arXiv:2305.06251v1 [math.AG] 10 May 2023

Jouanolou 叶丛的算术方面

Wodson Mendson

2023年5月11日

摘要。 我们研究 Jouanolou 叶丛的 p-除子的结构，并证明在某些条件下，它可以是不可约的，也可以含有一个 p-因子。我们研究射影平面上叶丛模 p 的约化及其在全纯叶丛问题中的应用。我们通过模 2 约化，为以下事实给出新的证明：在某些算术条件下，奇数次复射影平面上的 Jouanolou 叶丛没有代数解。

目录

1 引言 1 2 符号说明 4 3 射影平面上的叶丛 4 4 代数性与 p-除子 6 5 自同构与 p-除子 10 6 通过模 2 约化证明非代数性 17

1 引言

在著作 [13] 中，作者引入了定义在特征为 $p > 0$ 的域上的光滑代数曲面上的叶丛的 p-除子的概念。这个 p-除子是曲率态射的退化除子：该态射将叶丛切丛的一个局部截面映射为其 p 次幂。事实证明， p-除子的概念有助于理解由叶丛不变的代数

2010 数学主题分类。 32S65；13N15；13A35关键词。 叶丛；正特征上的叶状结构；模 p 约化；Jouanolou 叶丛； p-除子[0]本文在雷恩第一大学完成。W. Mendson 感谢 CAPES 的资助

曲线的性质，并应用于射影空间上余维一全纯叶丛的研究。例如，著作 [14] 中对 $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ 上一般叶丛的 p-除子结构的研究，是构造射影空间上余维一全纯叶丛空间的新不可约分支的重要一步（见 [13, 定理 B] 和 [14, 定理 11.7]）。

一个基本性质如下：任何代数不变曲线都应出现在 p-除子的支集中；反过来，p-除子的支集中任何重数模 p 不为零的素除子都应是不变曲线（见 [13,命题 3.8]）。

在研究 p-除子时，自然会出现以下问题：

问题 1. 对于一般的叶状结构，关于 p-除子的结构，我们能得出什么结论？它是不可约的吗？是约化的吗？

问题 2. 光滑射影曲面上的叶丛可以有多少个代数解？

当我们考虑 p-闭叶丛时，问题 2 的一个简单情形便会出现。在这种情况下，解有无穷多个，且 p-除子是零除子。在 [13], 这项工作中，作者针对射影平面和 Hirzebruch 曲面上的叶丛，给出了问题 1 的答案。文中探讨了p-除子的结构，并证明在某些条件下，它在一般情形下是约化的。在射影平面上，这对应于以下定理（见 [13, 定理 A]）。

定理。 设k 是特征为 $p > 0$ 的域。射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上一个次数为 $d \geq 1$ 的一般叶丛具有约化的 p-除子。

本文研究**Jouanolou 叶丛** 的 p-除子的结构，并给出沿着问题 1 和问题 2 方向的结果。域 K 上射影平面上的**Jouanolou 叶丛** J_d（次数为 $d \geq 2$）由以下平面向量场给出：

$$v_d = (xy^d - 1)\partial_x - (x^d - y^{d+1})\partial_y.$$

关于 J_d，有一个有趣的事实：当 $K = \mathbb{C}$ 时，对每个 $d \in \mathbb{Z}_{>1}$，叶丛 J_d 都没有代数解。这一点由 Jouanolou 在其专著 [9] 中证明。另一方面，当 K 的特征为 $p > 0$ 时，由 [13, 推论 3.8] 可知，对于所有满足 $p \nmid d+2$ 的 $d \in \mathbb{Z}_{>1}$，Jouanolou 叶丛都有一个代数解。主要结果如下定理所述。

定理 A。 设 k 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 d 为正整数，使得

- $p < d$ 和 $p \not\equiv 1$ 模 3;
- $d^2 + d + 1$ 是素数。

那么，在 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的 *Jouanolou* 叶丛$\mathcal{J}_d$ 具有不可约的 p-除子或 $\Delta_{\mathcal{J}_d} = C + pR$，其中（$\mathcal{J}_d$, C）是特殊的，并且对于每个 i， P_i 都不是 $R = \sum_i \alpha_i P_i$ 的$\mathcal{J}_d$-不变的。

特殊对（J_d，C）的概念在第 5 节中引入（见定义 5.3）。在 k 的特征满足某些算术条件时，我们证明，二次 Jouanolou 叶丛的 p-除子总是不可约的。

定理 B. 设 $p > 2$ 为素数，满足 $7 \nmid p+4$，且 $p \not\equiv 1 \mod 3$。那么，定义在特征为 p 的域上的二次 *Jouanolou* 叶丛 $\mathcal{J}_2$，具有不可约的 p-除子。

作为定理 A 和定理 B 的推论，我们对 Jouanolou 叶状结构的猜想 2 给出了一个答案（见推论 5.18）。

命题 A. 在定理 *A* 的条件下，特征为 $p > 0$ 的 $d \geq 2$ 次 *Jouanolou* 叶丛有且仅有一条不变曲线，且该曲线的次数为$pl + d + 2$，其中 $0 < l \leq d - 1$。

定理 A 和定理 B 的证明涉及对叶丛的自同构群如何影响其 p-除子结构的研究。我们将在第 5 节探讨这一问题。

在本文的最后一部分，我们将简要证明这样一个事实：在满足某些算术条件时，奇数次 Jouanolou 叶丛没有代数解。特别地，这意味着以下结果。

定理 C. 在射影平面上，次数为奇数 $d \geq 2$ 且满足 $d \not\equiv 1$ 模 3 的非常一般的叶丛没有代数解。

回顾一下，术语 **非常一般** 是指：在次数为 d 的全纯叶丛空间中，存在一个闭集的可数并 S，使得任何位于其补集 S 中的叶丛都没有代数解。

定理 C 是众所周知的（参见 [9] 和 [17, 定理 1]）。本文的新意在于证明方法：该方法仅用到约化到特征 2，以及 S. Gao 提出的一种针对二元多项式的不可约性检验（参见 [8, 推论 4.12]）。

1.1 论文结构

在第 2 节中，我们固定本文将使用的记号。在第 3 节中，我们回顾射影平面上叶丛的定义、 p-除子的概念、叶丛的自同构，并讨论一些与模 p 约化相关的主题。在第 4 节中，我们讨论复射影平面上没有代数解的叶丛与定义在特征为 $p > 0$ 的域上且具有不可约 p-除子的叶丛之间的一些关系。在第 5 节中，我们探讨叶丛的自同构群及其对 p-除子结构的影响，并在此给出定理 A 和定理 B 的证明。在最后一节中，我们研究特征为二的 Jouanolou 叶丛，并给出定理 C 的证明。

2 记号

- J_d = Jouanolou 叶丛;
- $\Delta_{\mathcal{F}}$ = 与叶丛 F 相关联的 p-除子;
- $\mathbf{Spm}(R)$ = 域 R 的极大理想全体;
- $\mathbb{F}_{\mathfrak{q}}$ = $\mathfrak{q} \in \mathbf{Spm}(R)$ 的剩余域;
- $\mathbb{Z}[\mathrm{F}]$ = 通过添加 F 中出现的所有系数而得到的 $\mathbb{Z}$-代数;

- $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ = F 模 $\mathfrak{p}$ 的约化;
- $\mathrm{k}[x,y,z]_e$ = k-次数为 e 的齐次多项式向量空间，定义在 x,y,z;
- $m_Q(C)$ = 曲线 $C \subset X$ 在 $Q \in X$处的代数重数;
- $O(2)$ = 阶至少为 2 的项;

3 射影平面上的叶状结构

设 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 k 为一个代数闭域。射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的一个叶丛 F，模去 k^*，由一个非零的整体截面 $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}}(d+2))$ 给出，其奇点集是有限的。F 的次数具有几何意义：它表示 ω 与 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 中一条一般直线 $l \cong \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ 之间的相切点数。利用欧拉正合列，我们可以将 ω 看作 $\mathbb{A}^3_{\mathrm{k}}$ 上的一个齐次 1-形式： $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ 其中

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}(A,B,C) \text{ is finite.}$$

3.1 p-闭叶丛与非-p-闭叶丛

设 k 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 F 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上次数为 d 的叶丛，并假设 p 不整除 $d+2$。设 F 由以下射影 1-形式给出： $\omega = Adx + Bdy + Cdz$，并记

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

设 v_ω 是 $\mathbb{A}^3_{\mathrm{k}}$ 上由下式定义的齐次向量场:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

注意，根据构造，我们有

$$\mathbf{div}(v_\omega) = \partial_x L + \partial_y M + \partial_z N = 0.$$

我们回顾一下命题 [9]。

命题 3.1。 将 ω 与 v_ω 关联起来的映射，在集合$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}},\Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}}(d+2))$ 与 $\mathbb{A}^3_{\mathrm{k}}$ 上次数为 d 且散度为零的齐次向量场集合之间给出一个双射。

证明。 参见 [9, 命题 1.1。4]。 □

若 $i_{v_\omega^p}\omega = 0$，则称 F 是 p-**闭的**，其中 $i_{v_\omega^p}$ 表示收缩映射。若 F 不是 p-闭的，则可得到一个因子 $\Delta_{\mathcal{F}} = \{i_{v_\omega^p}\omega = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}})$，其次数为$p(d-1)+d+2$。这称为与 F 相关联的 p-**因子**。回顾一下，若存在 Θ，使得在 $\mathbb{A}^3_{\mathrm{k}}$ 上有一个次数为 $d-1$的二次齐次形式，并且满足

$$dF \wedge \omega = F\Theta.$$

这一概念的一个基本性质体现在下面的命题中。

命题 3.2。 设$\mathcal{F}$ 是p-非闭叶丛，定义在$\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上，且 C 是$\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$中的一条不可约曲线。则：

- 若 C 是$\mathcal{F}$-不变的，则$\mathrm{ord}_{\Delta_{\mathcal{F}}}(C) > 0$;
- 如果 $\mathrm{ord}_{\Delta_{\mathcal{F}}}(C) \not\equiv 0$ 模 p 那么 C 是 $\mathcal{F}$-不变的。

证明。 见 [13, 命题 3.8]。 □

设 F 是定义在 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的叶丛，且 $q \in \mathrm{sing(F)}$ 是一个奇点。回顾一下（参见 [13, 定义 3.10]），点 q 称为 p-**约化奇点**，如果存在一个包含 q 的仿射开子集 $U \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$，使得 $\mathrm{F}|_U$ 在 q 处的线性部分具有如下形式$ydx + \alpha xdy$，其中 $\alpha \notin \mathbb{F}_p$。若 F 的所有奇点 $q \in \mathrm{sing(F)}$ 都是 p-约化的，则称叶丛 F 为 p-**约化叶丛**。根据 [13,引理 3.11]，若 F 至少有一个 p-约化奇点，则 F 不是p-闭的。

注 *3.3.* 设 X 是定义在 k 上的光滑曲面。 X 上的叶丛 F 可定义为一个系统 $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_i$，其中 $\{U_i\}$ 是 X 的开覆盖，$\omega_i \in \Omega^1_X(U_i)$ 和 $v_i \in T_X(U_i)$ 满足相容条件。集合 $\{\omega_i\}_i$ 和 $\{v_i\}_i$ 分别定义了叶丛的法丛 $N_{\mathcal{F}}$ 和切丛 $T_{\mathcal{F}}$。若对每个 i 都有 $i_{v_i^p}\omega_i \neq 0$，则该叶丛不是 p-闭的。在这种情况下，集合 $\{i_{v_i^p}\omega_i\}_i$ 定义了 $(T^*F)^p \otimes N_{\mathcal{F}}$ 的一个非零整体截面 $s_{\mathcal{F}}$，而 $s_{\mathcal{F}}$ 的零因子就是 F 的 p-因子（见 *[13,* 第 *3]* 节）。

3.2 叶状结构的自同构

设 k 为一个代数闭域，F 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的一个叶丛，由射影 1-形式 $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}}(d+2))$ 定义。F 的一个自同构是保持 F 的射影平面自同构 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}})$。所谓保持 F，是指：若该叶丛由射影 1-形式 $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}}(d+2))$ 给出，则$\Phi^*\omega = \sigma(\Phi)\omega$，其中 $\sigma(\Phi) \in \mathrm{k}^*$。

注 3.4. 根据 p-除子的定义可知，若 $\mathcal{F}$ 不是 p-闭的，且$\Phi \in$ 自同构$(\mathcal{F})$，则 $\Phi^*\Delta_{\mathcal{F}} = \Delta_{\mathcal{F}}$。

定义在次数为 $d > 1$ 的射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的 **Jouanolou 叶丛**由以下射影 1-形式给出：

$$\mathcal{J}_d: \quad \omega = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz.$$

假设 k 的特征不整除 $d^2 + d + 1$。令 $\mu(\mathrm{k})$ 为 $(d^2 + d + 1)$ 次单位根群，并令 γ 为该群的一个生成元。考虑自同构 $\Phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$，它将 $[x : y : z] \mapsto [\gamma^{d^2+1}x : \gamma y : z]$ 关联起来。于是 $\Phi^*\omega = \gamma\omega$，因此 Φ 是 F 的一个自同构。注意，Φ 的阶为 $d^2 + d + 1$。在第 5 节中将使用这一自同构来研究 J_d 的 p-除子结构。

3.3 模 p 约化

设 F 是复射影平面上的一个次数为 d 的叶丛，由以下射影 1-形式给出：

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

其中 A，B，$C \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d+1}$。令 $\mathbb{Z}[\mathrm{F}]$ 为通过添加出现在 A，B 和 C 上的所有常数系数而得到的有限型 $\mathbb{Z}$-代数。设 $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathrm{F}])$ 为一个极大理想，并令 $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为剩余域 $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathrm{F}]/\mathfrak{p}$ 的特征。注意，由 [18, Tag 00GB] 可知，$\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ 是有限域，因此其特征为 $p > 0$。记 $\omega_{\mathfrak{p}} = \omega \otimes \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ 为将 ω 的系数模 $\mathfrak{p}$ 约化后得到的 $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(d+2)$ 的截面。

定义 3.5。由 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 定义的叶丛 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 称为模 $\mathfrak{p}$ 约化的$\mathcal{F}$。

设 F 是复射影平面上的一个叶丛，$\mathbf{P}$ 是一个抽象性质。若存在稠密子集 $S \subset \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathrm{F}])$，使得对任意 $\mathfrak{m} \in S$，性质 $\mathbf{P}$ 对 $\mathrm{F}_{\mathfrak{m}}$ 成立，则称性质 $\mathbf{P}$ 对 $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ 在**无穷多个素数** $\mathfrak{p}$ 下成立。类似地，若存在非空开子集 $U \subset \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathrm{F}])$，使得对任意 $\mathfrak{m} \in U$，性质 $\mathbf{P}$ 对 $\mathrm{F}_{\mathfrak{m}}$ 成立，则称性质 $\mathbf{P}$ 对 $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ 在**几乎所有素数** $\mathfrak{p}$ 下成立。

性质$\mathbf{P}$ 例如可以是：$\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ 有一条次数为 e的不变曲线，叶丛 $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ 不是 p-闭的，或者 $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ 的 p-除子是不可约的。

4 代数性与 p-除子

在本节中，我们研究复射影平面上无代数解的叶状结构类与特征 $p > 0$ 上具有不可约 p- 除子的射影平面上的叶状结构类之间的关系。我们从以下一个广为人知的基本引理开始研究。

引理 4.1. 设 $X = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$是一个仿射簇， A 是通过添加出现在 $f_0, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$中的所有系数而得到的有限生成 $\mathbb{Z}$-代数。那么， $X(\mathbb{C}) \neq \varnothing$ 成立，当且仅当对于无穷多个素数 $\mathfrak{q} \in \boldsymbol{Spm}(A)$， $X(\mathbb{F}_{\mathfrak{q}}) \neq \varnothing$ 成立。

证明。这一点众所周知，但我们在此给出一个关于非平凡部分的简单证明（见 [15, 命题 2.6]）。反设 $X(\mathbb{F}_{\mathfrak{q}}) \neq \varnothing$ 对无限多个素数 $\mathfrak{q} \in \mathbf{Spm}(R)$ 成立，但 $X(\mathbb{C}) = \varnothing$。令 $S \subset \mathbf{Spm}(A)$ 为这些极大理想组成的集合。根据零点定理，有如下关系：

$$1 = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$$

对于某些 α_1、……、$\alpha_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$。令 R 为将 α_1、……、α_n 的所有常数系数取逆后得到的有限型 A-代数。由于 $\mathbb{Z}$ 的几乎所有极大理想都是 R 中某个极大理想的收缩（见 [19, 命题 4.1.5]），我们得出存在无穷多个极大理想 $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$，使得 $\mathfrak{p} \cap A \in S$。因此，对于无穷多个理想 $\mathfrak{q} \in \mathbf{Spm}(R)$，有 $1 \equiv \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ 模 $\mathfrak{q}$，但这与事实 $X(\mathbb{F}_{\mathfrak{q}}) \neq \varnothing$ 矛盾。 □

命题 4.2. 设 $\mathcal{F}$ 是复射影平面上的一个叶丛，且 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$。那么 $\mathcal{F}$ 有一条次数为 d 的 $\mathcal{F}$-不变曲线，当且仅当 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 对无穷多个素数 $\mathfrak{p}$ 都有一条次数为 d 的 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-不变曲线。

证明。设 $\mathbf{k}$ 是一个代数闭域，$\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ 上由一个 1-射影形式 $\Omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}}(e+2))$ 定义的叶丛。注意， $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ 上所有次数为 d 的 $\mathbf{G}$-不变曲线构成的集合是一个定义在 $\mathbf{k}$ 上的射影簇。事实上，考虑以下代数集：

$$\mathcal{S}_d(\mathcal{G}) = \{([F], [\Theta]) \in \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \times \mathbb{P}(V_{e-1}) \mid \Omega \wedge dF - F\Theta = 0\}$$

其中， $\mathbb{P}(\mathrm{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$ 表示对所有次数为 d 的齐次多项式进行参数化的射影空间，而 $\mathbb{P}(V_{e-1})$ 表示 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 上所有次数为 $e-1$ 的齐次 3-形式的参数空间。那么，所有次数为 d 的 F- 不变曲线构成的集合是集合 $S_d(\mathbf{G}) := \pi_1(\mathrm{S}_d(\mathbf{G}))$，其中 $\pi_1 : \mathbb{P}(\mathrm{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) \times \mathbb{P}(V_{e-1}) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$ 是到第一因子的投影。由于该投影是一个适当映射，我们得出 $S_d(\mathbf{G})$ 是一个射影簇。

由引理 4.1，我们得出 $S_d(\mathbf{F})(\mathbb{C}) \neq \varnothing$ 当且仅当 $S_d(\mathbf{F}_{\mathfrak{q}})(\mathbb{F}_{\mathfrak{q}}) \neq \varnothing$ 对无穷多个素数 $\mathfrak{q}$ 成立，这就证明了该引理。 □

命题 4.3. 设 $\mathcal{F}$ 是复射影平面上的一个次数为 $d > 1$ 的叶丛。那么，如果叶丛 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 的 p-除子对无穷多个素数 p 均不可约，则 $\mathcal{F}$ 没有代数解。

证明。假设对于无穷多个素数 $\mathfrak{q}$，$\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}$ 具有不可约的 q-除子。反设存在一条被 $\mathbf{F}$ 不变的 C 不可约曲线。由于不变性在模 $\mathfrak{q}$ 约化下保持不变，因此对于无穷多个素数 $\mathfrak{q}$，$C_{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}$-不变的。根据 [13, 命题 3.8]，我们知道 $C_{\mathfrak{q}} \leq \Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}}$。但是，由于 $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}}$ 对于无穷多个素数是不可约的，我们得出结论：对于无穷多个素数 $\mathfrak{q}$， $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}} = C_{\mathfrak{q}}$，这与次数比较矛盾。 □

注 4.4。 复射影平面上存在一些叶状结构，对于几乎所有素数 $\mathfrak{p}$，其约化的p-除子都是如此。事实上，考虑由多项式1-形式给出的叶丛$\mathcal{F}$ $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ ：

$$\omega = ydx - xdy + a(x,y)dx + b(x,y)dy = ydx - xdy + \omega_2$$

其中 $a(x,y)$ $b(x,y)$ $\in \mathbb{C}[x,y]$ 是二次的一般齐次多项式。由 ω 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上诱导的叶丛有四条不变直线：无穷远直线 $l_\infty = \{z = 0\}$，以及 l_1, l_2, l_3，它们是多项式 $i_R\omega_2 = l_1 l_2 l_3$的因子。因此，对于几乎所有的素数 $\mathfrak{p}$，$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 的 p-除子具有如下形式

$$\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}} = l_1 + l_2 + l_3 + l_\infty + C_{\mathfrak{p}}$$

其中 $C_{\mathfrak{p}}$ 是次数为 p 的不可约多项式（见 *[13,* 命题 *4.3]*）。

下一个命题可由论文 [14] 中包含的结果直接推出，但我们在此给出一个直接证明（参见 [14, 命题 5.5]）。

命题 4.5。 设 k 为一个特征为 $p > 0$ *and*X 的代数闭域，并设 Y 为定义在 k上的光滑射影曲面。考虑 $\Phi: X \longrightarrow Y$ 是一个分歧除子为 D 的有限占优可分态射，并假设 $\Phi(D)$ 的约化部分不是 $\mathcal{F}$-不变的。设 $\mathcal{F}$ 是 Y 上的一个叶丛，其 p-除子不可约，并设 $\mathcal{G} = \Phi^*\mathcal{F}$ 为 X上诱导的叶丛。那么 $\mathcal{G}$ 不是 p-闭的，其 p-除子由 $\Delta_{\mathcal{G}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{F}} + pD$ 给出，其中 D 表示分歧除子 D。

证明。 设 $\omega \in N^*_{\mathcal{F}}$是开集 U上定义 F 的局部截面。由于约化部分 $\Phi(D)$ 不是 F-不变的，我们有 $\Phi^*\omega$，它是 $N^*_{\mathcal{G}}$在 $\Phi^{-1}(U)$ 上的局部截面，因此$\Phi^* N_{\mathcal{F}} = N_{\mathcal{G}}$。现在，由公式 $K_X = \Phi^* K_Y + D$ 以及伴随公式可得：$K_{\mathcal{G}} + N^*_{\mathcal{G}} = K_X = \Phi^* K_{\mathcal{F}} + \Phi^* N^*_{\mathcal{F}} + D$ 因此 $K_{\mathcal{G}} = \Phi^* K_{\mathcal{F}} + D$. 所以，

$$\Delta_{\mathcal{G}} = pK_{\mathcal{G}} + N_{\mathcal{G}} = p(\Phi^* K_{\mathcal{F}} + D) + \Phi^* N_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{F}} + pD$$

这就证明了结论。 □

例 4.6。 作为一个具体例子，我们考虑域 k 上次数为$d = 2$ 、特征为 $p = 3$的 *Jouanolou* 叶丛 $\mathcal{F}$ 。叶丛 $\mathcal{F}$ 由以下射影1-形式定义：

$$\Omega = (x^2 z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

叶丛 $\mathcal{F}$ 不是3-闭的，其不可约3-除子为

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{x^7 + y^7 + z^7 + 2x^4 yz^2 + 2x^2 y^4 z + 2xy^2 z^4 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}).$$

现在考虑有限映射 $\Phi: \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$，它将 $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2]$关联起来，并考虑诱导叶状结构 $\mathcal{G} = \Phi^*\mathcal{F}$。那么 $\mathcal{G}$ 由以下射影1-形式定义

$$\Phi^*\Omega = 2x(x^4 z^2 - y^6)dx + 2y(x^2 y^4 - z^6)dy + 2z(z^4 y^2 - x^6)dz$$

由 3-除子给出

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \{x^{14} + y^{14} + z^{14} + 2x^8 y^2 z^4 + 2x^4 y^8 z^2 + 2x^2 y^4 z^8 = 0\} + 3\{x = 0\} + 3\{y = 0\} + 3\{z = 0\}$$
$$= \Phi^*\Delta_{\mathcal{F}} + 3D.$$

推论 4.7. 射影平面上存在一些叶状结构$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，它们没有代数解，并且对于几乎所有素数 $\mathfrak{p}$ 都是非-p-闭的，且其 p-除子具有一个 p-次幂。

证明。设 $\Phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是一个有限态射，且 F 是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上的一个没有代数解的叶丛。假设该叶丛至少有一个特征值为$\alpha \notin \mathbb{Q}$的奇点。那么，对于几乎所有素数 p，$\mathsf{G} = \Phi^* \mathsf{F}$ 不是 p-闭的，并且没有任何代数解。但是，若 D 是 Φ 的分歧除子，则由命题 4.5 可知，p-除子 $\Delta_{\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}}$ 在模 $\mathfrak{p}$ 意义下含有 D 作为 p次幂。特别地，对于几乎所有素数 p，它都不是约化的，并且含有一个 p次幂。 □

注 4.8。推论 *4.7* 表明，命题 *4.3* 的逆命题一般并不成立。

设 F 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的一个叶丛，且 C 是一条 F-不变曲线。在正特征下，不变曲线 C 的奇点集并不总是包含于叶丛的奇点集之中。

例 4.9. 设$\mathcal{F}$ 是复射影平面上的叶丛，由以下射影 *1*-形式给出（见 *[1, 定理 4]*）：

$$\Omega = -(xyz + y^3 + z^3)dx + (x^2z + y^2x - yz^2)dy + z(xz + y^2)dz.$$

考虑射影平面上的叶丛$\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes 5\mathbb{Z}$，它由Ω的系数模 $5\mathbb{Z}$ 约简后在 $\mathbb{F}_5$ 上得到。则$\mathcal{G}$ 的 5-除子是不可约的，且由下式给出：

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \{-2x^3z^6 - 2x^2y^2z^5 + xy^7z + 2xyz^7 + y^9 + y^6z^3 + y^3z^6 - z^9 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_5}).$$

叶丛$\mathcal{G}$ 有唯一的奇点，给定为 $[0:1:0]$。另一方面，曲线 $\Delta_{\mathcal{G}}$ 以 $[1:2:1]$ 为奇点，因此奇点$(\Delta_{\mathcal{G}})$ $\not\subseteq$奇点$(\mathcal{G})$。注意次数$(\Delta_{\mathcal{G}})$ $= 9 \equiv 4$ 模 5。

我们可以介绍一些关于奇点集 sing(C)–sing(F) 中点的结构的信息。以下命题阐述了这一点。

命题 4.10. 设k 是特征为 $p \geq 2$ 的代数闭域，且$\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$上的非 p-闭叶丛。假设存在一条不可约曲线 C，它是$\mathcal{F}$-不变的，且次数为次数(C) $< p$。那么，奇点(C) $\subset$奇点$(\mathcal{F})$，或者对于每个 $q \in$奇点(C) –奇点$(\mathcal{F})$ 都是超尖点。

证明。假设存在一点 $q \in$ sing(C) –sing(F)。根据 [11, 推论 2.4]，我们知道，在环 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^2,q}$ 的完备化上存在一个形式坐标系 x, y，使得该叶丛由以下向量场给出：

$$v = \partial_x + x^{p-1}g(x,y)\partial_y$$

其中 $g(x,y) \in \mathsf{k}[[x^p, y]]$。在这个坐标系中，曲线的形式为 $f = f_e + f_{e+1} + \cdots \in \mathsf{k}[[x,y]]$，其中 f_i是关于 x, y 的 i 次齐次多项式。我们需要证明，对于某个 l，有 $f_e = l^e$，其中该多项式的次数为 1。事实上，根据不变性的定义，我们有 $v(f) = fg$，其中某个 $g \in \mathsf{k}[[x,y]]$，考虑最低次项可得$\partial_x(f_e) = 0$。由于 $e <$deg(C) $< p$，因此我们得出 $f_e = y^e$。 □

作者在构造满足 sing(C)$\not\subset$ sing(F) 且 deg(C) $< p$ 的例子时遇到的困难，引出了以下问题。

问题 3。 设k 是特征为 $p \geq 2$ 的代数闭域，且$\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的非 p 闭叶丛。假设存在一条不可约曲线 C，它是$\mathcal{F}$-不变的，次数为$\deg(C) < p$。是否有$\mathrm{sing}(C) \subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$?

注记 4.11。 例 *4.9* 表明，带有条件 次数(C) $\neq 0$ 模 p 的问题 *3* 的类似命题并不成立。

命题 4.12. 假设问题 *3* 的答案为 *YES*。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上的一个次数为二次的全纯叶丛，并假设它是非退化的，且其奇点的所有特征值均不属于 $\mathbb{Q}$。那么，$\mathcal{F}$ 没有代数解，当且仅当 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$具有不可约的 p-除子。

证明。 如果 p-除子对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$ 是不可约的，那么结论由命题 4.3 得出。因此，假设 F 没有代数解。由于 F 是非退化的，且所有特征值都不属于 $\mathbb{Q}$，我们得出，对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$，F$_{\mathfrak{p}}$ 不是p-闭的。反设 $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ 对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$不是不可约的。那么对于每一个这样的素数 $\mathfrak{p}$，存在 $C_{\mathfrak{p}}$ 一个 $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ 的不可约因子，它是 F$_{\mathfrak{p}}$-不变的，且 deg($C_{\mathfrak{p}}$) <deg($\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$)。有两种可能：

- deg($C_{\mathfrak{p}}$) ≤ 4 对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$，或者
- deg($C_{\mathfrak{p}}$) > 4 对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$: 在这种情况下，由于 deg($\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$) $= p + 4$，存在一条次数小于 p 的不可约 F$_{\mathfrak{p}}$-不变曲线 $D_{\mathfrak{p}}$ 。

总之，我们得出结论：对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$，存在一条 F$_{\mathfrak{p}}$-不变曲线$D_{\mathfrak{p}}$，其次数 deg($D_{\mathfrak{p}}$) $< p$。由于我们假设问题 3 成立，因此可以得出结论：对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$，有 sing($D_{\mathfrak{p}}$) $\subset$sing(F$_{\mathfrak{p}}$)。特别地，由于 F 的每个特征值都不是有理数，对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$， $\alpha \bmod \mathfrak{p}$ 不是$\mathbb{F}_p$ 的元素。特别地，该曲线 $D_{\mathfrak{p}}$ 的奇点都是节点。由 [5, 定理 13] 可得 deg($D_{\mathfrak{p}}$) ≤ 4。因此，对于无穷多个素数 $\mathfrak{p}$，叶丛 F$_{\mathfrak{p}}$ 存在一条次数为 ≤ 4 的不变曲线。由命题 4.2 可知，F 存在一条次数为 ≤ 4 的不变曲线，这与假设矛盾。□

5 自同构与 p-除子

本节受 [17] 的工作启发，引入特殊对的概念并研究其主要性质。我们考察叶状结构的自同构群对不变曲线次数的影响，并证明定理 A 和定理 B。

命题 5.1。 设 $\mathcal{F}$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 、在 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上定义于特征为 $p > 0$的域上的非p闭叶丛。假设 $p < d$，并且存在 Φ 一个阶为 e的$\mathcal{F}$ 的自同构。设 C 是一条不可约曲线，并且被$\mathcal{F}$ 保持不变，满足：对于每个 l、$h \in \{0, \ldots, e-1\}$，若 $l \neq h$，则 $\Phi^l C \neq \Phi^h C$。如果 $e \geq d^2$，那么 次数(C) = 1。

证明。设 $\psi = \Phi^*$ 是由 Φ 在 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上诱导的、作用于次数为 $\deg(C)$ 的曲线空间上的同构。该作用通过 Φ 对定义该曲线的多项式方程作拉回给出。由于 $\Phi \in \mathrm{Aut(F)}$ 且对于 $h \neq l \in \{0, \ldots, e-1\}$有 $\psi^h C \neq \psi^l C$，根据 [13,命题 3.8] 可得

$$\Delta_{\mathcal{F}} \geq C + \psi(C) + \cdots + \psi^{e-1}(C) = \sum_{j=0}^{e-1} \psi^j C.$$

特别地，$\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \geq \sum_{j=0}^{e-1} \deg(\psi^j C)$，因此 $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \geq e\deg(C)$。由于 $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d-1)+d+2$，$e \geq d^2$ 且 $p < d$，我们得到 $d^2+2 = d(d-1)+d+2 > p(d-1)+d+2 \geq d^2 \deg(C)$。特别地，$2 > d^2(\deg(C) - 1)$，因此 $\deg(C) = 1$。 □

我们回顾以下引理（见 [17, 引理 1]）。

引理 5.2。设 C 是一条 $\mathcal{F}$-不变曲线。若 k 的特征为 $p > 0$，假设 p 不整除 $d+2$。则存在唯一的形式 $\beta_{\mathcal{F},C}$，使得

$$dF \wedge \omega = F\left(\left(\frac{\deg(C)}{d+2}\right) d\omega + i_R \beta_{\mathcal{F},C}\right)$$

其中，i_R 表示$\beta_{\mathcal{F},\ C}$与径向向量场 $R = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$的缩并。

证明。我们回顾一下证明。多项式环 $R = \mathrm{k}[x, y, z]$中的序列 (x, y, z) 是正则序列。由此，根据 [18, Tag 062F] ，我们得出由径向向量场诱导的 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow \bigwedge^3 R^3 \xrightarrow{i_R} \bigwedge^2 R^3 \xrightarrow{i_R} R^3 \xrightarrow{i_R} R \longrightarrow 0$$

是正合的。现在，考虑元素 $\sigma := dF \wedge \omega - \binom{\deg(C)}{d+2} F d\omega \in \bigwedge^2 R^3$，并注意到$i_R\sigma = 0$，因此存在唯一的 $\beta \in \bigwedge^3 R^3 \cong R$ 使得 $i_R\beta = \sigma$。 □

定义 5.3。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的一个叶丛，C 是一条 $\mathcal{F}$-不变曲线。若 $\beta_{\mathcal{F},C} = 0$，则称这对 $(\mathcal{F}\ C)$ 是特殊的 。

这对 (F C) 的次数记作 (d, e)，其中 d 是 F 的次数，e 是 C的次数。

例 5.4. 如果 k 是特征为 $p > 0$ 的域，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上具有约化 p 除子的非 p-闭叶丛，那么 $(\mathcal{F}\ \Delta_{\mathcal{F}})$ 是特殊的。这由 *[3, 定理 6.2]* 得出。

命题 5.5. 设$(\mathcal{F}\ C)$ 是一个次数为(d, e) 的特殊对，并假设$\mathcal{F}$仅具有 p-约化奇点。则 $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \subset C$ 且 $m_q(C) = 2$ 对所有 $q \in \mathrm{sing}(\mathcal{F})$均成立。

证明。令 $q \in \mathrm{sing(F)}$，并反设 $q \notin C$。通过坐标变换，我们可以假设 $q = [0 : 0 : 1]$。令 Ω 为定义 F 的射影 1-形式，且 $F \in \mathrm{k}[x, y, z]_e$a 为定义 C 的齐次多项式。由于 (F C) 是特殊的

存在如下关系：$(d+2)\cdot dF\wedge\Omega = e\cdot Fd\Omega$。由于我们假设 $q\notin C$ 在仿射开子集 $D_+(z)\cong\mathbb{A}^2_{\mathrm{k}}$ 中，它们满足方程 $(d+2)\cdot df\wedge\omega = e\cdot fd\omega$ with

$$\omega=\omega_1+\omega_2+\cdots \quad , \quad f=f_0+f_1+f_2+\cdots$$

其中 $\omega_i=a_i(x,\ y)dx+b(x,\ y)dy$，且 $a_i,\ b_i$ 是次数为 i 的齐次多项式，f_h 是次数为 h 的齐次多项式，$\omega_1=ydx+\alpha xdy$、$f_0\in\mathrm{k}^*$ 和 $\alpha\in\mathrm{k}-\mathbb{F}_p$。特别地，$\sigma:=df/f\in\Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ q}$，也就是说，它在点 q 处正则。因此，若 $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}},\ q}$ 是 q 在 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 中对应的极大理想，则有

$$0=(d+2)\cdot\sigma\wedge\omega \mod \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},q}=e\cdot f_0d\omega_1 \mod \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},q}=e\cdot f_0(\alpha-1)dx\wedge dy \mod \mathcal{M}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},q}$$

于是 $\alpha=1$。但是，这与我们的假设矛盾，因为我们假设 q 是 p-约化的。因此，$q\in C$。现在，假设 $f_1\neq 0$，即 q 是 C 的一个正则点，并写作$f_1=ux+vy$，其中 $u\in\mathrm{k}^*$ 或 $v\in\mathrm{k}^*$。考虑方程（$d+2$）$\cdot df\wedge\omega=e\cdot fd\omega$ 中的最低次项，可得

$$(d+2)\cdot df_1\wedge\omega_1=e\cdot f_1d\omega_1$$

展开后得到两个方程：

$$u\alpha(d+2)=ue(\alpha-1) \quad , \quad -v(d+2)=ev(\alpha-1).$$

现在，若 $u\neq 0$，则我们得出 $1/\alpha=(1-(d+2)/e)$。特别地，$\alpha\in\mathbb{F}_p$，这就矛盾了。若 $v\neq 0$，则 $\alpha=1-(d+2)/e\in\mathbb{F}_p$，这就矛盾了。因此，我们得出$u=v=0$，从而 $f_1=0$。特别地，$\mathrm{sing(F)}\subset\mathrm{sing}(C)$。现在，由于 q 是由[13, 引理 3.11] 所示的 p-约化的，我们得出 $m_q(\Delta_{\mathcal{F}})=2$；又由于 $C\leq\Delta_{\mathcal{F}}$，我们得到 $m_q(C)=2$。命题得证。□

推论 5.6. 假设k 的特征为 $p>2$。设$(\mathcal{F}\ C)$ 是一个次数为(d,e) 的特殊对，并假设$\mathcal{F}$ 至少有一个 p-约化奇点。那么次数$(C)\equiv d+2$ 模 p。

证明。设 q 是 F 的一个 p-约化奇点。不失一般性，我们可以假设 $q=[0:0:1]$。在仿射开集 $D_+(z)$ 中，叶丛由 1-形式 $\omega=\omega_1+\omega_2+O(2)$ 给出，根据命题 5.5，由 $f=f_2+O(3)$ 给出的曲线满足$f_2=a_1x^2+a_2xy+a_3y^2$ 其中 $a_i\neq 0$ 对某个 i。考虑方程 $(d+2)$ 中的最小项 $\cdot df\wedge\omega=e\cdot fd\omega$ 我们得到：

$$(d+2)df_2\wedge\omega_1=e\cdot f_2d\omega_1$$

展开该方程后，我们得到域 k 上的以下方程：

$$2a_1\alpha(d+2)=a_1e(\alpha-1) \quad , \quad a_2e(\alpha-1)=(d+2)a_2(\alpha-1) \quad \text{and} \quad a_3e(\alpha-1)=-2(d+2)a_3.$$

如果 $a_1\neq 0$ 或 $a_3\neq 0$，那么我们就会得到矛盾，因为 $\alpha\notin\mathbb{F}_p$。因此，$a_1=a_3=0$，我们得出结论：$a_2\neq 0$。特别地，我们得到了域 k 上的 $d+2=e$ 恒等式。这证明了该推论。□

注记 5.7。 推论 *5.6* 的证明表明， C 沿奇点集($\mathcal{F}$)的所有奇点均为节点型奇点。

注记 5.8. 由推论 *5.6* 可知，定义在特征为 $p>0$ 的域上的叶丛 $\mathcal{F}$ 若有一个 p-约化奇点，则$\mathcal{F}$ 没有任何不变直线。

在下一个命题中，我们使用这样一个事实：射影平面上次数为 d 的 p-约化叶丛有 d^2+d+1 个不同的奇点。这可由命题 2.1] 中的计算得出 [2, 。

引理 5.9. 假设k 的特征为 $p>2$。设$\mathcal{F}$ 是射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上一个非 p-闭的二次叶丛，并且$\mathcal{F}$ 是 p-约化的。设 $C=\{F=0\}$ 是一个不可约的$\mathcal{F}$-不变曲线，且$\deg C < \deg \Delta_{\mathcal{F}}$。那么($\mathcal{F}$ C) 不是特殊的。

证明. 反设 (F C) 是特殊的。 p-除子具有形式$\Delta_{\mathcal{F}} = C + R$ ，由推论 5.6 可知 deg(C) $\in$ {4, $4+p$}；又由于 deg(C) $<$ deg($\Delta_{\mathcal{F}}$)，我们得出 deg(C) $=4$。命题 5.5 保证 sing(F) $\subset$sing(C)，且对于所有 $q\in$ sing(F)， $m_q(C)=2$ 。现在，由第 60] 页的定理 2 [6, ，我们有

$$7=\#\operatorname{sing}(\mathcal{F})\leq\sum_{q\in\operatorname{sing}(C)}\frac{m_q(C)(m_q(C)-1)}{2}\leq\frac{(4-1)(4-2)}{2}=3$$

这就产生了矛盾。因此，(F C) 不是特殊的。 □

引理 5.10. 设 $p>2$ 是一个素数，使得 $p\neq 1$ 模 3。设 $d\in\mathbb{Z}_{>1}$ 是一个整数，并假设 $p\nmid d(d+2)(d^2+d+1)$。那么，域 k 上的次数为 d的 ***Jouanolou*** 叶丛 $\mathcal{J}_d$不是 p-闭的。

证明. 注意，k 上的 Jouanolou 叶丛正是定义在复射影平面上的 Jouanolou 叶丛模 p 约化所得。因此，根据 [13, 引理 3.11] ，只需证明 J_d 的特征值模 p 约化后不是 $\mathbb{F}_p$ 的元素。由 Jouanolou 叶丛的性质可知，自同构 Φ_d 在集合 sing(J_d) 上传递作用，这意味着 J_d 的所有奇点具有相同的特征值 $\alpha\in\mathbb{C}$。Baum-Bott 公式（见 [9,定理 3.1]）推出 $(d+2)^2=(d^2+d+1)(\alpha+\alpha^{-1}+2)$，进而可知 α 和α^{-1} 是多项式 $p(x)=x^2+((d^2-2d-2)/(d^2+d+1))x+1\in\mathbb{C}[x]$的根。

多项式 $p(x)$ 的判别式等于 $\delta=-3d^2(d+2)^2/(d^2+d+1)^2$。特别地， $\alpha \bmod p$ 属于 $\mathbb{F}_p$ ，当且仅当 -3 不是模 p的平方数。根据二次互反律，我们得出：J_d 不是 p-闭的，当且仅当$p\not\equiv 1$ 模 3。 □

定理 5.11。 设 $p>2$ 为一个素数，使得 $7\nmid p+4$ 且满足$p\neq 1$ 模 3。那么，定义在特征为 p 的域上的二次 ***Jouanolou*** 叶丛$\mathcal{J}_2$ 具有不可约的 p-因子。

证明。$\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的 Jouanolou 叶丛由以下射影 1-形式给出：

$$\omega = (x^2z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2y - x^3)dz.$$

令 $\gamma \in \mathrm{k}$ 为一个本原 7 次单位根。注意，由于 $p \neq 7$ 映射

$$\Phi\colon \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \qquad [x:y:z] \mapsto [\gamma^5 x : \gamma y : z]$$

是叶丛 J_2 的一个自同构，其中 $\Phi^*\omega = \gamma\omega$。

条件 $p \not\equiv 1 \bmod 3$ 意味着，根据引理 5.10，Jouanolou 叶丛不是 p-闭的。反设 J_2 的 p-除子不可约。在这种情况下，存在一条不可约的 J_2-不变曲线 $C = \{F = 0\}$，满足 $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}_2})$。引理 5.9 保证 (J_2, C) 不是特殊的。特别地，存在一个次数为一的 3 次齐次形式 β，定义在 $\mathbb{A}^3_{\mathrm{k}}$ 上，使得

$$dF \wedge \omega = F\Theta \quad \text{where} \quad \Theta = \frac{\deg(C)}{4} d\omega + i_R\beta.$$

现在我们将考虑两种情况：

- **某个幂次 Φ^l 固定曲线 C**：在这种情况下，我们得出结论 $(\Phi^l)^*\beta = \gamma^l\beta$。如果 $\beta = H(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$ 且 $H(x, y, z) = ax + by + cz \in \mathrm{k}[x, y, z]_1$，则得到以下方程：

  $$\gamma^{10l}a = a \quad , \quad \gamma^{6l}b = b \quad , \quad \gamma^{5l}c = c$$

  因此 $a = b = c = 0$，这与 C 不是特殊的相矛盾。

- **Φ^l 对任意 C 都不固定曲线 $l \in \{0、\ldots\ldots、6\}$：**特别地，对于每个 $k \neq l \in \{0、\ldots\ldots、6\}$，$(\Phi^*)^l C \neq (\Phi^*)^k C$：由于 $\deg(\Delta_{\mathcal{J}_2}) = p + 4$，且 Φ 的阶为 7，我们注意到 $\Delta_{\mathcal{J}_2}$ 不含 p-因子。因此有两种可能：在 $\Delta_{\mathcal{J}_2}$ 的支集中存在一个被 Φ 的某个幂固定的素除子 P，或者不存在这样的素除子。第一种情况下，我们使用前面的论证导出矛盾。最后一种情况下，我们得出 $7 \mid p + 4$，这也导致矛盾。

至此定理得证。 □

推论 5.12. 在定理 *5.11* 的条件下，特征为 $p > 0$ 的射影平面上的一般二次叶丛具有不可约的 p-除子。

推论 5.13. 次数为二的 *Jouanolou* 叶丛 $\mathcal{J}_2$ 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上没有代数解。

证明. 根据定理 5.11，我们知道，对于无穷多个素数 p，J_2 模 p 的约化具有不可约p-除子。现在，结论由命题 4.3 得出。 □

注记 5.14. 如果 $p = 7$ 上述推论中使用的论证不成立，因为在这种情况下不存在本原的7次单位根。利用计算机代数系统*[4, Singular]*，我们验证了 *Jouanolou* 叶丛 $\mathcal{J}_2$ 的7因子为

$$\Delta_{\mathcal{J}_2} = \{-3x^3z + xy^3 + 2yz^3 = 0\} + 7\{2x + y - 3y = 0\}.$$

命题 5.15. 设$\mathcal{F}$ 是 p约化的叶丛，定义在$\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上，且 C 是一条不可约的$\mathcal{F}$-不变曲线。假设$\mathcal{F}$ 不是 p-闭的，并且$\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$。设$\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) - \{1\}$ 是$\mathcal{F}$的一个自同构。如果$(\mathcal{F}\ C)$ 是特殊的，那么存在一条$\mathcal{F}$-不变的不可约曲线 D ，使得$(\mathcal{F}\ D)$ 不是特殊的，或者 Φ 保持该曲线不变C。

证明。 假设 Φ 不固定曲线 C。写作 $\Delta_{\mathcal{F}} - C = \sum_i \alpha_i P_i$ ，其中P_i's 是素除子。由推论 5.6 可知，对于某个$l \in \{0, \ldots, d-2\}$，有 $\deg(C) = d+2+pl$ ，从而 $\sum_i \alpha \deg(P_i) = p(d-1-l)$。我们有两种可能：

- $\alpha_i \equiv 0$ 模 p **对所有** i**：** 在这种情况下，若对于某个 $l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有 $\alpha_i = pl_i$ ，则可得$\sum_i l_i \deg(P_i) = d-1-l < d$。特别地，$\deg(P_i) < d$。但这与 $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*C + \sum_i \alpha_i \Phi^* P_i$ 成立矛盾，其中 $C \neq \Phi^* C$ 且 $C < \Delta_{\mathcal{F}}$。
- $\alpha_i \not\equiv 0 \mod p$ **对于某个** i**：** 在这种情况下， P_i 根据 [13,命题 3.8]是一个 F-不变除子。现在注意到 (F P_i) 并不特殊。事实上，反设 (F P_i) 是特殊的。那么，根据命题 5.5，我们知道 sing(F) $\subset$ sing(P_i)。特别地，对于每个 $q \in$ sing(F)，都有 $2 = m_q(\Delta_{\mathcal{F}}) \geq m_q(C) + m_q(P_i) = 4$，矛盾。

命题的证明至此结束。 □

定理 5.16. 设k 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 $d > 2$为一个正整数，满足

- $p < d$ 且 $p \not\equiv 1$ 模 3；
- $d^2 + d + 1$ 是素数。

那么， $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的 ***Jouanolou*** 叶丛$\mathcal{J}_d$ 具有不可约的 p-除子或 $\Delta_{\mathcal{J}_d} = C + pR$ ，使得$(\mathcal{J}_d, C)$ 特殊，度$(C) = pl + d + 2$且 $l > 0$，并且 $R = \sum_i \alpha_i P_i$满足 P_i，对任意 i均不具有$\mathcal{J}_d$-不变性。

证明。 由引理 5.10，条件 $p \not\equiv 1 \mod 3$ 蕴含 J_d 不是 p-闭的。假设存在一条 C F-不变曲线，使得 $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}_d})$。考虑配对 (J_d, C) 及自同构： $\Phi_d : \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{J}_d)$，它将 $[x:y:z] \mapsto [\gamma^{d^2+1}x : \gamma y : z]$. 关联起来。我们分两种情况讨论：

- (J_d, C) **不是特殊的：** 此时我们考虑两种子情况：首先，假设对于每个 $l \in \{0, \ldots, d^2+d\}$，$\Phi_d^l$都不固定 C。在这种情况下，由命题 5.1 可得 $\deg(C) = 1$，这与 J_d 没有不变直线矛盾（见注 5.8）。考虑 Φ_d^l 对某个 l 有固定点 C 的情况，并考虑恒等式：

$$dF \wedge \omega = F\Theta_C \quad \text{where} \quad \Theta_C = \frac{\deg(C)}{d+2} d\omega + i_R \beta.$$

对上述方程应用自同构 Φ_d^l ，我们得出

$$(\Phi_d^l)^* \beta = \gamma^l \beta.$$

记 $\beta = b(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$ 和 $b(x,y,z) = \sum_{0\le j<i\le d-1} b_{ij}x^j y^{i-j} z^{d-1-i}$。那么，由于 Φ_d^l 与 $[x:y:z]\mapsto[\gamma^{l(d^2+1)}x:\gamma^l y:z]$ 相伴，我们得出 $b(x,y,z) = \gamma^{l(d^2+1)}b(\gamma^{l(d^2+1)}x,\gamma^l y,z) = \gamma^{-ld}b(\gamma^{l(d^2+1)}x,\gamma^l y,z)$，因此若 $b_{ij}\neq 0$，则

$$(\gamma^{j(d^2+1)+i-j-d})^l = (\gamma^{-dj+i-j-d})^l = 1 \Longrightarrow (\gamma^{dj-i+j+d})^l = 1.$$

由于 d^2+d+1 是素数，我们得出 $d^2+d+1 \mid dj-i+j+d$。但是，$dj-i+j+d < dj+j+d \le d(d-1)+d-1+d = d^2+d-1 < d^2+d+1$，这就产生了矛盾。

- $(\mathrm{J}_d,\ C)$ **具有特殊性：**根据命题 5.15，我们知道存在一个 J_d-不变素除子 D，使得 $(\mathrm{J}_d,\ D)$ 不具有特殊性，**或者**自同构 Φ_d 固定曲线 C。根据前一种情况可知，对于每一个满足 $\deg(D) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}_d})$ 的 J_d-不变素除子 D，对偶 $(\mathrm{J}_d,\ D)$ 都具有特殊性。因此可知，Φ_d 固定 C。记作。

$$\Delta = C + \sum_i \alpha_i P_i$$

并注意到，对于每个 i，$P_i's$ 都不是 J_d-不变的。事实上，如果对于某个 i，P_i 是 J_d-不变的，那么有序对 (J_d, P_i) 是特殊的。根据命题 5.5，我们得出，对于所有 $q\in \mathrm{sing(F)}$，$2 = m_q(\Delta_{\mathcal{J}_d}) \ge m_q(C) + m_q(P_i) \ge 2+2$，这与假设矛盾。特别地，根据命题 3.8]，我们得出，对于每个 i，$\alpha_i \equiv 0 \bmod p$，且 p-除子的形式为 $\Delta_{\mathcal{J}_d} = C+pR$，其中 (J_d, C) 是特殊的，并且 $R = \sum_i \alpha_i P_i$ 满足：对于每个 i，P_i 都不是 J_d-不变的。

定理的证明至此结束。 □

例 5.17. 考虑特征$p = 5$上次数为 $d \le 100$ 的 *Jouanolou* 叶丛。利用计算机代数系统 *[4, Singular]*，我们可以验证，当 $d\in\{2, 14, 24, 54, 59, 69, 89, 99\}$ 时，5-除子是不可约的。否则，$\mathcal{J}_d$ 是5-闭的，或者是 $\Delta_{\mathcal{J}_d} = C+pR$，其结构如下表所示：

d	d^2+d+1	$\deg(C)$	l	R
6	43	18	2	$\{xyz=0\}$
12	157	39	5	$\{xyz=0\}$
17	307	54	7	$\{xyz=0\}$
21	463	63	8	$\{xyz=0\}$
27	757	84	11	$\{xyz=0\}$
41	1723	123	16	$\{xyz=0\}$
57	3307	174	23	$\{xyz=0\}$
62	3907	189	25	$\{xyz=0\}$
66	4423	198	26	$\{xyz=0\}$
71	5113	213	28	$\{xyz=0\}$
77	6007	234	31	$\{xyz=0\}$

其中 $(\mathcal{J}_d, C)$ 是一个次数为 $(d, 5l+d+2)$的特殊对。注意，p和 d满足定理 *5.16* 的条件。

推论 5.18. 在定理 *5.16* 的条件下，射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上的 *Jouanolou* 叶丛有一条次数为 $pl+d+2$ 且满足$0<l\le d-1$的唯一不可约不变曲线。

注记 5.19。 我们预计，对于无穷多个 $d\in\mathbb{Z}_{>0}$，整数 d^2+d+1是素数。这是 *Bunyakovsky* 猜想的一个特例。该猜想指出，在满足某些条件时，给定一个多项式 $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$，对于无穷多个 $d\in\mathbb{Z}_{>0}$，$p(d)$ 是素数（见 *[16]*）。

6 通过模 2 约化证明非代数性

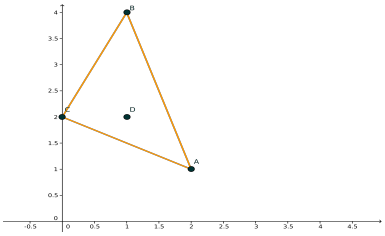
本节证明 Jouanolou 定理的一个特例。该定理指出，射影平面上次数为 $d>1$ 的极一般叶丛没有任何代数解。本节针对 d 为奇数且 $d\not\equiv 1$ 模 3 的情形，给出这一结果的一个简单证明。证明的核心在于，我们采用模 2 约化，并运用 S.Gao 基于牛顿多胞体提出的二元多项式不可约性判据。

设 S $=\{P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的点集。回顾一下，S 的**凸包**记作 S $=P_1,\ P_2,\ \ldots\ldots,\ P_{n-1},\ P_n$，它是包含 S 的 $\mathbb{R}^2$ 的最小凸子集。这等价于说，S 是所有包含 S 的 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集的交集。可以验证

$$\langle S\rangle=\{t_1P_1+t_2P_2+\cdots+t_{n-1}P_{n-1}+t_nP_n\in\mathbb{R}^2\mid\sum_i t_i=0\}.$$

设 k 是一个域，$f(x,\ y)=\sum_{i,\ j}a_{ij}x^iy^j\in \mathrm{k}[x,y]$ 是一个多项式。回顾一下，与 $f(x,y)$ 相关联的**牛顿多胞体** 是集合 S(f) $=\{(i,\ j)\in\mathbb{Z}^2\mid a_{ij}\neq 0\}$ 的凸包。

例 *6.1*。设 $f(x,y)=x^2y+xy^4+y^2+xy^2\in k[x,y]$。此时，*S(f)* $=${*(2, 1),(1,4),(0,2),(1,2)*}。与 f 相关联的牛顿多胞体是顶点为 $A=$*(2,1)*、$B=$*(1,4)* 和 $C=$*(1, 2)* 的三角形。



我们回顾一下 [8] 中的以下定理。

命题（*Shuhong Gao*）。设 *k* 是一个域，$f=ax^m+by^n+\sum_{i,j}c_{ij}x^iy^j\in k[x,y]$，其中 $a,\ b\in k^*$，且 *(i, j)* 不同于 *(m, 0)* 和 *(0, n)*。假设 f 的牛顿多胞体包含于顶点为 *(m, 0)*、*(0, n)* 和 *(u, v)* 的三角形内，其中某点 *(u, v)* $\in\mathbb{R}^2$。若 $gcd(m,n)=1$，则 f 在 *k* 上绝对不可约。

证明。 见 [8, 推论 4.12]。 □

作为一个特例，我们得到以下推论。

推论 6.2。 设 k 为任意域， $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ 并考虑以下次数为 d 的多项式： $f(x,y) = x^{d-1} + y^{2d+1} + x^d y^d + x^{2d+1} y^{d-1} \in \mathrm{k}[x,y]$。则 f 是绝对不可约的。

证明。设 $A=(d-1,0)$、 $B=(0,2d+1)$、 $C=(d,d)$ 和 $D=(2d+1,d-1)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的点，并考虑其凸包： $\mathrm{R} := A,B,C,D \subset \mathbb{R}^2$。回顾其定义，这是集合： $\mathrm{R} = \{aA+bB+cC+dD \mid a+b+c+d=1\}$。点 A、 B、 D 的凸包是顶点为 A、 B、 C 的三角形。将此三角形记为 $\mathrm{T} := A,B,D$。我们声称 $\mathrm{R} = \mathrm{T}$。事实上，只需证明 $C \in \mathrm{T}$。注意，

$$C = (d,d) = \frac{1}{3}(d-1,0) + \frac{1}{3}(0,2d+1) + \frac{1}{3}(2d+1,d-1) \in \mathbf{T}.$$

现在，考虑由 $I = d-1, 2d+1 \subset \mathbb{Z}$ 生成的理想。注意，条件 $d \not\equiv 1$ 模 3 蕴含该理想 $I = \mathbb{Z}$。事实上，我们有： $I = d-1, 2d+1 = d-1, 2d+1-(d-1) = d-1, d+2 = d-1, 3 = \mathbb{Z}$. 特别地，根据 S.Gao 的命题，我们得出多项式 f 是绝对不可约的。 □

命题 6.3。 设k 是特征为二的代数闭域，且 $\mathcal{J}_d$ 是 $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ 上次数为 $d>1$ 的 *Jouanolou* 叶丛。如果 $d \equiv 0$ 模 2，那么 $\mathcal{J}_d$ 是2-闭的；如果 $d \equiv 1$ 模 2，那么 $\mathcal{J}_d$ 不是2-闭的，且具有不可约的2-除子。

证明。定义在域 K 上的次数为 $d>1$ 的 Jouanolou 叶丛，在 $D_+(z) \cong \mathbb{A}^2_{\mathrm{k}}$ 上由以下向量场 $v = (xy^d - 1)\partial_x - (x^d - y^{d+1})\partial_y$ 给出，通过计算我们得到：

$$v^2 = ((d+1)xy^{2d} - y^d - dx^{d+1}y^{d-1})\partial_x + ((d+1)y^{2d+1} - (2d+1)x^d y^d + dx^{d-1})\partial_y$$

且 $D_2(v) = \Delta_{\mathcal{F}}|_{D_+(z)} = v^2(y)v(x) - v^2(x)v(y)$ 由下式给出

$$D_2(v) = (2d+2)xy^{3d+1} - (d+2)y^{2d+1} - (4d+2)x^{d+1}y^{2d} + (3d+2)x^d y^d + dx^{2d+1}y^{d-1} - dx^{d-1}.$$

特别地，如果 $K = \mathrm{k}$，我们有 J_d 在 $d \equiv 0$ 模 2 下是 2-闭的，因为在这种情况下 $D_2(v) = 0$。另一方面，如果 $d \equiv 1$ 模 2，那么 $v \wedge v^2 = f(x,y)\partial_x \wedge \partial_y$，其中 $f(x,y)$ 是与 J_d 相关联的 2- 因子的局部方程，由 $f(x,y) = y^{2d+1} + x^d y^d + x^{2d+1}y^{d-1} + x^{d-1}$ 给出。根据推论 6.2，我们得出结论：该 2-因子是不可约的，其次数为 $3d$。 □

引理 6.4. 设 $\mathcal{J}_d$ 是复射影平面上次数为 $d \not\equiv 1$ 模 3的 *Jouanolou* 叶丛。若 $\mathcal{J}_d$ 有一条约化的 $\mathcal{J}_d$-不变代数曲线，则存在一条 $\mathcal{J}_d$-不变约化曲线 D，使得次数$(D) = d+2$。

证明。令 D C 在 Aut(J_d) 的作用下共轭得到的曲线。该曲线是约化的，并且在 Aut(J_d) 的作用下保持不变。根据 J_d 的自同构群的性质，可知这对 (J_d， D) 是特殊的（见 [17, 引理 3]）。现在的论证与推论 5.6 中的论证非常相似，但计算是在复数域上进行的（另见 [17, 引理 2] 之后的论证）。 □

现在我们可以陈述本节的主要定理。

定理 6.5。 在复射影平面上，一个次数为奇数的非常一般的叶丛 $d > 1$，其 $d \not\equiv 1$ 模 3 不具有代数解。

证明。只需证明 Jouanolou 叶丛没有代数解。设 J_d 为模 $d \equiv 1$ 2 和模 $d \not\equiv 1$ 3 的 Jouanolou 叶丛。由命题 6.3 可知，叶丛 $\mathrm{F}_d := \mathrm{J}_d \otimes \mathbb{F}_2$ 不是 2-闭的，且其 2-除子 $\Delta_{\mathcal{F}_d}$ 不可约。反设存在一个由约化多项式 $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ 定义的不可约不变曲线 $C = \{F = 0\}$。我们可以假设C 由 $\mathbb{Z}$ 上的不可约多项式定义。事实上，设 K 为使 F 的所有系数均有定义的最小 $\mathbb{Q}$ 扩张域。清除分母后，我们可以假设 $F \in \mathrm{O}_K[x, y, z]$。设 $G_{K/\mathbb{Q}}$ 为 $K/\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦群，并对 $\sigma \in G_{K/\mathbb{Q}}$，用 F^σ 表示 σ 在 F 系数上的自然作用。考虑多项式$H = \prod_{\sigma \in G_{K/\mathbb{Q}}} F^\sigma$。由此构造可知 $H \in \mathbb{Z}[x, y, z]$，且它是 J_d-不变的。特别地， H的某个不可约因子 Q给出一条由 $\mathbb{Z}$定义的 J_d-不变曲线。特别地，它在 $\mathbb{C}$ 上是约化的。由引理 6.4 可知， Q经由 $\mathrm{Aut}(\mathrm{J}_d)$ 的共轭给出一条 J_d-不变曲线 $C = \{Q = 0\}$，使得$\tilde{}\deg(Q) = d + 2 \equiv 1$ 模 2。设 L 为使 Q 的所有系数均有定义的最小 $\mathbb{Q}$ 扩张域。清除分母后，我们可以假设 $Q \in \mathrm{O}_L[x, y, z]$。设 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathrm{O}_L)$ 是位于极大理想 $2\mathbb{Z}$之上的一个极大理想，即 $2\mathbb{Z} = \mathfrak{m} \cap \mathbb{Z}$.$\tilde{}$由于 Q 不是 2-因子，且模 $\mathfrak{m}$ 约化保留不变性，因而$\tilde{}$可以找到 $Q \otimes \mathbb{F}_\mathfrak{m}$ 的一个不可约因子 Q_2，它定义一条 F_d-不变曲线。由 $\Delta_{\mathcal{F}_d}$ 的不可约性可知 $Q_2 = \Delta_{\mathcal{F}_d}$，因此 $d+2 \geq \deg(Q_2) = \deg(\mathrm{F}_d) = 3d$，这与 $d > 1$矛盾。

□

致谢。 W. Mendson 感谢 J. V. Pereira 就与第 4 节相关的一些主题进行交流。作者感谢 CAPES/COFECUB 提供的支持。

参考文献

[1] C. R. Alc´antara， $\mathbb{CP}^2$ 上具有唯一奇异点的特殊叶状结构，Res. Math. Sci., 9 (2022), pp. Paper No. 15, 11.[2] M. Brunella，叶状结构的双有理几何，第 1 卷，IMPA 专著，施普林格，2015。[3] D. Cerveau, A. Lins-Neto, F. Loray, J. V. Pereira, andF. Touzet，复余维一奇异叶状结构与 *Godbillon-Vey* 序列，Mosc. Math. J., 7 (2007), pp. 21–54, 166.[4] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Sch¨onemann，Singular*4-3-0* ——用于多项式计算的计算机代数系统。 http://www.singular.uni-kl.de，2022。[5] E. Esteves，射影空间上向量场的整簇的 *Castelnuovo-Mumford* 正则性，Math. Res. Lett., 9 (2002), pp. 1–15.

[6] W. Fulton, 《代数曲线：代数几何导论》，数学讲义丛书，W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1969年。讲义由 Richard Weiss 协助撰写。[7] C. Galindo、F. Monserrat 和 J. Olivares, 《Hirzebruch 曲面上具有孤立奇点的叶丛》，arXiv 预印本 arXiv:2007.10071，（2020）。[8] S. Gao, 《通过牛顿多胞体判定多项式的绝对不可约性》，《代数杂志》，237（2001），第501–520页。[9] J. P. Jouanolou, ´《代数 Pfaff 方程》，数学讲义第708卷，施普林格，柏林，1979年。[10] J. Kollár, 《代数簇上的有理曲线》，《数学及其交叉领域成果》第32卷，第三辑，施普林格出版社，柏林，1996年。[11] M. McQuillan, 《混合特征曲面上的曲线》，《欧洲数学杂志》，3（2017），第433–470页。[12]W. Mendson, 《正特征下一余维一叶状结构及其应用》，博士论文，纯粹与应用数学研究所，2022年。[13] ，《正特征下光滑代数曲面上的叶状结构》，《纯粹与应用代数杂志》，227（2023），论文编号107379。[14] W. Mendson 和 J. V. Pereira, 《正特征下一余维一叶状结构》，arXiv 预印本 arXiv:2207.08957，（2022）。[15] Y. Miyaoka 和 T. Peternell, 《高维代数簇的几何》，DMV 研讨会丛书第26卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1997年。[16] number (https://mathoverflow.net/users/100511/number), 《形如 $d^2 + d + 1$ 的素数》。MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/438807（版本：2023-01-18）。[17] J. V. Pereira 和 P. F. Sánchez, 《自同构与不可积性》，《巴西科学院年刊》，77（2005），第379–385页。[18]Stacks Project 作者, 《Stacks Project》。https://stacks.math.columbia.edu，2018年。[19]A. van den Essen, 《多项式自同构与雅可比猜想》，数学进展第190卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2000年。

IRMAR，雷恩第一大学，博略校区，35402 雷恩 Cedex法国电子邮件地址：
oliveirawodson@gmail.com