arXiv:2305.06224v2 [physics.app-ph] 7 Sep 2023

由连分数生成的准周期铺砌的超均匀性

马里奥·拉萨罗[b,*]，路易斯·M·加西亚-拉菲[b]

[a]*Department of Continuum Mechanics and Theory of Structures*
[b]*Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada*
Universitat Politècnica de València (Spain)

摘要

超均匀性是某些非均质介质的一种性质，在这类介质中，长波长范围内的密度涨落会衰减至零。在倒易空间中，这种行为表现为小波数附近范围内的傅里叶强度衰减。本文研究通过词拼接构造的准周期铺砌。晶格由一个参数生成，该参数由其连分数给出；当考虑无理生成元时，随着生成元趋于无穷，准周期性便会出现。数值模拟显示，无论生成参数所取的数值为何，傅里叶强度都呈现相当规则的二次衰减，这促使我们提出假设：这类介质是三阶强超均匀的。理论推导表明，密度涨落与波数按相同比例缩放。此外，我们严格证明，结构因子在原点附近按照模式 $S(k) \sim k^4$ 衰减。通过若干采用不同生成连分数的数值示例，验证了这一结果。

关键词：
超均匀性、准周期铺砌、连分数、结构因子、傅里叶强度、倒易空间

1. 引言

超均匀性是一种空间分布的性质，指的是与具有相同点数的随机分布相比，该分布在较大长度尺度上的密度涨落更少。换句话说，超均匀系统具有比典型随机系统更加有序的结构，同时仍保持统计均匀性。准晶体（如晶体）是超均匀的 [1]。对于超均匀晶格，结构因子 $S(k)$ 是一个平滑函数，当波数 k 趋近于零时，它按照幂律趋于零，具体如方程所示。

$$S(k) \sim k^{\gamma} \tag{1}$$

通过基于积分傅里叶强度定义 γ，可以实现一种统一的方法，既适用于以平滑的 $S(k)$ 为特征的标准情形，也适用于一维中具有稠密但不连续的 $S(k)$ 的准晶体。

$$Z(k) = 2\int_0^k S(\kappa)\, d\kappa \tag{2}$$

该积分乘以 2，以便与高维情况下的定义保持一致，其中 κ 被视为径向坐标。对于准周期晶格， $Z(k)$ 单调递增，且当 k 足够小时，可将其绘制为夹在两条幂律曲线之间的有界函数，从而验证 that

$$d_1\, k^{\gamma+1} < Z(k) < d_2\, k^{\gamma+1} \tag{3}$$

*通讯作者。电话： +34 963877000 （分机号 76732），malana@upv.es

对于某些常数系数 d_1 和 d_2，以及某个 γ。在这种情况下，γ 被称为超均匀性的阶数，累积强度函数遵循阶数为 $1+\gamma$ 的幂律，记作

$$Z(k) \sim k^{\gamma+1}, \qquad \text{as } k \to 0$$

超均匀性的另一种度量是半径为 R 的窗口内粒子的局部数目方差（在一维情况下，即长度为 2R 的区间），记为 $\sigma^2(R)$（有序度量语境）。如果在大-R 极限下，其增长速度慢于窗口体积（在一维中与 R 成正比），则该系统具有超均匀性。对于任意一维系统，大 R 时 $\sigma^2(R)$的标度由 γ 决定，具体如下：（I 类，$\gamma > 1$）强超均匀，（II 类，$\gamma = 1$）对数超均匀，（III 类，$0 < \gamma < 1$）弱超均匀。最后，对于 $\gamma < 0$，我们有反超均匀类 [2]。

近年来，准周期铺砌中的超均匀性受到了广泛关注。这类铺砌由铺砖组成，排列复杂，具有长程有序性，却没有平移对称性。研究表明，某些类型的准周期铺砌具有超均匀性 [2, 3], ，这对这些材料的物理和力学性质有重要影响。由于超均匀性直接涉及长波长范围内的粒子有序性，因此对铺砖密度的研究取决于这些晶格的生成方式。因此，Or$\breve{}$guz 等人 [3] 研究了由投影生成的准周期晶格的超均匀有序性，并表明其取决于所用条带的类型。所谓的理想条带对应的超均匀性指数为 $\gamma = 3$。另一类重要的一维准周期结构由替换规则（或膨胀规则）生成。事实证明，在极限铺砌 [4–6]中，傅里叶强度与密度涨落的标度之间存在密切关系。尤其是，替换矩阵的特征值在这种关系中起着重要作用 [7, 8]。参考文献 [9], 详细讨论了替换准周期铺砌的超均匀性，并指出傅里叶强度的幂律衰减规律很大程度上取决于替换矩阵的性质。Fuchs 等人 [?] 发现，在具有离散尺度不变性的势场作用下，朗道能级的展宽呈现对数周期振荡，并精确确定了这类振荡的超均匀性指数和周期。

本文对基于词拼接并由连分数生成的准周期晶格的超均匀性进行了全面分析。利用这些系统的递归性质，可以解析地获得傅里叶强度和密度涨落的迭代表达式。二者均为构成连分数的不同系数的函数。本文详细推导了由所谓的金属平均数和周期连分数生成的准周期铺砌中，傅里叶强度随波数递减的模式的解析表达式，并显示其与数值示例具有良好的一致性。此外，还证明了结构因子的全局超均匀行为为 $S(k) \sim k^4$。

2. 通过拼接生成的准周期铺砌

考虑长度为 A 和 B 的两个线段（铺砖），以及一个定义在范围$0 < \alpha \leq 1$内的实数 $\alpha \in \mathbb{R}$。设序列 $[0; a_1, \ldots, a_n]$ 为 α 的连分数，即我们可以写作

$$\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{4}$$

其中 $a_j > 0$（对于 $j \geq 1$）是正整数。

利用该序列中的各项，可以通过连接字母表 $\{A, B\}$ 中的元素构造一个词。递归公式定义如下

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_j &= \mathcal{W}_{j-1}^{a_j}\, \mathcal{W}_{j-2}\ , \quad 1 \le j \le n \\ \mathcal{W}_{-1} &= A\ , \quad \mathcal{W}_0 = B \end{aligned} \tag{5}$$

其中，指数和乘积都应理解为连接，例如 $A^3(B^2A) = AAABBA$。参数 α 起到准周期铺砌生成参数的作用。根据上面的定义，如果 α 是有理数，那么词 $\mathcal{W}_n$ 对应于最后一次迭代。无限词由 $\mathcal{W}_n$的周期性连接产生。反之，如果 α 是无理数，则已知序列 $\{a_n\}$ 会变为无限序列，且相应的词具有纯准周期模式，可由极限 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{W}_n$给出。我们将式 (5) 给出的算法称为连接算法，因为每一步的词都由前一步的词连接而成。例如，对于 $\alpha = 3/11 = [0; 3, 1, 2]$，图 1 展示了每一步得到的不同词以及最终的铺砌 $\mathcal{W}_3$。

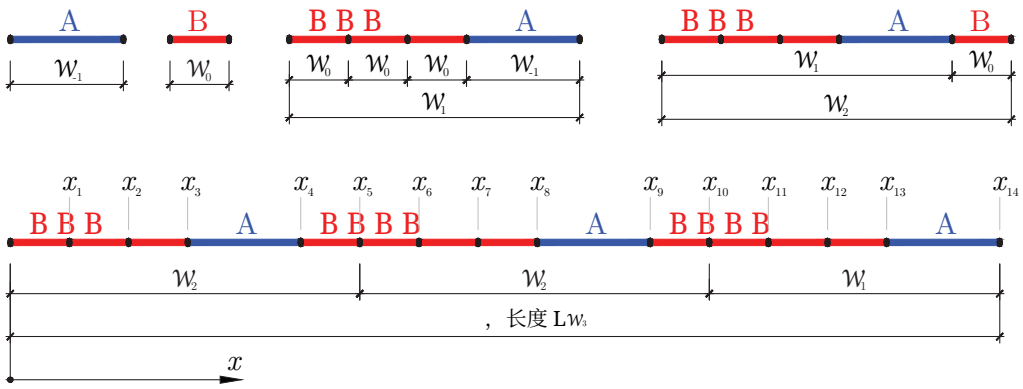

图1：参数 $\alpha = 3/11 = [0;\ 3, 1, 2]$ 的拼接铺砌生成。渐近分数为 $\alpha_j = \{1/3, 1/4, 3/11\}$。渐近分数的分子和分母与每种铺砖的步数相对应。

最终目标是与 α 生成的镶嵌相关联的词 $\mathcal{W}_n$。然而，前面步骤中的词在某种意义上是近似值。特别是，每一步中的符号 A 和 B 的数量分别由数列 u_j 和 v_j 给出，其递归定义如下。

$$u_j = a_j\, u_{j-1} + u_{j-2}\ , \qquad u_{-1} = 1\ , \quad u_0 = 0 \tag{6}$$

$$v_j = a_j\, v_{j-1} + v_{j-2}\ , \qquad v_{-1} = 0\ , \quad v_0 = 1 \tag{7}$$

两者 u_j 和 v_j 是第 j 个渐近分数 $\alpha_j = u_j/v_j$[10] 的分子和分母，其中 $\alpha = \alpha_n$。因此

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{a_1}\ , \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}\ , \ \cdots\ , \ \frac{u_n}{v_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{8}$$

此外，对于连续的两个步骤，以下恒等式成立 [11]

$$v_j\, u_{j-1} - u_j\, v_{j-1} = (-1)^j \quad , \ 1 \le j \le n \tag{9}$$

由此得到两个连续渐近分数之间已知的距离

$$\alpha_{j-1} - \alpha_j = \frac{(-1)^j}{v_j\, v_{j-1}}$$

对于与词 $\mathcal{W}_j$ 相关的镶嵌，点的总数和镶嵌长度分别为$N_j = u_j + v_j$ 和 $L_j = u_j\,A + v_j\,B$，也可以通过递归确定为

$$\begin{aligned} N_j &= a_j\,N_{j-1} + N_{j-2}\ , \quad 1 \le j \le n\ , \qquad N_{-1} = 1\ , \quad N_0 = 1 \\ L_j &= a_j\,L_{j-1} + L_{j-2}\ , \quad 1 \le j \le n\ , \qquad L_{-1} = A\ , \quad L_0 = B \end{aligned} \tag{10}$$

因此，点的总数 $N = N_n$ 和镶嵌的最终长度 $L = L_n$ 为

$$N = (1+\alpha)\ v_n \qquad , \quad L = A\,u_n + B\,v_n = (B + \alpha\,A)\,v_n \tag{11}$$

3. 结构因子的性质

由 Sturmian 词生成的点阵模式可视为局部非均匀性的分布。因此，经过 n 次式（5）迭代后生成的介质密度可用狄拉克 δ 函数表示为

$$g(x) = \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j) \tag{12}$$

其对应的傅里叶级数表示为

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k_m)\,e^{ik_m\,x} \tag{13}$$

其中傅里叶系数为

$$\hat{g}(k_m) = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{L} g(x)\,e^{-ik_m\,x}\,dx \quad , \quad k_m = \frac{2\pi m}{L} \quad , m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{14}$$

序列 ence $\{k_m\}$ 表示倒易空间中的位置，根据公式（12），该积分为

$$\int_{x=0}^{L} g(x)\,e^{-ik\,x}\,dx = \sum_{j=1}^{N} e^{-ik\,x_j} \tag{15}$$

一般而言，求解公式 (15) 首先需要拼接完整的词 $\mathcal{W}_n$，其次需要确定 N 实空间坐标 x_j, $1 \le j \le N$。利用词的递归构造方式，我们提出一种新的迭代方法来求得公式 (15) 的表达式，从而避免计算 N 坐标 x_j。该方法适用于通过拼接生成的准周期一维晶格，并且可能很有用，尤其是在处理大型系统时，而这对于模拟非周期介质是必要的。

考虑由字母表 {A,B} 中的 U 个符号构成的任意词 $\mathcal{U}$，以及由 $\{x_j,\ 1 \le j \le U\}$ 给出的点的实空间位置。我们定义

$$\mathcal{F}\{\mathcal{U}; k\} = \sum_{j=1}^{U} e^{-ik\,x_j} \tag{16}$$

只要不会引起混淆，以下我们就把通过上述表达式 (16) 得到的量称为傅里叶系数。我们想要计算由拼接生成的词对应的式 (16)。因此，考虑 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 这两个任意词，它们由字母表 {A,B}中的符号构成，长度分别为 l_u 和 l_v，符号总数分别为 U 和 V。我们来考虑

$\{x_j,\ 1 \le j \le U\}$ 和 $\{y_j,\ 1 \le j \le V\}$ 分别是两种铺砖的局部位置，并满足

$$\mathcal{F}\{\mathcal{U};k\} = \sum_{j=1}^{U} e^{-ik\,x_j} \quad , \quad \mathcal{F}\{\mathcal{V};k\} = \sum_{j=1}^{V} e^{-ik\,y_j} \tag{17}$$

那么，通过拼接得到的词 $\mathcal{UV}$ 的长度为 $l_u + l_v$，且包含 $U+V$ 个粒子，其相对于拼接后词的原点的坐标为

$$\{x_1, \ldots, x_U, l_u + y_1, \ldots, l_u + y_V\} \tag{18}$$

新铺砌的傅里叶系数为

$$\mathcal{F}\{\mathcal{UV};k\} = \mathcal{F}\{\mathcal{U};k\} + e^{-ik\,l_u}\,\mathcal{F}\{\mathcal{V};k\} \tag{19}$$

给定任意整数 m，利用这一结果并根据归纳原理，可以直接得出

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathcal{U}^m;k\} &= \left(1 + e^{-i\,kl_u} + e^{-i\,2\,kl_u} + \cdots e^{-i\,(m-1)\,kl_u}\right)\,\mathcal{F}\{\mathcal{U};k\} \\ &\equiv \mathcal{P}(m,l_u;k)\,\mathcal{F}\{\mathcal{U};k\}\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\mathcal{P}(m,l;k) = 1 + e^{-i\,k} + e^{-i\,2\,kl} + \cdots e^{-i\,(m-1)\,kl} = \frac{1-e^{-ik\,m\,l}}{1-e^{-ikl}} \tag{21}$$

表示由 m 个粒子构成、间距为 l的周期性铺砌的傅里叶强度，即其坐标为 $\{0, l, 2l, \cdots, (m-1)l\}$。利用式 (19) 和 (20) 给出的性质，并记 $\mathcal{H}_j(k) = \mathcal{F}\{\mathcal{W}_j;\ k\}$ 当 $1 \le j \le n$时，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j(k) &= \mathcal{F}\{\mathcal{W}_{j-1}^{a_j}\,\mathcal{W}_{j-2};k\} \\ &= \mathcal{F}\{\mathcal{W}_{j-1}^{a_j};k\} + e^{-ik\,L_{j-1}}\,\mathcal{F}\{\mathcal{W}_{j-2};k\} \\ &= \mathcal{P}(a_j, L_{j-1};k)\,\mathcal{H}_{j-1}(k) + e^{-ik\,L_{j-1}}\,\mathcal{H}_{j-2}(k)\ , \quad 1 \le j \le n \\ \mathcal{H}_{-1}(k) &= e^{-ikA} \\ \mathcal{H}_0(k) &= e^{-ikB}\end{aligned} \tag{22}$$

正如这一新的递归方案所示，只需将式 (22) 迭代 n 次即可得到傅里叶系数。因此，无需计算整个介质的 N 坐标；从计算角度来看，这一点颇为重要，因为通常 $N \gg n$。

傅里叶系数定义了介质在倒易空间中的性质。本文研究的介质在倒易空间位置上具有离散分布 k，其形式由 $k = 2\pi m/L$ 给出，其中 $m = 0$、± 1、± 2、..... 如果 A/B 是有理数，那么经过有限次相互作用 n 后得到的任何系统都将具有周期性，并且在倒易空间中具有有界的信息带。也就是说，傅里叶振幅的分布将呈现周期性。给定一个在长度 L 内包含 N 个粒子的介质，让我们考察这一分布的周期。事实上，傅里叶系数的最终表达式为 $\sum\exp\{ikx_j\}$。假设 $A/B = \theta_A/\theta_B$ 是铺砖长度比的既约分数，那么存在一个 k 的取值，使得傅里叶系数具有周期性。该周期对应于

$$K_P = \frac{2\pi\theta_B}{B} = \frac{2\pi\theta_A}{A} \tag{23}$$

如果 A/B 是无理数，则有理近似值 θ_A/θ_B 的分子和分母趋于无穷大，从而使倒易空间中的谱也呈现非周期性。有趣的是，式（23）中得到的周期与式（22）的迭代次数无关，因此 $\mathcal{H}_j(k)\ \ j \ge 1$ 具有周期 $k = K_P$。

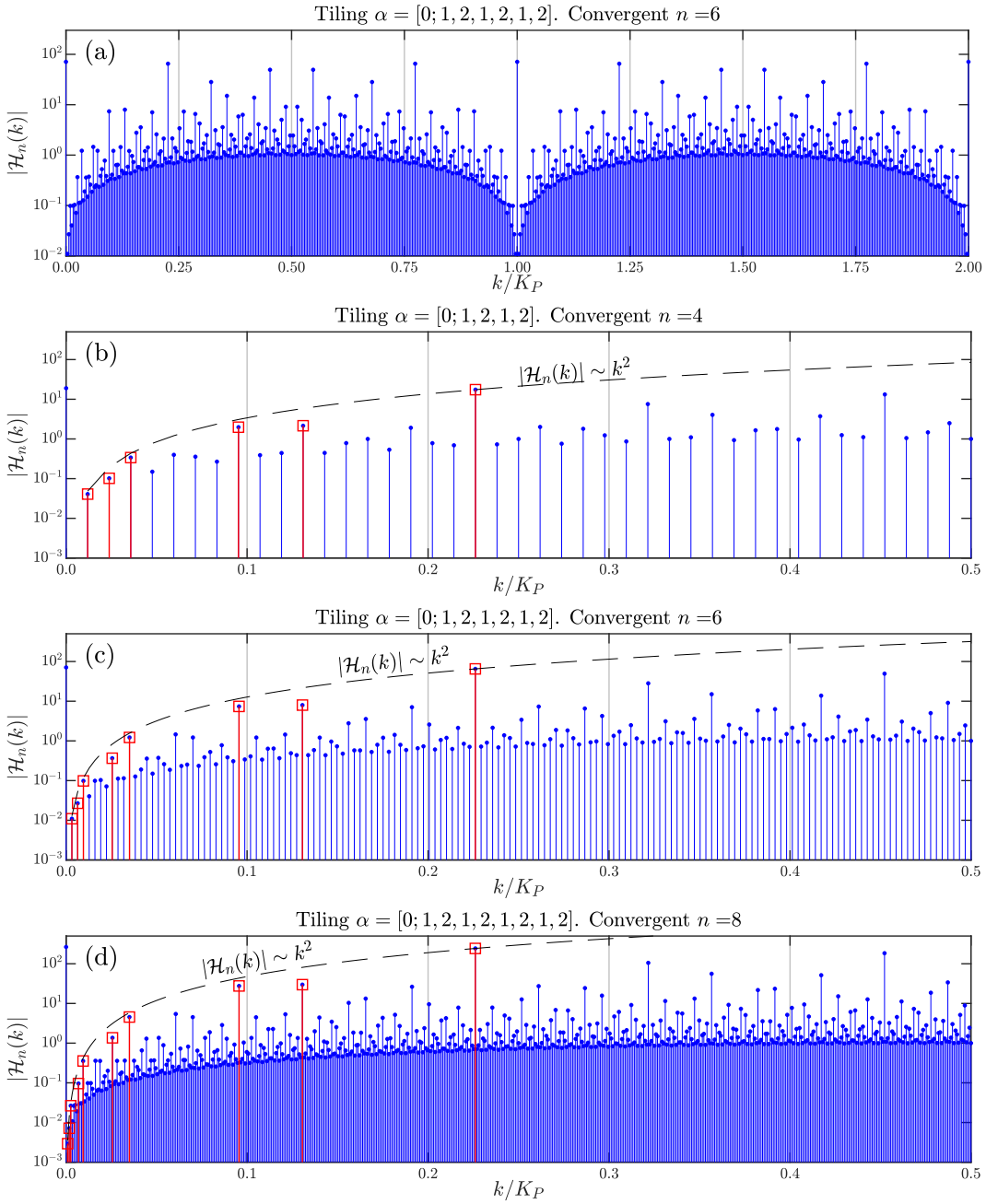

图 2：与 $\alpha = \sqrt{3} - 1 = [0;\ 1、2、1、2、\ \ldots]$ 相关的镶嵌的傅里叶幅值。(a) 范围 $0 \le k \le 2K_P$ 内第 6 次迭代的傅里叶幅值。在图 (b)、(c) 和 (d) 中：范围 $0 \le k \le K_P/2$ 内第 4、6 和 8 次迭代的傅里叶幅值。蓝点：傅里叶幅值的完整谱。红色方块：主导波数序列 $\{k_\nu\}_{\nu=-1}^{n}$ 处的傅里叶幅值。虚线：与 k^2 成比例的曲线。

让我们通过一个数值示例以图形方式说明这些结果。考虑与参数 $\alpha = \sqrt{3} - 1 = [0;\ 1, 2, 1, 2, \ldots] = 0.7320508\ldots$ 对应的铺砖，其铺砖长度为 $A = 1.25$ 和 $B = 1.00$（长度单位），因此 $\theta_A = 5$ 和 $\theta_B = 4$。根据式 (23)，倒易空间中的傅里叶系数谱以 $K_P = 8\pi$ 为周期。傅里叶系数的幅值

对应于第 6 个渐近分数 $\alpha_6 = [0;$ 图 2(a) 展示了 1, 2, 1, 2, 1, $2] = 0.73170$。为展示由 A/B 的有理数性质导致的周期性，范围已扩展至 $k/K_P = 2$。然而，在范围 $k/K_P = [0, 1]$ 内，可以观察到不同尺度图案的自相似性，这是准周期结构的典型特征。图 2(b)、2(c) 和 2(d) 放大显示了范围 $k/K_P = [0, 0.5]$ 内的图像。这三幅图分别表示渐近分数 $n = 4$、 $n = 6$ 和 $n = 8$ 对应的傅里叶强度。可以观察到，极限准周期镶嵌的强度随着波数趋近于零而减小（$k \to 0$），这表明其具有超均匀性。此外，一组以红色标出的特定布拉格峰呈现出更明显的规律，与 k^2 成正比。下一节将推导这组特征波数序列（在图 2 中以红色绘出）。

4. 主导波数序列

考虑由 $\alpha = [0;\ a_1, \ldots, a_n] = u_n/v_n$ 生成、长度为 $L = L_n = Au_n + Bv_n$ 的铺砌。对于每个满足 $0 \le j \le n$ 的 j，我们可以定义参数 σ_j：将 α 截断至位置 j 后，所得的余下连分数，即

$$\sigma_j = [0; a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_{j+1} + \cfrac{1}{a_{j+2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{24}$$

其中 $\sigma_0 = \alpha$ 且 $\sigma_n = 0$。数 σ_j 在后续推导中起着关键作用，尤其是在计算铺砌的所谓密度涨落时。因此，除了式 (24) 给出的连分数表示外，推导其值的另外两种表达方式也很有意义。首先，利用连分数 [11]，的性质，可以得到

$$\alpha = [0; a_1, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n] = \frac{(a_j + \sigma_j)u_{j-1} + u_{j-2}}{(a_j + \sigma_j)v_{j-1} + v_{j-2}} = \frac{u_j + \sigma_j u_{j-1}}{v_j + \sigma_j v_{j-1}} \tag{25}$$

并对 σ_j 求解

$$\sigma_j = -\frac{\alpha - \alpha_j}{\alpha - \alpha_{j-1}} \frac{v_j}{v_{j-1}} \tag{26}$$

其次，我们 将 σ_j 表示为既约分数。为此，我们调用以下递减 g 序列

$$\xi_j = a_j\, \xi_{j-1} + \xi_{j-2}\ , \quad \xi_{-1} = -v_n\ ,\ \xi_0 = u_n \tag{27}$$

其通项为 [10]

$$\xi_j = v_n\, v_j(\alpha - \alpha_j) \tag{28}$$

考虑到式 (26) 和式 (28)，序列 $\{\xi_j\}$ 呈现交替符号，并趋近于极限值 α 附近的零。此外，一般而言

$$\sigma_j = -\frac{\xi_j}{\xi_{j-1}}\ , \quad 0 \le j \le n \tag{29}$$

由于初始值为 $\xi_{-1} = -v_n$、 $\xi_0 = u_n$，因此对于奇数索引， ξ_j 为负数；对于偶数索引， ξ_j 为正数。基于此，对于 $0 \le j \le n + 1$，数列 $c_j = (-1)^{\,j-1}\xi_{j-1}$ 由正整数按降序排列构成，其范围从 $c_0 = v_n$ 到 $c_n = 1$ 和 $c_{n+1} = 0$。数列 $\{c_j\}$ 与 $\{\sigma_j\}$ 之间的递归关系由此显而易见，具体表示为

$$c_{j+1} = \sigma_j\, c_j\ , \quad 0 \le j \le n \tag{30}$$

如此形成的数集 $\{c_j\}$ 将用作构建与铺砌 α_n 相关的波数序列的基础。该序列在接下来的推导中尤为重要，其定义如下

$$k_\nu = \frac{2\pi}{L_n}\, c_\nu \ , \quad 0 \le \nu \le n \tag{31}$$

此外，与 $\nu = -1$ as $k_{-1} = 2\pi N_n/L_n$ 相关的项将添加到序列的开头。需要指出的是，这是一个由正数构成的递减序列，因为根据式（30），每一项都是将前一项乘以小于 1 的 σ_j 得到的。在图 2(b)、(c) 和 (d) 中，这些 $n+2$ 坐标处的傅里叶强度已用红色标出。可以看到，随着相应渐近分数 α_n 的增加，该序列中的项数也随之增加。这些位置处的傅里叶强度揭示了实空间中强烈的周期性图样，它们与镶嵌的形成密切相关。仔细考察图中所示三个系统（$n = 4$、 $n = 6$ 和 $n = 8$）的这些波数后，可以清楚地看出，随着考虑更高阶的渐近分数，其位置拟合得相当准确。表 1 的每一列给出了与各生成参数 α_n 对应的 $n+2$ 波数 k_ν/K_P、 $-1 \le \nu \le n$ 的数值结果（其中包括上文为 $\nu = -1$ 引入的附加波数）。另一方面，如果我们关注某一行，例如第 ν 行，不同的数值表示随着镶嵌增大，k_ν 的值如何变化。表格结果的有趣之处就在这里。比如，我们来考察第二行所列的波数 k_0 （$\nu = 0$）的值。如上所示，$c_0 = v_n$，从而得到

$$k_0 = \left\{ \frac{2\pi v_1}{L_1},\ \frac{2\pi v_2}{L_2}, \ldots, \frac{2\pi v_8}{L_8} \right\} = \left\{ \frac{2\pi}{B + A\alpha_1},\ \frac{2\pi}{B + A\alpha_2}, \ldots, \frac{2\pi}{B + A\alpha_8} \right\} \tag{32}$$

一般而言，我们可以将 $k_0(\alpha_n) = 2\pi/(B + \alpha_n A)$记作对 $\nu = 0$ 计算得到的波数，其中α_n = [0表示该铺砌; a_1, ..., a_n]。根据渐近分数的定义，我们可以得出，如果 $n \gg 1$，那么可以预期

$$k_0(\alpha_n) \approx k_0(\alpha_{n+1}) \approx k_0(\alpha_{n+2}) \approx \cdots \tag{33}$$

快速查看表 1 第二行所示的数值后，我们注意到，从第 6 个渐近分数（$n = 6$）开始， k_0 的小数点后前 4 位趋于稳定。一般而言，我们证明

	铺砌， α_n							
ν	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
k_{-1}	0.222222	0.227273	0.225806	0.226190	0.226087	0.226115	0.226107	0.226109
k_0	0.111111	0.136364	0.129032	0.130952	0.130435	0.130573	0.130536	0.130546
k_1	0.111111	0.090909	0.096774	0.095238	0.095652	0.095541	0.095571	0.095563
k_2	-	0.045455	0.032258	0.035714	0.034783	0.035032	0.034965	0.034983
k_3	-	-	0.032258	0.023810	0.026087	0.025478	0.025641	0.025597
k_4	-	-	-	0.011905	0.008696	0.009554	0.009324	0.009386
k_5	-	-	-	-	0.008696	0.006369	0.006993	0.006826
k_6	-	-	-	-	-	0.003185	0.002331	0.002560
k_7	-	-	-	-	-	-	0.002331	0.001706
k_8	-	-	-	-	-	-	-	0.000853

表 1：每一行显示了不同铺砌 α_n对应的 k_ν/K_P值，其中 $n \ge \nu$，这些铺砌由数 [0的渐近分数生成；1、2、1、2、1、2、 ...]。理论结果表明，经过几次迭代后， k_ν值趋于稳定，表明对于 $n \gg \nu$， $k_\nu(\alpha_{n-1}) \approx k_\nu(\alpha_n)$。

在 $n \gg \nu \ge -1$ 的条件下，以下表达式近似成立，

$$\frac{k_\nu(\alpha_{n-1})}{k_\nu(\alpha_n)} \approx 1 \tag{34}$$

事实上，由方程（30）和（31）可以证明，

$$k_\nu(\alpha_n) = \sigma_{\nu-1}(\alpha_n)\, k_{\nu-1}(\alpha_n) = \sigma_{\nu-1}(\alpha_n)\, \sigma_{\nu-2}(\alpha_n)\, k_{\nu-2}(\alpha_n)$$
$$= \cdots = \sigma_{\nu-1}(\alpha_n)\, \sigma_{\nu-2}(\alpha_n) \cdots \sigma_0(\alpha_n)\, k_0(\alpha_n) \quad (35)$$

其中，与相应渐近分数 α_n 的依赖关系通过记号 $k_\nu(\bullet)$ 和 $\sigma_\nu(\bullet)$ 突出表示。在此阶段，这种记号上的细节很重要，因为式 (34) 的商是将式 (35) 分别用于两个连续的渐近分数 α_{n-1} 和 α_n 后得到的，确实如此。

$$\begin{aligned}
\frac{k_\nu(\alpha_{n-1})}{k_\nu(\alpha_n)} &= \frac{\sigma_{\nu-1}(\alpha_{n-1})}{\sigma_{\nu-1}(\alpha_n)} \cdots \frac{\sigma_1(\alpha_{n-1})}{\sigma_1(\alpha_n)} \frac{\sigma_0(\alpha_{n-1})}{\sigma_0(\alpha_n)} \frac{k_0(\alpha_{n-1})}{k_0(\alpha_n)} \\
&= \frac{[0; a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{n-1}]}{[0; a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_n]} \cdots \frac{[0; a_2, \ldots, a_{n-1}]}{[0; a_2, \ldots, a_n]} \frac{[0; a_1, \ldots, a_{n-1}]}{[0; a_1, \ldots, a_n]} \frac{B + A\alpha_n}{B + A\alpha_{n-1}} \\
&\approx 1 \times \cdots \times 1 \times 1 \approx 1\,, \quad n \gg \nu \geq 1 \qquad (36)
\end{aligned}$$

对于 $0 \leq j \leq \nu - 1$，各个分数 $\sigma_j(\alpha_{n-1})/\sigma_j(\alpha_n)$ 的值近似为 1，这是因为假设 $n \gg \nu \geq 1$。此外，对于 $\nu = -1$ 和 $\nu = 0$，也会得到这一结果。

$$\begin{aligned}
\frac{k_{-1}(\alpha_{n-1})}{k_{-1}(\alpha_n)} &= \frac{2\pi N_{n-1}}{L_{n-1}} \frac{L_n}{2\pi N_n} = \frac{1 + \alpha_{n-1}}{1 + \alpha_n} \frac{B + A\alpha_n}{B + A\alpha_{n-1}} \approx 1 \\
\frac{k_0(\alpha_{n-1})}{k_0(\alpha_n)} &= \frac{2\pi v_{n-1}}{L_{n-1}} \frac{L_n}{2\pi\, v_n} = \frac{B + A\alpha_n}{B + A\alpha_{n-1}} \approx 1 \qquad (37)
\end{aligned}$$

倒易空间中的这些布拉格峰会影响介质在长波长范围内的行为。傅里叶强度的递归表达式有助于说明为什么这一波数数列具有占主导地位的模长。事实上，利用式 (22)，与铺砌 α_n 对应的傅里叶模长在波数 $k = k_\nu(\alpha_n) \approx k_\nu(\alpha_{n-1})$ 处为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n\left[k_\nu(\alpha_n)\right] &= \mathcal{P}\left[a_n, L_{n-1}; k_\nu(\alpha_n)\right] \mathcal{H}_{n-1}\left[k_\nu(\alpha_n)\right] + e^{-i\, k_\nu(\alpha_n)\, L_{n-1}} \mathcal{H}_{n-2}\left[k_\nu(\alpha_n)\right] \\
&\approx \mathcal{P}\left[a_n, L_{n-1}; k_\nu(\alpha_{n-1})\right] \mathcal{H}_{n-1}\left[k_\nu(\alpha_{n-1})\right] + e^{-i\, k_\nu(\alpha_{n-1})\, L_{n-1}} \mathcal{H}_{n-2}\left[k_\nu(\alpha_{n-1})\right] \\
&= a_n\, \mathcal{H}_{n-1}\left[k_\nu(\alpha_{n-1})\right] + \mathcal{H}_{n-2}\left[k_\nu(\alpha_{n-1})\right]\,, \quad \text{for} \quad n \gg \nu \geq -1 \qquad (38) \\
& \qquad (39)
\end{aligned}$$

其中最后一步 $\mathcal{P}\left[a_n, L_{n-1};\ k_\nu(\alpha_{n-1})\right] = a_n$ 成立，是因为当 $kl/2\pi$ 为整数时，$\mathcal{P}(m, l;\, k) = m$。按照递归方案，只要 j 与 ν 相距足够远，我们就可以近似得到。

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left[a_j, L_{j-1}, k_\nu(\alpha_j)\right] &\approx \mathcal{P}\left[a_j, L_{j-1}, k_\nu(\alpha_{j-1})\right] = a_j \\
e^{-i\, k_\nu(\alpha_j)\, L_{j-1}} &\approx e^{-i\, k_\nu(\alpha_{j-1})\, L_{j-1}} = 1\,, \quad n \geq j \gg \nu \qquad (40)
\end{aligned}$$

即，它们达到最大值。波数为 $k = k_\nu$、且满足 $n \gg \nu$ 时的傅里叶强度 $\mathcal{H}_n(k)$ 相较于其邻域内的其他波数达到最大值。这解释了为什么它们的强度比其余部分高出几个数量级。此外，从图 2 中可以观察到，形式为 $|\mathcal{H}_n(k)| \sim k^2$ 的规律似乎能够更准确地拟合序列 $\{k_\nu\}$ 的布拉格峰。

当 k_ν（α_{n-1}）的值与 k_ν（α_n）相差越大时，式（36）和（37）的近似效果越差；当 ν 越接近 n 时，这一点就越明显。不过，回想一下，对于由无限连分数生成的纯准周期铺砌，我们可以使 n 任意大。因此，这些布拉格峰处、位于序列 $\{k_\nu\}$ 中的傅里叶强度会按照比线性衰减更快的规律趋向 $k \to 0$。事实上，我们将在下一节看到，在满足先前研究中检验过的某些假设时，可以解析地预测这一波数序列中的傅里叶强度；该序列将称为主导波数序列。

5. 超均匀性指数

众所周知，介质在倒易空间中的超均匀性阶数，与物理空间中密度涨落的极限值密切相关。对于由替换生成的准周期介质这一特殊情形，已有研究发现，超均匀性与密度涨落极限密切相关 [2] ，而后者又正比于替换矩阵两个特征值之比。我们的目标是将这些结果推广到通过使用连分数拼接词而生成的准周期系统族，如式（5）所示。考虑一个基于渐近分数 $\alpha = [0;\ a_1 \ldots, a_n,]$ 的铺砖，其中有 $n \gg 1$。随着词 $\{\mathcal{W}_j,\ 1 \le j \le n\}$ 生成，铺砖的铺砖数 N_j 和长度 L_j 都会增大。与第 j 个渐近分数 $\alpha_j = [0;\ a_1, \ldots, a_j] = u_j/v_j$ 相关的点密度可确定为 $\rho_j = N_j/L_j$。根据式（10）和式（11），经过 j 次迭代后，点密度为

$$\rho_j = \frac{N_j}{L_j} = \frac{u_j + v_j}{Au_j + Bv_j} = \frac{1+\alpha_j}{B+\alpha_j A} \tag{41}$$

将 $\bar{\rho} = N/L = (1+\alpha)/(B+\alpha A)$ 记为瓦片顶点的极限密度，则我们可以写作 $\rho_j = \bar{\rho} + \delta\rho_j$，其中 $\delta\rho_j$ 表示相对于 $\bar{\rho}$ 的偏差，其表达式为

$$\delta\rho_j = \frac{(A-B)(\alpha-\alpha_j)}{(B+\alpha_j A)(B+\alpha A)} \quad ,\ 1 \le j \le n \tag{42}$$

这种关系表明，大尺度下密度涨落的振幅逐渐减小，这是超均匀结构的特征。根据式（42），两次连续迭代之间密度涨落的比值为

$$\frac{\delta\rho_j}{\delta\rho_{j-1}} = \frac{\alpha-\alpha_j}{\alpha-\alpha_{j-1}}\ \frac{B+A\,\alpha_{j-1}}{B+A\alpha_j} \tag{43}$$

该表达式揭示了密度涨落之比与上一节引入的参数 σ_j 之间的密切关系。此外，利用式（26），我们可以将上式改写为

$$\frac{\delta\rho_j}{\delta\rho_{j-1}} = -\sigma_j\,\tau_j \tag{44}$$

其中，新参数 $\tau_j = L_{j-1}/L_j$ 表示两次连续迭代中铺砌长度之间的关系。如式（10）所示，铺砌长度序列遵循由 $L_j = a_j L_{j-1} + L_{j-2}$ 给出的递归方案。因此，参数 τ_j 也可以改写为

$$\tau_j = \frac{L_{j-1}}{L_j} = \cfrac{1}{a_j + \cfrac{1}{a_{j-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\theta_A}{\theta_B}}}}} = [0; a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1 + \theta_A/\theta_B] \tag{45}$$

式（44）表明，密度涨落遵循指数型规律衰减，并在平均密度两侧交替变号。众所周知，由替换规则生成的一维准周期介质，其密度涨落取决于替换矩阵的特征值 [2]。此外，研究发现 [12, 13] ，这类介质中的傅里叶强度与密度涨落遵循相同的缩放规律。本文研究的非周期铺砌通过词拼接构造，并由一般连分数 [0; a_1, ..., a_n]控制。因此，每个新词都取决于连分数给出的一个新数 a_j ，使其具有特殊性质。定义主导波数序列（见式（30）和（31））， 并考虑式（44）中推导出的密度涨落比表达式后，我们确定了两个主要事实

（i）根据式（39），傅里叶强度在主导波数序列$k_{\nu+1} = \sigma_\nu\, k_\nu$处达到最大值

(ii) 两个连续密度涨落之比正比于两个连续主导波数之比，即 $\frac{\delta\rho_\nu}{\delta\rho_{\nu-1}} = -\sigma_\nu\,\tau_\nu$

对于本节的讨论，我们可以忽略下标 n，因为其他渐近分数并不在我们的关注范围内。因此，为了简化符号表示，我们将 $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ 生成的铺砌在波数 k 处的傅里叶强度的大小记为 $H(k) = |\mathcal{H}_n(k)|$。假设傅里叶强度与密度涨落具有相同的标度关系，我们可以为序列 $\{k_\nu\}_{\nu=0}^{n-1}$ 中每一对连续波数建立如下关系。

$$H(\sigma_\nu\, k_\nu) = \left|\frac{\delta\rho_\nu}{\delta\rho_{\nu-1}}\right| \cdot H(k_\nu) \tag{46}$$

假设傅里叶幅值遵循幂律，我们发现

$$\frac{H(k_{\nu+1})}{H(k_\nu)} = \left(\frac{k_{\nu+1}}{k_\nu}\right)^{1+\log\tau_\nu/\log\sigma_\nu} \quad , \quad 0 \le \nu \le n-1 \tag{47}$$

其中，σ_ν 和 τ_ν 均可表示为连分数

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1 + \theta_A/\theta_B] \\ \sigma_\nu &= [0; a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_n] \end{aligned} \tag{48}$$

因此，结构因子随波数按照以下规律衰减。

$$\frac{S(k_{\nu+1})}{S(k_\nu)} = \left(\frac{k_{\nu+1}}{k_\nu}\right)^{2+2\log\tau_\nu/\log\sigma_\nu} \quad , \quad 0 \le \nu \le n-1 \tag{49}$$

如公式（47）和（49）所示，傅里叶强度中的缩放因子会根据连分数序列 $\{a_j,\ 1 \le j \le n\}$ 在每一步发生变化。因此，该序列 $\{a_n\}$ 中新增的高阶项提供了大波长范围内连续尺度的信息，换言之，也提供了倒易空间中 $k \to 0$ 附近不同小尺度的信息。下面通过一个例子来说明公式（47）所提出的模型。

为此，我们考虑由以下内容生成的铺砌：

$$\alpha = [0; 1, 8, 1, 8, 1, 8, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] \approx 0.8989789\ldots$$

对于每个波数 $k = 2\pi m/L,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$，都可以使用式 (22) 中提出的递归过程确定傅里叶强度。图 3 绘出了这些强度，并用红色标出了主导波数 $k_\nu = 2\pi c_\nu/L,\ 0 \le \nu \le n$处的布拉格峰，这些波数在式 (31) 中定义。序列的第一项（对应于 $\nu = 0$）也是最大的一项，其值为 $k_0 = 2\pi v_n/L \approx 2\pi/(B + A\alpha)$。当指标 ν 在范围 $0 \le \nu \le n$内递增时，k_ν 的值逐渐减小，直至最后一项（也是最小的一项）$k_n = 2\pi/L$。从 $\nu = n-1$ 到 $\nu = 0$ 的后续傅里叶强度 $H(k_\nu)$，可以从前面的值出发，采用式 (47) 中提出的方法递归求得，初始值为 $H(k_n)$。这些值在图 3 中以蓝色虚线表示。对于主导波数 $\{k_\nu\}_{\nu=0}^{n}$所给出的坐标，所提出的方法能够令人满意地拟合倒易空间中的精确谱结果。绘制图 3 时，采用了 α ($n = 12$)的第 12 个渐近逼近。众所周知，序列 k_ν 遵循递归方案 $k_{\nu+1} = \sigma_\nu\, k_\nu$。在特定情形 $\alpha = [0; 1, 8, 1, 8, 1, 8, 2, 2, 2, 2, 2]$, 下，数列 $\{\sigma_\nu\}$ 以有理数和小数两种形式列于表 2 中。本例中的生成器参数 α经过仔细选择，使前六项在 1 和 8 之间交替，后六项则恒为 2。这一选择展示了式 (47) 所揭示的有趣性质：傅里叶强度在局部呈现出与序列 $\{a_j\}_{j=1}^{n}$相符的模式。事实上，

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
有理数形式， $c_{\nu+1}/c_\nu$	$\frac{140078}{155819}$	$\frac{15741}{140078}$	$\frac{14150}{15741}$	$\frac{1591}{14150}$	$\frac{1422}{1591}$	$\frac{169}{1422}$
十进制形式 ，σ_ν	0.8989	0.1124	0.8989	0.1124	0.8928	0.1188

	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ_{11}
有理数形式， $c_{\nu+1}/c_\nu$	$\frac{70}{169}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$
十进制形式 ，σ_ν	0.4142	0.4143	0.4138	0.4167	0.4000	0.5000

表 2：通过连分数 $\alpha = [0$ 得到的参数 $\sigma_\nu = c_{\nu+1}/c_\nu$ 的值， $0 \le \nu \le 11$ 均以有理数和十进制形式给出； $1, 8, 1, 8, 1, 8, 2, 2, 2, 2, 2]$。 $n = 12$ 的最后一个值是 $\sigma_{12} = 0$

主导波数序列由表 2 中列出的数值 σ_ν 得出。因此，其中第一个（按从大到小的顺序排列）是

$$k_1 = 0.8989\, k_0\ , \quad k_2 = 0.1124\, k_1\ , \quad k_3 = 0.8989\, k_2\ , \quad k_4 = 0.1124\, k_3\ , \ldots \tag{50}$$

由此可知， k_0 和 k_1 彼此相当接近，但 k_1 和 k_2 相距甚远。波数之间的这些距离，反映了序列中数值从 1 跳到 8 在倒易空间中的表现。另一方面，当我们从 k_7 起计算波数时，会发现

$$k_7 = 0.4142\, k_6\ , \quad k_8 = 0.4143 k_7\ , \quad k_9 = 0.4128\, k_8\ , \quad k_{10} = 0.4167\, k_9\ , \ldots \tag{51}$$

即，从 $\nu \ge 7$ 来看，波数在对数尺度上等距分布，反映了序列作为 $a_7 = a_8 = \cdots = 2$ 的恒定行为。图 3 中主导波数的红色坐标清楚地呈现了这里描述的行为。

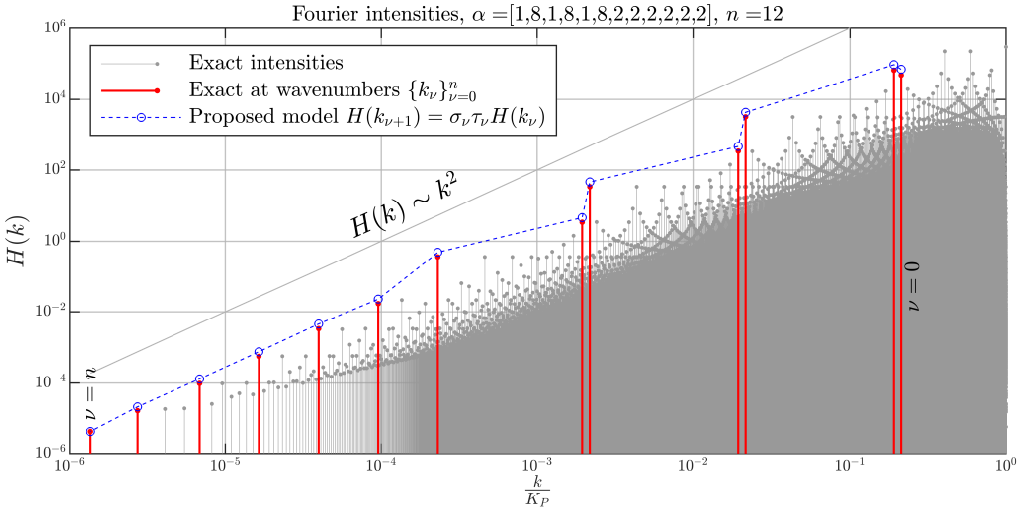

图 3：由 $\alpha = [0$ 生成的准周期铺砌的傅里叶强度；$1, 8, 1, 8, 1, 8, 2, 2, 2, 2, 2]$。红色：主导数列 $k_\nu = 2\pi c_\nu / L$、$0 \le \nu \le n$ 对应波数处的强度。蓝色：基于密度涨落提出的模型

然而，如果我们观察图 3 中傅里叶强度的整体衰减趋势 $k \to 0$，平均来看，其结果与二次定律非常相似。接下来的章节将展示一些结果，确实证明由连分数生成的准周期铺砌具有超均匀性，其指数等于 3，即 $S(k) \sim k^4$。我们将对金属均值和周期连分数的情形给出严格证明。此外，我们还将证明，对于任何其他系统，沿整个序列 $\{k_\nu\}_{\nu=0}^{n}$ 的结构因子强度的衰减趋势渐近地遵循四次幂律。

5.1. 金属均值：$\alpha = [0;\ a,\ a,\ a,\ \ldots]$

本节汇集了广义斐波那契型准周期介质的行为，这类介质也可以使用替换规则 $A \to B$、$B \to B^a A$ 进行模拟。文献 [2, 3] 研究了超均匀性的阶数，得到了按幂律 $S(k) \sim k^4$ 衰减的结构因子，这意味着傅里叶强度严格按二次幂衰减。下面我们将看到，这一结果可以从本文提出的模型推导出来。众所周知 [14]，金属均值由连分数 $\alpha = [0;\ a,\ a,\ a,\ \ldots]$ 表示，是二次方程 $\alpha^2 = 1 + a\,\alpha$ 的解。数列 σ_ν 和 τ_ν 的前两项分别为 $\sigma_0 = \alpha$、$\tau_0 = \theta_A/\theta_B$。由于 a_j 为常数，经过若干步后，σ_ν 和 τ_ν 将近似相等。因此，假设 $n \gg \nu \gg 1$，可得

$$\sigma_\nu = [0; a, a, \ldots] = \alpha \quad , \quad \tau_\nu = [0; a, a, \ldots, a + \theta_A/\theta_B] \approx \alpha \tag{52}$$

因此，关系 $H(\sigma_\nu k_\nu) = \sigma_\nu\, \tau_\nu\, H(k_\nu)$ 可以近似为

$$H(\alpha k_\nu) = \alpha^2\, H(k_\nu) \tag{53}$$

因此，可以根据二次定律 $H(k) \sim k^2$ $(k \to 0)$ 模拟波数 $k = k_\nu$ 处的傅里叶强度。

显然，在 $k \to 0$（长波长范围）内的这种行为由序列 $\{a_j\}$ 的最新值（即指标 j 取值最大的那些项）决定；根据

序列 $\{k_\nu\}$ 的定义，这些值对应于最低的波数。因此，显然，对于由形如 $\alpha = [0;\, d_1, \ldots, d_m, a, a, a, \ldots]$ 的连分数生成的铺砌，傅里叶强度也会呈二次衰减，例如图 3 所示的铺砌。图 4（上）展示了情形 $\alpha = \sqrt{2} - 1 = [0;\, 2, 2, 2 \ldots]$ 下的傅里叶强度和累积函数 $Z(k)$，该函数定义于公式（2）中。

由于 $S(k)$ 由一组奇异峰构成，因此不能推断累积强度函数的阶数会高出一阶。相反，在这些情况下，$S(k)$ 和 $Z(k)$ 的指数实际上相同，均为 $[2]$。事实上，本文开展的数值模拟表明，对于斐波那契投影情形 $[2,\, 3]$, ，傅里叶峰及其位置的标度关系使累积函数 $Z(k)$ 与 $S(k)$ 按相同的幂指数进行标度，这表明该性质也适用于由连分数生成的准周期铺砌（见图 4）。因此可得 $Z(k) \sim k^4$；根据式（3），这立即导出超均匀性指数 $\gamma = 3$。谱的离散性质使函数 $Z(k)$ 呈现如图 4（右）所示的累积阶梯状变化。

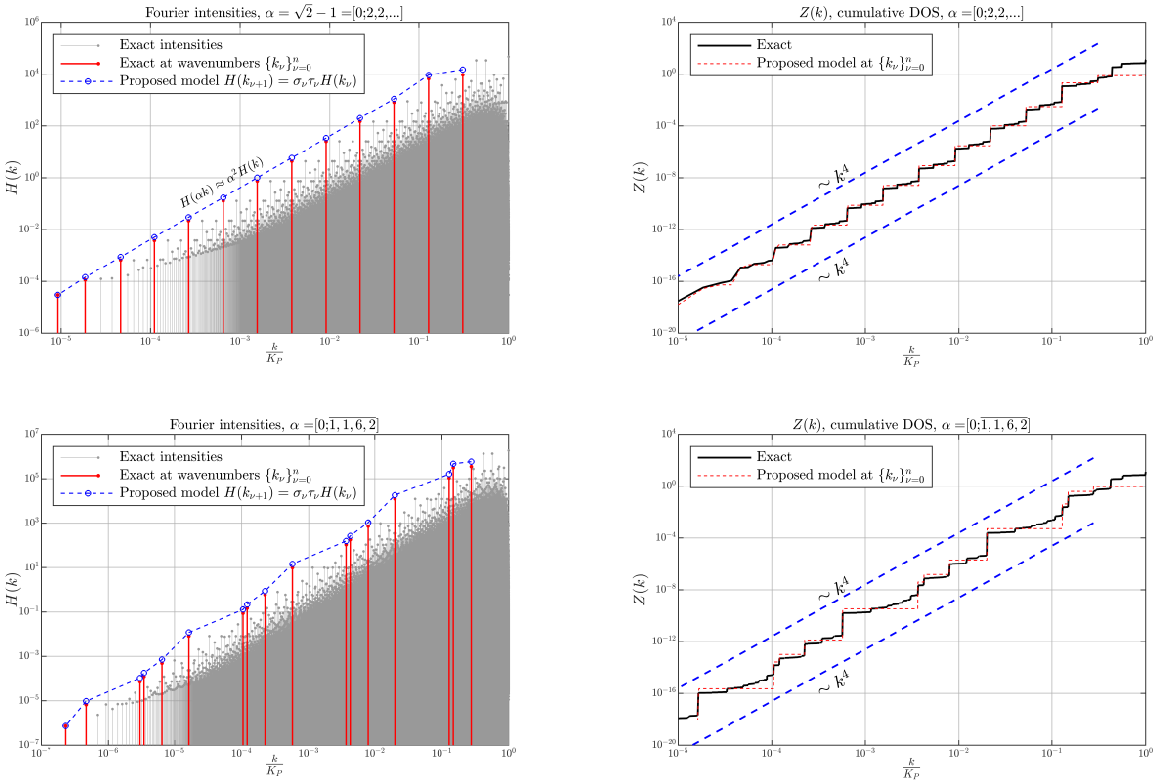

图 4：银平均数生成的两个准周期铺砌的傅里叶强度（左）和累积强度函数（右）：$\alpha = \sqrt{2} - 1 = [0;\, 2, 2, 2, \ldots]$（上）和周期连分数 $\alpha = [0;\, \overline{1, 1, 6, 2}]$。在左图中：灰色峰表示波数为 $k = 2\pi m/L$，$m = 0, 1, 2, \ldots$ 处的精确傅里叶强度，红色峰表示主导波数 $k_\nu = 2\pi c_\nu / L$ 处的精确傅里叶强度，$k_\nu = 2\pi c_\nu / L$ 定义见式（31）；蓝点表示由近似模型得到的波数序列 $\{k_\nu\}$ 处的傅里叶幅值。在右图中：黑线表示精确的累积强度函数，红线表示由主导波数处的近似布拉格峰得到的累积函数。蓝色虚线表示四次幂阶包络曲线。

5.2. 周期连分数： $\alpha = [0;\ a_1,\ ..,\ a_p]$ $\overline{\qquad\qquad}$

图 3 显示，序列 $\{a_j\}$ 中某种重复模式的存在，使得在考察更小的波数 k 时，傅里叶强度也呈现出周期性。尽管如此，强度的衰减率整体上似乎是二次的，但在局部可能大于或小于 2。本节将证明，对于形如 $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_p]$ 的周期连分数，傅里叶强度的整体衰减阶确实恰为 2。上划线表示重复，即

$$\alpha = [0; \overline{a_1, \ldots, a_p}] = [0; a_1, \ldots, a_p, a_1, \ldots, a_p, \ldots] \tag{54}$$

考虑 $n \gg \nu \gg p$，我们可以引入以下数值

$$\hat{\sigma} = \sigma_{\nu+1} \cdot \sigma_{\nu+2} \cdots \sigma_{\nu+p} \ , \quad \hat{\tau} = \tau_{\nu+1} \cdot \tau_{\nu+2} \cdots \tau_{\nu+p} \tag{55}$$

由于假设的模型对于傅里叶强度和序列 $\{k_\nu\}$均为乘法型，数值 $\hat{}\sigma = k_{\nu+p+1}/k_{\nu+1}$ 表示两个波数 $k_{\nu+1}$ 和 $k_{\nu+p+1}$之间的整体跃变，它们相隔 p步。由于连分数具有周期性，$\hat{}\sigma$ 的值与所考察的 ν 值无关。固定一个足够大的 ν 值后，从 $k_{\nu+1}$ 开始，跨越 p 步的傅里叶强度之间的关系为

$$\begin{aligned} H(k_{\nu+p+1}) &= \sigma_{\nu+p}\, \tau_{\nu+p}\, H(k_{\nu+p}) \\ &= [\sigma_{\nu+p} \cdots \sigma_{\nu+1}]\ [\tau_{\nu+p} \cdots \tau_{\nu+1}]\, H(k_{\nu+1}) = \hat{\sigma}\hat{\tau}\, H(k_{\nu+1}) \end{aligned} \tag{56}$$

由于波数之间的关系为

$$k_{\nu+p+1} = \sigma_{\nu+1} \cdots \sigma_{\nu+p}\, k_{\nu+1} \equiv \hat{\sigma} k_{\nu+1} \ ,$$

我们可以写成

$$H(\hat{\sigma} k_{\nu+1}) = \hat{\sigma}\hat{\tau}\, H(k_{\nu+1}) \tag{57}$$

现在我们来说明，只要满足 $n \gg \nu \gg 1$，两个值 $\hat{}\sigma$ 和 $\hat{}\tau$ 就近似相等，其中 n 表示序列 $\{a_j\}$ 的总大小。事实上，为了做到这一点，我们将分别求出 $\hat{}\sigma$ 和 $\hat{}\tau$，并为它们推导出更简洁的表达式。由式（29）可得，

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \sigma_{\nu+1} \cdot \sigma_{\nu+2} \cdots \sigma_{\nu+p} \\ &= \left(-\frac{\xi_{\nu+1}}{\xi_\nu}\right) \left(-\frac{\xi_{\nu+2}}{\xi_{\nu+1}}\right) \cdots \left(-\frac{\xi_{\nu+p}}{\xi_{\nu+p-1}}\right) \\ &= (-1)^p\, \frac{\xi_{\nu+p}}{\xi_\nu} \end{aligned} \tag{58}$$

现在，由于 $\hat{}\sigma$ 不依赖于 ν，我们可以任取一个指标 ν 来求得其值。特别地，取 $\nu = 0$ 很有意义，此时式（58）可写为 $\hat{}\sigma = (-1)^p \xi_p/\xi_0$。利用式（28）中的表达式，我们可以计算 ξ_p：

$$\xi_p = v_n\, v_p \left(\alpha - \frac{u_p}{v_p}\right) \tag{59}$$

其中已知 $\alpha = u_n/v_n$ 和 $u_p/v_p = [0;\ a_1,\ ...,\ a_p]$ 表示第 p 个渐近分数。此外，$\xi_0 = u_n$，因此 $\hat{}\sigma$ 的值最终可表示为

$$\hat{\sigma} = (-1)^p\, \frac{\xi_p}{\xi_0} = (-1)^p\, \frac{v_n\, v_p}{u_n} \left(\alpha - \frac{u_p}{v_p}\right) = (-1)^p \left(v_p - \frac{u_p}{\alpha}\right) \tag{60}$$

另一方面，事实证明，式（55）中给出的 $\hat{}\tau$ 表达式也可以有意义地简写。每个 τ_j、 $\nu + 1 \le j \le \nu + p$ 都定义为两个连续镶嵌长度之比，即。

是 $\tau_j = L_{j-1}/L_j = [0;\ a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1 + \theta_A/\theta_B]$，因此它们都是有限连分数。然而，由于假设 $\nu \gg p$，那么对于 $\nu + 1 \le j \le \nu + p$, τ_j 可以近似为

$$\begin{aligned}\tau_j &= [0; a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1,\ a_p, \ldots, a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_1 + \theta_A/\theta_B] \\ &\approx [0; a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1, \overline{a_p, \ldots, a_1}] \end{aligned} \quad (61)$$

其中，最后一个表达式是一个无限连分数。因此，上述假设使我们能够将每个 τ_j 写成参数 $\beta = [0$的函数；a_p、a_{p-1}、……、$a_1]$ 由 α 通过反转周期得到。事实上，

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \tau_{\nu+1} \cdot \tau_{\nu+2} \cdots \tau_{\nu+p} \\ &\approx [0; a_1, \overline{a_p, \ldots, a_1}][0; a_2, a_1, \overline{a_p, \ldots, a_1}] \cdots [0; a_{p-1}, \ldots, a_1, \overline{a_p, \ldots, a_1}] \cdot [0; \overline{a_p, \ldots, a_1}] \\ &= \frac{1}{a_1 + \beta} \cdot \frac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_1 + \beta}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_{p-1} + \dfrac{1}{a_{p-2} + \dfrac{1}{\ddots + \dfrac{1}{a_1 + \beta}}}} \cdot \beta \end{aligned} \quad (62)$$

上述表达式表明，在考虑 $\nu \gg p$ 的取值时，$\hat{\tau}$ 为常数且与 ν 无关；这一点将在后文用到。根据 $\tau_j = L_{j-1}/L_j$ 给出的定义，见式（45），可以将 $\hat{\tau}$ 的值简化为

$$\hat{\tau} = \tau_{\nu+1} \cdot \tau_{\nu+2} \cdots \tau_{\nu+p} = \frac{L_\nu}{L_{\nu+1}} \cdot \frac{L_{\nu+1}}{L_{\nu+2}} \cdots \frac{L_{\nu+p-1}}{L_{\nu+p}} = \frac{L_\nu}{L_{\nu+p}} \quad (63)$$

铺砌长度遵循特征递归数列 $L_j = a_j\, L_{j-1} + L_{j-2}$，如式（10）所示。由于如上文式（62）所示，$\hat{\tau}$ 与 ν 无关，我们可以将后者与一个 ν 的倍数相匹配，即 $\nu = m\, p$，其中 m 是某个较大的自然数。于是，第 $\nu + p$ 步的铺砌长度可以用前面各步直至第 L_ν 步的长度来表示。按照该数列并利用相应数列 [10], 的性质，我们得到

$$\begin{aligned} L_{\nu+p} &= a_p\, L_{\nu+p-1} + L_{\nu+p-2} \\ &= (a_p a_{p-1} + 1)\ L_{\nu+p-2} + a_p\, L_{\nu+p-3} \\ &= (a_p a_{p-1} a_{p-2} + a_{p-2} + a_p)\ L_{\nu+p-3} + (a_p a_{p-1} + 1)\ L_{\nu+p-4} = \cdots = \\ &= v_p\, L_\nu + u_p\, L_{\nu-1} \end{aligned} \quad (64)$$

其中 $u_p/v_p = [0;\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_p]$ 是 α 的第 p 个渐近分数。除以 L_ν 后，我们最终得到

$$\frac{L_{\nu+p}}{L_\nu} = u_p\, \frac{L_{\nu-1}}{L_\nu} + v_p \quad (65)$$

再次利用我们将 $\nu = mp$ 视为具有 $\nu \gg p$ 的多个 p 这一事实，我们可以近似得到 $L_{\nu-1}/L_\nu = \tau_\nu \approx \beta$。

$$\frac{L_{\nu-1}}{L_\nu} = \tau_\nu = [0; a_p, \ldots, a_1, a_p, \ldots, a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_1 + \theta_A/\theta_B] \approx \beta \quad (66)$$

将式（66）代入式（65），最终得到 $\hat{\tau}$ 的值

$$\hat{\tau} = \frac{1}{v_p + \beta\, u_p} \quad (67)$$

为了证明 $\hat{\sigma} \approx \hat{\tau}$，将使用上述推导出的形式 (60) 和 (67) 计算比值 $\hat{\sigma}/\hat{\tau}$。

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\tau}} = (-1)^p \left(v_p - \frac{u_p}{\alpha}\right)\ (v_p + \beta\, u_p) = (-1)^p \left[v_p^2 - u_p^2\, \frac{\beta}{\alpha} + u_p v_p \left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad (68)$$

利用有关周期连分数的已知结果，可以进一步简化这个表达式。事实上，可以证明 [11] 下面的二次方程。

$$X^2 + \frac{v_p - u_{p-1}}{u_p}\, X - \frac{v_{p-1}}{u_p} = 0 \tag{69}$$

以 $X_1 = \beta$ y 和 $X_2 = -1/\alpha$ as 为根。因此，利用根与多项式系数之间的关系，我们得到

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{v_{p-1}}{u_p} \quad , \quad \beta - \frac{1}{\alpha} = -\frac{v_p - u_{p-1}}{u_p} \tag{70}$$

将该结果代入式（68），经过一些代数运算可得

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\tau}} = (-1)^p \left(v_p\, u_{p-1} - u_p\, v_{p-1}\right) = (-1)^p \cdot (-1)^p = 1 \tag{71}$$

其中用到了式 (9) 的恒等式。证明了 \hat$\sigma$ = \hat$\tau$ 这一事实后，我们最终由式 (57) 得到:

$$H(\hat{\sigma}\, k_{\nu+1}) = \hat{\sigma}^2\, H(k_{\nu+1}) \tag{72}$$

这表明，考虑到 p 步的完整周期，傅里叶强度呈现二次衰减，因此 $S(k) \sim k^4$。与上述情况相同，由于谱由一组奇异的布拉格峰构成，累积强度也遵循相同的幂律，即其包络呈现为 $Z(k) \sim k^4$。图 4（下）展示了由周期连续分数 $\alpha = \overline{[1,1,6,2]}$ 生成的系统的傅里叶强度 $H(k)$ 及其累积函数 $Z(k)$，其周期包含 4 个数字。根据理论推导，与主导波数序列 $\{k_\nu,\ 0 \le \nu n\}$ 相关的布拉格峰在对数尺度上也呈周期性排列。每经过 4 步，傅里叶幅值都会按照与密度涨落相同的模式进行缩放，这一点在两幅图中均得到了清晰体现。可以观察到，包络 $Z(k)$ 函数的幂律阶数恰好为 4，从而验证了公式（72）中推导出的理论规律。

在前两节中，我们考察了周期无理数的情形。下一节将研究由任意连分数生成的铺砌的一般情形，并证明傅里叶强度趋于 $k \to 0$ 时的全局渐近指数是二次的。

5.3. 一般情形： $\alpha = [0;\ a_1, \ldots, a_n]$

在研究了前两节中的具体情况后，值得探讨一下，所观察到的行为是否可以推广到由连分数 $\alpha = [0;\ a_1, \ldots, a_n]$ 生成的任意准周期介质，使其表现出超均匀行为，且结构因子按照四次幂律趋于零，即 $S(k) \sim k^4$ 当 $k \to 0$。已有研究表明，在局部范围内，序列 $\{a_j\}$ 中数值的差异会反映为傅里叶强度的扰动，正如图 2 和图 4 中的数值示例所示。因此，指数 $1 + \log\, \tau_\nu / \log\, \sigma_\nu$ 可能具有较高的局部值，并根据方程 (47) 对波数产生影响。不过，参数 τ_ν 和 σ_ν 本身的结构会使斜率在后续步骤中有所平滑，因为参数 ν 在 $0 \le \nu \le n$ 之间变化。接下来我们将看到，当 $n \to \infty$ 时，第一步与最后一步的傅里叶系数（即 $\nu = 0$ 和 $\nu = n$）之间的关系确实近似为二次关系。也就是说，

$$\frac{H(k_n)}{H(k_0)} \approx \left(\frac{k_n}{k_0}\right)^{\chi} \quad , \quad n \to \infty \tag{73}$$

不失一般性，我们再次命名

$$\hat{\sigma} = \sigma_0\, \sigma_1\, \cdots\, \sigma_{n-1}\ , \qquad \hat{\tau} = \tau_0\, \tau_1\, \cdots\, \tau_{n-1} \tag{74}$$

使得

$$\begin{aligned} k_n &= \sigma_{n-1}\, k_{n-1} = \cdots = \sigma_{n-1}\cdots\sigma_1\,\sigma_0\, k_0 \quad , \quad \equiv \hat{\sigma}\, k_0 \\ H(k_n) &= \sigma_{n-1}\,\tau_{n-1}\, H(k_{n-1}) \\ &= (\sigma_{n-1}\,\cdots\,\sigma_1\,\sigma_0)\cdots(\tau_{n-1}\,\cdots\,\tau_1\,\tau_0)\, H(k_0) \\ &\equiv \hat{\sigma}\,\hat{\tau}\, H(k_0) \end{aligned} \tag{75}$$

利用表达式（29）和（45），σ 和τ 的值可简化为

$$\hat{\sigma} = (-1)^n \frac{\xi_{n-1}}{\xi_{-1}} = \frac{1}{v_n} \quad , \quad \hat{\tau} = \frac{L_{-1}}{L_{n-1}} = \frac{A}{L_{n-1}} = \frac{A}{\tau_n\, L_n} = \frac{1}{\tau_n(\alpha+\theta_A/\theta_B)}\frac{1}{v_n} \tag{76}$$

因此，我们可以计算出 χ 的值为

$$\chi = \frac{\log H(k_n) - \log H(k_0)}{\log k_n - \log k_0} = \frac{\log\hat{\sigma} + \log\hat{\tau}}{\log\hat{\sigma}} = 2 + \frac{\log\left[\tau_n(\alpha+\theta_A/\theta_B)\right]}{\log v_n} \approx 2 \qquad (n\to\infty) \tag{77}$$

上述表达式趋近于 2，因为自然数序列 v_n 无限增大，而 τ_n 通常仍小于 1。

我们进行了若干数值示例来验证这一性质，结果均显示，在趋向长波范围时呈现二次指数趋势。图 5 展示了其中三个示例，它们由以下无理数及其对应的连分数生成

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e-1}{e+1} = [0;2,6,10,14,18,22,\ldots] = 0.4611715\ldots \\ \alpha &= \ln 2 = [0;1,2,3,1,6,3,1,1,2,\ldots] = 0.69314718\ldots \\ \alpha &= \frac{1}{\pi} = [0;3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1] = 0.31830988\ldots \end{aligned} \tag{78}$$

图 5 展示了理论推导证明的渐近行为。尽管局部可能存在显著波动，例如 $1/\pi$ 的情况，但最终平均而言，超均匀性系数是共同的，等于 $\gamma = 3$。

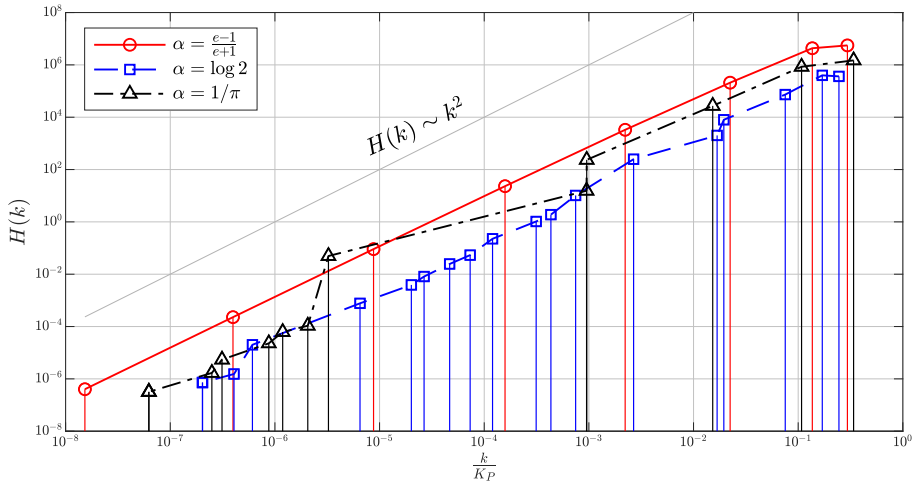

图 5：由 $\alpha = \{\frac{e-1}{e+1}, \log 2、\ 1/\pi\}$ 生成的三种准周期铺砌的傅里叶强度。傅里叶幅值是在主导波数序列处计算的，这些波数对于三种铺砌而言不一定相同。

6. 结论

本文研究了由连分数生成的一维准周期晶格的超均匀性。将区间 $[0,1]$ 中任意一个实数表示为连分数后，我们可以从二元字母表构造一个词或序列，从而生成准周期铺砌。所研究的介质由词拼接构成，表现为一维准周期点分布。利用铺砌的准周期性，可以递归确定倒易空间中的傅里叶强度。在整个布拉格峰谱中，我们找到了一个波数序列，称为主导波数序列，它展现出与铺砌的密度涨落相关的特殊性质。研究证明，该序列处的傅里叶强度按平方律衰减，与连分数无关，这意味着这些介质具有指数为 3 的强超均匀性。通过若干数值示例验证并说明了理论结果。

致谢

Ll. M. Garc´ıa-Raffi 和 M. L´azaro 感谢由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2020-112759GB-I00 项目提供的部分支持。M. L´azaro 感谢瓦伦西亚自治区政府资助的 CIGE/2021/141资助项目（新兴研究团队）提供的支持。

参考文献

[1] S. Torquato, F. H. Stillinger，局部密度涨落、超均匀性与有序度量，《物理评论E》68 (2003) 041113. doi:10.1103/PhysRevE.68.041113. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.041113 [2] E. C. Oguz, J. E. S. Socolar, P. J. Steinhardt, S. Torquato，一维替代铺砌中的超均匀性与反超均匀性，《晶体学报A辑：基础与进展》75 (1) (2019) 3–13. doi:10.1107/s2053273318015528. [3] E. C. O˘guz, J. E. S. Socolar, P. J. Steinhardt, S. Torquato，准晶体的超均匀性，《物理评论B》95 (2017) 054119. doi:10.1103/PhysRevB.95.054119. [4] M. Baake, U. Grimm，极限周期点集的衍射，《哲学杂志》91 (19-21) (2011) 2661–2670. arXiv:https://doi.org/10.1080/14786435.2010.508447, doi:10.1080/14786435.2010.508447. URL https://doi.org/10.1080/14786435.2010.508447 [5] M. Baake, U. Grimm，非周期结构的数学衍射，《化学学会评论》41 (2012) 6821–6843. [6] C. Godr`eche, J. M. Luck，非Pisot自相似结构衍射谱的索引，《物理评论B》45 (1992) 176–185. doi:10.1103/PhysRevB.45.176. [7] J. Luck, C. Godreche, A. Janner, T. Janssen，准周期自相似结构原子表面的性质，《物理学杂志A：数学与一般物理》26 (8) (1993) 1951–1999，被引用86次。 doi:10.1088/0305-4470/26/8/020. [8] J. M. Luck，准晶体及其他非周期结构中临界现象的分类，《欧洲物理快报》(EPL) 24 (5) (1993) 359–364. doi:10.1209/0295-5075/24/5/007. [9] S. Torquato，物质的超均匀态，《物理学报告》745 (2018) 1–95，物质的超均匀态。[10] M. L´azaro, A. Niemczynowicz, A. Siemaszko, L. Garcia-Raffi，Sturmian结构介质的弹性动力学性质，《声学与振动杂志》715 (2022) 文章编号16539。 doi:https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116539. [11] C. Olds，《连分数》，兰登书屋（美国），1963。[12] M. Baake, U. Grimm, N. M. nibo，二元膨胀规则族的谱分析，《数学物理快报》108 (2018) 1783–1805. [13] C. Godreche, J. Luck，倒易空间中的多重分形分析与自相似结构傅里叶变换的性质，《物理学杂志A：一般物理学》23 (16) (1990) 3769–3797，被引用109次。 doi:10.1088/0305-4470/23/16/024. [14] E. Maci´a，《凝聚态物质中的非周期结构：基础与应用》，泰勒与弗朗西斯出版集团，2009。