arXiv:2305.06184v1 [math.GR] 10 May 2023

# 具有反中心元素的群

FRIEDER LADISCH

摘　要。我们研究含有元素 $g$ 的有限群 $G$，其中这些元素满足 $|\mathbf{C}_G(g)| = |G : G'|$。（这类元素是有限群的无不动点自同构的推广。）我们证明，这些群对于其换位子子群具有唯一的幂零补群共轭类，并且利用有限单群的分类，证明这些群是可解的。

## 1. 定义

在全文中，设 $G$ 为一个有限群。

1.1. **命题**。设 $a \in G$。以下断言等价：

(i) $|\mathbf{C}_G(a)| = |G : G'|$。(ii) $a^G = aG'$。(iii) $G' = [a, G]$ 作为集合。(iv) 每个非线性不可约特征标在 $a$处都取值为零。

证明。 $a$ 的共轭类包含于 $aG'$中，其基数为 $|G : \mathbf{C}_G(a)|$。这表明前三个条件等价。其余的等价性由第二正交关系得出：

$$|\mathbf{C}_G(a)| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(a)|^2 \geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Lin}(G)} |\lambda(a)|^2 = |G : G'|$$

当且仅当每个非线性不可约特征标在 $a$处都取值为零时，等号成立。 □

1.2. **定义**。若元素 $a \in G$ 满足 $|\mathbf{C}_G(a)| = |G : G'|$，则称其为反中心（在 $G$中）。

我们看到，反中心元素的中心化子具有可能的最小阶。下面给出一些显然的观察：若 $G$ 是非阿贝尔群且 $a$ 是反中心元素，则 $a \notin G'$，因为 $G'$ 包含多个共轭类。若 $a$ 在 $G$中是反中心元素，则对任意 $N \trianglelefteq G$， $aN$在 $G/N$ 中也是反中心元素。若 $G$ 和 $H$ 是两个群，则$(a, b)$在 $G \times H$ 中是反中心元素，当且仅当 $a$ 在 $G$ 中是反中心元素，且 $b$ 在 $H$中是反中心元素。

## 2. Examples

我们收集了一些具有反中心元素的群的例子。大多数情况下，证明都很初等。

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20D10, Secondary 20D15, 20C15.
*Key words and phrases.* Finite groups, Centralizers, solvable groups, Carter subgroup.

2.1. **例子**。 在阿贝尔群中，每个元素都是反中心元素。

2.2. **例子**。 设 $K$ 是一个具有固定点自由自同构 $\alpha$的群。那么，在半直积 $G = \langle\alpha\rangle K$中， $\alpha$ 是反中心的。更一般地，取一个阿贝尔群 $A$ ，并设其有一个满同态映射到$\langle\alpha\rangle$ ，再令 $G$ 为半直积 $G = AK$。

2.3. **例子**。 在一个超特殊 $p$-群中，所有不属于换位子群的元素都是反中心的。

下例的部分内容广为人知 [7,引理 12。3]:

2.4. **例子**。 设 $G$ 可解，并且 $G'$ 是 $G$的一个极小正规子群。那么 $G$ 含有反中心元素。有两种可能的情况:

**(i)** $G' \leqslant \mathbf{Z}(G)$, $|G'| = p$, $G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个初等阿贝尔 $p$-群，且每个非中心元素都是反中心的；**(ii)** $G' \cap \mathbf{Z}(G) = 1$，那么 $G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个弗罗贝尼乌斯群，其核为 $(G' \times \mathbf{Z}(G))/\mathbf{Z}(G)$，且补群是循环群。对于任何不属于 $\mathbf{C}_G(G')$ 的 $g$ ，我们有$G = \mathbf{C}_G(g)G'$ ，且 $\mathbf{C}_G(g) \cap G' = 1$，因此这些元素全都是反中心的。

In both cases, all nonlinear characters have the same degree.

证明。 如果 $G' \leqslant \mathbf{Z}(G)$，那么根据极小性， $|G'| = p$ 是一个素数，并且对于每个 $g \in G$, 映射 $x \mapsto [x, g]$ 实际上是一个群同态 $G \to G'$ ，其核为 $\mathbf{C}_G(g)$。通过该映射，因子群 $G/\mathbf{C}_G($ $g)$ 嵌入到 $G'$ 中，而后者具有素数阶。因此，如果 $g$ 是非中心元素，那么 $G/\mathbf{C}_G(g) \cong G'$ , 且 $g$ 是反中心的。对于 $x \in G$ ，我们看到，对于每个 $g \in G$，都有 $x^p \in \mathbf{C}_G(g)$。

现在设 $G' \cap \mathbf{Z}(G) = 1$ ，并令 $1 \neq x \in G'$。由于 $G'$ 是初等阿贝尔群，我们可知 $G' \leqslant \mathbf{C}_G(x) \lhd G$，且由于 $G' = \langle x^g \mid g \in G\rangle$，我们得到

$$\mathbf{C}_G(G') = \bigcap_{g \in G} \mathbf{C}_G(x^g) = \mathbf{C}_G(x).$$

因此，如果 $g \notin \mathbf{C}_G(G')$，那么 $\mathbf{C}_G(g) \cap G' = 1$ 且 $\mathbf{C}_G(g)$ 是阿贝尔群。由于 $|\mathbf{C}_G(g)| \geqslant |G : G'|$，我们有 $|\mathbf{C}_G(g)G'| = |\mathbf{C}_G(g)||G'| \geqslant |G : G'||G'| = |G|$。由此得出$G = \mathbf{C}_G(g)$ $G'$。于是 $\mathbf{Z}(G) = \mathbf{C}_G(g) \cap \mathbf{C}_G(G')$，并且 $\mathbf{C}_G(g) \setminus \mathbf{C}_G(G')$ 中的每个元素都在 $G'$ 上无不动点地作用，其中 $\mathbf{C}_G(G') = \mathbf{Z}(G) \times G'$。因此， $G/\mathbf{Z}(G)$ 是一个弗罗贝尼乌斯群，正如所声称的那样。关于这些次数的陈述很容易证明，而且是众所周知的 [7]。□

在其著作 [7, Lemma 12.3], 中，Isaacs 研究了满足 $G'$ 是 $G$ 的唯一极小正规子群这一条件的可解群（不过，这种唯一性条件并非十分必要）。这一结果被用于研究仅具有两个不同特征度的群。与其说“一个群仅具有两个不同的特征度”，不如说“每个非线性特征标在单位元 1 处都取相同的值 $m$”。这启发我们进行一种自然的推广，即将该表述中的‘1’替换为群中的某个非单位元。对于 $m \neq 0$，这类群曾由...
...进行过研究。

Bianchi、Chillag 和 Pacifici [1]。在这种情况下， $G' \setminus \{1\}$ 是 $G$ （因此$G'$ 是一个极小正规子群，并且 $G$ 是可解的），而该类群的结构受到这一假设的严格限制。我们在此研究的是$m = 0$ 这一情形，正如前面提到的例子所示，它更加困难。

2.5. **例**。 若 $A \lhd G$ 满足 $G/A$ 是循环群且 $A$ 是阿贝尔群，则所有满足 $G/A = \langle aA \rangle$ 的元素$a$ 都是反中心元素：由于 $A$ 的每个特征标都可延拓到其惯性群，因此非线性特征标均由包含 $A$的真子群诱导而来。这些子群必为正规子群，且不包含 $a$，所以非线性特征标在 $a$上取值为零。

2.6. 例。任何阶为 $p^n$ 的群（其中 $p$ 是素数）都含有反中心元素。若 $n \leqslant 3$, 则由 2.1 和 2.3 可得结论，因此设 $G$ 是一个阶为 $p^4$ 的群，并假设 $G$ 不含反中心元素。那么对于任意 $g \in G$，有 $|\mathbf{C}_G(g)| > |G : G'| \geqslant p^2$。由于 $G$ 必须是非阿贝尔群，因此存在元素 $g$，使得 $|\mathbf{C}_G(g)| = p^3$，于是 $\mathbf{C}_G(g) \lhd G$。接着，$\mathbf{C}_G(g)$ 是非阿贝尔群，否则根据 2.5，$\mathbf{C}_G(g)$之外的元素都是反中心元素。但这样一来，$|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(g))| = p$，从而得到 $g \in \mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(g)) \leqslant \mathbf{Z}(G)$，矛盾。

2.7. **示例**。借助 GAP 的 Small Groups 库 [4]，我们可以发现，存在一些群，它们不包含阶为 $p^5$ 的反中心元素，其中 $p$ 是一个奇素数，且阶为 $2^6$。事实上，存在具有这些阶的群 $G$ ，使得$|\mathbf{Z}(G)| \geqslant |G : G'|$。借助 GAP，我们还可以看到，所有阶为 $2^5$ 的群都包含反中心元素。

2.8. **例子**。设 $G$ 为由某个含有 $q$ 个元素的有限域上的元素构成的所有上三角 $n \times n$ 矩阵组成的群，且主对角线上的元素均为 1。则 $|G| = q^{\binom{n}{2}}, |G : G'| = q^{n-1}$。若 $a \in G$ 的最小多项式为 $(x-1)^n$，则$a$ 在矩阵环中的中心化子是由 $a$ 和该域生成的环。因此，中心化子的每个元素都可以唯一地表示为该域上关于 $a$ 的次数至多为$n-1$ 的多项式。 $G$ 中的中心化子包含常数项为 1 的多项式，因此 $|\mathbf{C}_G(a)| = q^{n-1}$。由此可知，这样的元素是反中心元素。此例表明，存在幂零指数任意大的、含有反中心元素的群。

2.9. **例子**。 设 $G$ 是一个阶为 $p^5$ 的特殊群，且 $a \in G \setminus \mathbf{Z}(G)$。那么 $a$ 在 $G$ 中是反中心的，但在 $\mathbf{C}_G(a)$ 中不是，因为 $\mathbf{C}_G(a)$ 是非阿贝尔群。因此，一个群的反中心元素在包含它的子群中未必仍然是反中心的。

2.10. **注释**。 如果一个群包含反中心元素，那么每个非线性特征标在换位子群上的限制都是可约的。每个非线性特征标都是非本原的。

证明。 如果 $\chi \in \operatorname{Irr} G$ 满足 $\chi_{G'} \in \operatorname{Irr} G'$，那么对于每个 $a \in G$ [7，根据引理 8.14], 都有 $\sum_{g \in G'} |\chi(ag)|^2 = |G'|$。但是，如果 $a$ 在 $G$ 中是反中心的，那么每个非线性特征标在 $aG'$ 上都取值为零。

现在记住，每个群都是一个 $M$-群（相对于 $G'$而言），这意味着对于每个 $\chi \in$不可约特征标$G$，都存在一个子群 $H$，满足 $G' \leqslant H \leqslant G$，并且 $\psi \in$不可约特征标$H$使得 $\chi = \psi^G$ 且 $\psi_{G'} \in$ 不可约特征标$G'$ [7, 定理 6。22]。由第一个陈述，我们显然有 $H < G$ 对于非线性的 $\chi$。□

2.11. **例子**。一个含有反中心元素的可解群不一定是单项群：令 $G$ 为 **SL(2,3)** 与一个阶为 8、中心已识别的非阿贝尔群的中心积：

$$G = (\mathbf{SL}(2,3) \times E)/Z \text{ where } Z = \{(1,1),(-1,z)\}, 1 \neq z \in \mathbf{Z}(E).$$

那么，元素 $(x,\ y)Z$（其中 $x \in$**SL(2，3)** 的阶为 3，且 $y \in E \setminus \mathbf{Z}(E)$）是反中心元素。容易计算得出，此类元素的中心化子为$\mathbf{C}(x) \times \mathbf{C}(y)/Z$，其阶为 12。这也等于导出子群的指数，因为 $G' \cong Q_8$ 且 $|G| = 96$。该群不是单项群；更确切地说，4 次不可约特征标不是单项特征标。

2.12. **例**。一个最大类 $p$ 群含有反中心元素，即不属于 $\mathbf{C}_G(\mathbf{K}_i(G)/\mathbf{K}_{i+2}(G))$ 的元素，其中 $i \geqslant 2$，这里 $\mathbf{K}_i(G)$ 是 $G$ [6, 的下降中心列项，参见 Hilfssatz III.14.3, Satz III.14.23]。由于此处反中心元素的阶为 $\leqslant p^2$，幂零类不受反中心元素阶的约束。

## 3. 补群

3.1. **命题**。设 $a \in G$ 为反中心的，且 Ω 是一个 $G$-集，$G'$ 在其上作传递作用。则 $a$ 恰好固定 Ω 的一个元素。若 $H \leqslant G$ 是 $G'$ 的补群（即 $G = HG'$），则 $a$ 包含于 $H$ 的唯一一个共轭子群中。若 $a \in H$ 且 $HG' = G$，则

(i) $[a,H] = H' = H \cap G'$。特别地，$a$ 在 $H$ 中是反中心的。(ii) $\{x \in G \mid a \in H^x\} = H$。(iii) $\mathbf{C}_G(a) \leqslant H$。(iv) $\mathbf{N}_G(H) = H$。

证明。令 $\omega \in \Omega$。由 $G'$-传递性，$\omega = \omega a x$ 对某个 $x \in G'$成立。由于 $a$ 是反中心的，$x = [a,g]$ 对某个 $g \in G$成立。于是 $\omega = \omega a[a,g] = \omega a^g$。因此，$\omega g^{-1}$ 被 $a$ 固定。这证明了固定元素的存在性。唯一性将在稍后证明。由于 $H$ 右陪集上的作用是 $G'$-传递的，包含 $a$ 的补群 $H$ 的共轭类唯一这一点将随之得到。在 (i)–(iv) 中，我们可以假设 $H$ 是 $G'$-传递 $G$-集 Ω 的一个元素稳定子。因此，在证明的其余部分，取 $\omega \in \Omega$，使得 $\omega a = \omega$，并令 $H = G_\omega$。我们有

$$[a,H] \subseteq H' \leqslant H \cap G'$$

and

$$|H \cap G'| = \frac{|H|}{|H : H \cap G'|} = \frac{|H|}{|G : G'|} = \frac{|H|}{|\mathbf{C}_G(a)|} \leqslant |H : \mathbf{C}_H(a)| = |[a,H]|.$$

因此处处成立等式。这证明了 (i)，也证明了 (iii)。如果 $\omega_1$ 是另一个被 $a$固定的元素，那么由传递性，$\omega = \omega_1 g$ 对某个 $g \in G$ 成立。于是 $\omega = \omega_1 g = \omega_1 ag = \omega g^{-1} ag = \omega a^{-1} g^{-1} ag = \omega[a, g]$。因此 $[a, g] \in H \cap G' = [a, H]$，所以 $[a, g] = [a, h]$ 对某个 $h \in H$成立。由于此时根据 (iii)，$gh^{-1} \in \mathsf{C}_G(a) \leqslant H$，我们得到 $g \in H$，从而 $\omega_1 = \omega g^{-1} = \omega$。因此，$a$ 固定 Ω 中唯一的元素。其余断言 (ii) 和 (iv) 是这一结论的推论。□

3.2. 注记. 另一种证明方法如下：设 $\pi$ 为 $G$ 在 Ω 上的作用所对应的置换特征标。由于 $G'$ 在 Ω 上传递作用，因此 $\pi$ 的唯一线性不可约成分是 $1_G$，即平凡特征标，其重数为 1。由于非线性不可约特征标在 $a$上取值为零，因此我们得到 $\pi(a) = 1$，这正是需要证明的结论。(ii) 是这一结论的推论，由此可得 (iii) 和 (iv)。(i) 也是 (ii) 的推论：若 $[a, g] \in H$，则由 (ii) 得到 $g \in H$，从而 $H \cap G' = H \cap [a, G] \subseteq [a, H]$。

3.3.**推论**。 如果 $G$ 包含反中心元素，那么$G$中 $G'$ 的每个补群都是异常的。

证明。 设 $G = HG'$ 和 $x \in G$。我们需要证明 $x \in L = \langle H, H^x \rangle$。设$a \in G$ 为反中心元。则 $a$ 包含于 $H$ 的唯一一个共轭子群中，不妨设该子群就是 $H$ 本身。现在，$a$ 在 $L$ 中是反中心的，因此固定 $H^x$的唯一一个 $L$-共轭子群，记为 $a \in H^{xy}$，其中 $y \in L$。由 $G$中的唯一性可得 $H = H^{xy}$。因此，$xy \in \mathbf{N}_G(H) = H \leqslant L$，从而 $x \in L$，这正是所要证明的。□

3.4.**引理**。 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$，其中 $N \trianglelefteq G$。则 $G = \mathbf{N}_G(P)N'$。如果 $N$是$\pi$-可解的，那么对于 $P$ 一个 ***Hall*** $\pi$-子群，同样的结论也成立。

证明。 由于 $PN'$ 是 $N$ 的特征子群，因此可得 $PN' \trianglelefteq G$。将 Frattini 论证应用于 $PN'$，得到 $G = \mathbf{N}_G(P)PN' = \mathbf{N}_G(P)N'$。 □

3.5. **推论**。 设 $N \trianglelefteq G$ 和 $p$ 为素数。则任意反中心元素都唯一固定一个 $N$ 的 ***Sylow*** $p$- 子群。若 $N$ 是 $\pi$- 可解的，则 ***Hall***$\pi$- 子群也具有相同性质。

证明。 令 $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$。根据引理 3.4，我们有 $\mathbf{N}_G(P)N' = G$。因此 $N'$进而 $G'$ 在 $p$ 的 Sylow $N$-子群上具有传递作用。由命题 3.1，结论得证。 □

We can use this to extend a result of Gross [8, Lemma 3] on groups admitting a fixed point free automorphism:

3.6.**命题**。如果 $G$ 有一个反中心元素 $a$，且 $N$ 有一个循环 ***Sylow***$p$-子群，其中 $N \lhd G$ 和 $N \leqslant G'$，那么 $N$ 有一个正规 $p$-补群。

证明。设 $P$ 是 $N$ 的循环 Sylow $p$ 子群。我们可以假设 $a \in H = \mathbf{N}_G(P)$。根据命题 3.1，我们有 $H' = [a, H] = H \cap G'$。但由于 Aut $P$ 是阿贝尔群，我们可知 $H' \leqslant \mathsf{C}_G(P)$。特别地，$\mathbf{N}_N(P) = H \cap N \leqslant H \cap G' \leqslant \mathsf{C}_G(P)$。根据伯恩赛德转移定理，$N$ 有一个正规 $p$ 补群。□

如果 $a$ 是反中心的，并且固定 $P \in \mathrm{Syl}_p G$，那么根据命题 $a$ 在 $\mathbf{N}_G(P)$ 中是反中心的，由命题 3.1可知。现在我们更仔细地考察这一情形：

3.7. **命题**。设 $G$ 具有正规 *Sylow* $p$-子群 $P$。令 $a = kx = xk$，其中 $x = a_p$ 且 $k = a_{p'}$，并令 $K$ 为 $G$ 中包含 $k$ 的 $P$ 的补群。则当且仅当满足以下条件时，$a$ 在 $G$ 中是反中心的：

(1) $k$ 在 $K$中是反中心的，(2) $x$ 在$\mathbf{C}_P(k)$中是反中心的，(3) $\mathbf{C}_P(k) \cap P' = \mathbf{C}_P(k)'$,(4) $\mathbf{C}_P(K) = \mathbf{C}_P(k)$。

*Proof.* If $a$ is anticentral in $G$, then $aP = kP$ is anticentral in $G/P \cong K$. We have

$$|G : G'| = |G : K'[P,K]P'| = |K : K'||P : [P,K]P'|.$$

Since $a$ is anticentral,

$$|P : [P,K]P'| = |G : G'|_p = |\mathbf{C}_G(a)|_p = |\mathbf{C}_P(a)|.$$

由于 $K$ 对 $p$-群 $P$ 有互素作用，因此由定理 5.3.5 和 5.2.3] 可知，$P = [P,K]\mathbf{C}_P(K)$ 且 $P/P' = [P,K]P'/P' \times \mathbf{C}^{P/P'}(K)$ [5,。令 $U = \mathbf{C}_P(k)$。那么

$$\begin{aligned}
|\mathbf{C}_U(x)| &= |\mathbf{C}_P(a)| \\
&= |P : [P,K]P'| = |\mathbf{C}_{P/P'}(K)| \\
&= |\mathbf{C}_P(K)P' : P'| && \text{[6, Satz I.18.6]} \\
(*) \qquad &\leqslant |\mathbf{C}_P(k)P' : P'| \\
&= |UP' : P'| = |U : U \cap P'| \\
(**) \qquad &\leqslant |U : U'| \leqslant |\mathbf{C}_U(x)|.
\end{aligned}$$

因此等式处处成立，特别地，$x$ 在 $U = \mathbf{C}_P(k)$ 中是反中心的，因为 $|\mathbf{C}_U(x)| = |U : U'|$。此外，$U \cap P' = U'$，所以条件 (3) 成立。最后，我们有 $\mathbf{C}_P(K)P' = \mathbf{C}_P(k)P'$，因此 $U = \mathbf{C}_P(k) \leqslant \mathbf{C}_P(K)P'$。由此可得。

$$U = \mathbf{C}_P(K)P' \cap U = \mathbf{C}_P(K)(P' \cap U) = \mathbf{C}_P(K)U'$$

and we conclude $U = \mathbf{C}_P(K)$.

Conversely, assume that the four conditions in the statement of the proposition hold. Then $x \in \mathbf{C}_P(k) = \mathbf{C}_P(K)$ and thus $\mathbf{C}_G(x) = K\,\mathbf{C}_P(x)$. It follows that

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_G(a) &= \mathbf{C}_G(k) \cap \mathbf{C}_G(x) = \mathbf{C}_K(k)\,\mathbf{C}_P(k) \cap K\,\mathbf{C}_P(x) \\
&= \mathbf{C}_K(k)\Big(\mathbf{C}_P(k) \cap \mathbf{C}_P(x)\Big) = \mathbf{C}_K(k)\,\mathbf{C}_U(x).
\end{aligned}$$

由于 $k$ 在 $K$ 中是反中心元，因此我们有 $|K : K'| = |\mathbf{C}_K(k)|$。其他假设确保不等式 (*) 和 (**) 成为等式，因此 $|P : [P,K]P'| = |\mathbf{C}_U(x)|$。然后

$$|\mathbf{C}_G(a)| = |K : K'||P : [P,K]P'| = |G : G'|$$

由此即可得出结论。 □

3.8. **Proposition.** *Let $H \leqslant G$ with $HG' = G$ and $a \in H$ anticentral in $G$. Let $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ be the Sylow $p$-subgroup of $G$ with $P^a = P$, and $S \in \mathrm{Syl}_p(H)$ with $S^a = S$. Then $P \cap H = S$.*

*Proof.* By Proposition 3.1, $a$ is anticentral in $H$ and, by Corollary 3.5, $a$ fixes unique Sylow $p$-subgroups $P$ and $S$ of $G$ and $H$ respectively. We work by induction on $|P|/|S|$. If $|P| = |S|$, the assertion is obvious. Let $|S| < |P|$. Set $N = \mathbf{N}_H(S)$. Then $NH' = H$ and $NG' = NH'G' = HG' = G$. Let $M = \mathbf{N}_G(S)$. Now $MG' = G$. Again, there is an unique $Q \in \mathrm{Syl}_p(M)$ such that $Q^a = Q$. As $S$ is a proper subgroup of some Sylow $p$-subgroup of $G$ and $S \trianglelefteq M$, we see $S < Q$, so by induction $P \cap M = Q$. But then

$$S \leqslant Q \cap N = P \cap M \cap N = P \cap N \leqslant P \cap H,$$

它是 $H$ 的一个 $p$-子群。因此 $S = P \cap H$，如所求。 □

众所周知，存在 $G'$ 的幂零补群。接下来我们证明，如果群含有反中心元素，那么幂零补群在共轭意义下唯一。

**记号。** 对于 $g \in G$，递归定义子集 $\mathbf{C}^i(g)$ 如下

$$\mathbf{C}^0(g) = 1 \text{ and } \mathbf{C}^{i+1}(g) = \{x \in G \mid [g, x] \in \mathbf{C}^i(g)\}.$$

Let

$$\mathbf{C}^\infty(g) = \bigcup_{i \geqslant 0} \mathbf{C}^i(g).$$

3.9. **定理。** 设 $a \in G$ 为反中心，并令 $D = \mathbf{C}^\infty(a)$。那么

(i) $D$ 是 $G$ 的幂零自正规化子群，(ii) $G = DG'$（$D$ 是 $G$ 中 $G'$ 的补群），(iii) 每个包含 $a$ 的 $G'$ 的补群都包含 $D$，(iv) 每个包含 $a$ 的幂零子群都包含于 $D$，(v) $D$ 是包含 $a$ 的 $G'$ 的唯一幂零补群。

证明。 我们先证明 (iii)：设 $H$ 是一个包含 $a$ 且满足 $HG' = G$ 的子群。由归纳法，假设 $\mathbf{C}^i(a) \subseteq H$。若 $x \in \mathbf{C}^{i+1}(a)$，则 $[a, x] \in \mathbf{C}^i(a) \subseteq H$，因此$a^x \in H$。由命题 3.1 (ii)， $x \in H$。这就证明了 (iii)。

为了证明 (iv)，令 $a \in H \leqslant \mathbf{G}$。那么，$H$ 的上升中心列的各项都包含于 $\mathbf{C}^i(a)$之中，因此 $H \subseteq D$，如果 $H$ 是幂零的。(iv) 得证。然而，众所周知（且容易证明），存在一个幂零补群$H$，它是 $G'$ [6, 定理 III.3。10], 根据命题 3.1，我们可以选择 $H$ 使得 $a \in H$。由 (iii) 和 (iv)， $H = D$。根据命题 3.1，每个补群都是自正规化的。至此，一切均得证。 □

回顾一下，自正规化幂零子群被称为卡特子群，因此$D$ 是 $G$的一个卡特子群。在可解群中，卡特子群总是存在且彼此共轭 [6, 定理 VI.12。2]。

3.10. **推论。** 设 $a$ 是 $G$ 和 $N \trianglelefteq G$ 中的反中心元素。对于每个素数 $p$，$\mathbf{C}^\infty(a)$正规化 $N$ 的一个西洛 $p$-子群。我们有

$$\mathbf{C}^\infty(a) = \bigcap\{\mathbf{N}_G(P) \mid P \in \operatorname{Syl} G \text{ and } P^a = P\}.$$

证明。根据推论3.5，反中心元素 $a$ 正规化 $N$的某个 Sylow $p$-子群 $P$；因此 $a \in \mathbf{N}_G(P)$。根据引理 3.4，我们有 $G = \mathbf{N}_G(P)N'$，因此必然有 $G = \mathbf{N}_G(P)G'$。根据定理 3.9(iii)，可得 $\mathbf{C}^\infty(a) \leqslant \mathbf{N}_G(P)$。这就证明了第一个结论。上述论证表明，$\mathbf{C}^\infty(a)$正规化了 $N$ 中唯一一个被 $a$正规化的 Sylow $p$-子群。将此结论应用于 $G$ 中被 $a$ 正规化的 Sylow 子群，我们可知，它们的正规化子的交包含 $\mathbf{C}^\infty(a)$。另一方面，这个交是幂零的，且包含 $a$，因此根据定理 3.9(iv)，它包含于 $\mathbf{C}^\infty(a)$。推论中的等式由此得证。□

在陈述下一个推论之前，我们采用以下术语 [3]：群 $G$ 的一个霍尔系是 $G$ 的一个霍尔子群集合，其中对于每个 $\pi \subseteq \{p \mid p \text{ 素数} \quad p \mid |G|\}$ 恰好包含一个霍尔$\pi$-子群，并且该集合中的任意两个子群$H$ 和 $K$ 满足 $HK = KH$。一个补群基是由 $G$的 $p$-补群组成的集合，对于每个整除 $|G|$的素数恰好取一个。一个西洛基是由 $G$的两两可置换的西洛 $p$-子群组成的集合，对于每个整除 $|G|$的素数 $p$ 恰好取一个。如果 $G$ 是一个可解群，那么霍尔系、补群基和西洛系均存在。每个霍尔系恰好包含一个补群基和一个西洛基。如果 $K = \{H_{p'} \mid p \mid |G|\}$ 是一个补群基，那么

$$\{G_\pi := \bigcap_{p \notin \pi} H_{p'} \mid \pi \subseteq \{p \mid p \mid |G|\}\}$$

是包含 $K$ 的唯一霍尔系统。如果 $B = \{S_p \mid p \mid |G|\}$ 是一个西罗基基，则

$$\{G_\pi := \prod_{p \in \pi} S_p \mid \pi \subseteq \{p \mid p \mid |G|\}\}$$

is the unique Hall system containing $B$ [3, p. 220-222],[6, Satz VI.2.2].

3.11. **推论。** 设 $N$ 是 $G$ 的可解正规子群，且 $a \in G$ 为反中心。那么该集合

$$\{H \leqslant N \mid H \text{ a Hall subgroup of } N \text{ and } H^a = H\}$$

*is a Hall system of $N$. If $G = N$ is solvable, the system normalizer of this Hall system is $\mathbf{C}^\infty(a)$.*

证明。 第二个断言由推论3.10 得出，而第一个断言则由推论3.5 通过对每个素数 $a$取一个不变 Hall $p'$-群，再取它们的交集即可得到。 $p$ □

## 4. Solvability

We begin with a result characterizing anticentral elements in solvable groups in terms of chief factors. It was pointed out to me by R. Knörr.

4.1. **Proposition.** *Let $G$ be solvable. An element $a$ is anticentral in $G$ if and only if the following conditions hold:*

(1) $a$ 在 $G$的非中心主因子上无不动点地作用。(2) 如果 $N/K$ 是一个中心主因子且 $N \leqslant G'$，那么$\mathbf{C}_G(aK) < \mathbf{C}_G(aN)$。

证明。我们先证明"仅当"方向：设 $N/K$ 是 $G$ 的一个主因子。由于 $aK$ 在 $G/K$ 中是反中心的，因此我们可以假设 $K = 1$，于是 $N$ 是一个极小正规子群。系统正规化子 $D = \mathsf{C}^\infty(a)$ 避开非中心主因子（Hauptsatz VI.11.10），并且包含 $\mathsf{C}_G(a)$。因此，当 $N$ 是非中心的时，$a$ 在 $N$ 上无不动点地作用。若 $1 < N \leqslant G' = [a, G]$，则显然 $\mathsf{C}_G(a) < \mathsf{C}_G(aN) = \{x \in G \mid [a, x] \in N\}$。

现在让我们证明另一个方向：假设命题的条件成立，并令 $1 < N \trianglelefteq G$ 为一个极小正规子群。根据归纳法，$aN$ 在 $G/N$ 中是反中心的。如果 $N \cap G' = 1$，那么 $\mathbf{C}_G(aN) = \{x \in G \mid [a, x] \in N\} = \mathbf{C}_G(a)$，并且$\mathbf{C}^{G/N}(aN) = \mathbf{C}_G(a)/N$。因此

$$|G : G'| = |(G/N) : (G/N)'||N| = |\mathbf{C}_{G/N}(aN)||N| = |\mathbf{C}_G(a)|,$$

so $a$ is anticentral. Otherwise we have $N \leqslant G'$. Then

$$|G : G'| = |G/N : (G/N)'| = |\mathbf{C}_{G/N}(aN)| = |C_G(aN)|/|N|.$$

我们希望证明这等于 $|\mathsf{C}_G(a)|$。由于 $|\mathsf{C}_G(aN) : \mathsf{C}_G(a)| = |[a, \mathsf{C}_G(aN)]|$且 $[a, \mathsf{C}_G(aN)] \subseteq N$，因此只需证明 $[a, \mathsf{C}_G(aN)] = N$即可完成证明。如果$N \leqslant \mathsf{Z}(G)$，那么映射 $x \mapsto [a, x]$ 是从 $\mathsf{C}_G(aN)$ 到 $N$的群同态，并且它是非平凡的，因为根据假设，$\mathsf{C}_G(a) < \mathsf{C}_G(aN)$，因此 $1 \neq [a, \mathsf{C}_G(aN)] \leqslant N$。由于 $|N|$是一个素数，我们得到 $[a, \mathsf{C}_G(aN)] = N$，这正是所需的结果。如果 $N \cap \mathsf{Z}(G) = 1$，那么 $a$在 $N$上自由地无不动点作用，因此 $N = [a, N] \subseteq [a, \mathsf{C}_G(aN)]$。至此，证明完成。□

Any group admitting a fixed point free automorphism is solvable [8] (the proof of this uses the classification of finite simple groups). So every group for which condition (1) above holds is necessarily solvable. We are now going to prove the converse, that is, every group containing anticentral elements is solvable. In parts, the proof is very similar to Rowley's proof on the solvability of groups admitting a fixed point free automorphism [8].

In the proof, we will need the first part of the following proposition:

4.2. **Proposition.** *Let $a \in G$ be anticentral. If $K$ is a $G$-class which at the same time is an $G'$-class, then $a$ fixes exactly one element of $K$. Let $D = \mathbf{C}^\infty(a)$. The map*

$$\mathbf{Z}(D) \ni x \mapsto x^G$$

是从 $\mathbf{Z}(D)$ 到在 $G$作用下保持不变的 $G'$-等价类集合的一个双射。

证明。第一个陈述只是命题 3.1 的另一种应用。设 $x \in \mathsf{Z}(D)$。则 $x^G = x^{DG'} = x^{G'}$。反过来，如果 $K$ 是$G$ 的一个共轭类，且其元素在 $G'$下共轭，那么 $K \cap \mathsf{C}_G(a)$恰好包含一个元素，记为 $x$。我们断言 $x \in \mathsf{Z}(D)$。暂且假设这一点成立，我们便可看出，将 $K$ 映射到 $K \cap \mathsf{C}_G(a)$ 中唯一元素的映射，是将 $x \in \mathsf{Z}(D)$ 映射到其共轭类 $K = x^G$ 的映射的逆映射。因此，我们来证明这一断言：由于 $x^G = x^{G'}$，我们有 $G = \mathsf{C}_G(x)G'$。根据定理 3.9，并且由于 $a \in \mathsf{C}_G(x)$，我们有$D \subseteq \mathsf{C}_G(x)$，因此 $x \in C_G(D) = \mathsf{Z}(D)$，其中最后一个等式由命题 3.1 得出。□

4.3. **Theorem.** *Every finite group containing anticentral elements is solvable.*

*Proof.* Let $G$ be a counterexample with minimal order, and $D = \mathbf{C}^\infty(a)$ for some anticentral element $a$.

**Step 1.** There is $K \lhd G$ such that $G = DK$ and $K \cong S^m$ for some nonabelian simple group $S$.

As $G$ is nonsolvable, it contains a nonabelian chief factor, say $K/L$. The anticentral elements of $G$ remain anticentral in every factor group of $G$, so by minimality $L = 1$. Since $K$ is characteristically simple, $K \cong S^m$ for some simple group $S$. By Proposition 3.1, $DK$ also contains anticentral elements. By minimality, $G = DK$.

**Step 2.** If $C$ is a characteristic conjugacy class of $S$ (that is, $C$ is invariant under automorphisms of $S$), then $\langle x\rangle \cap C = \{x\}$ for all $x \in C$.

如果 $C$是特征的，那么 $C^m = C \times \cdots \times C$就是 $K$的一个共轭类，并且在 $K$ 的所有自同构下保持不变，因此特别地，它在 $G$下保持不变。这意味着$C^m$ 是一个 $G$-集合，且 $K$ 在其上具有传递作用。于是， $G'$ 也在 $C^m$上传递作用。根据命题 4.2，$C^m \cap \mathsf{C}_G(a) = \{x\}$，其中某个 $x$。因此， $C^m \cap \mathbf{h}x\mathbf{i} = \{x\}$。令$x = (x_1, \ldots, x_m)$，其中 $x_i \in C$。由此可得 $C \cap \mathbf{h}x_1\mathbf{i} = \{x_1\}$，并且最后一个等式对 $C$的所有元素都成立。

**步骤 3.** $S$ 不同构于交错群。

令 $C$ 为 $x = (1, 2, \ldots, n-2)(n-1, n)^{n+1} \in A_n$ 的共轭类，其中 $n > 4$。那么 $C$ 包含所有与 $x$ 具有相同循环类型的元素，并且 $\mathsf{C}_{A_n}(x) = \mathbf{h}x\mathbf{i}$。这个共轭类在 $A_n$ 的所有自同构下均保持不变：如果 $n = 6$，它包含所有 4 阶元素；如果 $n \neq 6$，则已知 $A_n$ 的自同构群为 $S_n$。（还可以证明，对于任何其他阶为 $n-2$ 的元素 $y \in A_n$，都有 $\mathsf{C}_{A_n}(y) > \mathbf{h}y\mathbf{i}$。）由于 $|C \cap \mathbf{h}x\mathbf{i}| = \phi(n) \geqslant 2$，由步骤 2 可知， $S$ 不是交错群。

**Step 4.** $S$ is not isomorphic to a sporadic simple group.

对于任意一个散在单群，都存在 $n > 2$，使得所有阶为 $n$ 的元素共轭 [9]。同样，我们可以应用步骤 2。

**Step 5.** $S$ is not a simple group of Lie type.

假设 $S$是一个李型单群。如果（$B_i$， $N_i$）、 $i=1$、……、 $m$是$S$的BN对，那么 $B=B_1\times\cdots\times B_m$和 $N=N_1\times\cdots\times N_m$构成 $K=S^m$的一个BN对。因此，我们可以假设 $K$ 具有一个BN对（$B$， $N$）。此外， $B$是 $K$的一个Sylow $p$-子群 $Q$ 的正规化子。根据推论3.5，我们可以假设 $a$ 正规化 $Q$；根据定理 3.9， $D$正规化 $Q$。因此， $B=\mathrm{N}_G(Q)\cap K\lhd\mathrm{N}_G(Q)=DB$和$D\cap K\leqslant B$。令 $\Delta$ 为与之关联的建筑 [2]。那么，作为单纯复形的 $\Delta$ 是由偏序集$\{Px\mid x\in K, B\leqslant P\leqslant K\}$在反向包含关系下构造得到的，其中 $K$ 通过右乘法作用于该偏序集。这个偏序集与抛物子群的偏序集$\{P^x\mid x\in K, B\leqslant P\leqslant K\}$同构，其中 $K$通过共轭作用于该偏序集，因为每个 $P$都是其自身的正规化子 [2, p.111]。由于 $D$ 正规化 $B$，因此 $G=DK$也通过共轭作用于这个集合。由此， $G$ 作用于 $\Delta$。现在，我们可以完全按照Rowley [8] 的做法完成证明：令A为 $\Delta$的一个公寓系。由于A是唯一的（ [2, 第93页，定理 2]）， $G$ 作用于A。由于 $K$ 在所有有序对（$C$， $\Sigma$）组成的集合上传递作用，其中 $C$ 是 $\Delta$的一个室， $\Sigma\in\mathsf{A}$，且 $C\in\Sigma$ [2, 第112页，定理], 命题 3.1表明，反中心元固定唯一的有序对（$C$， $\Sigma$）。由于 $\Sigma$ 是一个有限的Coxeter复形，因此在 $\Sigma$ 中存在唯一一个室 $-C$ （即 $C$的对室），其与 $C$ 之间的距离等于 $\Sigma$的直径。但这样一来，反中心元也固定了（$-C$， $\Sigma$），矛盾。

根据有限单群分类定理以及步骤 3–5，定理得证。□

读者可能会问，我们是否也可以将步骤 2 应用于李型单群。大多数李型单群似乎都存在被步骤 2 排除的共轭类，但也有一些反例：在群 $\mathbf{PSL}(2,3^{2k+1})$ 中，唯一的特征共轭类是 $\{1\}$ 和对合元素的共轭类。

我们还指出，步骤 5 的证明表明了以下结论：包含一个 BN-对的有限群不能包含反中心元素，因为它在上述数对集合 $(C,\ \Sigma)$ 上具有传递作用，并且没有群元素恰好固定一个数对。

最后一个结果引出了一个问题，即如何对含有反中心元素的可解群进行分类。第一步可以是刻画含有反中心元素的 $p$-群，但即便如此，似乎也很困难。我甚至不清楚，随着 $n$趋于无穷大，是否存在更多含有或不含有 $p^n$ 阶反中心元素的群。

## Acknowledgements

This work is part of my thesis[1] done under the supervision of R. Knörr. I would like to thank him for his many helpful remarks in our conversations about this paper, and especially for suggesting the subject of “anticentral” elements.

[1]Note added in 2023: In the end, my PhD-thesis was about something else, and this work was not included in the thesis.

## References

1. Mariagrazia Bianchi、David Chillag 和 Emanuele Pacifici. 关于特征标表某一列取值较少的有限群的简记. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 115 (2006), pp. 161–164. N u m da m: RSMUP_2006__115__161_0. MR2245593, Zbl. 1156.20007 (引自第 3 页). 2. Kenneth S. Brown. 建筑 . Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1989. d oi:10.1007/978-1-4612-1019-1. MR969123(90e:20001), Zbl. 0715.20017 (引自第 11 页). 3. Klaus Doerk 和 Trevor Hawkes. 有限可解群. de Gruyter 数学论著丛书 4. Walter de Gruyter, Berlin New York, 1992. d o i: 10.1515/9783110870138. MR1169099, Zbl. 0753.20001 (引自第 8 页). 4. GAP – 群、算法与编程，4.4 版. GAP Group. 2005. u r l: http://www.gap-system.org(引自第 3 页). 5. Daniel Gorenstein. 有限群. Harper & Row, New York, 1968. MR0231903, Zbl. 0185.05701 (引自第 6 页). 6. Bertram Huppert. 有限群 I. 数学科学基础丛书 134. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1967. MR0224703(37#302), Zbl. 0217.07201 (引自第 4、6–9 页). 7. I. Martin Isaacs. 有限群特征标理论. Dover Publications, Inc., New York, 1994.（更正重印本）. MR1280461, Zbl. 0849.20004 (引自第 2–4 页). 8. Peter Rowley. 具有无不动点自同构群的有限群. J. Algebra 174, no. 2 (1995), pp. 724–727. d o i: 10.1006/jabr.1995.1148. MR1334233(96g:20040), Zbl. 0835.20036 (引自第 5、9、11 页). 9. Robert Wilson 等. 有限群表示图集 - 第 3 版. u r l: http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/ (访问于 04/21/2016) (引自第 10 页).

Universität Rostock, Institut für Mathematik, 18051 Rostock, Germany

*Email address*: frieder.ladisch@uni-rostock.de