arXiv:2305.06256v1 [econ.TH] 10 May 2023

YQUILIBRIUM非凸经济理论

Jacob K. Goeree[1]

2023年5月11日

摘要

一般均衡是现代经济学与金融学的基石，但它建立在许多市场并不满足的假设之上。频谱拍卖、电力市场以及资源权利的总量管制与交易计划，往往在偏好或生产方面存在非凸性，可能导致瓦尔拉斯均衡不存在，并使一般均衡理论变得空洞。*Yquilibrium*以一种适用于（非）凸经济的优化方法补充一般均衡理论，且不要求完全竞争。当瓦尔拉斯均衡存在时，Yquilibrium 与之相一致。即使瓦尔拉斯均衡不再存在，Yquilibrium 仍然存在，并能在满足线性、匿名且（近似）出清效用的价格约束下，产生最优配置。

关键词： *Yquilibrium*、非凸性、势函数、市场设计、优化、效用出清、瓦尔拉斯均衡、帕累托最优

[1]新南威尔士大学 AGORA 市场设计中心。谨此感谢澳大利亚研究理事会（DP190103888 和 DP220102893）的资助，并感谢 Brett Williams 提供的宝贵建议。

1. 引言

经济理论的一个里程碑，是确定经济中所有商品的价格，并证明资源得到了有效配置。一般均衡理论起源于瓦尔拉斯：“……他的方程组定义了相互依存数量体系中的均衡，是经济理论的《大宪章》”（Schumpeter，1954）。现代一般均衡方法源自 Arrow 和 Debreu（1954）以及 McKenzie（1954）；他们在凸性假设下证明了瓦尔拉斯均衡的存在。Duffie 和 Sonnenschein（1989）描述了这一存在性证明的历史及其重要意义；正是这一证明使一般均衡得以确立其如今在经济学与金融学中的核心地位。

尽管一般均衡地位显著且被广泛应用，其背后的假设仍限制了理论的现实性与适用性。完全竞争 意味着每个人都在给定价格的前提下进行优化，这不禁令人追问：“价格由谁设定？”[1] 此外，假设每个人都以同一价格提交限价订单，限制过于严格。市场通常允许参与者以不同价格提交限价订单。此外，即使他人的限价订单涉及非均衡价格，参与者也可以接受这些订单。

同样，许多重要市场也不满足一般均衡对凸性 的要求。在高风险频谱拍卖中，电信企业的偏好通常是非凸的，因为待售牌照之间存在协同效应；几乎所有生产者，尤其是航空公司和发电厂，都会面临可避免的固定成本，从而导致生产中的非凸性；许多资源配置过程，例如资源权利的总量控制与交易计划，都有参与者凭借非凸偏好争夺少量不可分割物品。无论是因为偏好非凸、生产中的非凸性，还是不可分割性而导致瓦尔拉斯均衡不存在，都要求我们寻找替代方案，以弥补一般均衡工具体系的不完备。

在存在非凸性的情况下，一般均衡的缺陷可以

[1]Kirman（2021）清晰地阐述了二十世纪一些著名经济学家（如 Edgeworth、Hahn、Hayek、Hicks 和 Pareto）对 Walras 完全竞争假设的质疑。Walras 设想了一种集中式机制，由一名拍卖人通过一种称为试探过程（tâtonnement）的调整过程，确定使市场出清的价格。然而，Scarf（1960年）证明，即使在一个具有唯一均衡的简单经济中，试探过程中的价格也可能永远循环往复。此外，试探过程与现实世界中的价格调整方式并不相符。由于缺乏收敛性和现实性，人们对试探过程的兴趣逐渐减退，Duffie 和 Sonnenschein（1989）据此得出结论：“……如今很少有人会主张它仍具有实用价值。”

通过一个简单的交换经济来说明。假设亚当和鲍勃具有“最大值”偏好，即他们的效用为 $u(x,y) = \max(x,y)$。这里，商品 1 可以是歌剧院的门票，商品 2 可以是同一晚在国会剧院观看演出的门票。亚当的禀赋为 (2,2)，鲍勃的禀赋为 (1,1)。由于亚当至少需要四张较便宜的票券，因此不存在瓦尔拉斯均衡价格。[2]然而，这并不意味着交易所得无法实现。帕累托最优结果是两人各持有三张相同的门票，例如，鲍勃提出用自己的歌剧票换亚当的两张剧院票。一般均衡排除了这一结果，因为按照推算出的价格比，亚当应该用自己的两张歌剧票换取六张剧院票。然而，只要市场制度允许亚当接受鲍勃的提议，就很容易实现这一帕累托最优结果。

本文的一项贡献在于证明，一般均衡的假设不仅不切实际，而且也是非必要的。为此，本文摒弃了将价格置于核心地位的瓦尔拉斯范式，转而采用帕累托视角，即经济整体实现效用最大化。[3]帕累托（1906）的观点可通过**向量最大化** 规划来体现[4]

$$\max_{x \in F} (u_1(x_1), \ldots, u_N(x_N)) \tag{P}$$

其中，配置 x 是各个消费者消费束 x_i 的串联，F 是可行配置集合，u_i 是消费者的效用。要使 (P) 有意义，需要某种准则来判断一个效用向量何时优于另一个。帕累托提出，若对所有 i 都有 $u_i \geq u'_i$，且至少对一个 i 满足严格不等式，则 u 优于 u'。在这种偏序关系下，(P) 得出的效用构成效用可能性集合的帕累托前沿。

帕累托的方案中没有提及价格。然而，我将证明，价格会随之产生。

[2]亚当的收入是 $2p_1 + 2p_2$，因此他会需求 $2 + 2\max(p_1, p_2)/\min(p_1, p_2)$ 单位较便宜的票券。[3]“当……一个集体的成员在某种状态下享有最大效用时，任何偏离该状态的微小变动必然会导致某些个体享有的效用增加，而另一些个体享有的效用减少。”帕累托（1906）。[4]在经济学中，均衡的主流研究路径一直是瓦尔拉斯式的。即便如此，帕累托的贡献也被视为瓦尔拉斯范式的一部分。在经济学之外，帕累托的方法已得到广泛应用，因为科学和工程中的许多问题都涉及多目标优化。Stadler（1979）回顾了1960年之前向量优化的历史发展。在经济学中，这一领域的研究由 Edgeworth（1881）和帕累托（1906）开创，并于五十年代由 Koopmans （ 1951 ）以及 Kuhn 和 Tucker （ 1951 ）进一步发展。

来自一个对偶规划

$$\min_{(p,m)\in F^*} (v_1(p,m_1),\ldots,v_N(p,m_N)) \qquad \text{(D)}$$

其中，F^* 是可行价格与收入的集合（定义如下），而$v_i(p,m_i)$是消费者的间接效用函数。具体而言，在仅具有拟凹效用的经济体中，对偶规划（D）所得到的间接效用与原始问题（P）具有相同的帕累托前沿。对于这类凸经济体，（P）的解是帕累托最优配置，而（D）的解是瓦尔拉斯均衡价格（并且收入等于均衡价格下配置的成本）。这些解的存在性不需要借助不动点论证，而是因为规划（P）和（D）的帕累托前沿均非空。问题（P）与（D）之间的对偶性概括了福利定理：瓦尔拉斯均衡配置是帕累托最优的，并且每一个帕累托最优配置都是某个瓦尔拉斯均衡的一部分。

总而言之，(P) 与 (D) 之间的对偶性为均衡理论提供了一种替代性方法，而这种方法并不依赖于完全竞争。它既不假设消费者在价格给定的情况下进行最优化，也不假设价格能够神奇地满足确保“市场出清”的不动点条件。相反，交易收益会不断被获取，直至达到有效率的结果，而价格则从效用的角度使这一结果具有合理性。换言之，价格实现的是“效用出清”：消费者从最终配置中获得的效用，与他们根据价格和初始禀赋所预期的效用相一致。

本文的第二项贡献是提供一种关于均衡的优化方法。在许多市场设计应用中，法律和政治约束、公平性和复杂性考量等非经济约束也会发挥作用。这些非经济约束是对通常的可行性约束和预算约束的补充，并可能导致瓦尔拉斯均衡不存在。相比之下，这些约束很容易纳入优化方法。

通过对向量优化程序 (P) 和 (D) 进行“标量化”，可得到一个单变量优化程序。对 $\alpha_i > 0$，令 $U_\alpha(x) = \sum_i \alpha_i u_i(x_i)$ 表示社会福利，并令$V_\alpha(p, m) = \sum_i \alpha_i v_i(p,m_i)$ 表示其对偶。两者之差定义了**经济的潜力**：

$$Y_\alpha(x,p,m) = \sum_i \alpha_i(u_i(x_i) - v_i(p,m_i)) \qquad \text{(Y)}$$

下文我将证明，在凸经济中，瓦尔拉斯均衡是最大化解。

对于任意选择权重 α_i 的可能性。这些最大值也是势函数的根，反映了凸经济中价格清除效用的特性。

本文的第三项贡献是为非凸经济提供一个一般框架，即并非所有效用函数都是拟凹函数的情形。在存在非凸性的情况下，势函数不一定有根，因为瓦尔拉斯均衡未必存在。不过，势函数确实存在最大值。这可由博尔查诺极值定理推出：该定理指出，任何定义在紧致域上的连续函数至少会取得一次最大值。势函数的最大值称为**Yquilibrium**，是非凸经济的自然结果，因为它们意味着在近似实现效用出清的线性匿名价格约束下，达到最优的配置。若瓦尔拉斯均衡存在，它们就与之对应；无论如何，它们都是势函数Y_α 的最大值，因此得名 Yquilibrium。

1.1. 相关文献

通过优化方法获得（部分）瓦尔拉斯均衡已有先例。根岸（1960年）通过最大化U_α 获得帕累托最优配置，而 Ausubel（2006年）则通过最小化V_α获得瓦尔拉斯价格。然而，他们所考虑的经济环境具有较强的限制性，而且这两种优化方案都无法扩展到非凸经济中。

根岸（1960年）的方法通过最大化社会福利U_α，将帕累托最优配置确定为权重 α_i 的函数。随后，通过一组确保消费者满足预算约束的不动点条件来求出正确的权重。与根岸的方法相比，最大化势函数有几个优点。首先，它能得到帕累托最优配置和瓦尔拉斯价格。其次，根岸的方法要求效用函数是凹函数，而非准凹函数，这样效用可能集才是凸的。例 1 展示了一种凸经济，其效用可能集并非凸集，因此无法应用根岸的方法。[5] 相比之下，无论效用可能集是否为凸集，最大化势函数都适用。第三，通过最大化势函数得到的配置和价格不依赖于 α_i。因此，无需求解一组不动点条件。最后，根岸的方法无法扩展到非凸经济。

[5]附录B介绍了一种替代根岸（1960年）方法的方案，该方法基于最小化一个由间接效用加权求和构成的对偶福利函数。我将证明，即使根岸的规划失败，这种方法仍可用于推导瓦尔拉斯均衡。

Ausubel（2006）通过最小化一个等于社会福利V_α对偶函数的“李雅普诺夫函数”来推导瓦尔拉斯价格。[6] 与 Ausubel 的方法相比，最大化势函数有几个优点。首先，它能得到瓦尔拉斯价格和帕累托最优结果。其次，与根岸（1960年）的方法一样，Ausubel 的方法要求效用函数为凹函数，[7] 同时还要求其拟线性。后一假设在拍卖和市场设计文献中虽很常见，但限制颇大，因为它排除了任何收入效应。若不满足拟线性，就无法保证存在能够确保价格收敛的李雅普诺夫函数。例如，Scarf（1960年）考察了一种具有收入效应的列昂惕夫经济，发现价格会永远循环波动。相比之下，无论是否存在收入效应，最大化势函数的方法都适用。最后，Ausubel 的方法无法扩展到非凸经济。

本文属于关于非凸市场设计的新兴文献。承接早期关于一般均衡中非凸性的研究，[8] 近期论文提出了对瓦尔拉斯方法的扩展，在拟线性经济中产生近似有效且近似满足个体理性的结果。这里的“近似”是指，随着交易者人数N增多，效率损失和个体损失都会变小。例如，在米尔格罗姆和瓦特（2022）的“加价”机制中，买方支付高于卖方价格的加价，以弥补任何未分配供给所对应的款项。以斯塔尔（1969）的研究为基础，米尔格罗姆和瓦特证明了“界限形式的第一福利定理”，表明加价机制造成的福利损失为$1/N$的量级。米尔格罗姆和瓦特还指出，这一界限同样适用于“配给”机制：在该机制中，买卖双方适用相同价格，但买方需求可能受到配给。[9] 他们的加价机制和配给机制都能产生可行配置，实现预算平衡，近似满足个体理性，并且近似

[6] ~~Ausubel（2006）定义李雅普诺夫函数~~ $L(p) = \langle p|w\rangle + \sum_i v_i(p)$，其中$\langle\cdot|\cdot\rangle$表示内积，$w_k$是商品 k 的总量，而$v_i(p) = \max_{x_i}(u_i(x_i) - \langle p|x_i\rangle)$是$u_i(x_i)$的 Fenchel 对偶。由于$w_k = \sum_i \omega_{ik}$是消费者 i 对商品 k 的禀赋，因此很容易将李雅普诺夫函数改写为$L(p) = \sum_i v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle)$，其中$v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle) = \max_{x_i}(u_i(x_i) + \langle p|\omega_i\rangle - \langle p|x_i\rangle)$。当$\alpha_i = 1$且$m_i = \langle p|\omega_i\rangle$时，该李雅普诺夫函数等于对偶社会福利$V_\alpha(p, m) = \sum_i \alpha_i v_i(p, m_i)$。[7]对于不可分商品，Ausubel（2006）施加了更强的条件，即这些商品是替代品。[8]Aumann（1966）证明了在交易者连续统下瓦尔拉斯均衡的存在性。Starr（1969）引入准均衡的概念，并证明当交易者数量足够多时，准均衡收敛于瓦尔拉斯均衡。Shapley 和 Shubik（1966）引入了ε-核心，即任何联盟都无法以超过ε的利润进行阻挡的配置集合。Shapley 和 Shubik 证明，对于拟线性经济体，当交易者数量足够多时，ε-核心存在。[9]另见 Nguyen 和 Vohra（2022），他们为不可分商品市场证明了一个界限，该界限仅取决于对交易者偏好互补程度的一种度量。

有效。

Yquilibrium 与这些近期方法有着重要区别。首先，与市场设计文献不同，Yquilibrium 不要求拟线性。其次，Yquilibrium 的性质对任意数量的交易者都成立，而不仅仅是在极限情况下。[10] 第三，Yquilibrium 打破了以价格接受为特征的瓦尔拉斯范式。在亚当和鲍勃的例子中，如果他们按照给定价格进行优化，那么无论加价还是配给都无法实现有效率的结果。当价格比不等于 1 时，亚当和鲍勃“处于市场的同一边”，因此不会发生交易。当价格比等于 1 时，亚当和鲍勃交换一张票券，但这并非有效率的结果，因为亚当仍持有一张无用的票券。Yquilibrium 预测，亚当会用两张票券换取鲍勃的一张，尽管亚当并未按照“给定的”价格比实现“效用最大化”。总之，与现有的市场设计方法相比，Yquilibrium 具有以下优势：

– 它允许存在收入效应，适用于任何凸经济或非凸经济，而不仅限于拟线性经济。 – 它采用线性匿名价格（无加价），并能近似实现效用出清。 – 对任意 N，它都能实现预算平衡并满足个体理性。 – 对任意 N，在满足线性匿名价格的条件下，它都能得出最优配置（且不实行配给）。

与米尔格罗姆和瓦特（2022）所考察的机制一样，如果瓦尔拉斯均衡存在，Yquilibrium 就与瓦尔拉斯均衡一致。在这种情况下，Yquilibrium 价格恰好实现效用出清。

1.2. 组织结构

第2节提出了向量优化中的一项新颖对偶性结果，为一般均衡提供了另一种解释，并为采用优化方法研究均衡铺平了道路。第3节将这种优化方法应用于非凸经济。第4节总结全文。附录A包含证明，附录B详细阐述了根岸（1960年）方法的对偶表述。

[10]拥有一套适用于任意数量交易者的理论具有多项优势：(i) 我们的许多直觉和教学都建立在交易者数量较少的例子之上；(ii) 它使我们能够使用一个适用于任意N 的模型来建立极限结果，而不必近似一个不适用于任意N的理论；(iii) 许多重要的非凸市场只有少数参与者，例如频谱拍卖。

2. 向量优化中的对偶性

考虑一个有 $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$位消费者和 $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$种商品的交换经济。对于$k \in \mathcal{K}$，令$w_k > 0$ 表示商品k的总量。可行配置的集合为

$$F(w) = \{x \in \mathbb{R}^{NK}_{\geq 0} \mid \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{ik} \leq w_k \ \forall k \in \mathcal{K}\}$$

对于向量 $v, v' \in \mathbb{R}^K$令 $\langle v|v'\rangle = \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k v'_k$ 表示通常的内积。不失一般性，我将价格标准化，使经济的总收入为 1。因此，可能的价格集合是一个非对称单纯形：$\Sigma_K(w) = \{p \in \mathbb{R}^K_{\geq 0} \mid \langle p|w\rangle = 1\}$。

我假设，对于 $i \in \mathcal{N}$，消费者 i 的效用函数 $u_i : \mathbb{R}^K_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 严格递增、拟凹且可微。消费者 i 的间接效用函数

$$v_i(p, m_i) = \max_{\langle p|x_i\rangle = m_i} u_i(x_i)$$

具有以下性质。

引理 1 间接效用 $v_i(p,m_i)$ 具有以下性质：

(i) 对收入和价格呈零次齐次；*(ii)* 关于价格非递增，关于收入严格递增；*(iii)* 连续且严格拟凹（但不一定可微）。*(iv)* $v_i(p, m_i)$ 的对偶是效用函数，即 $u_i(x_i) = \min_{\langle p|x_i\rangle = m_i} v_i(p, m_i)$。

性质 (i)–(iii) 是标准性质，参见 Mas Colell 等人（1995，命题 3.D.3）。我假设效用函数可微；当且仅当间接效用是严格拟凹的时，这一假设成立，因此间接效用有唯一的极小值点（Crouzeix，1983）。性质 (iv) 归功于 Diewert（1974）和 Crouzeix（1983），他们利用零次齐次性将收入标准化为 1。在研究单个消费者时，这样做很自然。不过，在研究整个经济时，考虑不同的收入分配将会很有用。

效用可能性集合定义为[11]

$$\mathrm{UPS} = \{(u_1(x_1), \ldots, u_N(x_N)) \mid x \in F(w)\}$$

[11]这个定义不同于通常的定义，后者将负正交象限加到效用可能集的每个元素上，参见 Mas Colell 等人（1995，第 818 页）。当$u_i(0) = -\infty$ 对$i \in \mathcal{N}$成立时，两个定义一致；例如，当$u_i(x_i) = \sum_{k \in \mathcal{K}} a_{ik} \log(x_{ik})$，其中$a_{ik}$为某个非负数时。

对于 $u,u' \in \mathbb{R}^N$，令 $u' \geq u$ 表示 $u'_i \geq u_i$，其中 $i \in \mathcal{N}$。效用可能集的一个**极大元素** 是效用向量 $u \in$ 效用可能集，满足：若对某个$u' \in$效用可能集有$u' \geq u$，则$u' = u$。

我还定义了间接效用可能集

$$\text{VPS} = \left\{(v_1(p,m_1),\ldots,v_N(p,m_N)) \mid (p,m) \in F^*(w) = \Sigma_K(w) \times \Sigma_N\right\}$$

其中，收入 m_i为非负数且总和为一，即 $m = (m_1,\ldots,m_N) \in \Sigma_N$。效用可能集的一个**极小元素**是间接效用向量 $v \in$VPS，满足：若存在$v' \in$VPS，使得$v' \leq v$，则$v' = v$。极大元素和极小元素均存在，因为效用可能集和间接效用可能集都有紧截面，参见例如 Jahn（2011，定理 6.3.c）。[12]

向量最大化问题 $\max_{x \in F}(u_1(x_1),\ldots,u_N(x_N))$ 的一个**解**是可行配置 $x \in F(w)$，使得 $(u_1(x_1),\ldots,u_N(x_N))$ 是效用可能集的极大元素。该问题的**值**是效用可能集的极大元素集合，即其帕累托前沿。为向量优化问题定义值并非常规做法，但这使得下文定理1中的对偶性表述更为简洁。对于向量最小化问题 $\min_{(p,m) \in F^*}(v_1(p,m_1),\ldots,v_N(p,m_N))$，也有类似的定义，其帕累托前沿由间接效用可能集的极小元素构成。下一个定理表明，效用可能集与间接效用可能集仅在各自的前沿上相交。

定理1 u 是效用可能集的极大元素，当且仅当它是间接效用可能集：的极小元素。

$$\max_{x \in F(w)} (u_1(x_1),\ldots,u_N(x_N)) = \min_{(p,m) \in F^*(w)} (v_1(p,m_1),\ldots,v_N(p,m_N)) \tag{1}$$

对于每个 $m \in \Sigma_N$，方程(1) 恰有一个解，它就是收入分配为 $m = (m_1,\ldots,m_N)$的经济中唯一的瓦尔拉斯均衡。

(1) 的证明基于两个引理，见附录A。第一个引理表明，交集 UPS ∩ VPS 中的任何元素都必须是 UPS 的极大元素，同时也是 VPS 的极小元素。换言之，交集 UPS ∩VPS 不包含任一集合的内部元素。第二个引理表明，UPS 的极大元素属于 VPS，而 VPS 的极小元素属于 UPS，即它们的边界位于交集中。

[12]如果对某个$u \in$效用可能集而言，集合$S_u = \{u' \in$效用可能集$\mid u' \geq u\}$非空，那么S_u就是效用可能集的一个截面。同理，如果对某个$v \in$间接效用可能集而言，集合$S_v = \{v' \in$间接效用可能集$\mid v' \leq v\}$非空，那么S_v就是间接效用可能集的一个截面。

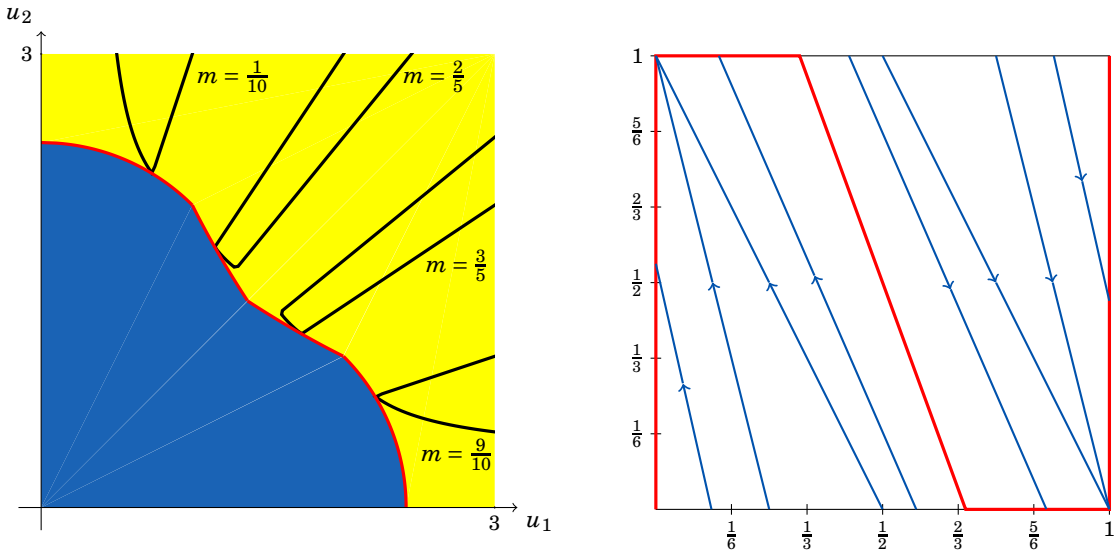

图 1： 在左侧面板中，蓝色区域对应效用可能集（UPS），黄色区域对应间接效用可能集（VPS），其对应的 $u_1(x,y) = u_2(x,y) = x + (y + x^2)^{1/2}$。这些集合仅沿红色曲线所示的边界相互重叠。黑色曲线表示不同收入水平下，间接效用对 $(v(p,\ 1-p,\ m), v(p,\ 1-p,\ 1-m))$ 随 p 变化的关系。在右侧面板中，红色曲线表示埃奇沃思盒中的帕累托最优配置，蓝色直线表示能够产生相同帕累托最优配置的禀赋。

例1（Fenchel 的经济）考虑一个有两种商品和两位效用函数相同的消费者的经济

$$u(x,y) = x + \sqrt{y + x^2} \tag{2}$$

图1左侧面板中的蓝色区域表示效用可能集（UPS），该集合并非凸集。因此，无法通过对效用可能集（UPS）上的效用进行加权求和来获得帕累托最优配置（另见第2节第3小节）。此外，由于帕累托最优配置不一定是内点，通常采用的将边际替代率与价格比相等的方法并不适用。

间接效用函数表示为

$$v(p,q,m) = \max\left(\frac{2m}{p}, \sqrt{\frac{m}{q}}\right)$$

图 1 左侧面板中的黄色区域表示间接效用可能集（VPS）。黑色曲线表示不同 m 水平下的间接效用对（$v(p,1-p,m), v(p,\ 1-p,\ 1-m)$），它们是$m$ 的函数，且

函数的自变量是$p \in (0,1)$。VPS 是所有此类曲线的并集。对于每个m，都存在唯一的价格，使得间接效用对属于 VPS 的（下）边界和效用可能集（UPS）的（上）边界。

除非 $2m/p = \sqrt{m/(1-p)}$ 且 $2(1-m)/p = \sqrt{(1-m)/(1-p)}$，否则不存在内部帕累托最优配置；这要求 $m = \frac{1}{2}$ 且 $p = \sqrt{3}-1$。由此得到位于直线上的帕累托最优配置 (x_{11}, x_{12}) 和 $(1-x11, 1-x_{12})$。

$$x_{12} = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - (1+\sqrt{3})x_{11}$$

对于 $\frac{1}{4}(3-\sqrt{3}) \le x_{11} \le \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$。其他帕累托最优配置对应于一位消费者处于无差异状态，而另一位消费者仅获得其中一种商品的正数量。[13] 图 1 右侧面板中的红色折线展示了埃奇沃思盒中的帕累托最优配置。蓝线表示均衡价格下的预算线，并指出能够产生相同帕累托最优配置的禀赋。

对于给定的收入分配，瓦尔拉斯均衡是唯一的。同一个帕累托最优配置可能对应不同的收入，例如，当 $\frac{1}{5} \le m \le \frac{1}{3}$ 时，$x_1 = (0,1)$ 和 $x_2 = (1,0)$，但均衡价格不同，参见图 1 右侧面板。■

2.1. 福利定理

（1）式左侧的解是帕累托最优配置，其效用位于效用可能集的前沿。右侧的解是收入 m_i 和价格向量p，它们所产生的效用$v_i(p, m_i) = u_i(x_i(p, m_i))$也属于同一前沿。因此，最优需求是可行的，并且（$x, p$）中，$x = (x_1(p, m_1), \ldots, x_N(p, m_N))$是收入为（$m_1, \ldots, m_N$）的经济的瓦尔拉斯均衡。

推论 1 对偶性结果（1）概括了第一和第二福利定理：瓦尔拉斯均衡配置是帕累托最优的，而任何帕累托最优配置都属于某个瓦尔拉斯均衡。

定理1中的唯一性结论要求间接效用函数具有严格拟凸性，从而确保其存在唯一的极小值点。间接效用函数具有严格拟凸性的充要条件是效用函数可微。如果放宽这一假设，

[13]例如，对于 $0 \le m \le \frac{1}{5}$，消费者 1 没有获得任何商品 1，而获得$m/(1-p)$单位的商品 2，其中价格p使消费者 2 无差异，即$p = 2\sqrt{(2-m)(1-m)} - 2(1-m)$。

那么，就可能存在多个瓦尔拉斯均衡。例如，考虑一个具有列昂惕夫效用的经济体：$u_i(x,y) = \min(x,y)$，其中$i = 1, 2$。间接效用为$v_i = m_i/(p+q)$，其等间接效用曲线是直线。该列昂惕夫经济体的瓦尔拉斯均衡为$x_1 = (m,m)$和$x_2 = (1-m, 1-m)$，其中$m \in [0,1]$，且any价格p 和q 之和为一。

假设效用函数可微，对于以收入分配为参数的经济，瓦尔拉斯均衡是唯一的。接下来，我将考虑以初始禀赋为参数的经济，在这类经济中可能存在多个瓦尔拉斯均衡。

2.2. 禀赋与均衡的多重性

我将说明，以禀赋为参数的经济继承了与之相关的、以收入分配为参数的经济的均衡存在性。为此，我考虑一个更一般的设定：用价格的非负函数取代收入。具体而言，考虑以下参数化的（$K-1$）维曲面

$$S_f = \left\{(v_1(p, f_1(p)), \ldots, v_N(p, f_N(p))) \mid p \in \Sigma_K(w)\right\}$$

其中，$f = (f_1, \ldots, f_N)$是某个连续函数$f\colon \Sigma_K(w) \to \Sigma_N$，即$f$将价格向量映射为收入分配。例如，在图1中，黑色曲线基于常函数$f_1(p) = m = 1 - f_2(p)$，其中m 是介于0和1之间的某个常数。根据构造，$S_f \subset$ 是间接效用可能集。问题在于它是否与效用可能集相交。

众所周知，瓦尔拉斯均衡对应是上半连续的，参见 Hildenbrand 和 Mertens（1972）。根据定理1，当以收入分配为参数时，该对应是单值的。因此，将瓦尔拉斯均衡价格赋予收入分配的映射$P\colon \Sigma_N \to \Sigma_K(w)$，既是上半连续的，又是单值的，即它是一个连续函数。根据布劳威尔不动点定理，$f \circ P\colon \Sigma_N \to \Sigma_N$ 存在一个不动点。

令m 表示$f \circ P$ 的一个不动点，并令$p = P(m)$，则

$$S_f \ni \left(v_1(p, f_1(p)), \ldots, v_N(p, f_N(p))\right) \in \mathrm{UPS} \cap \mathrm{VPS}$$

即 S_f与效用可能集相交。由于对$i \in \mathcal{N}$，$v_i(p, f_i(p)) = u_i(x_i(p, m_i))$，该交点所对应的配置—价格对 (x,p) 为$x = (x_1(p, m_1), \ldots, x_N(p, m_N))$

且 $p = P(m)$，其中 $m = (m_1, \ldots, m_N)$ 是 $f \circ P$ 的不动点。这个配置—价格对是具有收入分配 m 的经济的唯一瓦尔拉斯均衡。当然，没有理由假设 $f \circ P$ 有唯一的不动点。一般而言，满足 $f(P(m)) = m$ 的收入分配可能不止一种，从而产生多个瓦尔拉斯均衡。

这种构造的一个例子是，对 $\mathrm{i} \in \mathcal{N}$ where $\omega_i \in \mathbb{R}^K_{>0}$ de- 定义的消费者 i 的禀赋为 $\sum \mathrm{i} \in \mathcal{N} \omega_i = \mathrm{w}$ 时，$\mathrm{f\,i(p)} = \langle \mathrm{p} | \omega_i \rangle$。这一选择满足 $\mathrm{f}_i(\mathrm{p}) \geq 0$ and $\sum \mathrm{i} \in \mathcal{N} \mathrm{f\,i(p)} = \langle \mathrm{p} | \mathrm{w} \rangle = 1$。上一段的论证表明，无论如何选择禀赋，瓦尔拉斯均衡都存在，且属于效用可能集 ∩ 间接效用可能集。不同的禀赋可能产生相同的瓦尔拉斯均衡（见图 1 右图），并且可能存在多个均衡。由于交集效用可能集 ∩ 间接效用可能集中的元素都可以由某个 $\mathrm{m} = (\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_N) \in \Sigma_N$ 唯一确定，因此可以通过选择 $\omega_i = \mathrm{m}_i \mathrm{w}$，使得对 $\mathrm{i} \in \mathcal{N}$ 有 $\mathrm{f\,i(p)} = \mathrm{m}_i$，从而恢复其中每一个元素。

推论 2 对于一个由禀赋参数化的经济，存在一个或多个属于 UPS ∩ VPS 的瓦尔拉斯均衡。因此，任何瓦尔拉斯均衡配置都是帕累托最优的（第一福利定理）。通过选择“对角线型”禀赋 $\omega_i = m_i w$ 对于 $i \in \mathcal{N}$ 并改变 $m = (m_1, \ldots, m_N)$，使其遍历 Σ_N，可以将所有帕累托最优配置作为瓦尔拉斯均衡的一部分得到（第二福利定理）。

一个瓦尔拉斯均衡（$x(m)$，$p(m)$）由收入分配 m 唯一标识。给定任意初始禀赋，ω，可以通过预算平衡的收入转移 $t_i = \langle p(m) | x_i(m) - \omega_i \rangle$ for $i \in \mathcal{N}$ 来实现所期望的瓦尔拉斯均衡（$x(m)$，$p(m)$）。或者，消费者可以获得额外的禀赋 $m_i w - \omega_i$ for $i \in \mathcal{N}$。

2.3. 经济的潜力

一种求解向量优化问题的方法是将向量目标“标量化”，例如对其各分量进行加权求和。比如，根岸（1960年）的方法是最大化功利主义社会福利 $U_\alpha(x) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i u_i(x_i)$，从而确定福利权重 α_i 的函数形式下的帕累托最优配置（假设效用可能集是凸的）。随后根据预算约束确定这些权重。根岸（1960年）证明，正确的权重等于收入边际效用的倒数，即收入边际效用的倒数为

，也就是对于$i \in \mathcal{N}$.[14] 右侧收入边际效用的倒数取决于价格，而价格又取决于左侧的 α_i 权重，因此这些条件构成了一个不动点方程组。

遗憾的是，如果效用可能集不是凸的（可凸化的），根岸方案就会失效。当准凹效用函数无法“凹化”时，就会出现这种情况。一个由 Fenchel 提出的著名例子是式（2）中的效用函数。该效用函数的无差异曲线是非平行直线，无法凹化；也就是说，不存在一种效用函数的单调变换能使其成为凹函数。因此，根岸（1960年）的方法无法应用。附录B表明，即使根岸方案失效，最小化关于价格的对偶社会福利 $V_\alpha(p,\,\omega) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i v_i(p,\,\langle p|\omega_i\rangle)$ 仍然有效。

在这里，我采用另一种路径，同时确定价格和配置，而无需求解不动点。**经济的潜在值** 是功利主义福利 $U_\alpha(x)$ 与其对偶 $V_\alpha(p,\omega)$ 之差：

$$Y_\alpha(x,p,\omega) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i\big(u_i(x_i) - v_i(p,\langle p|\omega_i\rangle)\big) \tag{3}$$

其中 $\alpha_i > 0$ 适用于$i \in \mathcal{N}$。该程序

$$\max_{\substack{x\in F(w),\,p\in\Sigma_K(w)\\ \langle p|x_i\rangle = \langle p|\omega_i\rangle}} Y_\alpha(x,p,\omega) \tag{4}$$

可用于将定理1的对偶性结果标量化。

定理 2 对于福利权重的任何选择，瓦尔拉斯均衡都是经济势函数的最大值点和根。

程序（4）提供了一种便捷的工具来计算瓦尔拉斯均衡：

– 它不需要对效用函数进行凹化，并且适用于任何效用可能集 .

– 它确定的配置和价格独立于 (3) 中的 α_i 。– 它无需求解固定点方程组。

[14]直观地说，这些权重的设定使得向经济体额外提供一美元所产生的福利影响与这笔钱由谁获得无关。

由于禀赋 ω_i 在式 (4) 的目标函数和约束条件中仅以收入 $\langle p|\omega_i\rangle$ 的形式出现，因此，对于所有在均衡价格下产生相同收入的禀赋，式 (4) 的解都是相同的。在凸经济中，这些禀赋位于同一个平面上，例如参见图 1 右侧面板中的蓝色线条。而在非凸经济中，由于个体理性约束可能具有约束性，情况则不一定如此。

重要的是，(4)提供了一种有别于瓦尔拉斯范式的经济体系解释。这里并不假设消费者会在给定价格下进行效用最大化。相反，(4)将帕累托观点具体化：交易带来的收益会不断被获取，直至达到有效配置；而价格则使最终配置中的效用与条件相协调。价格实现“效用出清”：消费者从最终配置中获得的（直接）效用，与他们根据价格和初始禀赋所预期的（间接）效用相匹配。这种替代性解释有助于将(4)推广到瓦尔拉斯均衡未必存在的非凸经济中。

3. 非凸市场设计

将（4）应用于非凸经济需要做一些调整。第一项调整涉及配置。对于凸经济，在（4）中将配置限制在埃奇沃思契约曲面$E(\omega)$上，并不会失去一般性。[15] 对于非凸经济，情况则未必如此，因为线性价格和个体理性可能会限制可行配置的范围。为埃奇沃思契约曲面制定另一种定义是必要的。第二项调整涉及价格。对于凸经济，最小化对偶福利函数可得效用出清价格。对于非凸经济，与非拟凹效用相对应的间接效用通常“过大”，因此会产生错误的价格。为此，间接效用函数应与效用的**拟凹化** 版本相对应。最后一项调整涉及（3）中的权重 α_i。对于凸经济，无论如何选择权重，势函数的极大化点都对应于瓦尔拉斯均衡。对于非凸经济，极大值可能随权重而变化。为便于阐述，我令 $\alpha_i = 1$ 对$i \in \mathcal{N}$成立，并在结论中讨论权重可变的可能性。

[15]回想一下，埃奇沃思契约曲面由帕累托最优且满足个体理性的配置组成，即 $E(\omega) = \{x \in F(\omega) | u(x) \geq u(\omega)$ 且 $u(x') \geq u(x)$，其中 $x' \in F(\omega) \Rightarrow x' = x\}$。

3.1. 埃奇沃思契约曲面

The 与线性匿名价格相一致的可行配置集合是

$$\overline{F}(\omega) = \{x \in F(\omega) \mid \exists p \in \Sigma_K(w) : \langle p|x_i\rangle = \langle p|\omega_i\rangle \, \forall \, i \in \mathcal{N}\}$$

and

$$\overline{E}(\omega) = \{x \in \overline{F}(\omega) \mid u(x) \geq u(\omega) \text{ and } u(x') \geq u(x) \text{ for } x \in \overline{F}(\omega) \Rightarrow x' = x\}$$

是与线性价格相一致的最优且个体理性配置的集合。对于两位消费者，$\mathrm{E}(\omega) = \mathrm{E}(\omega)$，即任何个体理性的帕累托最优配置都与线性匿名价格相一致。为说明这一点，令 $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in \mathrm{E}(\omega)$，其中 $\mathrm{x} \neq \omega$；否则，任意 $\mathrm{p} \in \Sigma_K$ 都满足 $\langle \mathrm{p}|\mathrm{x}_1 - \omega_1\rangle = \langle \mathrm{p}|\mathrm{x}_2 - \omega_2\rangle = 0$。若 x 对两位消费者都具有个体理性，则 $\mathrm{x}_1 - \omega_1$ 必须至少有一种商品严格为正，且至少有一种商品严格为负。因此，存在 $\mathrm{p} \in \Sigma_K$ 使得 $\langle \mathrm{p}|\mathrm{x}_1 - \omega_1\rangle = 0$。但 $\mathrm{x}_2 - \omega_2 = \omega_1 - \mathrm{x}_1$ 意味着 $\langle \mathrm{p}|\mathrm{x}_2 - \omega_2\rangle = 0$。当消费者多于两位时，$\mathrm{E}(\omega)$不一定等于$\mathrm{E}(\omega)$。

示例 2 考虑三位消费者，其效用函数分别为 $u_1(x, y) = \max(2x, y)$，初始禀赋为 $\omega_1 = (1\ 10, 1\ 10)$；$u_2(x, y) = \max(x, 2y)$，初始禀赋为 $\omega_2 = (4\ 5, 1\ 10)$；以及 $u_3(x, y) = \min(x, y)$，初始禀赋为 $\omega_3 = (1\ 10, 4\ 5)$。那么

$$E(\omega) = \{x_1 = (\alpha, 0), x_2 = (0, \alpha), x_3 = (1-\alpha, 1-\alpha) \mid \tfrac{2}{5} \leq \alpha \leq \tfrac{9}{10}\}$$

$E(\omega)$中没有任何元素与线性定价相容。消费者 1 的配置要求价格比 $p/(1-p)$ 位于 1 8 和 1 3 之间，而消费者 2 的配置则要求该价格比位于 3 8 和 1 之间。与线性匿名价格相容的个体理性最优配置包括

$$\overline{E}(\omega) \supset \{x_1 = (\beta, 0), x_2 = (0, \alpha), x_3 = (1-\beta, 1-\alpha) \mid \tfrac{2}{5} \leq \alpha \leq \tfrac{9}{10}, \beta = \tfrac{10\alpha+7}{100\alpha-10}\}$$

且价格比 $p/(1-p)$ 的范围为 3 8 至 1。由于 $\frac{1}{5} \leq \beta \leq \frac{11}{30}$，$E(\omega)$ 中的配置并非帕累托最优，因为消费者 3 持有过多的商品 1，而这些商品本可使消费者 1 受益。然而，这些多余的商品无法在符合线性定价的前提下分配给消费者 1。■

3.2. 拟凹化

D定义 1 设 $u_i(x_i): F(w) \to \mathbb{R}$ 连续且单调不减，并且 t

$$\overline{v}_i(p, m_i) = \max_{x_i \in F(w):\langle p|x_i\rangle = m_i} u_i(x_i)$$

是 e 相关的间接效用。拟凹化效用 $u_i(x_i): F(w) \to \mathbb{R}$ $\overline{}$ is

$$\overline{u}_i(x_i) = \min_{\langle p|x_i\rangle = m_i} \overline{v}_i(p, m_i)$$

u_i 的定义域被限制在$F(w)$上，以避免其拟凹化u_i “过大”，见例3。由于间接效用连续且拟凸，按照同样的理由，可以标准地证明$u_i(x_i)$是连续且拟凹的，例如参见 Mas-Colell 等（1995，第3.D.3命题）。以下结果归功于 Crouzeix（1982）。

引理 *2* $u_i(x_i)$是满足以下条件的最小拟凹函数：对于所有 $x_i \in F(w)$，$\overline{u}_i(x_i) \geq u_i(x_i)$。特别地，对于所有 $x_i \in F(w)$，$\overline{u}_i(x_i) = u_i(x_i)$ 当且仅当 $u_i(x_i)$ 是拟凹函数。与 $u_i(x_i)$ 相关联的间接效用为 $v_i(p, m)$。 $\overline{}$ $\overline{}$

尽管u_i 和u_i 具有相同的间接效用函数，但它们的最大化解可能不同。若x_i 满足〈$p|x_i$〉 $= m$ ，且最大化$u_i(x_i)$，那么它也最大化$u_i(x_i)$；但反过来则未必成立。直观地说，准凹化后的效用u_i 可能有一组最大化解，其中只有极端元素才是u_i的最大化解。

例 3 令$u(x, y) = \max(2x, y)$，其中 $0 \leq x, y \leq 1$。凹化后的效用 $2x + y$ “过大”，例如，当 $x = y = 1$时，它给出的效用为 3，而原始效用的上限为 2。图 2 左侧显示了$u(x,y)$ 的无差异图，右侧显示了它的准凹化

$$\overline{u}(x, y) = \max\big(\min(2x + y, 1), 2x\big)$$

函数。后者是非递减且准凹的，并在$u = 1$处有一条“厚”的无差异曲线。与u 相对应的间接效用函数为 $\overline{}$

$$\overline{v}(p, q, m) = \max\Big(2\min\Big(1, \frac{m}{p}\Big), \min\Big(1, \frac{m}{q}\Big)\Big)$$

其中 i s 小于与 $2m/p, m/q$ 对应的间接效用 $\max(2x + y$. ■

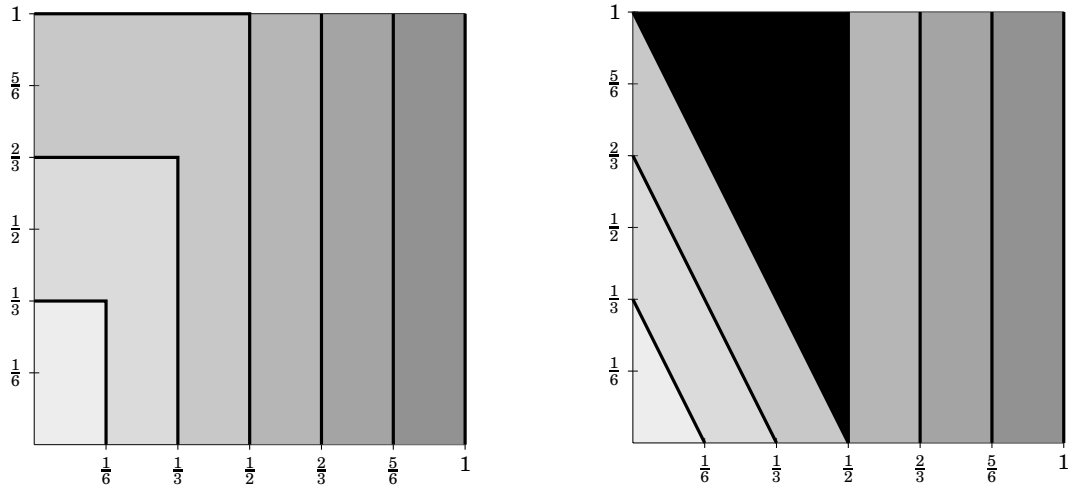

图 2： 左图显示了效用函数 $u_2(x,y) = \max(2x,y)$ 的无差异曲线，右图则显示了其准凹化函数 $u_2(x,y) = \max(\min(2x + y, 1), 2x)$ 的无差异曲线。后者是非递减且准凹的，并且在 $u_2 = 1$ 处具有一条“较厚”的无差异曲线。

3.3. Yquilibrium

将上述调整纳入（4），便可得到一种最大化方法来求解均衡，该方法同时适用于凸经济和非凸经济。

定义 2 *Yquilibrium* 是一个分配—价格对 (x, p)，它满足

$$\max_{x \in \overline{E}(\omega), p \in \Sigma_K(w)} Y(x,p,\omega) \tag{5}$$

其中，势函数由 $Y(x, p, \omega) = \sum i_{\in \mathcal{N}} u_i(x_i) - v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle)$ 给出。

下一个定理表明，对于凸经济，除了瓦尔拉斯均衡之外，不存在其他 Yquilibrium。重要的是，对于非凸经济，即使瓦尔拉斯均衡不再存在，Yquilibrium 依然存在。

定理 3 如果一个经济存在瓦尔拉斯均衡，那么它的 *Yquilibria* 与其瓦尔拉斯均衡相一致，且(5) 中的规划问题的值为零。否则，(5) 的值可能为负，该经济的 *Yquilibria* 由与线性、匿名且（近似）效用出清价格相一致的最优配置组成。

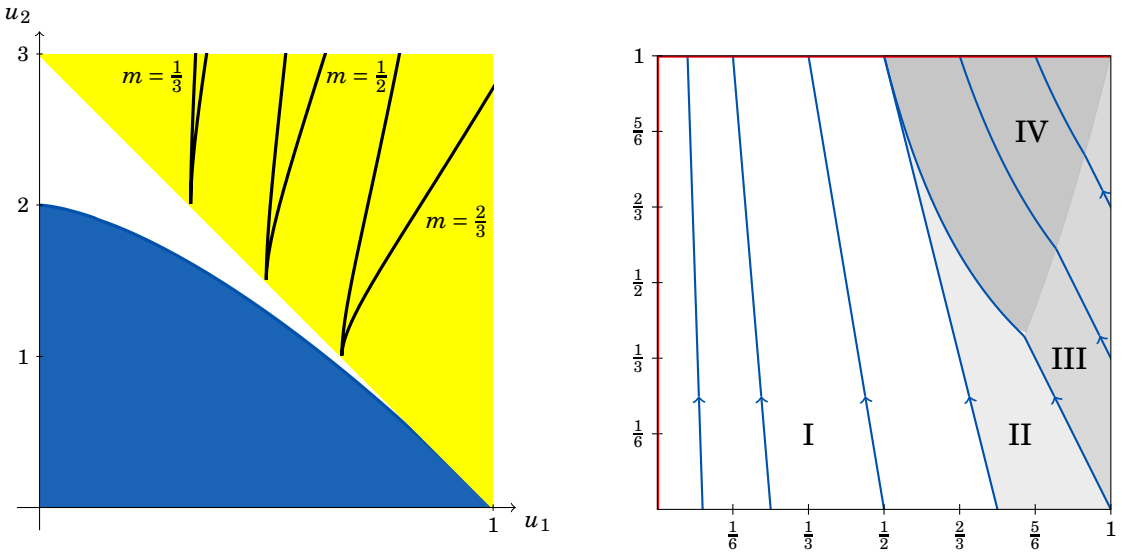

图 3： 左图中的蓝色区域表示效用可能集，黄色区域表示间接效用可能集，对应于 $u_1(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ 以及 $u_2(x, y) = \max(2x, y)$。黑色曲线表示不同收入水平下的间接效用对 $(v_1(p, 1-p, m), v_2(p, 1-p, 1-m))$ 随 p 变化的情况。右图中，埃奇沃思盒子的上边（左边）表示（弱）帕累托最优配置。蓝线对应于能产生相同帕累托最优配置的禀赋。罗马数字 I–IV 和不同颜色表示四种不同的价格区间。

回想一下，当有两位消费者时，$E(\omega) = E(\omega)$。

推论 **3** 在双边交易的情况下，*Yquilibrium* 配置是帕累托最优的。

这些帕累托最优配置由线性且匿名的价格所支持；如果效用函数不是拟凹的，这些价格不一定是瓦尔拉斯价格。

示例 4 考虑一个经济，其中有两种商品，每种商品各有一个单位，以及两位消费者，其效用函数为 $u_1(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ 和 $u_2(x, y) = \max(2x, y)$。图 3 左侧面板以蓝色显示效用可能集，以黄色显示间接效用可能集。除一个点外，它们的边界并不重叠；在该点上，消费者 1 拥有全部商品。因此，只要消费者 2 的禀赋非零，就不存在瓦尔拉斯均衡。

推论 3 表明，从任何内部禀赋出发，交易都会导向埃奇沃思盒顶端的帕累托最优配置。这些配置可以参数化为

$$x_1(p, \omega) = \left(\omega_{11} - \frac{1-p}{p}(1-\omega_{12}), 1\right)$$

以及 $x_2(p,\omega) = (1,1) - x_1(p,\omega)$，其中 $(p,\ 1-p)$ 是 $0 < p < 1$ 的价格向量。(5) 中的规划问题可简化为

$$\max_{\frac{1+\sqrt{\omega_{12}}}{1+\omega_{11}+\sqrt{\omega_{12}}} \le p \le 1} Y\big(x(p,\omega),p,\omega\big)$$

其中，p 的下界确保消费者 1 的个体理性。这是一个关于单个变量 p 的简单约束优化问题。最优价格在四个区域中呈现不同形式，分别标记为 I 至 IV；这些区域由起作用的个体理性约束决定。[16] Yquilibrium 价格为

$$p = \begin{cases} \frac{3-\omega_{12}}{3+\omega_{11}-\omega_{12}} & \text{in region I} \\ \frac{2-2\omega_{12}}{1+2\omega_{11}-2\omega_{12}} & \text{in region II} \\ \frac{2}{3} & \text{in region III} \\ \frac{1+\sqrt{\omega_{12}}}{1+\omega_{11}+\sqrt{\omega_{12}}} & \text{in region IV} \end{cases}$$

相应的 Yquilibrium 配置为

$$x_1(p,\omega) = \begin{cases} (\frac{2\omega_{11}}{3-\omega_{12}}, 1) & \text{in region I} \\ (\frac{1}{2}, 1) & \text{in region II} \\ (\omega_{11} + \frac{1}{2}\omega_{12} - \frac{1}{2}, 1) & \text{in region III} \\ (\omega_{11}\sqrt{w_{1y}}, 1) & \text{in region IV} \end{cases}$$

这一价格—配置对产生了图 3 右图所示的模式。

将 Yquilibrium 与先前的方法进行比较很有启发性，例如 Starr（1969）以及米尔格罗姆和瓦特（2022）的方法；它们通过将效用函数凹化来使经济凸化。对于 $u_2(x,y) = \max(2x,y)$，凹化后的效用为 $u_2(x,y) = 2x + y$。凸化经济的瓦尔拉斯价格为 $p = \frac{2}{3}$。这是图 4 左上图中每条黑色“V”形曲线与 UPS 和 VPS 共有边界相切时的价格，如红线所示。右上图展示了

[16] 这些区域可以用消费者 1 的禀赋 $(\omega_{11},\omega_{12})$ 参数化，其中 $0 \le \omega_{11},\omega_{12} \le 1$。它们分别为 $\text{I} = \{\omega_{11} \le \frac{3}{4}, \omega_{12} \le 3 - 4\omega_{11}\}$，$\text{II} = \{\frac{1}{2} \le \omega_{11} \le 1, 3 - 4\omega_{11} \le \omega_{12} \le \min((2\omega_{11})^{-2}, 2 - 2\omega_{11})\}$，$\text{III} = \{\omega_{11} \ge \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),\ 2 - 2\omega_{11} \le \omega_{12} \le (2\omega_{11}-1)^2\}$，以及 $\text{IV} = \{\omega_{11} \ge \frac{1}{2}, \omega_{12} \ge \max((2\omega_{11})^{-2}, (2\omega_{11}-1)^2)\}$。

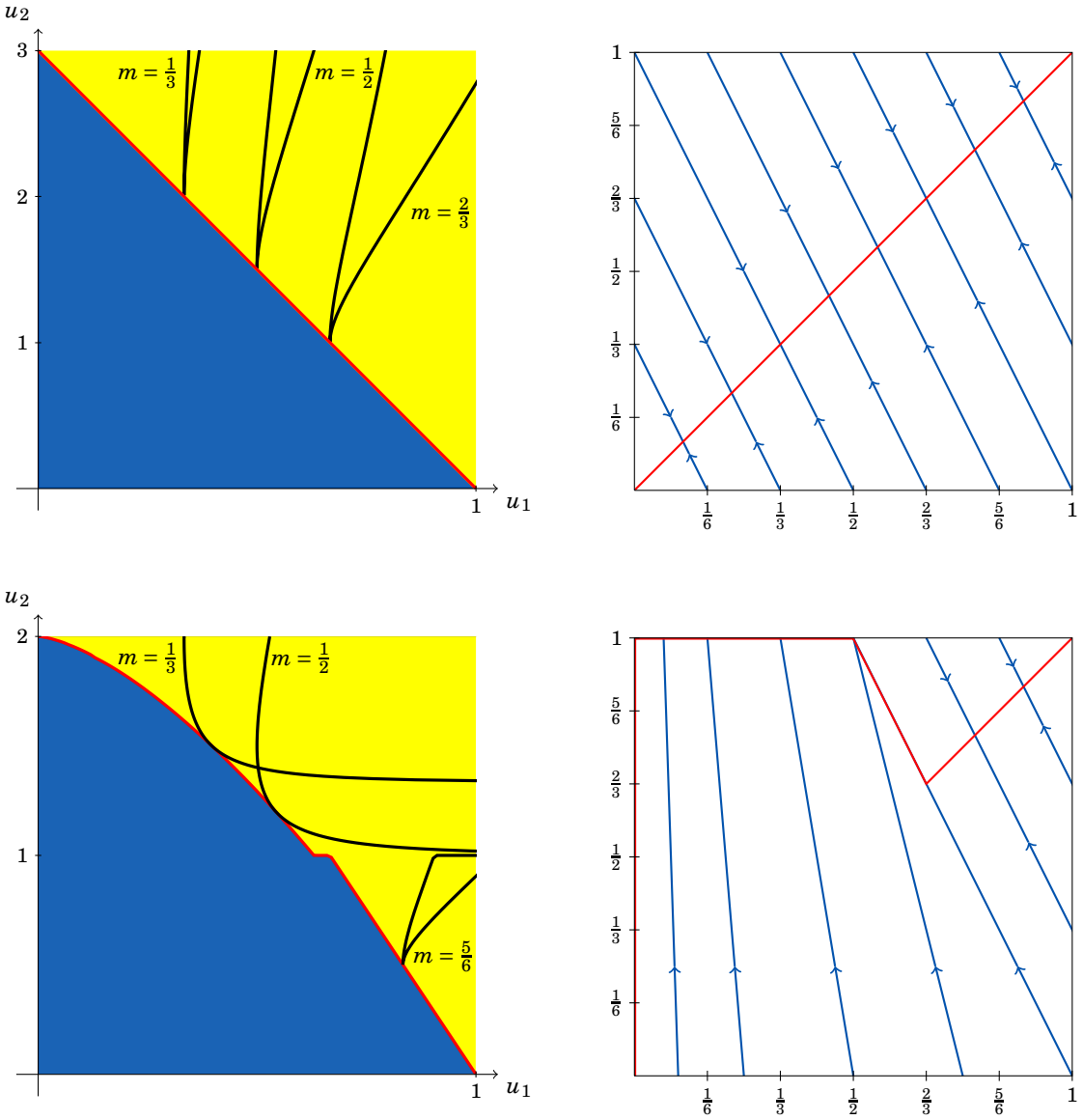

图 4：左侧各图中的蓝色区域表示效用可能集（UPS），黄色区域表示间接效用可能集（VPS），分别对应于效用函数 $u_1(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ 和凹化后的效用函数 $u_2(x, y) = 2x + y$（上方各图），以及效用函数 $u_1(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ 和拟凹化后的效用函数 $u_2(x, y) = \max(\min(2x + y, 1), 2x)$（下方各图）。左侧各图中的黑色曲线表示不同收入水平下的间接效用对 $(v_1(p, 1-p, m), v_2(p, 1-p, 1-m))$ 随 p 变化的函数关系。右侧各图中的红色（分段）直线表示帕累托最优配置。蓝色直线对应于能够产生相同帕累托最优配置的禀赋。

埃奇沃思盒中的帕累托最优配置。给定任意收入分配 $(m, 1-m)$，其中 $0 < m < 1$ 凸化经济的瓦尔拉斯配置为 $x_1 = (m, m)$ 和 $x_2 = (1-m, 1-m)$，也就是说，它们位于对角线上。显然，凸化经济的瓦尔拉斯均衡对于理解原始的非凸经济几乎没有帮助，因为它们预测的交易会使配置偏离任何帕累托最优配置，转向无效率且非个体理性的配置。[17]

图 4 的下方两个面板展示了准凹化效用函数 $u_1 = (x^2 y)^{1/3}$ 和 $u_2 = \max(\min(2x + y, 1), 2x)$ 的类似结果。由此得到的凸经济中的帕累托最优配置比原始非凸经济中的帕累托最优配置更为吻合，但仍不完全一致。[18] 仍然存在从某些帕累托最优配置向低效且不满足个体理性的配置进行的交易。 ■

总而言之，在交易者较少时，通过（准）凹化效用来凸化经济，可能会导致违反直觉的预测，例如亏本交易，以及从帕累托最优配置转向低效配置。这一发现与米尔格罗姆和瓦特（2022）的极限结果形成对比：随着交易者数量大幅增加，凸化经济的瓦尔拉斯均衡对于非凸经济而言近似有效且近似满足个体理性。Yquilibrium 补充了米尔格罗姆和瓦特的方法：它明确采用非瓦尔拉斯式方法，并能在任意数量的交易者以及任何（非）凸经济中，产生最优且满足个体理性的配置（受线性、匿名价格约束）。

4. 结论

本文为关于非凸市场设计的新兴文献作出了贡献。相关实例包括美国无线电频谱激励拍卖的设计（Leyton-Brown et al., 2017），以及用于交易澳大利亚新南

[17] 对于 $\omega_1 = (\omega, 1)$ 和 $\omega_2 = (1-\omega, 0)$，结果为 $x_1 = (\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3})$ 和 $x_2 = (\frac{2}{3}(1-\omega), \frac{2}{3}(1-\omega))$，这使消费者 2 的效用低于其初始禀赋。[18] 对于 $u_2 > 1$，准凹化后的效用与原始效用相同，因此效用可能集也相同。左下图中黑色曲线与效用可能集边界相切处的价格，就是凸化经济的瓦尔拉斯价格。当凸化经济的效用可能集边界与原经济的边界重合时，该价格也适用于非凸经济。这就是右下图左侧的蓝线与图 3 中的蓝线相同的原因。然而，右下图右侧的蓝线对应的价格为 $p = \frac{2}{3}$，这对于非凸经济而言并不正确。

威尔士州捕捞配额的组合交易所（Bichler et al., 2018, 2019）。该交易所通过提供一种基于市场的解决方案，回应了全球渔业面临的一项重大政策难题——在旨在防止过度捕捞的总量管制与交易计划中重新分配捕捞配额，从而结束了长达二十年的政治争论。退出该行业的渔民面临这样的风险：只能卖出其配额组合的一部分，最终经营难以为继，也无法获得足够收入来收回固定成本。设计上的问题是，如何利用采用线性匿名价格的市场来应对这种非凸性；出于简洁、透明和公平的考虑，人们认为这种价格机制不可或缺。

这篇论文的研究动机源于一种挫败感：经济学的基石理论——一般均衡——由于其公理化框架假设了完全竞争和凸性，无法为这项行业改革提供指导。本文的贡献之一是表明，这些假设不仅不切实际，而且并非必要。对于凸经济，瓦尔拉斯均衡的存在性和福利定理可由向量优化的一项新颖对偶性结果推出，见定理1及推论1和2。

第二项贡献在于，将原始和对偶向量优化问题标量化后，可得到一个单变量问题，其解为同一函数——经济的势函数——的最大化点和零点。势函数的最大化将早先看似互不相关的均衡方法结合起来。Negishi（1960年）的方法是宏观经济学中常用的工具，通过最大化福利来求得帕累托最优配置。Ausubel（2006）则最小化一个等于对偶福利的李雅普诺夫函数，以便在具有拟线性偏好的拍卖情境中求得瓦尔拉斯价格。将势函数定义为福利与其对偶之差，对其进行最大化即可同时得到配置和价格，且适用于比 Negishi 和 Ausubel 所考虑的更一般的环境，参见定理 2 及其后续讨论。

本文的主要贡献在于，潜在函数最大化为非凸市场提供了一种优化方法。通过约束优化问题来表述市场结果颇有价值，因为这种方式很容易纳入其他非经济约束，例如法律、政治或公平约束，而这些约束在许多应用中都发挥着作用。此外，拥有一种同时适用于凸市场和非凸市场的解概念（见定理 3），是对一般均衡不完整工具箱的一项亟需且姗姗来迟的补充。

Yquilibrium 摒弃了将价格置于核心位置的瓦尔拉斯范式，转而采纳帕累托视角：只要线性匿名定价下存在贸易收益，这些收益就会被实现。价格传递了给定禀赋所能带来的预期效用信息，但不会限制交易者的行为。尤其是，Yquilibrium 不要求价格接受。

Yquilibrium 展示了非凸市场中应当发生的情况。这引出了一个问题：如何实现这一点，即什么样的设计能够确保 Yquilibrium 得以实现？市场设计既是一门科学，也是一门艺术，而这个问题的答案取决于具体应用。电力市场、频谱拍卖以及资源权利的重新配置，都需要各自的“竞价语言”，才能可靠地实现 Yquilibrium。[19]

不过，如果不提及“YCE”的主要特征，我将难辞其咎。YCE 是一种面向（非）凸交换经济的 Yquilibrium 组合交易机制（Goeree 等，2023）。首先，YCE 允许提交“全有或全无”的组合报价，明确规定所需求商品的正数量，以及所提供出售商品的负数量。这一特征可以保护交易者免受敞口问题的影响；在标准市场中，每种商品分别进行交易时，这类问题可能导致交易停滞，参见 Goeree 和 Lindsay（2020）。[20] 其次，YCE 允许使用限价订单和市场订单，为交易者提供接受他人订单的机会。第三，YCE 使用线性匿名价格，这些价格源自一个简单的凸最小化程序。第四，(3) 中的权重 α_i 为设计者提供了“工程”上的操作空间，设计者可以设定这些权重，使其偏向于那些通过愿意交易小额数量来提供“流动性”的参与者。[21]

对 YCE 的首次检验，是比较它在非凸交换经济中的表现与连续双向拍卖的表现。YCE 的实证验证及其在现实应用中的实施，将留待未来研究。

[19]例如，关于澳大利亚新南威尔士州捕捞配额组合交易所所使用的竞价语言的详情，参见 Bichler 等人（2018，2019）。[20]考虑上一截面双边交易经济中的“max”交易者，其初始禀赋为（$\frac{1}{3}$,1）。Yquilibrium 结果是，该交易者最终获得组合（5 9 ,0），见图 3。这可以通过全有或全无报价（2 9 ,−1）实现；若报价成功，交易者的效用便会从 1 提高到 10 9。然而，如果实际完成的交易只有计划的一半，交易者就会被困在组合（4 9, 1 2 ）中，其效用低于初始禀赋。在凸市场中，朝最终结果迈出的小幅交易会提升效用，但在非凸市场中未必如此。全有或全无的组合报价是保护交易者免受损失所必需的。[21]例如，对于上一截面的双边交易经济，Cobb-Douglas 交易者提交的限价单通常远小于“max”交易者提交的限价单。

参考文献

Arrow, K. 和 G. Debreu（1954）。竞争经济均衡的存在性。*Econometrica 22*，265–290。Aumann, R.（1966）。具有连续统交易者的市场中竞争均衡的存在性。*Econometrica 34*，1–17。Ausubel, L.（2006）。异质商品的高效动态拍卖。*American Economic Review 96*(3)，602–628。Bichler, M.、V. Fux 和 J. K. Goeree（2018）。平等问题：组合交易所中的线性定价。*Information Systems Research 29*(4)，1024–1043。Bichler, M.、V. Fux 和 J. K. Goeree（2019）。设计组合交易所，以重新分配资源权利。*Proceedings of the NationalAcademy ofSciences 116*(3)，786–791。Crouzeix, J.-P.（1982）。 $\mathbb{R}^n$ 上拟凸函数的连续性与可微性。载于 S. Schaible 和 W. Ziemba（编），优化与经济学中的广义凹性，第 109–130 页。Academic Press，纽约。Crouzeix, J.-P.（1983）。直接效用函数与间接效用函数之间的对偶性。*Journalof Mathematical Economics 12*，149–165。Diewert, E.（1974）。对偶理论的应用。载于定量经济学前沿，第二卷，第 106–171 页。North-Holland，阿姆斯特丹。Duffie, D. 和 H. Sonnenschein（1989）。Arrow 与一般均衡理论。*Journal of Economic Literature 27*，565–598。Edgeworth, F.（1881）。数理心理学。Kegan Paul，伦敦。Goeree, J. K. 和 L. Lindsay（2020）。敞口问题与市场设计。*TheReview of Economic Studies 87*，2230–2255。Goeree, J. K.、L. Lindsay 和 B. Williams（2023）。YCE：Yquilibrium 组合交易所。*AGORA* 工作论文，编写中。Hildenbrand, W. 和 J.-F. Mertens（1972）。纯交换经济均衡集对应的上半连续性。*Econometrica 40*(1)，99–108。Jahn, J.（2011）。向量优化：理论、应用与拓展。德国海德堡：Springer Verlag。Kirman, A.（2021）。Walras 还是 Pareto：现代经济理论的现状该由谁负责？*Review of Political Economy 33*(2)，280–302。

Koopmans, T. C. (1951). 将生产分析为活动的有效组合。载于 T. C. Koopmans（编），生产与分配的活动分析，第33–97页。纽约：Wiley。Kuhn, H. 和 A. W. Tucker（1951）。非线性规划。载于第二届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，第481–492页。加州大学出版社，伯克利。Leyton-Brown, K., P. 米尔格罗姆和 I. Segal（2017）。无线电频谱重新分配的经济学与计算机科学。《美国国家科学院院刊》第*114*卷，7202–7209。Mas Colell, A., M. D. Whinston 和 J. R. Green（1995）。微观经济理论。牛津大学出版社。McKenzie, L.（1954）。论格雷厄姆世界贸易模型及其他竞争系统中的均衡。《计量经济学》*22*，147–161。米尔格罗姆, P. 和 M. 瓦特（2022）。非凸经济中的瓦尔拉斯机制与有界形式的第一福利定理。斯坦福大学工作论文。根岸, T.（1960年）。竞争性经济中的福利经济学与均衡存在性。《计量经济学》*12*，92–97。Nguyen, T. 和 R. Vohra（2022）。近似替代偏好与存在不可分物品时的均衡。工作论文。Pareto, V.（1906）。政治经济学手册。Società Editrice Libraria，米兰。Scarf, H.（1960）。竞争均衡全局不稳定性的一些例子。《国际经济评论》*1*（3），第157–172页。Schumpeter, J.（1954）。经济分析史。美国纽约：牛津大学出版社。Shapley, L. 和 M. Shubik（1966）。非凸偏好货币经济中的准核心。《计量经济学》*34*，805–827。Stadler, W.（1979）。多准则优化或向量极大值问题综述，第一部分：1776–1960。《优化理论与应用杂志》*29*，1–52。Starr, R.（1969）。非凸偏好市场中的准均衡。《计量经济学》*37*，25–38。

A. 证明

定理1的证明。式（1）的证明基于两个引理。

引理 A1 若 u ∈属于效用可能集∩间接效用可能集，则 u 是效用可能集的极大元素，也是间接效用可能集的极小元素。

证明。若 u $=(u_1,\ldots,u_N)$ ∈属于效用可能集 ∩间接效用可能集，则存在 x ∈属于F(w)，以及 (p, m) $\in \Sigma_K$ 属于 (w)，使得 $u_i = u_i(x_i)$ 且 $u_i = v_i(p, m_i)$，对 i $\in \mathcal{N}$ 均成立。反设 u 不是间接效用可能集的极小元素。那么存在 $(p', m') \in \Sigma_K$属于(w)，使得 $u_i(x_i) \geq v_i(p', m'i)$，对 i $\in \mathcal{N}$均成立，且至少有一个 i $\in \mathcal{N}$满足严格不等式。但 $v_i(p', m'i) = u_i(x_i(p', m'i))$，其中 $x_i(p', m'i)$ 是消费者 i 的最优（马歇尔）需求，并满足 $\langle p'|x_i(p', m'i)\rangle = m'i$。由于间接效用关于收入严格递增（引理 1），我们必有 $\langle p'|x_i\rangle \geq m'i$，对 i $\in \mathcal{N}$均成立，且至少有一个 i $\in \mathcal{N}$满足严格不等式，因此 $\sum i_{\in\mathcal{N}} \langle p'|x_i\rangle > \sum i_{\in\mathcal{N}} m'i = 1$。然而，x ∈属于F(w)意味着 $\sum i_{\in\mathcal{N}} \langle p'|x_i\rangle \leq \langle p'|w\rangle = 1$，由此得到所需的矛盾。同理，反设 u 不是效用可能集的极大元素。那么存在 x′ ∈属于F(w)，使得 $u_i(x'i) \geq v_i(p, m_i)$，对 i $\in \mathcal{N}$均成立，且至少有一个 i $\in \mathcal{N}$满足严格不等式。由于间接效用关于收入严格递增，我们必有 $\langle p|x'i\rangle \geq m_i$，对 i $\in \mathcal{N}$均成立，且至少有一个 i $\in \mathcal{N}$满足严格不等式，因此 $\sum i_{\in\mathcal{N}} \langle p|x'i\rangle > \sum i_{\in\mathcal{N}} m_i = 1$。然而，x′ ∈属于F(w)意味着 $\sum i_{\in\mathcal{N}} \langle p|x'i\rangle \leq \langle p|w\rangle = 1$，由此得到所需的矛盾。 ■

引理 A2 间接效用可能集的极小元素属于效用可能集，而效用可能集的极大元素属于间接效用可能集。

证明。 间接效用可能集的极小元素可由以下规划问题得到

$$\min_{\substack{(p,m)\in\Sigma_K(w)\times\Sigma_N \\ v_i(p,m_i)\leq\overline{v}_i\ \forall\, i<N}} v_N(p, m_N)$$

关于价格和收入的一阶条件为

$$\begin{aligned} \nabla_p v_N + \sum_{i<N} \lambda_i \nabla_p v_i &= \nu \quad \forall\, k \in \mathcal{K} \\ -\lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial m_i} &= \nu \quad \forall\, i < N \\ -\frac{\partial v_N}{\partial m_N} &= \nu \end{aligned}$$

其中， λ_i 是$v_i(p,m_i) \leq v_i$ 的乘数， ν 是齐次零次约束$\sum_{i\in\mathcal{N}} mi = \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k$的乘数。（如果间接效用不可微，则用（Clarke）次微分代替梯度。）综合一阶条件可得

$$w + \sum_{i\in\mathcal{N}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial m_i}\right)^{-1} \nabla_p v_i = 0$$

现在，$v_i(p,m_i) = u_i(x_i(p,m_i))$，其中消费者 i 的最优需求 $x_i(p,m_i)$ 满足罗伊恒等式：$x_i(p,m_i) = -\nabla_p v_i / \partial_{m_i} v_i$。因此，一阶条件意味着

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i(p,m_i) = w$$

换言之，若$v = (v_1(p,m_1), \ldots, v_N(p,m_N))$是间接效用可能集的一个极小元素，那么$v = (u_1(x_1(p,m_1)), \ldots, u_N(x_N(p,m_N)))$，其中$x_i(p,m_i)$是$i \in \mathcal{N}$的最优需求，且这些需求是可行的。因此，$v$ 属于效用可能集。

为证明效用可能集的任一极大元素$u = (u_1(x_1), \ldots, u_N(x_N))$属于间接效用可能集，回顾一下，对于$x = (x_1, \ldots, x_N) \in F(w)$，

$$u_i(x_i) = \min_{\langle p_i | x_i \rangle = m_i} v_i(p_i, m_i) \tag{A.1}$$

若u 是极大元素，那么$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = w$，且$\sum_{i \in \mathcal{N}} \langle p | x_i \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} m_i = 1$。我要证明的是，若 u 是极大元素，那么使消费者i的间接效用最小化的价格p_i 对所有$i \in \mathcal{N}$都相同。

将标准的包络论证应用于 (A.1) 可得：若 $x_{ik} > 0$，则 $\partial u_i / \partial x_{ik} = (\partial v_i / \partial m_i) p_{ik}$；若 $x_{ik} = 0$，则 $\partial u_i / \partial x_{ik} \leq (\partial v_i / \partial m_i) p_{ik}$。令 $MRS^i_{kl} = \partial_{x_{ik}} u_i / \partial_{x_{il}} u_i$ 表示消费者 i 的边际替代率。若对于 $i \in \mathcal{N}$和 $k, l \in \mathcal{K}$，存在一个共同价格向量 p，使每位消费者的间接效用都最小化，在线a

$$\begin{cases} MRS^i_{kl} = \frac{p_k}{p_l} & \text{if} \quad x_{ik} > 0, x_{il} > 0 \\ MRS^i_{kl} \leq \frac{p_k}{p_l} & \text{if} \quad x_{ik} = 0, x_{il} > 0 \\ MRS^i_{kl} \geq \frac{p_k}{p_l} & \text{if} \quad x_{ik} > 0, x_{il} = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

考虑以下用于求取效用可能集（UPS）极大元素的规划问题：

$$\max_{\substack{x \in F(w) \\ u_i(x_i) \geq \overline{u}_i \, \forall i < N}} u_N(x_N)$$

一阶条件为

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \mu_k - \nu_{ik} \quad \forall i < N$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial x_{Nk}} = \mu_k - \nu_{Nk}$$

其中，λ_i 是 $u_i(x_i) \geq \overline{u}_i$ 的乘数，μ_k 是可行性约束 $\sum_{i \in \mathcal{N}} x_{ik} \leq w_k$ 的乘数，ν_{ik} 是非负约束 $x_{ik} \geq 0$ 的乘数。下面说明一阶条件蕴含 (A.2)。若 $x_{ik} > 0$ 且 $x_{il} > 0$，则 $\nu_{ik} = \nu_{il} = 0$ 且 $MRS^i_{kl} = \mu_k / \mu_l$。若 $x_{ik} = 0$ 且 $x_{il} > 0$，则 $\nu_{ik} \geq 0$ 且 $\nu_{il} = 0$，因此 $MRS^i_{kl} \leq \mu_k / \mu_l$。最后，若 $x_{ik} > 0$ 且 $x_{il} = 0$，则 $\nu_{ik} = 0$ 且 $\nu_{il} \geq 0$，因此 $MRS^i_{kl} \geq \mu_k / \mu_l$。总之，对于 $p = \mu$，(A.2) 中的条件均成立。 ■

要证明，对于给定的$m \in \Sigma_N$，(1) 的解是唯一的，反设 (p,m) 和 (p',m) 是 (1) 的两个解。这意味着二者都是间接效用可能集的极小元素。间接效用的严格拟凹性意味着，对于$i \in \mathcal{N}$，$v_i(\frac{1}{2}(p+p'), m) < v_i(p, m)$ 或 $\underline{v}_i(\frac{1}{2}(p+p'), m) < v_i(p', m)$，这与 (p,m) 或 (p', m) 的极小性矛盾。■

定理 2 的证明。对于满足消费者预算约束的配置，有 $u_i(x_i) \le v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle) = \max_{\langle p|x_i'\rangle} = \langle p|\omega i\rangle\ u_i(x'i)$ for $i \in \mathcal{N}$，因此该规划问题的最优值非正。如果 (x, p) 是一个瓦尔拉斯均衡，那么在价格 p 下，各配置都是最优的，即 $u_i(x_i) = \max^{\langle p|x'i\rangle} = \langle p|\omega i\rangle\ u_i(x'i)$，因此 (x, p) 是一个根，进而也是一个最大化解。反过来，如果 (x, p) 是目标函数的一个根，那么目标函数求和中的每一项都为零（因为它们全都非正，且权重均为正）。但是，$u_i(x_i) = v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle)$ for $i \in \mathcal{N}$ 意味着每个人都在价格 p 下实现效用最大化，而 $x \in F(w)$ 意味着最优需求是可行的。因此，(x, p) 是一个瓦尔拉斯均衡。■

定理 3 的证明。考虑一个满足预算约束的可行配置 \(x \in F(w)\)：$\langle p|x_i\rangle = \langle p|\omega_i\rangle$，其中 $i \in \mathcal{N}$。由于 $u_i(x_i) \le v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle) = \max_{\langle p|x_i'\rangle} = \langle p|\omega i\rangle\ u_i(x'i)$，其中 $i \in \mathcal{N}$，因此规划问题 (5) 的取值非正。假设该经济存在一个瓦尔拉斯均衡 (x, p)，则在价格 p 下，各配置均为最优配置，即 $u_i(x_i) = \max^{\langle p|x'i\rangle} = \langle p|\omega i\rangle\ u_i(x'i) = v_i(p, m_i)$，其中 $i \in \mathcal{N}$，因此 (x, p) 是该势函数的一个零点，进而也是其最大化点。由此可知，任何瓦尔拉斯均衡都是 Yquilibrium。接下来，我将证明，不存在一个不同于任何瓦尔拉斯均衡的 Yquilibrium (x, p)。前者使规划问题 (5) 的取值为零，因此 Yquilibrium 也必然如此。但是，如果 (x, p) 是目标函数的一个零点，那么目标函数求和中的每一项都必须为零（因为所有项均非正，且权重均为正）。而 $u_i(x_i) = v_i(p, \langle p|\omega_i\rangle)$，其中 $i \in \mathcal{N}$，意味着每个人都在价格 p 下实现效用最大化；同时，$x \in F(w)$ 意味着最优需求是可行的。因此，(x, p) 是一个瓦尔拉斯均衡。

当瓦尔拉斯均衡不存在时，定理 3 中列出的 Yquilibria 的性质可通过构造式 (5) 中的最大化规划得到。■

B. 对偶根岸计划

对偶规划意味着针对价格最小化对偶福利 $V\alpha(p,m) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i v_i(p,m_i)$

$$W_\alpha^*(w,m) = \min_{\langle p|w\rangle = \sum_i m_i} V_\alpha(p,m) \tag{B.3}$$

第一步是确定价格关于权重的函数关系。间接效用的严格拟凸性保证价格唯一。给定价格后，消费者的最优需求可由罗伊恒等式得出。下一步是求解权重，使得相应的价格向量下最优需求可行。正确的权重与根岸的（1960年）规划中的权重相同，即 $\alpha_i = 1/(\partial v_i/\partial m_i)$，其中 $i \in \mathcal{N}$。

定理 4 如果福利权重等于收入的边际效用倒数，则瓦尔拉斯均衡价格满足(B.3) 。瓦尔拉斯价格满足

$$p = \nabla_w W_\alpha^*(w, m) \tag{B.4}$$

这反映了它们是资源约束的对偶变量。

定理 4 的证明。该最小化规划的拉格朗日函数为

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i v_i(p, m_i) + \lambda\left(\langle p|w\rangle - \sum_{i \in \mathcal{N}} m_i\right)$$

第一项关于收入和价格是零次齐次的，第二项是一次齐次的。我利用这一点对 $\lambda = 1$ 进行规范化。一阶条件是

$$w + \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha \nabla_p v_i(p, m_i) = 0$$

利用 $\alpha_i = 1/(\partial v_i/\partial m_i)$ 和 Roy 恒等式，可以将其改写为

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i(p, m_i) = w$$

因此，最优化的一阶条件意味着，价格使得消费者的最优商品组合是可行的，即p 是一个瓦尔拉斯均衡价格。最后，通过一个简单的包络论证，可以得到$p = \nabla_w W_\alpha^*(w, m)$。■

示例 5 考虑一个具有 Cobb-Douglas 效用函数的经济，其中 $u_1 = x\sqrt{y}$ 和 $u_2 = \sqrt{xy}$，收入为（m_1,m_2）。图 5 左侧面板中的蓝色区域表示效用可能集（UPS），该集合并非凸集，因为 Cobb-Douglas 效用函数表现出规模报酬递增，且不是凹函数。因此，通过在效用可能集上最大化效用的加权和来识别帕累托最优配置的常规方法并不适用。

对偶福利最小化的一阶条件为 $-\nabla_p V_\alpha(p, m) = (1,1)$，其中右侧来自约束 $p + q = m_1 + m_2$。（如果收入固定而价格不受限制，对偶福利可以任意小。）现在

$$-\nabla_p V_\alpha(p, m) = \left(\frac{2\alpha_1 m_1\sqrt{m_1 q} + \alpha_2 m_2\sqrt{m_2 p}}{3\sqrt{3}p^2 q}, \frac{\alpha_1 m_1\sqrt{m_1 q} + 2\alpha_2 m_2\sqrt{m_2 p}}{3\sqrt{3}pq^2}\right)$$

并代入 $\alpha_1 = 1/(\partial v_1/\partial m_1) = p\sqrt{3q}/m_1$ 以及 $\alpha_2 = 1/(\partial v_2/\partial m_2) = q\sqrt{3p}/m_2$ 后，右侧化简为

$$-\nabla_p V_\alpha(p, m) = \left(\frac{2m_1 + m_2}{3p}, \frac{m_1 + 2m_2}{3q}\right)$$

并将其等同于 (1, 1)，即可得出瓦尔拉斯均衡价格。 ■

最小化　　当经济由禀赋而非收入参数化时，双重福利结论也同样适用——

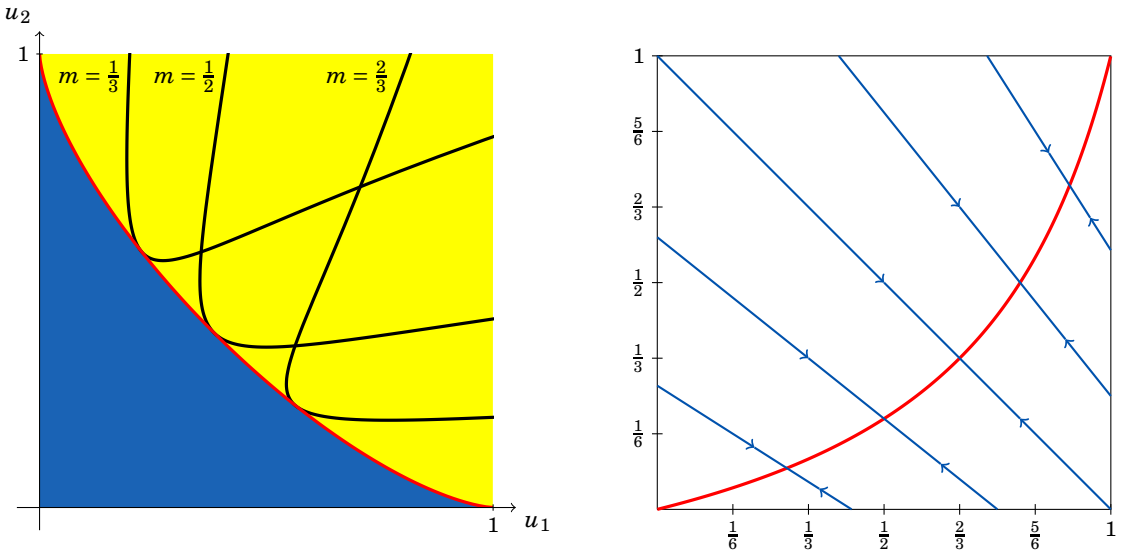

图 5： 在左图中，蓝色区域对应于效用可能集，黄色区域对应于$u_1(x,y) = xy^{1/2}$和$u_2(x,y) = x^{1/2}y$的间接效用可能集。这两个集合仅在其边界处重叠，边界由红色曲线标示。黑色曲线表示不同收入水平下，间接效用对 $(v_1(p,\,1-p,\,m),\,v_2(p,1-p,1-m))$ 随p变化的轨迹。在右图中，红色曲线表示埃奇沃思盒中的帕累托最优配置，蓝色直线表示能够产生相同帕累托最优配置的禀赋。

定义 $V_\alpha(p,\,\omega) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i v_i(p,\,\langle p|\omega_i\rangle)$，其中 ω 是消费者禀赋向量的拼接。考虑以下规划

$$W_\alpha^*(\omega) = \min_{p\in\Sigma_K(w)} V_\alpha(p,\omega) \tag{B.5}$$

收入不再固定，且（B.5）中的目标函数关于价格是零次齐次的。标准化 $\langle p|w\rangle = 1$ 不再构成约束，因此一阶条件为 $\nabla_p V_\alpha(p,\omega) = 0$。

例 5（续） 假设消费者的禀赋为 $\omega_1 = (\omega_{11},\omega_{12})$ 和$\omega_2 = (1-\omega_{11},1-\omega_{12})$。在权重 $\alpha_i = 1/(\partial v_i/\partial m_i)$ 处对 $i = 1, 2$ 求值，梯度为

$$-\nabla_p V_\alpha(p,\omega) = \left(\frac{1+\omega_{12}-p(3-\omega_{11}+\omega_{12})}{3p},\frac{1+\omega_{12}-p(3-\omega_{11}+\omega_{12})}{3(1-p)}\right)$$

当 $p = (1+\omega_{12})/(3-\omega_{11}+\omega_{12})$ 时，该值趋于零。 ■

最后，二重福利最小化规划比根岸的（1960年）福利最大化规划更高效。它涉及 K 个参数，即 p_k 的价格，其中 $k \in \mathcal{K}$，而不是 NK 个参数，即每个个体的配置 x_{ik}，其中 $i \in \mathcal{N}$、$k \in \mathcal{K}$。