arXiv:2305.06107v2 [math.NT] 9 Oct 2023

On real zeros of the Hurwitz zeta function

Karin Ikeda

Abstract. 本文给出了赫尔维茨ζ函数在给定区间内实零点唯一性的相关结果。对于所讨论的唯一性问题，若零点存在，则 Endo-Suzuki 和 Matsusaka 已分别证明了区间 $(0, 1)$ 和 $(-N, -N+1)$ 内实零点的唯一性，其中 $N \geq 5$。本文通过考察某些相关多项式的性质，证明了其余区间内实零点的唯一性。

1. Introduction

对于固定实数 a 且 $0 < a \leq 1$，赫尔维茨ζ函数 $\zeta(s, a)$ 定义为

$$\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

通常，记作 $s = \sigma + it$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$。该级数在半平面 $\sigma > 1$ 内绝对收敛且局部一致收敛，并且 $\zeta(s, a)$ 经解析延拓后可扩展至整个复平面，但在 $s = 1$ 处存在一个简单极点。

我们关注 $\zeta(s, a)$ 的零点。首先，当 $a = 1/2$ 或 1 时，函数 $\zeta(s, a)$ 可以利用黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 表示为 $\zeta(s, 1/2) = (2^s - 1)\zeta(s)$ $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$。因此，除了临界带 $0 < \sigma < 1$ 内的非平凡零点外，在每个负偶数整数处（当 $a = 1/2$ 时为每个非正偶数整数处）还有一个单零点（称为平凡零点）。在本文中，我们始终假设 $a \neq 1/2, 1$。

在 [7] Spira 证明，赫尔维茨ζ函数 $\zeta(s, a)$ 在该区域内没有零点。 n

$$\sigma \geq 1 + a$$

or

$$\sigma \leq -1 \quad \text{and} \quad |t| \geq 1.$$

他还证明，对于 $|t| < 1$， $\zeta(s, a)$ 在该区域内的唯一零点是

$$\sigma \leq \begin{cases} -4a - 1 & (0 < a < 1/2) \\ -4a + 1 & (1/2 < a < 1) \end{cases}$$

位于实轴上（他得到了更精确的结果）。

自 Spira 以来，关于 Hurwitz ζ 函数实零点的研究进展甚微。然而，最近 Nakamura 给出了区间 $(0, 1)$ 和 $(-1, 0)$[5, 6] 内存在实零点的条件。Matsusaka 对这一结果作出了如下改进。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11M35.
The first author was supported by WISE program (MEXT) at Kyushu University.

回顾关于 [1, 2]取值的 $\zeta(s,a$在非正整数处的经典结果

$$\zeta(-N,a)=-\frac{B_{N+1}(a)}{N+1}\quad(N\geq 0).$$

这里， $B_n(x)$ 是由生成级数定义的第 n 个伯努利多项式。

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

因此，如果 $B_N(a)$ 和 $B_{N+1}(a)$ 的符号不同，那么区间 $(-N,-N+1)$ 内至少存在一个零点。Matsusaka 证明了反过来这一结论也成立。

定理 1.1 （[4]）。设 $N\geq 0$ 为一个整数。那么， $\zeta(\sigma,a)$ 在区间 $(-N,-N+1)$ 内有一个零点，当且仅当 $B_N(a)B_{N+1}(a)<0$。

此外，综合 Endo-Suzuki [3] 和 Matsusaka [4], 的研究成果，我们可以得知以下情形下零点的唯一性。

定理 1.2. [3, 4] 假设 $N\geq 5$ 或 $N=0$。若 $B_N(a)B_{N+1}(a)<0$，则 $\zeta(\sigma,a)$ 在区间 $(-N,-N+1)$ 内的零点唯一且为单零点。

本文彻底解决了 $\zeta(s,a)$ 的实零点唯一性问题。

定理 1.3. 对于 $1\leq N\leq 4$， $\zeta(\sigma,a)$ 在区间 $(-N,-N+1)$ 内的零点也是唯一且为单零点，当 $B_N(a)B_{N+1}(a)<0$ 时。

因此，赫尔维茨ζ函数的所有实零点与黎曼 ζ 函数一样，都是单零点。此外，正如下述推论所示，我们知道这些零点的位置。

推论 1.4. 设 $M\geq 0$ 为整数。那么 $\zeta(\sigma,a)$ 在区间 $[-2M-2,-2M)$ 内恰有一个零点。

2. 定理 1.3 的证明定理 1.3 和 推论 1.4

我们从赫尔维茨ζ函数在某个特定垂直带内的如下积分表示（或多或少是众所周知的）开始（证明参见 [4, 命题 2.3] ）。

Proposition 2.1. *In the region $-N<Re(s)<-N+1\,(N\geq 0)$, we have*

$$\Gamma(s)\zeta(s,a)=\int_0^{\infty}H_N(a,x)x^{s-1}dx,\quad H_N(a,x):=\frac{e^{(1-a)x}}{e^x-1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(1-a)}{n!}x^{n-1}.$$

Set

$$h_N(a,x):=x(e^x-1)H_N(a,x)$$

and

$$f_N(a,x):=e^{(a-1)x}\frac{\partial^{N+1}}{\partial x^{N+1}}h_N(a,x).$$

We prove our main theorem (Theorem 1.3) by using the following criterion, which generalizes the previous works ([3, 4]).

Proposition 2.2. *If the function $\partial/\partial x f_N(a,x)$ has exactly one zero in the range $x>0$, then the Hurwitz zeta function $\zeta(s,a)$ has a unique simple real zero in the interval $(-N,-N+1)$.*

该命题可直接由下面的引理推出，它是[3,引理 2.2. 2.3]的推广。

引理 2.3. 假设 $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$ 且函数 $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 在 $x > 0$ 中恰有一个实零点。那么，存在唯一的正数 $x_0 = x_0(a) > 0$，使得$H_N(a,x_0) = 0$，并且满足以下两种情况之一。

$$H_N(a,x) < 0 \ (0 < x < x_0) \ and \ H_N(a,x) > 0 \ (x_0 < x),$$

or

$$H_N(a,x) > 0 \ (0 < x < x_0) \ and \ H_N(a,x) < 0 \ (x_0 < x)$$

成立。此外，函数 $x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a)$ 在区间 $(-N,-N+1)$ 内关于 σ 单调递增或单调递减。

Proof. 证明过程与 [3] 中的相同。由于 $x(e^x-1) > 0$ 对任意$x > 0$均成立，我们可以考察 $h_N(a,x)$ 的符号。根据 $h_N(a,x)$ 的定义，有

$$h_N(a,0) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} h_N(a,x) = \begin{cases} \infty & (B_N(1-a) < 0), \\ -\infty & (B_N(1-a) > 0). \end{cases}$$

此外，一阶导数 $\partial/\partial x h_N(a,x)$ 可计算为

$$\frac{\partial}{\partial x}h_N(a,x) = (1+(1-a)x)e^{(1-a)x} - e^x\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(1-a)}{n!}x^n$$

$$-(e^x-1)\sum_{n=1}^{N}\frac{B_n(1-a)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

由此可得 ncludes

$$\frac{\partial}{\partial x}h_N(a,0) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}h_N(a,x) = \begin{cases} \infty & (B_N(1-a) < 0), \\ -\infty & (B_N(1-a) > 0). \end{cases}$$

同样地，注意到 $h_N(a,x)$ 在 $x = 0$ 处的零点阶数为 $N+2$，我们同理得到

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}h_N(a,0) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial^i}{\partial x^i}h_N(a,x) = \begin{cases} \infty & (B_N(1-a) < 0), \\ -\infty & (B_N(1-a) > 0) \end{cases}$$

对于 $1 \le i \le N+1$。最后，由于下一个阶的导数

$$\frac{\partial}{\partial x}f_N(a,x) \ \left(= (a-1)e^{(a-1)x}\frac{\partial^{N+1}}{\partial x^{N+1}}h_N(a,x) + e^{(a-1)x}\frac{\partial^{N+2}}{\partial x^{N+2}}h_N(a,x)\right)$$

$$= (1-a)^{N+1} - \sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{N-m}\binom{N+1}{k}B_{m+k}(1-a)\right)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{ax}$$

$$-a\sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{N-m}\binom{N+1}{k}B_{m+k}(1-a)\right)\frac{x^m}{m!}e^{ax},$$

we obtain

$$\frac{\partial}{\partial x}f_N(a,0) = (N+2)B_{N+1}(1-a), \tag{2.1}$$

and

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}f_N(a,x)=\begin{cases}\infty & (B_N(1-a)<0),\\ -\infty & (B_N(1-a)>0).\end{cases} \tag{2.2}$$

由此以及假设 $B_N(a)B_{N+1}(a)<0$（注意 $B_n(1-a)=(-1)^nB_n(a)$），并且函数 $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 在 $x>0$ 中恰有一个实零点，我们通过归纳法得到该引理的第一个断言。

至于第二个，使用命题 2.1 可得到表达式

$$\begin{aligned}x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a)&=x_0^{-\sigma}\int_0^\infty\left(\frac{e^{(1-a)x}}{e^x-1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(1-a)}{n}x^{n-1}\right)x^{\sigma-1}dx\\&=\int_0^{x_0}H_N(a,x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^\sigma\frac{dx}{x}+\int_{x_0}^\infty H_N(a,x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^\sigma\frac{dx}{x},\end{aligned}$$

由此即可轻易推出该断言。 □

Proof of Theorem 1.3. 令 $N\geq 1$。由命题 2.2可知，我们只需证明函数 $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 在范围 $x>0$内恰好有一个零点。由2.1式和2.2式可见， $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 在 $x>0$内至少有一个零点。

为证明其唯一性，我们考察导数 $\partial^2/\partial x^2 f_N(a,x)$，其计算结果为（约定空和为 0）

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_N(a,x)=\\&e^{ax}\left(-\sum_{m=0}^{N-2}\left(\sum_{k=0}^{N-2-m}\binom{N+1}{k}B_{m+2+k}(1-a)+2a\sum_{k=0}^{N-1-m}\binom{N+1}{k}B_{m+1+k}(1-a)\right.\right.\\&\left.+a^2\sum_{k=0}^{N-m}\binom{N+1}{k}B_{m+k}(1-a)\right)\frac{x^m}{m!}\\&+\left(-2aB_N(1-a)-a^2\left((N+1)B_N(1-a)+B_{N-1}(1-a)\right)\right)\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\\&\left.-a^2B_N(1-a)\frac{x^N}{N!}\right),\end{aligned}$$

因此，我们考察 x中的 $e^{-ax}\partial^2/\partial x^2 f_N(a,x)$，它是一个次数为 N的多项式。令 $P_N(a,x):=e^{-ax}\partial^2/\partial x^2 f_N(a,x)$，并令 $C_{N,m}(a)$ 为 $P_N(a,x)$ 中 x^m的系数：

$$P_N(a,x)=\sum_{m=0}^{N}C_{N,m}(a)\,x^m.$$

具体而言，系数为

$$\begin{aligned}C_{N,m}(a)=-\left(\sum_{k=0}^{N-2-m}\binom{N+1}{k}B_{m+2+k}(1-a)+2a\sum_{k=0}^{N-1-m}\binom{N+1}{k}B_{m+1+k}(1-a)\right.\\\left.+a^2\sum_{k=0}^{N-m}\binom{N+1}{k}B_{m+k}(1-a)\right)\frac{1}{m!}\quad(0\leq m\leq N).\end{aligned}$$

我们将证明，多项式 $P_N(a,x)$ 在范围 $x>0$ 内至多有一个实零点。由此，根据 $\partial/\partial x f_N(a,0)$ 的符号以及当 $x\to\infty$ 时 $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 的变化，可以得出 $\partial/\partial x f_N(a,x)$ 在 $x>0$ 内只有一个零点。

现在我们分别考察 N 的每种情形。

$N=1$的情形。此情形显然成立，因为 $P_1(a,x)$ 是一个一次多项式。

$N=2$的情形。在此情形下， $P_2(a,x)$ 是关于 x 的二次多项式，其系数如下:

$$\begin{aligned}
C_{2,0}(a) &= -a^2+(2a+3a^2)B_1(a)-(1+6a+3a^2)B_2(a),\\
C_{2,1}(a) &= a^2B_1(a)+\left(-2a-3a^2\right)B_2(a),\\
C_{2,2}(a) &= -\frac{1}{2}a^2B_2(a).
\end{aligned}$$

设 α 和 β 是 $P_2(a,x)$ 的两个根，则可得

$$\alpha+\beta>0\Longleftrightarrow C_{2,1}(a)C_{2,2}(a)<0,\qquad \alpha\beta>0\Longleftrightarrow C_{2,0}(a)C_{2,2}(a)>0. \tag{2.3}$$

现在，我们考察各多项式（关于 a）$C_{2,\,0}(a)$ $C_{2,\,1}(a)$ $C_{2,\,2}(a)$的符号变化。首先，考虑 $C_{2,\,0}(a)$。根据数值

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= C_{2,0}(-1.251)=-0.00334706, & \nu_1 &= C_{2,0}(-1.250)=0.00911458,\\
\mu_2 &= C_{2,0}(-0.115)=0.000708631, & \nu_2 &= C_{2,0}(-0.114)=-0.00118935,\\
\mu_3 &= C_{2,0}(0.402)=-0.000598225, & \nu_3 &= C_{2,0}(0.403)=0.000839283,\\
\mu_4 &= C_{2,0}(0.962)=0.00376954, & \nu_4 &= C_{2,0}(0.963)=-0.000230453,
\end{aligned}$$

我们可知，$C_{2,\,0}(a)$ 在每个区间 (μ_j,ν_j) 内至少有一个根，其中 $1\le j\le 4$。但由于$C_{2,\,0}(a)$ 是四次多项式，因此这恰好就是四个根。我们还计算了 $C'_{2,\,0}(a)$ 的近似零点:

$$\begin{aligned}
C'_{2,0}(-0.873) &= 0.000063404, & C'_{2,0}(-0.872) &= -0.0193418,\\
C'_{2,0}(0.128) &= -0.00116582, & C'_{2,0}(0.129) &= 0.00623973,\\
C'_{2,0}(0.744) &= 0.0100306, & C'_{2,0}(0.745) &= -0.0019235.
\end{aligned}$$

From these, we obtain the following table.

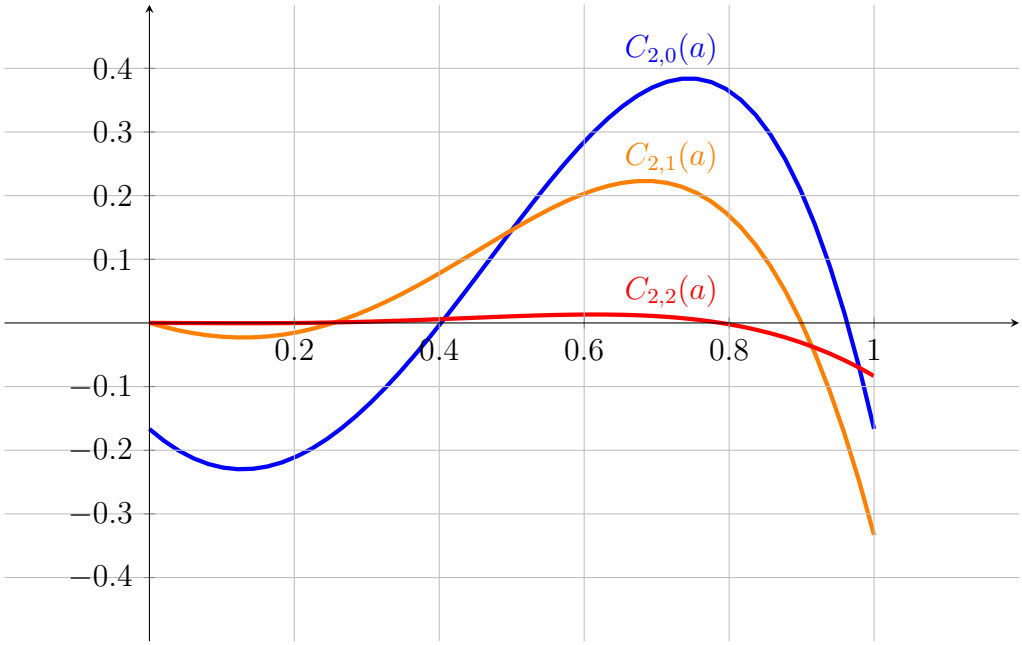
a	0	$\cdots$	$0.128\ldots$	$\cdots$	$0.402\ldots$	$\cdots$	$0.744\ldots$	$\cdots$	$0.962\ldots$	$\cdots$	1
$C'_{2,0}(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$C_{2,0}(a)$	1/6	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	

我们得到 $C_{2,1}(a)C_{2,2}(a)$ 的类似表格如下。

a	0	$\cdots$	$0.129\ldots$	$\cdots$	$0.253\ldots$	$\cdots$	$0.684\ldots$	$\cdots$	$0.899\ldots$	$\cdots$	1
$C'_{2,1}(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$C_{2,1}(a)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	

a	0	$\cdots$	$0.135\ldots$	$\cdots$	$0.211\ldots$	$\cdots$	$0.614\ldots$	$\cdots$	$0.788\ldots$	$\cdots$	1
$C'_{2,2}(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$C_{2,2}(a)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	

基于 基于此，$C_{2,0}(a)C_{2,1}(a)C_{2,2}(a)$ 的粗略图像可绘制如下 .



设 $c_{2,0,i}$,$c_{2,1,i}$,$c_{2,2,i}$ $(i = 1, 2)$ 为 $C_{2,0}(a)$ $C_{2,1}(a)$ 以及 $C_{2,2}(a)$ 在 $0 < a < 1$ 中的零点。我们可以看到,

$$0 < c_{2,2,1} < c_{2,1,1} < c_{2,0,1} < c_{2,2,2} < c_{2,1,2} < c_{2,0,2} < 1$$

and, if a is in the range

$$0 < a < c_{2,2,1} \text{ or } c_{2,0,1} < a < c_{2,2,2} \text{ or } c_{2,0,2} < a < 1,$$

那么， $P_2(a, x)$ 的所有系数都具有相同的符号，因此 $P_2(a, x) = 0$ 在 $x > 0$ 中无解。如果 a 满足

$$c_{2,2,1} < a < c_{2,0,1} \text{ or } c_{2,2,2} < a < c_{2,0,2},$$

那么我们有一个负解和两个正解。因此，我们已经证明，在所有情形下， $P_2(a, x)$ 在范围 $x > 0$ 内至多有一个实零点。

$N = 3$ 的情形。我们按照与 $N = 2$ 情形相同的方式进行。$P_3(a, x)$ 是一个关于 x 的三次多项式。设 α、 β 和 γ 是 $P_3(a, x)$ 的三个根，则我们看到,

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma > 0 \iff C_{3,2}(a)C_{3,3}(a) < 0, \\ &\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha > 0 \iff C_{3,1}(a)C_{3,3}(a) > 0, \\ &\alpha\beta\gamma > 0 \iff C_{3,0}(a)C_{3,3}(a) < 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

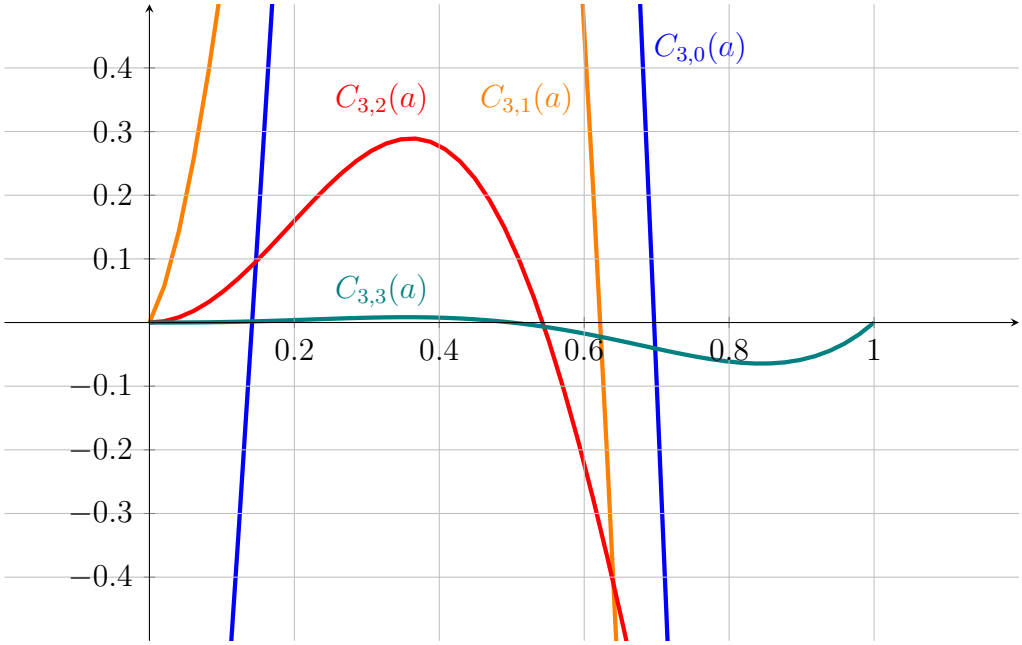
我们得到以下表格以及 $C_{3,0}(a)$、$C_{3,1}(a)$、$C_{3,2}(a)$、$C_{3,3}(a)$ 的粗略图像。

a	0	$\cdots$	0.141...	$\cdots$	0.440...	$\cdots$	0.696...	$\cdots$	0.976...	$\cdots$	1
$C'_{3,0}(a)$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$C_{3,0}(a)$	−2	↗	0	↗		↘	0	↘		↗	

a	0	$\cdots$	0.364...	$\cdots$	0.622...	$\cdots$	0.946...	$\cdots$	1
$C'_{3,1}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$C_{3,1}(a)$	0	↗		↘	0	↘		↗	

a	0	$\cdots$	0.361...	$\cdots$	0.542...	$\cdots$	0.896...	$\cdots$	1
$C'_{3,2}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$C_{3,2}(a)$	0	↗		↘	0	↘		↗	

a	0	$\cdots$	0.355...	$\cdots$	0.5	$\cdots$	0.844...	$\cdots$	1
$C'_{3,3}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$C_{3,3}(a)$	0	↗		↘	0	↘		↗	



设 $c_{3,0,1}, c_{3,0,2}, c_{3,1,1}, c_{3,2,1}, c_{3,3,1}$ 分别为 $C_{3,0}(a)$、$C_{3,1}(a)$、$C_{3,2}(a)$ 和 $C_{3,3}(a)$ 在$0 < a < 1$中的零点。我们看到

$$0 < c_{3,0,1} < c_{3,3,1} < c_{3,2,1} < c_{3,1,1} < c_{3,0,2} < 1.$$

如果 a 位于范围 $c_{3,0,1} < a < c_{3,3,1}$ 或 $c_{3,0,2} < a < 1$，那么 $P_3(a,x) = 0$ 在 $x > 0$ 中无解，因为 $C_{3,0}(a)$、$C_{3,1}(a)$、$C_{3,2}(a)$ 和 $C_{3,3}(a)$ 要么全部为正，要么全部为负。

在 $0 < a < c_{3,0,1}$ 或 $c_{3,1,1} < a < c_{3,0,2}$的情形下，常数项 $C_{3,0}(a)$ 的符号与其余系数 $C_{3,1}(a)$、$C_{3,2}(a)$ 和 $C_{3,3}(a)$ 的符号不同。因此我们得出结论，在这些情形下，$P_3(a,x) = 0$ 在范围 $x > 0$ 内只有一个解。

Finally, suppose a is in the range

$$c_{3,3,1} < a < c_{3,1,1}.$$

于是我们有 $\alpha\beta\gamma > 0$。如果 α、β 和 γ 都是实数，那么结合 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < 0$，我们可以看出 α、β、γ 中只有一个为正，即 $P_3(a,x) = 0$ 有两个负解和一个正解。如果 α、β、γ 中有两个是复数（互为共轭），那么由 $\alpha\beta\gamma > 0$ 可知，另一个就是唯一的正根。

Hence we have shown that $P_3(a,x)$ has at most one real zero in the range $x > 0$.

The case of $N = 4$. The argument is also similar. The $P_4(a,x)$ is a polynomial of degree 4 in x. Notice that $C_{4,1}(a)$, $C_{4,2}(a)$, and $C_{4,3}(a)$ have two imaginary zeros, but by considering the zeros of the derivative $C_{4,1}(a)$, $C_{4,2}(a)$, and $C_{4,3}(a)$ and the signs of their values at $a = 0$, then we obtain the following table and graphs.

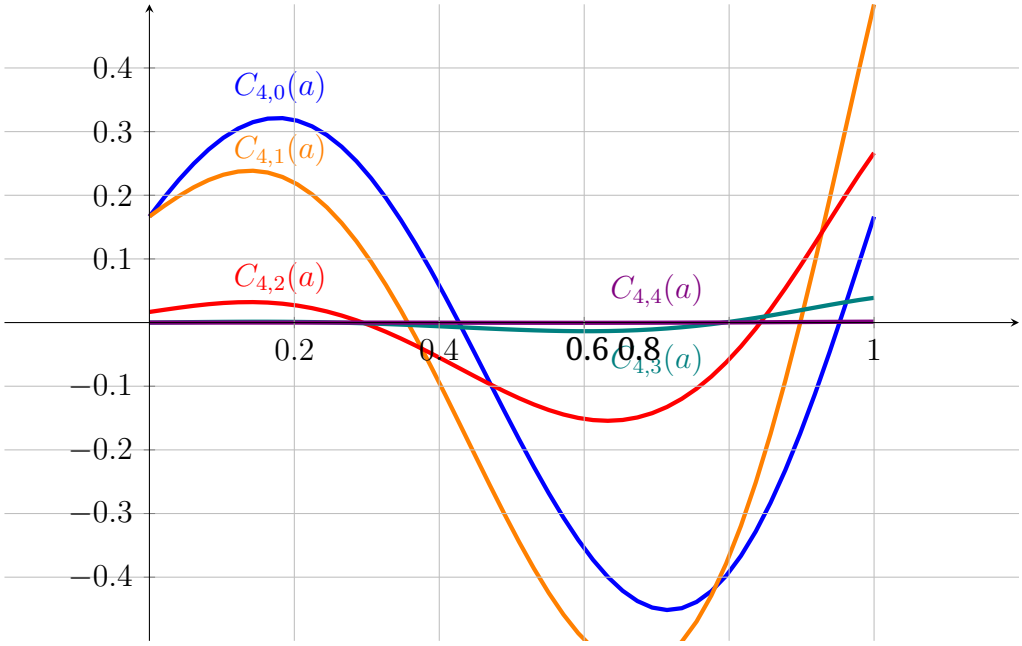
a	0	$\cdots$	0.176...	$\cdots$	0.427...	$\cdots$	0.715...	$\cdots$	0.952...	$\cdots$	1
$C'_{4,0}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$C_{4,0}(a)$	1/6	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

a	0	$\cdots$	0.138...	$\cdots$	0.356...	$\cdots$	0.757...	$\cdots$	0.898...	$\cdots$	1
$C'_{4,1}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$C_{4,1}(a)$	1/6	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

a	0	$\cdots$	0.138...	$\cdots$	0.294...	$\cdots$	0.632...	$\cdots$	0.843...	$\cdots$	1
$C'_{4,2}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$C_{4,2}(a)$	1/60	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

a	0	$\cdots$	0.151...	$\cdots$	0.259...	$\cdots$	0.603...	$\cdots$	0.793...	$\cdots$	1
$C'_{4,3}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$C_{4,3}(a)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

a	0	$\cdots$	0.162...	$\cdots$	0.240...	$\cdots$	0.588...	$\cdots$	0.759...	$\cdots$	1
$C'_{4,4}(a)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$C_{4,4}(a)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	



设 $c_{4,0,i}, c_{4,1,i}, c_{4,2,i}, c_{4,3,i}, c_{4,4,i}$ $(i = 1, 2)$ 是 $C_{4,0}(a)$ $C_{4,1}(a)$ $C_{4,2}(a)$ $C_{4,3}(a)$ 以及 $C_{4,4}(a)$ 在 $0 < a < 1$ 中的零点。我们看到

$$0 < c_{4,4,1} < c_{4,3,1} < c_{4,2,1} < c_{4,1,1} < c_{4,0,1} < c_{4,4,2} < c_{4,3,2} < c_{4,2,2} < c_{4,1,2} < c_{4,0,2} < 1.$$

与前面一样，我们很容易看出以下结论。如果 a 位于范围内

$$0 < a < c_{4,4,1},\ c_{4,0,1} < a < c_{4,4,2},\ c_{4,0,2} < a < 1$$

那么 $P_4(a, x) = 0$ 在范围 $x > 0$ 内没有实零点，而如果 a 位于

$$c_{4,1,1} < a < c_{4,0,1},\ c_{4,1,2} < a < c_{4,0,2}$$

则在范围 $x > 0$ 内，$P_4(a, x) = 0$ 只有一个解。

现在，我们只需证明，在情形 $c_{4,4,1} < a < c_{4,1,1}, c_{4,4,2} < a < c_{4,1,2}$ 下，$P_4(a, x)$ 在范围 $x > 0$ 内至多有一个实零点。在这种情形下，$C_{4,0}(a)$ 和 $C_{4,4}(a)$ 的符号不同，因此 $P_4(a, x)$ 的四个根的乘积为负。如果

存在复根，那么由此可知只有一个正根。现在假设所有根都是实数。注意， $P_4(a,x)$在 $x=0$ 处和在 $x\to\infty$ 处的符号不同。因此，只需证明 $\partial/\partial x P_4(a,x)=0$ 在范围 $x>0$ 内至多有一个实零点。由于

$$\frac{\partial}{\partial x}P_4(a,x)=4C_{4,4}(a)x^3+3C_{4,3}(a)x^2+2C_{4,2}(a)x+C_{4,1}(a),$$

the same argument gives us the following. If a is in the range

$$c_{4,2,1}<a<c_{4,1,1} \text{ or } c_{4,2,2}<a<c_{4,1,2},$$

then the constant term $C_{4,1}(a)$ has different sign from other $C_{4,i}$ $(i=2,3,4)$ and hence $\partial/\partial x P_4(a,x)=0$ has only one solution in the range $x>0$. If a is in the range

$$c_{4,4,1}<a<c_{4,2,1} \text{ or } c_{4,4,2}<a<c_{4,2,2},$$

then it holds $C_{4,4}(a)C_{4,1}(a)<0$ and $C_{4,4}(a)C_{4,2}<0$, thus $\partial/\partial x P_4(a,x)=0$ has only one solution in the range $x>0$ by the same argument as before. We therefore have shown that $P_4(a,x)$ has at most one real zero in the range $x>0$. □

Proof of Corollary 1.4. When $a\neq 1/2,1$, $B_{2M+1}(a)B_{2M+3}(a)<0$ holds for any integer $M\geq 0$. This together with Theorem 1.2 and Theorem 1.3 immediately gives the corollary. □

3. 区间（−4, −3）内唯一性的另一种证明

对于区间 (−4, −3)，利用 Spira 的一个结果 [7, 定理 3]，我们可以按如下方式进行。

假设 $B_4(a)B_5(a)<0$。那么 $\zeta(s,a)$ 在区间 (−4, −3) 内有奇数个实零点。若我们将 $b_{4,1}$ 和 $b_{4,2}$ 记为 $B_4(a)$ 在 (0, 1) ($b_{4,1}=0.2403\ldots<b_{4,2}=0.796\ldots$) 中的两个根，则条件 $B_4(a)B_5(a)<0$ 等价于 $b_{4,1}<a<1/2$ 或 $b_{4,2}<a<1$。首先，考虑 $1/4\leq a<1/2$ 或 $b_{4,2}<a<1$ 的情形。Spira 定理表明，$\zeta(s,a)$ 在包含区间 (−4, −3) 的宽度为 2 的区间内恰有一个实零点。因此，(−4, −3) 中的零点是唯一的。

在 $b_{4,1}<a<1/4$ 的情形下，Spira 定理告诉我们，$\zeta(s,a)$ 在区间 (−4, −3) 内至多有两个实零点（两个长度为 2 的区间覆盖 (−4, −3)）。但由于我们知道零点的个数是奇数，因此得出结论：只有一个零点。

Acknowledgements

作者谨向金子正宣、中村隆史和松阪俊树教授致以诚挚谢意，感谢他们提供宝贵的建议和意见。本研究得到九州大学 WISE 项目（文部科学省）的支持。

References

[1] T. M. Apostol, 《解析数论导论》, 数学本科生教材丛书, Springer, 纽约, 1976年。[2] T. Arakawa、T. Ibukiyama 和 M. Kaneko, 《伯努利数与ζ函数》, Springer 数学专著丛书, Springer, 东京, 2014年。[3] K. Endo 和 Y. Suzuki, 《赫尔维茨ζ函数的实零点及其在区间 (0,1) 内的渐近行为》, 《数学分析与应用杂志》, 473（2019）, 第2期, 624–635页。[4] T. Matsusaka, 《赫尔维茨ζ函数的实零点》, 《算术学报》, 183（2018）, 第1期, 53–62页。[5] T. Nakamura, 《赫尔维茨-勒奇ζ函数及赫尔维茨-勒奇型欧拉-扎吉尔双ζ函数的实零点》, 《剑桥哲学会数学论文集》, 160（2016）, 第1期, 39–50页。[6] T. Nakamura, 《区间 (−1,0) 内赫尔维茨-勒奇ζ函数的实零点》, 《数学分析与应用杂志》, 438（2016）, 42–52页。

[7] R. Spira, Zeros of Hurwitz zeta functions, Math. Comp., **30** (1976), no.136, 863–866.

Joint Graduate School of Mathematics for Innovation, Kyushu University, Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan
Email address: ikeda.karin.236@s.kyushu-u.ac.jp