 \leqslant i \leqslant l - 1$。 V_1是平凡的。

对于任意的 $1 \leqslant t \leqslant n - 1$和 $r \in \mathbb{Z}$，设 $V(t, r)$ 为一个维数为 n、具有 $\Bbbk$-基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的向量空间。那么，直接验证可得 $V(t, r)$ 是

一个具有以下作用的 an H-模:

$$Ev_i=\begin{cases} v_{i+1}, & 1\leqslant i<n,\\ 0, & i=n,\end{cases}\qquad Fv_i=\begin{cases} 0, & i=1,\\ \gamma_{i-1}v_{i-1}, & 2\leqslant i\leqslant n,\end{cases}$$
$$Kv_i=\mathbf{q}^t q^{2(r+i-1)}v_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

其中 $\gamma_j=\frac{1}{q-q^{-1}}(\mathbf{q}^{-t}\frac{q^{-2r}-q^{-2(r+j)}}{1-q^{-2}}-\mathbf{q}^t\frac{q^{2r}-q^{2(r+j)}}{1-q^2})\neq 0$ 对 $1\leqslant j\leqslant n-1$成立。这样的基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 称为 V(t,r) 的标准基。

对于任意 H-模 W，令 $W_F=\{w\in W|Fw=0\}$。若 $W\neq 0$，则 $W_F\neq 0$。事实上，令 $0\neq x\in W$。于是 $F^n x=0$，因此存在正整数 $i\leqslant n$，使得 $F^i x=0$且 $F^{i-1}x\neq 0$。因此，$F^{i-1}x\in W_F$，从而 $W_F\neq 0$。

引理 3.1. 设 $1\leqslant t\leqslant n-1$ 和 $r\in\mathbb{Z}$。则 V(t,r) 是一个简单 H-模。

证明。由 H-模 V(t,r) 的结构可知，V$(t,r)_F=\Bbbk v_1$是一维的。设 W 是V(t,r) 的一个非零 H-子模。则 $W_F\neq 0$ 和$W_F\subseteq$V$(t,r)_F$。因此 $W_F=$V$(t,r)_F=\Bbbk v_1$ 和 $v_1\in W$。这意味着对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有 $v_i\in W$，从而 $W=$V(t,r)。因此，V(t,r) 是一个简单 H-模。□

命题 3.2. 设 $1\leqslant t,t'\leqslant n-1$ 和 $r,r'\in\mathbb{Z}$。则 V(t,r) $\cong$V(t',r') 当且仅当 $t=t'$ 和 $r\equiv r'$（模 n）。

证明。若 $t=t'$ 且 $r\equiv r'$ (模 n)，则 V(t,r) $\cong$ V(t',r') 显然成立。反过来，假设 ϕ：V(t,r) $\to$ V(t',r') 是一个 H-模同构。那么ϕ(V$(t,r)_F$) $=$V$(t',r')_F$。令 $0\neq v\in$V$(t,r)_F$。则 $0\neq\phi(v)\in$V$(t',r')_F$。根据引理 3.1 的证明，$Kv=\mathbf{q}^t q^{2r}v$ 且 $K\phi(v)=\mathbf{q}^{t'}q^{2r'}\phi(v)$。由$\phi(Kv)=K\phi(v)$可得 $\mathbf{q}^t q^{2r}=\mathbf{q}^{t'}q^{2r'}$，这意味着 $t=t'$ 且 $r\equiv r'$ (模 n)。□

命题 3.3. 设 V 是一个简单的 H-模。那么 V 同构于 V_l 或 V(t,r)，其中 $1\leqslant l\leqslant n$、$1\leqslant t\leqslant n-1$ 和 $r\in\mathbb{Z}$ 取适当值。

证明。设 V 是一个简单的 H-模，并令 ϕ: $H\longrightarrow$ End(V) 为相应的代数映射。容易验证 $\phi(K)(V_F)\subseteq V_F$。设 $v_1\in V$ 是 $\phi(K)$ 的一个特征向量。于是存在整数 s，使得 $Kv_1=\mathbf{q}^s v_1$，因为 $K^{n^2}=1$。由于 $E^n=0$，存在整数 l，满足 $1\leqslant l\leqslant n$，使得 $E^{l-1}v_1\neq 0$ 且 $E^l v_1=0$。因此，可以验证 $N=$span $\{v_1,Ev_1,E^2v_1,\cdots,E^{l-1}v_1\}$ 是 V 的一个子模。所以，$V=N$。此外，根据引理 2.2，直接计算可得

$$EE^iv_1=\begin{cases} E^{i+1}v_1, & 0\leqslant i<l-1,\\ 0, & i=l-1,\end{cases}\qquad FE^iv_1=\begin{cases} 0, & i=0,\\ \theta_i E^{i-1}v_1, & 1\leqslant i\leqslant l-1,\end{cases}$$
$$KE^iv_1=\mathbf{q}^s q^{2i}E^iv_1,\ 0\leqslant i\leqslant l-1,$$

其中，对于 $1\leqslant i\leqslant l-1$，$\theta_i=\frac{1}{q-q^{-1}}(\mathbf{q}^{-s}\frac{q^{2i}-1}{q^{2i}}\frac{q^2}{q^2-1}-\mathbf{q}^s\frac{1-q^{2i}}{1-q^2})$。由于 V 是一个 H-模，$EFE^{l-1}v_1-FEE^{l-1}v_1=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}E^{l-1}v_1$。因此，$\theta_{l-1}=\frac{1}{q-q^{-1}}(q^{2(l-1)}\mathbf{q}^s-q^{-2(l-1)}\mathbf{q}^{-s})$，于是

$$\frac{1}{q-q^{-1}}(\mathbf{q}^{-s}\frac{q^{2(l-1)}-1}{q^{2(l-1)}}\frac{q^2}{q^2-1}-\mathbf{q}^s\frac{1-q^{2(l-1)}}{1-q^2})=\frac{1}{q-q^{-1}}(q^{2(l-1)}\mathbf{q}^s-q^{-2(l-1)}\mathbf{q}^{-s}),$$

这等价于 $\mathbf{q}^{2s}(q^{2l}-1) = q^{2-2l}(q^{2l}-1)$. 若 $1 \leqslant l < n$，则 $\mathbf{q}^{2s} = q^{2-2l}$，因此 $s \equiv n(1-l)$（模 n^2）。在这种情况下，可以验证 $V \cong V_l$。现在假设$l = n$ 并令 $s = nk + t$ 满足 $0 \leqslant t \leqslant n-1$。由于 V是简单的，对于所有$1 \leqslant i \leqslant n-1$，都有 $\theta_i \neq 0$；或者等价地，对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，都有 $n^2 \nmid s + n(i-1)$。若 $t = 0$，则对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，都有$n \nmid k + i - 1$；或者等价地，有 $n|k-1$。在这种情况下，可以验证 $V \cong V_n$。若 $t \neq 0$ 且 k 为偶数，则可以验证 $V \cong \mathsf{V}(t, \frac{k}{2})$。若 $t \neq 0$ 且k 为奇数，则可以验证 $V \cong \mathsf{V}(t, \frac{k+n}{2})$。□。

对于任意 $r \in \mathbb{Z}$，我们仍用 r 表示 r 在典范满同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ 下的像。总结上述讨论，可得以下推论。

推论 3.4。集合 $\{V_l, \mathsf{V}(t,r) | 1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant n-1, r \in \mathbb{Z}_n\}$ 是简单 H-模的同构类的一个代表集。

3.3. 不可分解的 H-模。在本小节中，我们研究所有不可分解的 H-模。

根据推论 2.3 和第3.1小节，只需对所有不可分解的 He_i-模 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 进行分类。对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，可以验证 $\{E_i^j F_i^l K_i^t | 0 \leqslant j, l, t \leqslant n-1\}$ 是 He_i 的一个 $\Bbbk$-基。对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$，令

$$T_j^i = \tfrac{1}{n}(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{q}^{((j-1)n+i)k} K_i^k).$$

经过繁琐但常规的计算可知，$\{T_j^i | 1 \leqslant j \leqslant n\}$是 He_i的一组正交幂等元，满足 $\sum_{j=1}^n T_j^i = e_i$。注意到 $He_i T_j^i = HT_j^i$。因此，$He_i = \oplus_{j=1}^n HT_j^i$作为 H-模同构。容易验证，$K_i T_j^i = \mathbf{q}^{(1-j)n-i} T_j^i$且 $K_i^{-1} T_j^i = \mathbf{q}^{i-(1-j)n} T_j^i$。因此，$HT_j^i$具有一组 $\Bbbk$-基 $\{E_i^s F_i^l T_j^i | 0 \leqslant s, l \leqslant n-1\}$。
设 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$。对于 $1 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$，定义 $a_{ks}^{ij} \in \Bbbk$ 为 $a_{kk}^{ij} = 1$，其中$1 \leqslant k \leqslant n$,

$$a_{k1}^{ij} = \frac{q^{2(k-1)}\mathbf{q}^{(1-j)n-i} - q^{2(1-k)}\mathbf{q}^{i-(1-j)n}}{q-q^{-1}} \neq 0 \quad \text{for } 2 \leqslant k \leqslant n,$$

以及 $a_{ks}^{ij} = a_{k1}^{ij} + a_{k-1,\ s-1}^{ij}$ 对于 $2 \leqslant s < k \leqslant n$。容易验证 $a_{ks}^{ij} = a_{k-s+1,\ 1}^{ij} + a_{k-s+2,\ 1}^{ij} + \cdots + a_{k\ ,\ 1}^{ij} \neq 0$。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，定义

$$A_k^{ij} = \textstyle\sum_{p=0}^{k-1} (\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij}) E_i^{k-1-p} F_i^{n-1-p}.$$

引理 3.5. 设 $1 \leqslant i \leqslant n-1$和 $1 \leqslant j, k \leqslant n$。则 $F_i A_k^{ij} T_j^i = 0$。

证明。根据引理 2.2 以及

$$A_k^{ij} = (\textstyle\prod_{t=1}^{k} a_{k,t}^{ij}) F_i^{n-k} + \sum_{p=0}^{k-2} (\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij}) E_i^{k-1-p} F_i^{n-1-p},$$

我们有

$$\begin{aligned}
& F_iA_k^{ij}T_j^i \\
= \ & (\prod_{t=1}^{k} a_{k,t}^{ij})F_i^{n-k+1}T_j^i + \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})F_iE_i^{k-1-p}F_i^{n-1-p}T_j^i \\
= \ & (\prod_{t=1}^{k} a_{k,t}^{ij})F_i^{n-k+1}T_j^i + \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-1-p}F_i^{n-p}T_j^i \\
& + \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-2-p}\tfrac{1-q^{-2(k-1-p)}}{(1-q^{-2})(q-q^{-1})}K_i^{-1}F_i^{n-1-p}T_j^i \\
& - \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-2-p}\tfrac{1-q^{2(k-1-p)}}{(1-q^{2})(q-q^{-1})}K_iF_i^{n-1-p}T_j^i \\
= \ & \sum_{p=1}^{k-1}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-1-p}F_i^{n-p}T_j^i \\
& + \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-2-p}F_i^{n-1-p}\tfrac{(1-q^{2(p+1-k)})q^{2(n-1-p)}\mathbf{q}^{i-(1-j)n}}{(1-q^{-2})(q-q^{-1})}T_j^i \\
& - \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-2-p}F_i^{n-1-p}\tfrac{(1-q^{2(k-1-p)})q^{2(p+1-n)}\mathbf{q}^{(1-j)n-i}}{(1-q^{2})(q-q^{-1})}T_j^i \\
= \ & \sum_{p=1}^{k-1}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij})E_i^{k-1-p}F_i^{n-p}T_j^i + \sum_{p=0}^{k-2}(\prod_{t=0}^{p} a_{k,k-t}^{ij}) \\
& E_i^{k-2-p}F_i^{n-1-p}T_j^i\tfrac{\mathbf{q}^{i-(1-j+2p)n}-\mathbf{q}^{i-(2k-j-1)n}+\mathbf{q}^{(3+2p-j)n-i}-\mathbf{q}^{(1-j+2k)n-i}}{(q^2-1)(q-q^{-1})} \\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式是由以下事实得出的。

$$-a_{k,k-p}^{ij} = \tfrac{\mathbf{q}^{i-(2p-j-1)n}-\mathbf{q}^{i-(2k-j-1)n}+\mathbf{q}^{(2p+1-j)n-i}-\mathbf{q}^{(1-j+2k)n-i}}{(q^2-1)(q-q^{-1})}.$$

□

对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant j$、$k \leqslant n$，可以验证 $K_iA_k^{ij} = q^{2k}A_k^{ij}K_i$。令 $r_{k,j} := \frac{n+2k-j}{2}$（若 $2k-j$ 为奇数），以及 $r_{k,j} := \frac{2k-j}{2}$（若 $2k-j$ 为偶数）。则有如下命题。

命题 3.6。设 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 和 $1 \leqslant j$、$k \leqslant n$。那么 HT_j^i 的 He_i 子模 $\langle A_k^{ij}T_j^i\rangle$ 同构于 $\mathsf{V}(n-i, r_{k,j})$，其中 $r_{k,j}$ 如上所定义。

证明。容易验证，

$$\{A_k^{ij}T_j^i, E_iA_k^{ij}T_j^i, E_i^2A_k^{ij}T_j^i, \cdots, E_i^{n-1}A_k^{ij}T_j^i\}$$

是 $\langle A_k^{ij}T_j^i\rangle$ 的一个 $\Bbbk$-基。此外，根据引理 2.2，$\langle A_k^{ij}T_j^i\rangle$ 上的 He_i-模作用由以下内容确定。

$$K_iE_i^tA_k^{ij}T_j^i = \mathbf{q}^{n-i}q^{2(r_{k,j}+t)}E_i^tA_k^{ij}T_j^i$$

and

$$F_iE_i^tA_k^{ij}T_j^i = \gamma_tE_i^{t-1}A_k^{ij}T_j^i,$$

其中，对于 $0 \leqslant t \leqslant n-1$，有 $\gamma_t = \frac{1}{q-q^{-1}}(\mathbf{q}_{i-n}\frac{q^{-2r_{k,j}}-q^{-2(r_{k,j}+t)}}{1-q^{-2}} - \mathbf{q}_{n-i}q^{2r_{k,j}}\frac{1-q^{2(r_{k,j}+t)}}{1-q^2})$。因此，$\langle A_k^{ij}T_j^i\rangle \cong \mathsf{V}(n-i, r_{k,j})$。□

命题 3.7。设 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ and $1 \leqslant j \leqslant n$。那么 $\langle A_1^{ij}T_j^i\rangle + \langle A_2^{ij}T_j^i\rangle + \cdots + \langle A_n^{ij}T_j^i\rangle$ 的和是直和。此外，我们有 $HT_j^i \cong \oplus_{r=0}^{n-1}\mathsf{V}(n-i, r)$。

证明。容易验证，当 $1 \leqslant k_1 \neq k_2 \leqslant n$ 时，$r_{k_1,j} \neq r_{k_2,j}$ 属于 $\mathbb{Z}_n$，其中 $r_{k_1,j}$ 和 $r_{k_2,j}$ 的定义与前文相同。根据命题 3.6，可知 $\langle A_k^{ij}T_j^i\rangle \cong$。

对于任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\mathsf{V}(n-i, r_{k,j})$。然后由命题 3.2 可知，和 $\langle A_1^{ij} T_j^i \rangle + \langle A_2^{ij} T_j^i \rangle + \cdots + \langle A_n^{ij} T_j^i \rangle$ 是直和。此外，我们有

$$HT_j^i = \langle A_1^{ij} T_j^i \rangle \oplus \langle A_2^{ij} T_j^i \rangle \oplus \cdots \oplus \langle A_n^{ij} T_j^i \rangle$$

通过比较它们的维数。因此，$HT_j^i \cong \oplus_{r=0}^{n-1} \mathsf{V}(n-i, r)$。 □

推论 3.8. 对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, He_i 是一个半单代数。

推论 3.9. 设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$ 和 $r \in \mathbb{Z}$。那么，$\mathsf{V}(t, r)$ 是一个射影简单H-模。

定理 3.10. 集合 $\{V_l, \mathsf{V}(t,r)\ P_t, \Omega^{\pm s} V_t, M_s(t, \eta) | 1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant n-1, r \in \mathbb{Z}_n, s \geqslant 1, \eta \in \overline{\mathbb{k}}\}$ 构成了所有两两不同构的不可分解H-模的一个完全集。

证明. 这由推论 2.3、推论 3.4、3.8 以及第 3.1 小节得出。 □

4. 不可分解 H-模的张量积

本节中，我们研究 H上的有限维不可分解模的张量积分解规则。

根据第2.3小节， $G = \langle K \rangle$ 和 $|G| = m$。对于任意 $f = K^s \in G$，我们将 1_f 记为1_s。于是$1_s = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \xi_m^{sr} K^r$. 。经过繁琐但常规的计算可得

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= (E \otimes 1)(T_1 \otimes K^{n^2-n} + T_2 \otimes 1) + K \otimes E, \\ \Delta(F) &= (F \otimes 1)(T_3 \otimes K^{n^2-1} + T_4 \otimes K^{n-1}) + 1 \otimes F, \end{aligned}$$

其中 $T_1 = \sum_{i=0}^{2n-1} 1_i$、 $T_2 = \sum_{i=2n}^{n^2-1} 1_i$、 $T_3 = \sum_{i=0}^{n^2-2n-1} 1_i$ 和 $T_4 = \sum_{i=n^2-2n}^{n^2-1} 1_i$。此外， $T_1 + T_2 = 1$ 和 $T_3 + T_4 = 1$。

根据第3节中的讨论，存在一个代数满同态

$$\phi : H \to \overline{U}_q,\ K \mapsto K, E \mapsto E, F \mapsto F, K^{-1} \mapsto K^{-1}$$

且 Mod$\overline{U}_q$ （或等价地，ModHe_0）是 Mod$H$ 的一个子范畴。通过取余代数反结构，可以得到一个新的 Hopf 代数 $\overline{U}_{\mathrm{cop}q}$。也就是说， $\overline{U}_q^{\mathrm{cop}}$与 $\overline{U}_q$具有相同的代数结构，但其余乘法是相反的。因此，上述 ϕ 也是一个从 H 到 $\overline{U}_q^{\mathrm{cop}}$ 的代数满同态。直接验证可知，以下两个图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & \overline{U}_q^{\mathrm{cop}} \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ H \otimes H & \xrightarrow{\phi \otimes \phi} & \overline{U}_q^{\mathrm{cop}} \otimes \overline{U}_q^{\mathrm{cop}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & \overline{U}_q^{\mathrm{cop}} \\ & {\scriptstyle \varepsilon} \searrow & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ & & \Bbbk \end{array}$$

因此， ϕ 是一个从 H 到 $\overline{U}_q^{\mathrm{cop}}$ 的拟双代数满同态。注意，双代数（分别地，Hopf 代数）是拟双代数（分别地，拟 Hopf 代数）。因此，我们有如下注记。

注记 4.1. 范畴 Mod$\overline{U}_q^{\mathrm{cop}}$ 是 Mod$H$ 的一个幺半满子范畴，因此 $r(\overline{U}_{\mathrm{cop}q})$ 是 $r(H)$ 的一个子环。由于 $\overline{U}_q$ 是拟三角的，对于任意 M、 $N \in \in$ Mod$\overline{U}_q$，均有 $M \otimes N \cong N \otimes M$。因此，对于任意两个 $\overline{U}_q$-模 M 和 N，张量积 $M \otimes N$ 在 Mod$\overline{U}_q$ 中的分解规则与其在 mod$H$ 中的分解规则相同。也就是说， $r(\overline{U}_q)$ $(= r(\overline{U}_q^{\mathrm{cop}}))$ 是 $r(H)$ 的一个子环。

注记 4.2. 小量子群 $\overline{U}_q$ 的稳定格林环 $r_{st}(\overline{U}_q)$与小拟量子群 U_q的稳定格林环 $r_{st}(U_q)$同构。

任意两个不可分解 He_0-模的张量积分解规则已在 [10, 命题 3.1—推论 5.24]中得到研究。因此，接下来需要研究不可分解 He_0-模与简单 He_i-模的张量积，以及简单 He_i-模与简单 He_j-模的张量积 $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$。我们首先研究$1 \leqslant i \leqslant n-1$的简单 He_0-模与简单 He_i-模的张量积分解规则。

引理 4.3. 设 M 是一个 H-模。如果 $v \in M$ 和 $1 \leqslant k \leqslant m$ 满足 $Kv = \mathfrak{q}^k v$，那么对于任意满足 $j \neq m-k$ 的 $0 \leqslant j \leqslant m-1$， $1_{m-k} v = v$ 和 $1_j v = 0$。

证明。直接计算即可得出。 □

引理 4.4。设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$ 和 $r \in \mathbb{Z}$。那么

$$V_2 \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong \mathbf{V}(t,r) \otimes V_2 \cong \mathbf{V}(t, r+\tfrac{n-1}{2}) \oplus \mathbf{V}(t, r+\tfrac{n+1}{2}).$$

证明。设 $M = V_2 \otimes \mathbf{V}(t,r)$。令 $\{m_1, m_2\}$ 和 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 分别为 V_2 和 $\mathbf{V}(t,r)$ 的标准基，如第3.2小节所述。由引理 4.3 可得

$$\begin{aligned}
E(m_1 \otimes v_j) &= \begin{cases} q^{-t} m_2 \otimes v_j + q^{-1} m_1 \otimes v_{j+1}, & 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ q^{-t} m_2 \otimes v_n, & j = n, \end{cases} \\
E(m_2 \otimes v_j) &= \begin{cases} q m_2 \otimes v_{j+1}, & 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ 0, & j = n, \end{cases} \\
F(m_1 \otimes v_j) &= \begin{cases} 0, & j = 1, \\ \gamma_{j-1} m_1 \otimes v_{j-1}, & 2 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \\
F(m_2 \otimes v_j) &= \begin{cases} \mathbf{q}^{(t-2r)n-t} m_1 \otimes v_1, & j = 1, \\ \mathbf{q}^{(t-2r-2(j-1))n-t} m_1 \otimes v_j + \gamma_{j-1} m_2 \otimes v_{j-1}, & 2 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$K(m_1 \otimes v_j) = \mathbf{q}^t q^{2(r+j-1)-1} m_1 \otimes v_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

and

$$K(m_2 \otimes v_j) = \mathbf{q}^t q^{2(r+j-1)+1} m_2 \otimes v_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

现在令 $\langle m_1 \otimes v_1 \rangle$ 为由 $m_1 \otimes v_1$生成的 M。通过直接计算可得， $K(m_1 \otimes v_1) = \mathfrak{q}^t q^{2r-1} m_1 \otimes v_1$ 以及 $E^{n-1}(m_1 \otimes v_1) = -q^t m_2 \otimes v_{n-1} +$

$qm_1\otimes v_n\neq 0$。此外，容易看出，$\{m_1\otimes v_1, E(m_1\otimes v_1)\cdots, E^{n-1}(m_1\otimes v_1)\}$ 是关于 $\Bbbk$的线性无关集。可以验证，$F(m_1\otimes v_1)=0$且 $FE^j(m_1\otimes v_1)=\gamma_j' E^{j-1}(m_1\otimes v_1)$，其中 $\gamma_j'=\frac{1}{q-q^{-1}}(\mathfrak{q}^{-t}\frac{q^{1-2r}-q^{1-2r-2j}}{1-q^{-2}}-\mathfrak{q}^t\frac{q^{2r-1}-q^{2r-1+2j}}{1-q^2})$ 对于 $1\leqslant j\leqslant n-1$成立。因此，$\langle m_1\otimes v_1\rangle\cong \mathbb{V}(t,r+\frac{n-1}{2})$。类似地，令$u=m_1\otimes v_2-\gamma_1\mathfrak{q}^{t-(t-2r)n}m_2\otimes v_1$，并令 $\langle u\rangle$ 为由 u生成的 M。可以验证，$Ku=\mathfrak{q}^t q^{2r+1}u$, $E^{n-1}u=(-\gamma_1 q^{-1}\mathfrak{q}^{t-(t-2r)n}-q^{-t})$ $m_2\otimes v_n\neq 0$，且 $\{u, Eu,\cdots, E^{n-1}u\}$ 关于 $\Bbbk$线性无关。此外，$Fu=0$和 $FE^ju=\gamma_j'' E^{j-1}u$，其中 $\gamma_j''=\frac{1}{q-q^{-1}}(\mathfrak{q}^{-t}\frac{q^{-2r-1}-q^{-2r-1-2j}}{1-q^{-2}}-\mathfrak{q}^t\frac{q^{2r+1}-q^{2r+1+2j}}{1-q^2})$, $1\leqslant j\leqslant n-1$。因此，我们有$\langle u\rangle\cong\mathbb{V}(t,r+\frac{n+1}{2})$。通过比较它们的维数可得，$M\cong \mathbb{V}(t,r+\frac{n-1}{2})\oplus\mathbb{V}(t,r+\frac{n+1}{2})$。

现在令 $N=\mathbb{V}(t,r)\otimes V_2$。于是，类似于上述论证可得$\langle v_1\otimes m_1\rangle\cong\mathbb{V}(t,r+\frac{n-1}{2})$ 和 $\langle q\gamma_1 v_1\otimes m_2-v_2\otimes m_1\rangle\cong\mathbb{V}(t,r+\frac{n+1}{2})$。因此$N\cong\mathbb{V}(t,r+\frac{n-1}{2})\oplus\mathbb{V}(t,r+\frac{n+1}{2})$。证明完毕。□

命题 4.5. 设 $1\leqslant l\leqslant n$、$1\leqslant t\leqslant n-1$ 和 $r\in\mathbb{Z}$。

(1) *If l is odd, then* $V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes V_l\cong\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r-\frac{l-1}{2}+j)$.
(2) *If l is even, then* $V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes V_l\cong\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\frac{n-l+1}{2}+j)$.

证明。我们只考虑 $V_l\otimes\mathbb{V}(t,r)$，因为$\mathbb{V}(t,r)\otimes V_l$的证明类似。我们通过对 l归纳来证明。对于 $l=1$ 和 $l=2$，由引理 4.4 以及V_1 是平凡的 H-模可知结论成立。现在令 $2\leqslant l<n$。如果 l是奇数，那么 $l-1$ 和 $l+1$ 是偶数。由 [10, 命题 3.1], 引理 4.4 和归纳假设可得

$$\begin{aligned}V_2\otimes V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong&\ V_{l-1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\oplus V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\\ \cong&\ (\oplus_{j=0}^{l-2}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l+2}{2}+j))\oplus V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}V_2\otimes V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong&\ \oplus_{j=0}^{l-1}V_2\otimes\mathbf{V}(t,r-\tfrac{l-1}{2}+j)\\ \cong&\ (\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l}{2}+j))\oplus(\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n+2-l}{2}+j)).\end{aligned}$$

因此，由克鲁尔-施密特定理可知，

$$V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\oplus_{j=0}^{l}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l}{2}+j).$$

若 l 为偶数，则 $l-1$ 和 $l+1$ 为奇数。类似地，根据 [10, 命题 3.1] 和归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}V_2\otimes V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong&\ V_{l-1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\oplus V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\\ \cong&\ (\oplus_{j=0}^{l-2}\mathbf{V}(t,r-\tfrac{l-2}{2}+j))\oplus V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}V_2\otimes V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong&\ \oplus_{j=0}^{l-1}V_2\otimes\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l+1}{2}+j)\\ \cong&\ (\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{2n-l}{2}+j))\oplus(\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{2n-l+2}{2}+j)).\end{aligned}$$

因此，由克鲁尔-施密特定理可知，

$$V_{l+1}\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\oplus_{j=0}^{l}\mathbf{V}(t,r-\tfrac{l}{2}+j).$$

证明至此完成。□

设 M 和 N 是两个 H-模。回顾 [11, 命题 4.212], , 如果 M 或 N 是射影的，则 $M \otimes N$ 是射影的。

引理 4.6. 设 M 是一个 H-模， P 是一个射影 H-模。假设S_1、 S_2、 $\cdots$、 S_t都是 M的两两不同构的简单因子，其重数分别为l_1、 l_2、 $\cdots$、 l_t。那么

$$M \otimes P \cong \oplus_{j=1}^{t} l_j S_j \otimes P \ and \ P \otimes M \cong \oplus_{j=1}^{t} l_j P \otimes S_j.$$

证明。我们通过对根基长度 $r := \mathrm{rl}(M)$ 归纳来证明该引理。如果 $r = 1$那么 $M \cong \oplus_{j=1}^{t} l_j S_j$。因此 $M \otimes P \cong (\oplus_{j=1}^{t} l_j S_j) \otimes P \cong \oplus_{j=1}^{t} l_j S_j \otimes P$。现在令$r > 1$。假设 $M/\mathrm{rad}(M)$ $\cong \oplus_{j=1}^{t} n_j S_j$。那么 $(M/\mathrm{rad}(M)) \otimes P \cong \oplus_{j=1}^{t} n_j S_j \otimes P$。显然，存在一个 H-模的正合列

$$0 \to \mathrm{rad}(M) \to M \to M/\mathrm{rad}(M) \to 0.$$

与 P 作张量积，可得到 H-模的正合列:

$$0 \to \mathrm{rad}(M) \otimes P \to M \otimes P \to (M/\mathrm{rad}(M)) \otimes P \to 0.$$

由于 $(M/\mathrm{rad}(M)) \otimes P$ 是投射的，上述正合列是分裂的。因此，根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} M \otimes P \cong & \ \mathrm{rad}(M) \otimes P \oplus (M/\mathrm{rad}(M)) \otimes P \\ \cong & \ (\oplus_{j=1}^{t} (l_j - n_j) S_j \otimes P) \oplus (\oplus_{j=1}^{t} n_j S_j \otimes P) \\ \cong & \ \oplus_{j=1}^{t} l_j S_j \otimes P. \end{aligned}$$

类似地，可以证明 $P \otimes M \cong \oplus_{j=1}^{t} l_j P \otimes S_j$。 □

现在我们研究非简单不可分解 He_0-模与简单 He_i-模的张量积的分解规则，$1 \leqslant i \leqslant n-1$。

命题4.7. 设 $1 \leqslant l$、 $t \leqslant n-1$ 和 $r \in \mathbb{Z}$。那么

$$P_l \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong \mathbf{V}(t,r) \otimes P_l \cong \oplus_{j=0}^{n-1} 2\mathbf{V}(t,j).$$

证明. 由推论3.9，$\mathrm{V}(t,r)$ 是投射的。根据 [7] 的第2节， P_l 有两个简单因子 V_l 和 V_{n-l}，其重数均为2。然后由命题4.5和引理4.6，我们有

$$\begin{aligned} P_l \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong & \ 2V_l \otimes \mathbf{V}(t,r) \oplus 2V_{n-l} \otimes \mathbf{V}(t,r) \\ \cong & \ 2\mathbf{V}(t,r) \otimes V_l \oplus 2\mathbf{V}(t,r) \otimes V_{n-l} \cong \mathbf{V}(t,r) \otimes P_l. \end{aligned}$$

此外，如果 l 为奇数，那么 $n-l$ 为偶数，因此

$$\begin{aligned} V_l \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong & \ \oplus_{j=0}^{l-1} \mathbf{V}(t, r - \tfrac{l-1}{2} + j), \\ V_{n-l} \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong & \ \oplus_{j=0}^{n-l-1} \mathbf{V}(t, r + \tfrac{n-(n-l)+1}{2} + j) \cong \oplus_{j=l}^{n-1} \mathbf{V}(t, r - \tfrac{l-1}{2} + j). \end{aligned}$$

如果 l 是偶数，那么 $n-l$ 是奇数，因此

$$\begin{aligned} V_l \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong & \ \oplus_{j=0}^{l-1} \mathbf{V}(t, r + \tfrac{n-l+1}{2} + j), \\ V_{n-l} \otimes \mathbf{V}(t,r) \cong & \ \oplus_{j=0}^{n-l-1} \mathbf{V}(t, r - \tfrac{n-l-1}{2} + j) \cong \oplus_{j=l}^{n-1} \mathbf{V}(t, r + \tfrac{n-l+1}{2} + j). \end{aligned}$$

无论如何，我们总有 $P_l \otimes \mathrm{V}(t,r) \cong \mathrm{V}(t,r) \otimes P_l \cong \oplus_{j=0}^{n-1} 2\mathrm{V}(t,j)$】【。 □

推论 4.8。设 $s \geqslant 1$、 $1 \leqslant t$、 $l \leqslant n-1$ 和 $r \in \mathbb{Z}$。

(1) 如果 s 和 l 都是奇数，那么

$$\begin{aligned}&\Omega^{\pm s}V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes\Omega^{\pm s}V_l\\\cong\ &(\oplus_{j=0}^{n-1}s\mathbf{V}(t,j))\oplus(\oplus_{j=l}^{n-1}\mathbf{V}(t,r-\tfrac{l-1}{2}+j)).\end{aligned}$$

(2) 如果 s 为奇数而 l 为偶数，则

$$\begin{aligned}&\Omega^{\pm s}V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes\Omega^{\pm s}V_l\\\cong\ &(\oplus_{j=0}^{n-1}s\mathbf{V}(t,j))\oplus(\oplus_{j=l}^{n-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l+1}{2}+j)).\end{aligned}$$

（3）如果 s为偶数且 l 为奇数，则

$$\begin{aligned}&\Omega^{\pm s}V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes\Omega^{\pm s}V_l\\\cong\ &(\oplus_{j=0}^{n-1}s\mathbf{V}(t,j))\oplus(\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r-\tfrac{l-1}{2}+j)).\end{aligned}$$

（4）如果 s 和 l 都是偶数，那么

$$\begin{aligned}&\Omega^{\pm s}V_l\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes\Omega^{\pm s}V_l\\\cong\ &(\oplus_{j=0}^{n-1}s\mathbf{V}(t,j))\oplus(\oplus_{j=0}^{l-1}\mathbf{V}(t,r+\tfrac{n-l+1}{2}+j)).\end{aligned}$$

证明。根据 [7], 的第3节，$\Omega^{\pm s}V_l$ 有两个简单因子 V_l 和 V_{n-l}。当 s为奇数时， V_l 和 V_{n-l} 分别作为$\Omega^{\pm s}V_l$的简单因子，其重数为 s 和 $s+1$。当 s 为偶数时， V_l 和 V_{n-l} 分别作为$\Omega^{\pm s}V_l$的简单因子，其重数为 $s+1$ 和 s。因此，通过与命题4.7的证明类似的论证，可以得到该推论。□

推论4.9. 设 $s\geqslant 1, 1\leqslant l,t\leqslant n-1, r\in\mathbb{Z}$ 和 $\eta\in\overline{\mathbb{k}}$。那么

$$M_s(l,\eta)\otimes\mathbf{V}(t,r)\cong\mathbf{V}(t,r)\otimes M_s(l,\eta)\cong\oplus_{j=0}^{n-1}s\mathbf{V}(t,j).$$

证明。根据 [7]的第3节， $M_s(l,\eta)$有两个简单因子 V_l 和 V_{n-l} ，且其重数均为 s。然后，通过类似于命题4.7证明中的论证，即可得到该推论。□

最后，我们研究简单He_i-模与简单 He_j-模的张量积的分解规则， $1\leqslant i,j\leqslant n-1$。

命题4.10. 设 $1\leqslant t$、 $t'\leqslant n-1$ 与 $t+t'\neq n$，以及 r、 $r'\in\mathbb{Z}$。
(1) 若 $t+t'<n$，则 $\mathbf{V}(t,r)\otimes\mathbf{V}(t',r')\cong\oplus_{j=0}^{n-1}\mathbf{V}(t+t',j)$。(2) 若 $t+t'>n$，则 $\mathbf{V}(t,r)\otimes\mathbf{V}(t',r')\cong\oplus_{j=0}^{n-1}\mathbf{V}(t+t'-n,j)$。

证明。设 $M=\mathbf{V}(t,r)\otimes\mathbf{V}(t',r')$。假设 $\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$ 和 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 分别是 $\mathbf{V}(t,r)$ 和 $\mathbf{V}(t',r')$ 的标准基。那么 $\{m_i\otimes v_j|1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是 M 的一组基。 H-模在 $\mathbf{V}(t,r)$ 和 $\mathbf{V}(t',r')$ 上的作用分别由下式给出。

$$Km_i=\mathbf{q}^t q^{2(r+i-1)}m_i,\ Kv_i=\mathbf{q}^{t'}q^{2(r'+i-1)}v_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$Em_i=\begin{cases}m_{i+1}, & 1\leqslant i<n,\\ 0, & i=n\end{cases}\qquad Ev_i=\begin{cases}v_{i+1}, & 1\leqslant i<n,\\ 0, & i=n,\end{cases}$$

$$Fm_i=\begin{cases}0, & i=1,\\ \gamma_{i-1}m_{i-1}, & 2\leqslant i\leqslant n\end{cases}\qquad Fv_i=\begin{cases}0, & i=1,\\ \gamma'_{i-1}v_{i-1}, & 2\leqslant i\leqslant n,\end{cases}$$

其中， γ_j 和 γ'_j 在第3.2小节中给出， $1 \leqslant j \leqslant n-1$。对于 $2 \leqslant l \leqslant 2n$和 $s \in \mathbb{Z}$，令 M_l =张成$\{m_i \otimes v_j | 1 \leqslant i,j \leqslant n, i+j = l\}$，且 $T^s = \{x \in M | Kx = \mathbf{q}^{t+t'} q^{2(r+r'+s-2)} x\}$。那么， T^s =张成$\{m_i \otimes v_j | i+j \equiv s$（模 n）$\}$和$M = \oplus_{l=2}^{2n} M_l = \oplus_{s=2}^{n+1} T^s$。此外，

$$\dim(M_l) = \begin{cases} l-1, & 2 \leqslant l \leqslant n+1, \\ 2n-l+1, & n+1 < l \leqslant 2n. \end{cases}$$

定义从 f到 M的一个线性自同态 $f(x) = Fx, x \in M$。容易看出，对于所有的 $2 \leqslant l \leqslant 2n$, 都有$f(M_l) \subseteq M_{l-1}$，其中 $M_1 = 0$。因此，$\ker f = \oplus_{l=2}^{2n} \ker f \cap M_l$且$FM_2 = 0$。显然，$\dim(\ker f \cap M_2) = 1$。令 $3 \leqslant l \leqslant n+1$和 $x \in M_l$。于是，对于某个 $\alpha_i \in \Bbbk$，有 $x = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i m_i \otimes v_{l-i}$，从而

$$\begin{aligned} Fx = & \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i (F \otimes 1)(T_3 \otimes K^{n^2-1} + T_4 \otimes K^{n-1})(m_i \otimes v_{l-i}) \\ & + \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i (1 \otimes F)(m_i \otimes v_{l-i}) \\ = & \sum_{i=2}^{l-1} \alpha_i \gamma_{i-1} \beta_{l-i} m_{i-1} \otimes v_{l-i} + \sum_{i=1}^{l-2} \alpha_i \gamma'_{l-i-1} m_i \otimes v_{l-i-1} \\ = & \sum_{i=1}^{l-2} \alpha_{i+1} \gamma_i \beta_{l-i-1} m_i \otimes v_{l-i-1} + \sum_{i=1}^{l-2} \alpha_i \gamma'_{l-i-1} m_i \otimes v_{l-i-1} \\ = & \sum_{i=1}^{l-2} (\alpha_i \gamma'_{l-i-1} + \alpha_{i+1} \gamma_i \beta_{l-i-1}) m_i \otimes v_{l-i-1}, \end{aligned}$$

其中 $0 \neq \beta_j \in \Bbbk$ 对于 $1 \leqslant j \leqslant l-2$。由此可得，对于所有 $1 \leqslant i \leqslant l-2$， $x \in \ker f \Leftrightarrow \alpha_i \gamma'_{l-i-1} + \alpha_{i+1} \gamma_i \beta_{l-i-1} = 0$，这意味着 $\dim(\ker f \cap M_l) = 1$。
现在令 $n+1 < l \leqslant 2n$ 和 $x \in M_l$。那么，对于某个 $\alpha_i \in \Bbbk$，有 $x = \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i m_i \otimes v_{l-i}$，因此

$$\begin{aligned} Fx = & \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i (F \otimes 1)(T_3 \otimes K^{n^2-1} + T_4 \otimes K^{n-1})(m_i \otimes v_{l-i}) \\ & + \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i (1 \otimes F)(m_i \otimes v_{l-i}) \\ = & \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i \gamma_{i-1} \beta_{l-i} m_{i-1} \otimes v_{l-i} + \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i \gamma'_{l-i-1} m_i \otimes v_{l-i-1} \\ = & \sum_{i=l-n}^{n} \alpha_i \gamma_{i-1} \beta_{l-i} m_{i-1} \otimes v_{l-i} + \sum_{i=l-n+1}^{n+1} \alpha_{i-1} \gamma'_{l-i} m_{i-1} \otimes v_{l-i} \\ = & \alpha_{l-n} \beta_n \gamma_{l-n-1} m_{l-n-1} \otimes v_n + \alpha_n \gamma'_{l-n-1} m_n \otimes v_{l-n-1}. \\ & + \sum_{l-n+1 \leqslant i \leqslant n} (\alpha_i \beta_{l-i} \gamma_{i-1} + \alpha_{i-1} \gamma'_{l-i}) m_{i-1} \otimes v_{l-i}, \end{aligned}$$

其中 $0 \neq \beta_j \in \Bbbk$ 对于 $l-n \leqslant j \leqslant n.$。由此可知，对于所有$l-n \leqslant i \leqslant n \Leftrightarrow x = 0$, $x \in \ker f \Leftrightarrow \alpha_i = 0$。因此，对于所有 $n+1 < l \leqslant 2n$，$\ker f \cap M_l = \{0\}$。于是，对于所有 $2 \leqslant s \leqslant n+1$，有 $\dim(\ker f \cap T^s) = 1$，且 $\ker f = \oplus_{s=2}^{n+1} \ker f \cap T^s$。
令 ϕ_K 为由 $\phi_K(x) = Kx, x \in M$ 定义的 M 的线性自同态。则 $\mathbf{q}^{t+t'} q^{2(r+r')}$、$\mathbf{q}^{t+t'} q^{2(r+r'+1)} \cdots$、$\mathbf{q}^{t+t'} q^{2(r+r'+n-1)}$ 是 ϕ_K 的互不相同的特征值。由 $t+t' \neq n$ 可知，M 的每个简单子模都同构于某个 $V(l,i)$，其中 $1 \leqslant l \leqslant n-1$ 且 $0 \leqslant i \leqslant n-1$。因此，根据定理 3.10， M 的每个不可分解直和项都同构于某个 $V(l,i)$。此外，由于对于所有 $0 \leqslant s \leqslant n-1$，均有 $\dim(\ker f \cap T^s) = 1$，且结合 $V(l,i)$ 的结构可知，M 的所有不可分解直和项两两不同构，并且 M 的不可分解直和项的个数等于 n。因此，若 $t+t' < n$，则 $M \cong \oplus_{j=0}^{n-1} V(t+t', j)$；若 $t+t' > n$，则 $M \cong \oplus_{j=0}^{n-1} V(t+t'-n, j)$。□

定理 4.11。设 $1 \leqslant t$、$t' \leqslant n-1$ 和 r、$r' \in \mathbb{Z}$。假设 $t+t' = n$ 和 $r+r' \equiv u$（模 n），其中 $0 \leqslant u \leqslant n-1$。设 $P_0 = 0$。

(1) *If* $0 \leqslant u \leqslant \frac{n-1}{2}$, *then*

$$\mathbf{V}(t,r) \otimes \mathbf{V}(t',r') \cong (\oplus_{j=u}^{\frac{n-1}{2}} P_{2j}) \oplus V_n \oplus (\oplus_{1 \leqslant j \leqslant u-1} P_{n-2u+2j}).$$

(2) *If* $\frac{n+1}{2} \leqslant u \leqslant n-1$, *then*

$$\mathbf{V}(t,r) \otimes \mathbf{V}(t',r') \cong (\oplus_{n+1-u \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}} P_{2j}) \oplus (\oplus_{j=0}^{n-u} P_{2u+2j-n}).$$

证明。设 $M = \mathbf{V}(t,r) \otimes \mathbf{V}(t',r')$。我们采用命题4.10证明中的记号。则对于任意 $s \in \mathbb{Z}$，有 $T^{s+n} = T^s$，且 $M = \oplus_{l=2}^{2n} M_l = \oplus_{s=2}^{n+1} T^s$。此外，对于任意 s，$\dim(\ker(f) \cap T^s) = 1$；对于 $2 \leqslant l \leqslant n+1$，$\dim(\ker(f) \cap M_l) = 1$；$\ker(f) \cap M_l = 0$ 对于 $n+1 < l \leqslant 2n$，并且 $\ker(f) = \oplus_{l=2}^{n+1} \ker(f) \cap M_l = \oplus_{s=2}^{n+1} \ker(f) \cap T^s$。显然，对于所有 $2 \leqslant l \leqslant n+1$，$\ker(f) \cap M_l = \ker(f) \cap T^l$。令 g 为 M 上由 $g(x) = Ex$, $x \in M$ 定义的线性自同态。显然，对于所有 $2 \leqslant l \leqslant 2n$，$g(M_l) \subseteq M_{l+1}$，其中 $M_{2n+1} = 0$。类似于命题4.10证明中的论证可得，对于所有 $2 \leqslant l \leqslant n$，$\ker(g) \cap M_l = 0$；对于所有 $n+1 \leqslant l \leqslant 2n$，$\dim(\ker(g) \cap M_l) = 1$；并且 $\ker(g) = \oplus_{l=n+1}^{2n} \ker(g) \cap M_l$。

根据推论 3.9，M 是投射的。因此，M 的各个直和项均为投射模。由于 $t + t' = n$，M 的任意简单子模均同构于某个 V_l，其中 $1 \leqslant l \leqslant n$，且该模是一个简单的 He_0-模。因此，M 的任意不可分解直和项均同构于某个 P_l，其中 $1 \leqslant l \leqslant n$ 且 $P_n = V_n$。注意到，P_l 既是 V_l 的投射覆盖，也是 V_l 的内射包。因此，M 是 $\mathrm{soc}(M)$ 的内射包。根据简单模 V_l 的结构，M 的任意简单子模均由某个 s 的非零元素生成，该元素属于 $\ker(f) \cap T^s$。此外，对于任意满足 $2 \leqslant s \neq s' \leqslant n+1$ 的 $0 \neq x \in \ker(f) \cap T^s$ 和 $0 \neq y \in \ker(f) \cap T^{s'}$，如果子模 $\langle x \rangle$ 和 $\langle y \rangle$ 是简单模，则它们不同构。因此，由 $\dim(\ker(f) \cap T^s) = 1$ 这一事实可知，M 中任意两个不同的简单子模均不同构。由此可得，M 的任意两个不同的不可分解直和项均不同构。

假设 $u = 0$。那么对于任意 $x \in T^s$，都有 $Kx = q^{2(s-2+\frac{1-n}{2})}x$。设 N 是 M 的一个简单H-子模。我们断言，对于任意 $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$，$N$ 与 V_{2k-1} 不同构。反设对于某个 $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$，有 $N \cong V_{2k-1}$。那么 N 具有一个标准基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}\}$，使得对于所有 $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$，$Kx_i = q^{2(i-k)}x_i$，并且对于所有 $1 \leqslant i \leqslant 2k-2$，$Ex_i = x_{i+1}$。因此，$x_1 \in \ker f \cap T^{\frac{n+5}{2}-k}$。由于 $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$，可得 $3 \leqslant \frac{n+5}{2} - k \leqslant \frac{n+3}{2} \leqslant n$。因此，$\ker f \cap T^{\frac{n+5}{2}-k} = \ker f \cap M_{\frac{n+5}{2}-k}$，从而 $x_1 \in \ker f \cap M_{\frac{n+5}{2}-k}$。现在我们有 $\frac{n+5}{2} - k + 2k - 2 = \frac{n+1}{2} + k \leqslant \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n$。于是，根据 $\ker(g) \cap M_l = \{0\}$ 对所有 $2 \leqslant l \leqslant n$ 成立，可知限制映射 $g^{2k-1}|_{M_{\frac{n+5}{2}-k}} \colon M_{\frac{n+5}{2}-k} \to M_{\frac{n+3}{2}+k}$ 是单射。然而，$g^{2k-1}(x_1) = E^{2k-1}x_1 = 0$，这就产生了矛盾！因此，我们已经证明了这一断言。现在，根据上一段中的讨论，我们知道 $\mathrm{soc}(M)$ 同构于 $(\oplus_{j=1}^{\overline{2}} V_{2j}) \oplus V_n$ 的一个子模，因此 M 同构于 $(\oplus_{j=1}^{\overline{2}} P_{2j}) \oplus V_n$ 的一个子模。通过比较它们的维数，可得 $M \cong (\oplus_{j=1}^{\overline{2}} P_{2j}) \oplus V_n$。当 $u = 1$ 时，类似于上述论证可得 $M \cong (\oplus_{j=1}^{\overline{2}} P_{2j}) \oplus V_n$。

现在令 $2 \leqslant u \leqslant \frac{n-1}{2}$。那么，对于任意 $x \in T^s$， $n \geqslant 5$ 和 $Kx = q^{2(u+s-2+\frac{1-n}{2})}x$。令 N 为 M 的一个简单 H-子模。我们断言，对于任意 $1 \leqslant j \leqslant u-1$， N 与 V_{2j} 不同构。反设，对于某个 $1 \leqslant j \leqslant u-1$，有 $N \cong V_{2j}$。那么，在 N 中存在一个标准基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{2j}\}$，使得对于所有 $1 \leqslant i \leqslant 2j$， $Kx_i = q^{2i-2j-1}x_i$， $Fx_1 = Ex_{2j} = 0$，并且对于所有 $1 \leqslant i \leqslant 2j-1$， $Ex_i = x_{i+1}$。因此，$x_1 \in \subseteq \ker f \cap T^{n+2-u-j}$。由于 $2 \leqslant u \leqslant \frac{n-1}{2}$ 且 $1 \leqslant j \leqslant u-1$，可得 $4 \leqslant n+2-u-j \leqslant n-1$。因此，$\ker f \cap T^{n+2-u-j} = \subseteq \ker f \cap M_{n+2-u-j}$，从而 $x_1 \in \subseteq \ker f \cap M_{n+2-u-j}$。由于 $n+2-u-j+2j-1 \leqslant n$ 且对于所有 $2 \leqslant l \leqslant n$，$\ker(g) \cap M_l = \{0\}$，限制映射 $g^{2j}|_{M_{n+2-u-j}} : M_{n+2-u-j} \to M_{n+2-u+j}$ 是单射。然而， $g^{2j}(x_1) = E^{2j}x_1 = 0$，这就产生了矛盾！因此，我们已经证明了这一断言。类似地，可以证明，对于任意 $0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2} - u$， N 与 V_{2j+1} 不同构。然后，类似的论证表明，

$$M \cong (\oplus_{j=u}^{\frac{n-1}{2}} P_{2j}) \oplus (\oplus_{j=\frac{n+1}{2}-u}^{\frac{n-1}{2}} P_{2j+1}) \cong (\oplus_{j=u}^{\frac{n-1}{2}} P_{2j}) \oplus (\oplus_{j=1}^{u} P_{n-2u+2j}).$$

至此，命题（1）的证明完成。命题（2）的证明类似。 □

5. H 的表示环

5.1. $\overline{U}_q$的格林环。根据第3.1小节的讨论，Mod$\overline{U}_q$是Mod$H_n(1, q^2)$的一个幺半满子范畴，因此 $r(\overline{U}_q)$是 $r(H_n(1, q^2))$的一个子环。$r(H_n(1, q^2))$分别在 [8] 中针对 $n = 2$ 以及在 [21] 中针对 $n > 2$进行了描述。在本小节中，我们研究 $\overline{U}_q$在 n 为奇数情形下的格林环 $r(\overline{U}_q)$。在整个本小节中，假设 $n > 2$ 为奇数，且 $q \in \Bbbk$ 是一个满足 $|q| = n$ 或 $|q| = 2n$的单位根。

注意，投射类环 $r_p(\overline{U}_q)$ 是交换的，因为 $r(\overline{U}_q)$ 是交换的。根据 [10,推论 3.2], ，由半单模和投射模组成的范畴是 Mod$\overline{U}_q$ 的一个幺半子范畴。因此，我们得到以下命题。

引理 5.1. $r_p(\overline{U}_q)$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其 $\mathbb{Z}$-基为

$$\{[V_k], [P_l] | 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant n-1\}.$$

引理 5.2。设 $2 \leqslant k \leqslant n-1$。那么

$$V_2^{\otimes k} \cong \oplus_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{k-2i+1}{k-i+1} \binom{k}{i} V_{k+1-2i}.$$

证明。由 [6, 定理 3.1]和 [9, 引理 5.3]可得。 □

Let $y = [V_2]$ in $r(\overline{U}_q)$.

命题 5.3. 以下等式在 $r_p(\overline{U}_q)$（或 $r(\overline{U}_q)$）中成立：

(1) $y[V_j] = [V_{j+1}] + [V_{j-1}]$ 对于 $2 \leqslant j \leqslant n-1$;
(2) $y[V_n] = [P_{n-1}]$; (3) $y[P_1] = [P_2] + 2[V_n]$;
(4) $y[P_j] = [P_{j+1}] + [P_{j-1}]$ 对于 $2 \leqslant j \leqslant n-2$;
(5) $y[P_{n-1}] = 2[V_n] + [P_{n-2}]$。

证明。由 [10, 命题 3.1、定理 3.3 和定理 3.5]可得。 □

引理 5.4. 以下等式在 $r_p(\overline{U}_q)$ 中成立。

(1) $[V_l] = \sum_{i=0}^{[\frac{l-1}{2}]}(-1)^i\binom{l-1-i}{i}y^{l-1-2i}$ *for* $1 \leqslant l \leqslant n$.
(2) $[P_l] = \sum_{i=0}^{[\frac{n-l}{2}]}(-1)^i\frac{n-l}{n-l-i}\binom{n-l-i}{i}y^{n-l-2i}[V_n]$ *for* $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

证明。由 [9, 引理 5.6], [6, 定理 3.1] 和 [10, 定理 3.3]可得。也可以通过与 [9, 引理 5.6] 类似的方法证明。□

推论 5.5. $r_p(\overline{U}_q)$ 作为一个环由 y 生成。

证明。由引理 5.1 和 5.4 可知。 □

命题 5.6。在 $r(\overline{U}_q)$ 中，我们有

$$(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{n-2i} - 2)(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\binom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i}) = 0.$$

证明。由于 n 是奇数，由引理 5.4(2)，我们有

$$y[P_1] = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n-1}{n-1-i}\binom{n-1-i}{i}y^{n-2i}[V_n].$$

根据命题 5.3(3) 和引理 5.4(2)，我们还有

$$\begin{aligned} y[P_1] &= [P_2] + 2[V_n] \\ &= (\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^i\frac{n-2}{n-2-i}\binom{n-2-i}{i}y^{n-2-2i} + 2)[V_n] \\ &= (\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\frac{n-2}{n-1-i}\binom{n-1-i}{i-1}y^{n-2i} + 2)[V_n]. \end{aligned}$$

因此，得到的是

$$(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n-1}{n-1-i}\binom{n-1-i}{i}y^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n-2}{n-1-i}\binom{n-1-i}{i-1}y^{n-2i} - 2)[V_n] = 0,$$

这等价于 $(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{n-2i} - 2)[V_n] = 0$。因此，该命题由引理 5.4(1) 得证。□

推论 5.7. $\{y^l | 0 \leqslant l \leqslant 2n-2\}$ 是 $r_p(\overline{U}_q)$的 $\mathbb{Z}$-基。

证明。由命题 5.6 可知,

$$\begin{aligned} y^{2n-1} &= -\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\binom{n-1-i}{i}y^{2n-1-2i} \\ &\quad -\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{2n-1-2i} + 2y^{n-1} \\ &\quad -(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{n-2i} - 2)(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\binom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i}). \end{aligned}$$

于是，由推论 5.5 可知， $r_p(\overline{U}_q)$ 由 $\{y^l | 0 \leqslant l \leqslant 2n-2\}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模生成。根据引理 5.1， $r_p(\overline{U}_q)$ 是秩为 $2n-1$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模，因此 $\{y^l | 0 \leqslant l \leqslant 2n-2\}$ 构成 $r_p(\overline{U}_q)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。□

定理 5.8. 设 $\mathbb{Z}[y]$ 是变量 y 的多项式环， I 是由以下元素生成的 $\mathbb{Z}[y]$ 的理想

$$(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{n-2i}-2)(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\binom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i}).$$

那么 $r_p(\overline{U}_q)$ 同构于商环 $\mathbb{Z}[y]/I$。

证明。由推论 5.5，可定义一个环满同态 $\phi\colon \mathbb{Z}[y]\to r_p(\overline{U}_q)$，其定义为$\phi(y)=[V_2]$。由命题 5.6， $\phi(I)=0$。因此， ϕ 诱导出一个环满同态$\overline{\phi}\colon \mathbb{Z}[y]/I\to r_p(\overline{U}_q)$，使得 $\phi=\overline{\phi}\circ\pi$，其中 $\pi\colon \mathbb{Z}[y]\to\mathbb{Z}[y]/I$是典范投影。现在，对于任意 $t\in\mathbb{Z}[y]$，记 $\pi(t)$ 为 $\overline{t}$。容易验证，$\mathbb{Z}[y]/I$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模，由 $\{\overline{y}^l|0\leqslant l\leqslant 2n-2\}$生成，并且对于 $0\leqslant l\leqslant 2n-2$，有 $\overline{\phi}(\overline{y}^l)=[V_2]^l$。因此，推论 5.7 表明， $\{\overline{y}^l|0\leqslant l\leqslant 2n-2\}$ 是 $\mathbb{Z}[y]/I$的一个 $\mathbb{Z}$-基。由此可知，$\overline{\phi}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模同构。因此，它是一个环同构。□

现在令 $z_+=[\Omega V_1]$， $z_-=[\Omega^{-1}V_1]$。令 R 为由 y、z_+ 和 z_- 生成的 $r(\overline{U}_q)$ 的子环，其中 $y=[V_2]$ 的定义与前面相同。则 $r_p(\overline{U}_q)\subseteq R$。

命题 5.9. R 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其一组 $\mathbb{Z}$-基为

$$\{[V_k],[P_l],[\Omega^{\pm s}V_l]|1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant l\leqslant n-1,s\geqslant 1\}.$$

证明。它与 [21, 命题 3.1]类似。 □

与 [21, 引理 3.3], 类似，可以证明以下引理。

引理 5.10. 以下关系在 $r(\overline{U}_q)$ 中成立。

(1) $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}[P_{2i+1}]=[V_n]^2$.
(2) $\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}[P_{2i+1}]=\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-2}{i-1}y^{n-1-2i}[V_n]$.
(3) $\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}[P_{2i}]=\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-1}{i-1}y^{n-2i}[V_n]$.

与引理 3.4], 类似，可以验证以下引理。

引理 5.11。在 $r(\overline{U}_q)$ 中满足以下关系。

(1) $z_+z_-=1+(2y+4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-2}{i-1}y^{n-1-2i})[V_n]$.
(2) $z_+[V_n]=z_-[V_n]=(1+2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-1}{i-1}y^{n-2i})[V_n]$.

类似于 [21, 命题 3.5], , 可以证明以下命题。

命题 5.12。以下集合也是 R 的一组 $\mathbb{Z}$-基:

$$\{y^j,y^lz_+^k,y^lz_-^k|0\leqslant j\leqslant 2n-2,0\leqslant l\leqslant n-2,k\geqslant 1\}.$$

现在令 $w_{k,\ \eta}=[M_k(1,\eta)]$ 属于 $r(\overline{U}_q)$，其中 $k\geqslant 1$ 和 $\eta\in\overline{\mathbb{k}}$为任意元素。那么，类似于 [21,引理 3.6], , 可以验证以下引理。

引理 5.13. 设 k、$s\geqslant 1$ 和 η、$\alpha\in\overline{\mathbb{k}}$。那么我们在 $r(\overline{U}_q)$ 中有以下关系。

(1) $w_{k,\eta}[V_n] = k(1+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-1-i}{i-1}y^{n-2i})[V_n]$.
(2) $z_+w_{k,\eta} = (\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-1-i}{i-1}y^{n-2i})w_{k,\eta} + k[V_n]^2$.
(3) $z_-w_{k,\eta} = (\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-1}{i-1}y^{n-2i})w_{k,\eta}$
$+k(y+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-2}{i-1}y^{n-1-2i})[V_n]$.
(4) *If* $\eta \neq \alpha$, *then* $w_{k,\eta}w_{s,\alpha} = sk[V_n]^2$
(5) 如果 $k \leqslant s$, 那么

$$w_{k,\eta}w_{s,\eta} = w_{k,\eta}(1+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-1}{i-1}y^{n-2i}) + (s-1)k[V_n]^2.$$

类似于 [21, 命题 3.7], , 可以证明以下命题。

命题 5.14. $r(\overline{U}_q)$ 作为一个环, 由

$$\{y, z_+, z_-, w_{k,\eta} | k \geqslant 1, \eta \in \overline{\Bbbk}\}.$$

类似于 [21, 命题 3.8], , 可以证明以下命题。

命题 5.15。以下集合构成 $r(\overline{U}_q)$ 的 $\mathbb{Z}$-基:

$$\left\{y^j, y^l z_+^k, y^l z_-^k, y^l w_{k,\eta} \,\middle|\, 0 \leqslant j \leqslant 2n-2, 0 \leqslant l \leqslant n-2, k \geqslant 1, \eta \in \overline{\Bbbk}\right\}.$$

令 $\mathbb{Z}[y, z_+, z_-]$ 为变量 y、z_+、z_- 中的多项式环。定义 $\mathbb{Z}[y] \subset \mathbb{Z}[y, z_+, z_-]$ 中的多项式 $f_1(y)$、$f_2(y)$、$f_3(y)$ 和 $f_4(y)$, 如下:

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\binom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i},\\
f_2(y) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}y^{n-2i} - 2,\\
f_3(y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-2}{i-1}y^{n-1-2i},\\
f_4(y) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\binom{n-i-1}{i-1}y^{n-2i}.
\end{aligned}$$

令 I 为由以下元素生成的 $\mathbb{Z}[y, z_+, z_-]$ 理想:

$$\begin{gathered}
f_1(y)f_2(y),\ z_+z_- - 1 - f_1(y)(2y + 4f_3(y)),\\
f_1(y)(z_+ - 1 - 2f_4(y)),\ f_1(y)(z_+ - z_-).
\end{gathered}$$

类似于 [21, 命题 3.9], , 可以证明以下命题。

命题 5.16. R 与商环 $\mathbb{Z}[y, z_+, z_-]/I$ 同构。

令 $X = \{y, z_+, z_-, w_{k,\eta} | k \geqslant 1, \eta \in \overline{\Bbbk}\}$, 并令 $\mathbb{Z}[X]$ 为相应的多项式环。那么 $\mathbb{Z}[y, z_+, z_-]$ 是 $\mathbb{Z}[X]$ 的一个子环。令 U 为 $\mathbb{Z}[X]$ 的以下子集:

$$U = \left\{ \begin{array}{l|l}
f_1(y)f_2(y), & \\
z_+z_- - 1 - f_1(y)(2y + 4f_3(y)), & \\
f_1(y)(z_+ - 1 - 2f_4(y)),\ f_1(y)(z_+ - z_-), & k, s, t \geqslant 1\\
f_1(y)(w_{k,\eta} - k - kf_4(y)), & \text{with } k \leqslant t,\\
(z_+ - f_4(y))w_{k,\eta} - kf_1(y)^2, & \eta, \alpha \in \overline{\Bbbk}\\
(z_- - f_4(y))w_{k,\eta} - kf_1(y)(y + f_3(y)), & \text{with } \eta \neq \alpha\\
w_{k,\eta}w_{s,\alpha} - ksf_1(y)^2, & \\
w_{k,\eta}(w_{t,\eta} - 1 - f_4(y)) - (t-1)kf_1(y)^2 &
\end{array} \right\},$$

其中， $f_1(y)$、 $f_2(y)$、 $f_3(y)$、 $f_4(y) \in \mathbb{Z}[y] \subset \mathbb{Z}[y, z_+, z_-] \subset \mathbb{Z}[X]$ 均已如前所述给出。令 $I_0 = (U)$ 为由 U 生成的 $\mathbb{Z}[X]$ 的理想。类似于 [21, 定理 3.10]，可以证明如下定理。

定理 5.17. 当 $|q| = n$ 或 $|q| = 2n$ 对于某个奇数 $n > 2$时，格林环$r(\overline{U}_q)$ 与 $\mathbb{Z}[X]/I_0$ 同构。

~5.2. U_q的格林环。在本小节中，我们研究小拟量子群 U_q的投射类环 ~ ~ ~$r_p(U_q)$和格林环 $r(U_q)$。首先， ~ ~我们有 $r(\overline{U}_q) \subseteq r(U_q)$和 $r_p(U_q) \subseteq r_p(U_q)$。由第 4 节可知， ~ ~$r_p(U_q)$和 $r(U_q)$均为交换环。

根据 [10, 推论 3.2], 推论3.4、定理 3.10 以及第 4 节中的讨论可知，由半单 H-模和射影H-模构成的子范畴是 Mod$H$ 的一个幺半子范畴。因此，我们得到以下引理。

~引理 5.18. $r_p(U_q)$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其一组 $\mathbb{Z}$-基为

$$\{[V_l], [P_t], [\mathbf{V}(t, r)] | 1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant n-1, r \in \mathbb{Z}_n\}.$$

~对于任意 $1 \leqslant t \leqslant n-1$，令 $x_t = [\mathrm{V}(t, 0)]$、 $\varepsilon_t = [\mathrm{V}(t, 1)]$ 以及 $y = [V_2]$ 属于 $r(U_q)$。

引理 5.19. 设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$ 和 $r \geqslant 2$。则

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}(t, r)] = \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{r-1}{2}]} (-1)^i \binom{r-1-i}{i} (y^2-2)^{r-1-2i} \varepsilon_t \\ & \textstyle - \sum_{i=0}^{[\frac{r-2}{2}]} (-1)^i \binom{r-2-i}{i} (y^2-2)^{r-2-2i} x_t.\end{aligned}$$

证明。我们对 r 作归纳。设 $k \in \mathbb{Z}$。由命题 4.5，可得

$$V_3 \otimes \mathbf{V}(t, k) \cong \mathbf{V}(t, k-1) \oplus \mathbf{V}(t, k) \oplus \mathbf{V}(t, k+1).$$

于是 $[\mathrm{V}(t, k+1)] = ([V_3] - 1)[\mathrm{V}(t, k)] - [\mathrm{V}(t, k-1)]$. 由命题 5.3，我们有$[V_3] = y^2 - 1$。因此

$$[\mathbf{V}(t, k+1)] = (y^2-2)[\mathbf{V}(t, k)] - [\mathbf{V}(t, k-1)].$$

取 $k = 1$，即可得到 $r = 2$ 的引理。取 $k = 2$，即可得到 $r = 3$ 的引理。现在假设 $r \geqslant 3$。那么由上式和归纳假设可得

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}(t, r+1)] = \quad & (y^2-2)[\mathbf{V}(t, r)] - [\mathbf{V}(t, r-1)] \\ = \quad & (y^2-2)(\textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{r-1}{2}]} (-1)^i \binom{r-1-i}{i} (y^2-2)^{r-1-2i} \varepsilon_t \\ & \textstyle - \sum_{i=0}^{[\frac{r-2}{2}]} (-1)^i \binom{r-2-i}{i} (y^2-2)^{r-2-2i} x_t) \\ & \textstyle - \sum_{i=0}^{[\frac{r-2}{2}]} (-1)^i \binom{r-2-i}{i} (y^2-2)^{r-2-2i} \varepsilon_t \\ & \textstyle + \sum_{i=0}^{[\frac{r-3}{2}]} (-1)^i \binom{r-3-i}{i} (y^2-2)^{r-3-2i} x_t \\ = \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]} (-1)^i \binom{r-i}{i} (y^2-2)^{r-2i} \varepsilon_t \\ & \textstyle - \sum_{i=0}^{[\frac{r-1}{2}]} (-1)^i \binom{r-1-i}{i} (y^2-2)^{r-1-2i} x_t.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

~推论 5.20。 $r_p(U_q)$ 由 $\{y, x_t, \varepsilon_t | 1 \leqslant t \leqslant n-1\}$ 作为一个环生成。

证明。由推论 5.5 以及引理 5.18 和 5.19 得出。 □

命题 5.21. 设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$ 和 $r \geqslant 1$。

(1) 如果 r 是奇数，那么

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-r}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+r}{2})],$$
$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r-2i}\varepsilon_t=[\mathbf{V}(t,1+\tfrac{n-r}{2})]+[\mathbf{V}(t,1+\tfrac{n+r}{2})].$$

(2) 如果 r 为偶数，那么

$$\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{r}{2})],$$
$$\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r-2i}\varepsilon_t=[\mathbf{V}(t,1-\tfrac{r}{2})]+[\mathbf{V}(t,1+\tfrac{r}{2})].$$

证明。我们只证明（1）和（2）的第一个等式，因为第二个等式的证明类似。我们对 r 进行归纳。对于 $r=1$，由引理 4.4 可得。对于 $r=2$，由引理 5.19 的证明可得。现在设 $r \geqslant 2$。如果 r 是偶数，则 $r-1$ 和 $r+1$ 是奇数。在这种情况下，根据归纳假设和引理 4.4，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r+1-2i}x_t=y[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r}{2})]+y[\mathbf{V}(t,\tfrac{r}{2})]\\ =\;&[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-1-r}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+1-r}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-1+r}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+1+r}{2})]\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-2}{2}}(-1)^i\tfrac{r-1}{r-1-i}\binom{r-1-i}{i}y^{r-1-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-(r-1)}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+(r-1)}{2})].$$

然后我们有

$$\begin{aligned}&[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-(r+1)}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+(r+1)}{2})]\\ =\;&\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r+1-2i}x_t-\sum_{i=0}^{\frac{r-2}{2}}(-1)^i\tfrac{r-1}{r-1-i}\binom{r-1-i}{i}y^{r-1-2i}x_t\\ =\;&\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}}(-1)^i\tfrac{r+1}{r+1-i}\binom{r+1-i}{i}y^{r+1-2i}x_t.\end{aligned}$$

同理，如果 r 是奇数，那么 $r-1$ 和 $r+1$ 是偶数。因此

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r+1-2i}x_t=y[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-r}{2})]+y[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+r}{2})]\\ =\;&[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r+1}{2})]+[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r-1}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{r-1}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{r+1}{2})]\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r-1}{r-1-i}\binom{r-1-i}{i}y^{r-1-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r-1}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{r-1}{2})].$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&[\mathbf{V}(t,-\tfrac{r+1}{2})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{r+1}{2})]\\ =\;&\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\binom{r-i}{i}y^{r+1-2i}x_t-\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^i\tfrac{r-1}{r-1-i}\binom{r-1-i}{i}y^{r-1-2i}x_t\\ =\;&\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}}(-1)^i\tfrac{r+1}{r+1-i}\binom{r+1-i}{i}y^{r+1-2i}x_t.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

~推论 5.22. 设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$。那么在 $r_p(U_q)$ 中，我们有

$$(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]}(-1)^j\tfrac{k+2j}{k+j}\binom{k+j}{j}y^k+\sum_{1\leqslant j\leqslant[\frac{n-1}{4}]}(-1)^j2+1)(x_t-\varepsilon_t)=0.$$

证明。根据命题 5.21，可以验证

$$(\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\tbinom{r-i}{i}y^{r-2i}+1)x_t=\sum_{j=0}^{n-1}[\mathbf{V}(t,j)]$$

and

$$(\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\tbinom{r-i}{i}y^{r-2i}+1)\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{n-1}[\mathbf{V}(t,j)].$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^i\tfrac{r}{r-i}\tbinom{r-i}{i}y^{r-2i}\\ =\ &\sum_{1\leqslant j\leqslant[\frac{n-1}{4}]}(-1)^j2+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]}(-1)^j\tfrac{k+2j}{k+j}\tbinom{k+j}{j}y^k.\end{aligned}$$

因此，推论得证。 □

~推论 5.23. 设 $1\leqslant t,t'\leqslant n-1$. 则以下结论在 $r_p(U_q)$ 中成立。

(1) *If* $t+t'<n$, *then*

$$\begin{aligned}&x_tx_{t'}=x_t\varepsilon_{t'}=\varepsilon_t\varepsilon_{t'}\\ =\ &\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]}(-1)^j\tfrac{k+2j}{k+j}\tbinom{k+j}{j}y^k+\sum_{1\leqslant j\leqslant[\frac{n-1}{4}]}(-1)^j2+1)x_{t+t'}.\end{aligned}$$

(2) 如果 $t+t'>n$，则

$$\begin{aligned}&x_tx_{t'}=x_t\varepsilon_{t'}=\varepsilon_t\varepsilon_{t'}\\ =\ &(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]}(-1)^j\tfrac{k+2j}{k+j}\tbinom{k+j}{j}y^k+\sum_{1\leqslant j\leqslant[\frac{n-1}{4}]}(-1)^j2+1)x_{t+t'-n}.\end{aligned}$$

（3）如果 $t+t'=n$，则

$$\begin{aligned}x_tx_{t'}=x_t\varepsilon_{t'}=\ &(1+\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\tbinom{n-1-i}{i-1}y^{n-2i})\\ &\times(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\tbinom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i}).\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\varepsilon_t\varepsilon_{t'}=\ &(\sum_{2\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^i\tbinom{n-2-i}{i-2}y^{n-2i}+y^2-1)\\ &\times(\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^i\tbinom{n-1-i}{i}y^{n-1-2i}).\end{aligned}$$

证明。第(1)部分和第(2)部分由命题4.10及推论 5.22 的证明得出，第(3)部分由定理 4.11、引理 5.4 和引理 5.10 得出。□

~命题 5.24。设 $1\leqslant t\leqslant n-1$。则在 $r_p(U_q)$ 中，我们有

$$(\sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{4}]}(-1)^i\tfrac{n+1}{n+1-2i}\tbinom{\frac{n+1}{2}-i}{i}y^{\frac{n+1}{2}-2i}-\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{4}]}(-1)^i\tfrac{n-1}{n-1-2i}\tbinom{\frac{n-1}{2}-i}{i}y^{\frac{n-1}{2}-2i})x_t=0.$$

证明。如果 $\frac{n-1}{2}$ 是奇数，则 $\frac{n+1}{2}$ 是偶数。在这种情况下，由命题 5.21 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{4}}(-1)^i\tfrac{n-1}{n-1-2i}\tbinom{\frac{n-1}{2}-i}{i}y^{\frac{n-1}{2}-2i}x_t\ &=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+1}{4})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{3n-1}{4})]\\ &=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+1}{4})]+[\mathbf{V}(t,-\tfrac{n+1}{4})].\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i=0}^{\frac{n+1}{4}}(-1)^i\tfrac{n+1}{n+1-2i}\tbinom{\frac{n+1}{2}-i}{i}y^{\frac{n+1}{2}-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,-\tfrac{n+1}{4})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n+1}{4})].$$

由此可知，当 $\frac{n-1}{2}$ 为奇数时，命题中的等式成立。

同理，若 $\frac{n-1}{2}$ 为偶数，则 $\frac{n+1}{2}$ 为奇数。由命题 5.21 可得

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{4}}(-1)^i\frac{n-1}{n-1-2i}\binom{\frac{n-1}{2}-i}{i}y^{\frac{n-1}{2}-2i}x_t=[\mathbf{V}(t,-\tfrac{n-1}{4})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-1}{4})]$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{4}}(-1)^i\frac{n+1}{n+1-2i}\binom{\frac{n+1}{2}-i}{i}y^{\frac{n+1}{2}-2i}x_t &=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-1}{4})]+[\mathbf{V}(t,\tfrac{3n+1}{4})]\\ &=[\mathbf{V}(t,\tfrac{n-1}{4})]+[\mathbf{V}(t,-\tfrac{n-1}{4})].\end{aligned}$$

因此，当 $\frac{n-1}{2}$ 为偶数时，命题中的等式成立。 □

~推论 5.25. 以下集合构成 $r_p(U_q)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基:

$$\left\{y^i,y^jx_t,y^l\varepsilon_t\,\middle|0\leqslant i\leqslant 2n-2,0\leqslant j\leqslant\tfrac{n-1}{2},0\leqslant l\leqslant\tfrac{n-3}{2},1\leqslant t\leqslant n-1\right\}.$$

证明。由推论 5.7、引理 5.19、推论 5.22 和命题 5.24 可知，~知道 $r_p(U_q)$ 是由 $\mathbb{Z}$-模生成的，经过

$$\left\{y^i,y^jx_t,y^l\varepsilon_t\,\middle|0\leqslant i\leqslant 2n-2,0\leqslant j\leqslant\tfrac{n-1}{2},0\leqslant l\leqslant\tfrac{n-3}{2},1\leqslant t\leqslant n-1\right\}.$$

根据命题 5.18， $r_p(\widetilde{U}_q)$ 是秩为 n^2+n-1 的自由 $\mathbb{Z}$-模，因此上述~集合是 $r_p(U_q)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。□

设 $X'=\{y,x_t,\varepsilon_t|1\leqslant t\leqslant n-1\}$，并令 $\mathbb{Z}[X']$ 为相应的多项式环。在 $\mathbb{Z}[y]\subset\mathbb{Z}[X']$ 中定义多项式 $g_1(y)$、 $g_2(y)$、 $g_3(y)$ 和 $g_4(y)$，其定义为

$$\begin{aligned}g_1(y)&=\sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{4}]}(-1)^i\tfrac{n+1}{n+1-2i}\binom{\frac{n+1}{2}-i}{i}y^{\frac{n+1}{2}-2i},\\ g_2(y)&=\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{4}]}(-1)^i\tfrac{n-1}{n-1-2i}\binom{\frac{n-1}{2}-i}{i}y^{\frac{n-1}{2}-2i},\\ g_3(y)&=\sum_{2\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^i\tbinom{n-2-i}{i-2}y^{n-2i}+y^2-1,\\ g_4(y)&=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{i=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]}(-1)^i\tfrac{k+2i}{k+i}\tbinom{k+i}{i}y^k+\sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n-1}{4}]}(-1)^i2+1.\end{aligned}$$

取 I $\mathbb{Z}[X']$ 的一个子集，定义为

$$I=\left\{\begin{array}{l|l}f_1(y)f_2(y),\ (g_1(y)-g_2(y))x_t,&\\ g_4(y)(x_t-\varepsilon_t),&\\ x_tx_{t'}-x_t\varepsilon_{t'},\ x_tx_{t_1}-\varepsilon_t\varepsilon_{t_1},&1\leqslant t,t',t_1,t_2,t_3,\leqslant n-1\\ x_tx_{t_2}-g_4(y)x_{t+t_2},&\text{with } t+t_1\neq n,\\ x_tx_{t_3}-g_4(y)x_{t+t_3-n},&t+t_2<n,t+t_3>n,\\ x_tx_{n-t}-(f_4(y)+1)f_1(y),&\\ \varepsilon_t\varepsilon_{n-t}-g_3(y)f_1(y)&\end{array}\right\},$$

其中， $f_1(y)$、 $f_2(y)$ 和 $f_4(y)$ 已在上一小节中给出。记 J 为由 I 生成的 $\mathbb{Z}[X']$ 的理想。于是我们有如下定理。

~定理 5.26。射影环 $r_p(U_q)$ 同构于 $\mathbb{Z}[X']/J$。

~证明。根据推论 5.20，存在一个环满同态 ϕ ，从 $\mathbb{Z}[X']$ 到 $r_p(U_q)$，使得 $\phi(y)=[V_2]$， $\phi(x_t)=[\mathbf{V}(t,0)]$ ，且对于 $1\leqslant t\leqslant n-1$， $\phi(\varepsilon_t)=[\mathbf{V}(t,1)]$ 。根据命题 5.6、推论 5.22–5.23 和命题 5.24， $\phi(I)=0$。因此， $\backsim\phi$ 诱导出一个环满同态 $\overline{\phi}$: $\mathbb{Z}[X']/J\longrightarrow r_p(U_q)$，使得 $\phi=\overline{\phi}\pi$，其中

$\pi:\ \mathbb{Z}[X'] \longrightarrow \mathbb{Z}[X']/J$ 是典范投影。设对任意 $u \in \mathbb{Z}[X]$, $\overline{u} := \pi(u)$。那么根据 I 的定义可知, $\mathbb{Z}[X']/J$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模，由以下元素生成。

$$W = \left\{ \overline{y}^i, \overline{y}^j\overline{x}_t, \overline{y}^l\overline{w}_t \,\middle|\, 0 \leqslant i \leqslant 2n-2, 0 \leqslant j \leqslant \tfrac{n-1}{2}, 0 \leqslant l \leqslant \tfrac{n-3}{2}, 1 \leqslant t \leqslant n-1 \right\}.$$

此外，我们有 $\phi(\overline{y}^i) = [V_2]^i$, $\phi(\overline{y}^j\overline{x}_t) = [V_2]^j[\mathbf{V}(t,0)]$ 以及 $\phi(\overline{y}^l\overline{w}_t) = [V_2]^l[\mathbf{V}(t,1)]$。根据推论 5.25, W 是 $\mathbb{Z}$上的一个线性无关集。因此，集合W 是 $\mathbb{Z}[X']/J$的一个 $\mathbb{Z}$-基。由此, $\overline{\phi}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模同构，因而也是一个环同构。□

~现在我们来研究格林环 $r(U_q)$。根据定理 3.10，我们有以下引理。

~引理 5.27. $r(U_q)$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其一组 $\mathbb{Z}$-基为

$$\left\{ \begin{array}{l|l} [V_l], [P_t], [\Omega^{\pm s}V_t], & 1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant n-1, \\ [M_s(t,\eta)], [\mathbf{V}(t,r)] & s \geqslant 1, \eta \in \overline{\mathbb{k}}, r \in \mathbb{Z}_n \end{array} \right\}$$

在 $r(\widetilde{U}_q)$中，令 $z_+ = [\Omega V_1]$, $z_- = [\Omega^{-1}V_1]$, $w_{s,\eta} = [M_s(1,\eta)]$ 与上一小节中的 $s \geqslant 1$, $\eta \in \overline{\mathbb{k}}$ 相同，并令 $y = [V_2]$, $x_t = [\mathbf{V}(t,0)]$, $\varepsilon_t = [\mathbf{V}(t,1)]$ 如上，其中$1 \leqslant t \leqslant n-1$。

~命题 5.28。 $r(U_q)$ 作为环由生成。

$$\{y, x_t, \varepsilon_t, z_+, z_-, w_{s,\eta} | 1 \leqslant t \leqslant n-1, s \geqslant 1, \eta \in \overline{\mathbb{k}}\}.$$

证明。由引理 5.27、命题 5.14 和推论 5.20 可得。 □

~命题 5.29. 以下集合也是 $r(U_q)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

$$\left\{ \begin{array}{l|l} y^j, y^k x_t, y^i\varepsilon_t, & 0 \leqslant j \leqslant 2n-2, 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ y^l z_+^s, y^l z_-^s, & 0 \leqslant i \leqslant \frac{n-3}{2}, 1 \leqslant t \leqslant n-1, \\ y^l w_{s,\eta} & 0 \leqslant l \leqslant n-2, s \geqslant 1, \eta \in \overline{\mathbb{k}} \end{array} \right\}.$$

~证明。设 N为由 $\{[\mathbf{V}(t,r)] | 1 \leqslant t \leqslant n-1$ 生成的 $r(U_q)$ 的 $\mathbb{Z}$-子模， $r \in \mathbb{Z}_n\}$. 那么， $r(U_q)$ 与 $= N \oplus r(U_q)$ 作为 $\mathbb{Z}$-模同构。根据推论 5.25， $r_p($ $U_q)$ 具有一个 $\mathbb{Z}$-基。

$$\left\{ y^j, y^k x_t, y^i\varepsilon_t \,\middle|\, 0 \leqslant j \leqslant 2n-2, 0 \leqslant k \leqslant \tfrac{n-1}{2}, 0 \leqslant i \leqslant \tfrac{n-3}{2}, 1 \leqslant t \leqslant n-1 \right\}$$

~根据引理 5.1 和 5.18， $r_p(U_q) = N \oplus r_p(\overline{U}_q)$。因此，由命题 4.5 和推论 5.7 可知, $\{y^k x_t, y^i\varepsilon_t | 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}, 0 \leqslant i \leqslant \frac{n-3}{2}, 1 \leqslant t \leqslant n-1\}$ 是 N的一组 $\mathbb{Z}$基。于是，该命题由命题 5.15 得证。□

命题 5.30。设 $1 \leqslant t \leqslant n-1$、 $s \geqslant 1$ 和 $\eta \in \overline{\mathbb{k}}$。则我们有

(1) $z_+x_t = z_-x_t = (2g(y) - 1)x_t$,
(2) $z_+\varepsilon_t = z_-\varepsilon_t = (2g(y) - 1)\varepsilon_t$, (
3) $w_{s,\ \eta}x_t = w_{s,\ \eta}\varepsilon_t = sg(y)\varepsilon_t$,

其中 $g(y) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=0}^{[\frac{n-1-2k}{4}]} (-1)^i \frac{k+2i}{k+i} \binom{k+i}{i} y^k + \sum_{1 \leqslant i \leqslant [\frac{n-1}{4}]} (-1)^i 2 + 1 \in r(\widetilde{U}_q)$.

证明。由推论 4.8–4.9 以及推论 5.22 的证明可得。 □

令 $Y = \{y, z_+, z_-, w_{k,\eta}, x_t, \varepsilon_t | k \geqslant 1, 1 \leqslant t \leqslant n-1, \eta \in \overline{\Bbbk}\}$，并令 $\mathbb{Z}[Y]$ 为相应的多项式环。那么 $U \subseteq \mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Z}[Y]$ 和 $I \subseteq \mathbb{Z}[X'] \subseteq \mathbb{Z}[Y]$，其中 U 和 $\mathbb{Z}[X]$ 定义于上一小节中。

令 U_0 为 $\mathbb{Z}[Y]$ 的一个子集，定义如下：

$$U_0 = \left\{ \begin{array}{l|l} (z_+ - z_-)x_t, & \\ (z_+ - z_-)\varepsilon_t, & \\ w_{s,\eta}x_t - w_{s,\eta}\varepsilon_t, & \\ z_+x_t - (2g_4(y)-1)x_t, & s \geqslant 1, \\ z_+\varepsilon_t - (2g_4(y)-1)\varepsilon_t, & 1 \leqslant t \leqslant n-1, \\ w_{s,\eta}x_t - sg_4(y)\varepsilon_t, & \eta \in \overline{\Bbbk} \end{array} \right\},$$

设 T 为由 $I \cup U \cup U_0$ 生成的 $\mathbb{Z}[Y]$ 的理想。

~定理 5.31. 格林环 $r(U_q)$ 与 $\mathbb{Z}[Y]/T$ 同构

~证明。根据第 4 节，格林环 $r(U_q)$ 是交换的。因此，由命题~5.28，存在一个环满同态 ψ，从 $\mathbb{Z}[Y]$ 到 $r(U_q)$，使得 $\psi(y) = [V_2]$，$\psi(z_+) = [\Omega V_1]$，$\psi(z_-) = [\Omega^{-1}V_1]$，$\psi(w_{k,\eta}) = [M_k(1,\eta)]$，$\psi(x_t) = [\mathrm{V}(t,0)]$，以及 $\psi(\varepsilon_t) = [\mathrm{V}(t,1)]$，对任意的 $k \geqslant 1$、$1 \leqslant t \leqslant n-1$ 和 $\eta \in \overline{\Bbbk}$ 均成立。由定理 5.17、5.26 和命题 5.30 可知，$\psi(T) = 0$。因此，存在唯一的环~满同态 $\overline{\psi}$，从 $\mathbb{Z}[Y]/T$ 到 $r(U_q)$，使得 $\overline{\psi}(\overline{u}) = \psi(u)$，$u \in \mathbb{Z}[Y]$，其中$\overline{u}$ 是 u 在从 $\mathbb{Z}[Y]$ 到 $\mathbb{Z}[Y]/T$ 的典范投影下的像。根据 T 的定义，$\mathbb{Z}[Y]/T$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模，由以下元素生成：

$$W = \left\{ \begin{array}{l|l} \overline{y}^j, \overline{y}^k\overline{x}_t, \overline{y}^i\overline{\varepsilon}_t, & 0 \leqslant j \leqslant 2n-2, 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ \overline{y}^l\overline{z}_+^s, \overline{y}^l\overline{z}_-^s, & 0 \leqslant i \leqslant \frac{n-3}{2}, 1 \leqslant t \leqslant n-1, \\ \overline{y}^l\overline{w}_{s,\eta} & 0 \leqslant l \leqslant n-2, s \geqslant 1, \eta \in \overline{\Bbbk} \end{array} \right\}.$$

此外，我们有 $\overline{\psi}(\overline{y}^j) = [V_2]^j$, $\overline{\psi}(\overline{y}^k\overline{x}_t) = [V_2]^k[\mathrm{V}(t,0)]$, $\overline{\psi}(\overline{y}^i\overline{\varepsilon}_t) = [V_2]^i[\mathrm{V}(t,1)]$,$\overline{\psi}(\overline{y}^l\overline{z}_+^s) = [V_2]^l[\Omega V_1]^s$, $\overline{\psi}(\overline{y}^l\overline{z}^s) = [V_2]^l[\Omega^{-1}V_1]^s$ 以及 $\overline{\psi}(\overline{y}^l\overline{w}_{s,\eta}) = [V_2]^l[M_s(1,\eta)]$。根据命题 5.29，$W$ 是 $\mathbb{Z}$上的一个线性无关集，因此 W 是 $\mathbb{Z}[Y]/T$的一个 $\mathbb{Z}$-基。由此，$\overline{\psi}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模同构，因而也是一个环同构。

□

~ ~根据注记 4.2，小拟量子群 U_q 的稳定格林环 $r_{st}(U_q)$ 与小量子群 $\overline{U}_q$ 的稳定格林环 $r_{st}(\overline{U}_q)$ 同构。由引理 5.4 可知，$r_{st}(\overline{U}_q)$ 与 $r(\overline{U}_q)/([V_n])$ 同构，后者是 $r(\overline{U}_q)$ 关于由 $[V_n]$ 生成的理想 $([V_n])$ 的商环。因此，由定理 5.17 可得以下推论。

推论 5.32. 设 $\mathbb{Z}[Y']$ 为由以下变量构成的多项式环：

$$Y' = \{y, z_+, z_-, w_{k,\eta} | k \geqslant 1, \eta \in \overline{\Bbbk}\},$$

并令 J 为由以下子集生成的 $\mathbb{Z}[Y']$ 的理想:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(y), z_+z_- - 1, \\ (z_+ - f_4(y))w_{k,\eta}, (z_+ - z_-)w_{k,\eta}, \\ w_{k,\eta}w_{s,\alpha}, w_{k,\eta}(w_{t,\eta} - 1 - f_4(y)) \end{array} \middle| \begin{array}{l} k, s, t \geqslant 1 \\ with\ k \leqslant t, \\ \eta, \alpha \in \overline{\Bbbk} \\ with\ \eta \neq \alpha \end{array} \right\},$$

其中， $f_1(y)$、 $f_4(y) \in \mathbb{Z}[y]$ 在上一小节中给出。因此，稳定 Green~环 $r_{st}(U_q)$ 同构于商环 $\mathbb{Z}[Y']/J$。

ACKNOWLEDGMENTS

本工作得到国家自然科学基金（项目编号：12071412、12201545）的资助。

References

[1] M. Ausander、I. Reiten 和 S. O. Smalø，《Artin代数表示论》，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[2] J. Andrea，Hopf代数表示的一个类迹不变量，《通信代数》38（2010），3456-3468。[3] C. Cibils，基本分裂Hopf代数的投射类环，《K理论》17（1999），385-393。[4] H. X. Chen 和 Y. Zhang，从张量范畴的结构不变量重构张量范畴。《比利时数学会Simon Stevin通报》27（2020）：245-279。[5] H. X. Chen，一类非交换且非余交换Hopf代数：量子版本，《通信代数》27（1999），5011-5032。[6] H. X. Chen，一类量子双代数的不可约表示，《代数杂志》225（2000），391-409。[7] H. X. Chen，一类Drinfeld双代数的表示，《通信代数》33（2005），2809-2825。[8] H. X. Chen，Drinfeld双代数的格林环 $D(H_4)$，《代数与表示论》17（2014），1457-1483。[9] H. X. Chen、H. S. E. Mohanmmed、W. J. Lin 和 H. Sun，一族秩二带尖点Hopf代数的投射类环，《比利时数学会Simon Stevin通报》23（2016），693-711。[10] H. X. Chen、H. S. E. Mohammed 和 H. Sun，Taft代数的Drinfeld双代数上模的张量积的不可分解分解，《纯粹与应用代数杂志》221（2017），2752-2790。[11] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，《数学调查与专著》第205卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。[12] H. Kondo 和 Y. Saito，与 $\mathfrak{sl}_2$ 相关的受限量子包络代数上模的张量积的不可分解分解，《代数杂志》330（2011），103-129。[13] C. Kassel，《量子群》，施普林格出版社，纽约，1995年。[14] S. Montgomery，《Hopf代数及其在环上的作用》，数学CBMS丛书，第82卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年。[15] S. H. Ng 和 P. Schauenburg，半单拟Hopf代数的中心不变量与高阶指标，《美国数学会汇刊》360（2008），第4期，1839-1860。[16] V. Ostrik，秩二融合范畴，《数学研究快报》10（2003）：177-183。[17] V. Ostrik，秩三融合范畴。arxiv:13094822。[18] E. Rowell、R. Strong 和 Z. Wang，关于模张量范畴的分类。《数学物理通讯》292（2009）：343-389。[19] R. Suter，关于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的模，《数学物理通讯》163（1994），359-393。[20] D. Su 和 S. Yang，小量子群 $\overline{U}_q(sl_2)$ 的表示环，《数学物理杂志》58（2017），091704。

[21] H. Sun、H. S. E. Mohammed、W. Lin 和 H. X. Chen, 《Taft代数的 Drinfeld双代数的格林环》, 《代数通讯》48（2020）, 3933–3947。[22] Y. Yang、Y. H. Zhang, 《Cartan 型拟 Hopf 代数与小拟量子群》, 《当代数学》771（2021）, 333–359。

School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China

Email address: huasun@yzu.edu.cn

School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China

Email address: hxchen@yzu.edu.cn

Department of Mathematics & Statistics, University of Hasselt, Universitaire Campus, 3590 Diepeenbeek, Belgium

Email address: yinhuo.zhang@uhasselt.be