arXiv:2305.06288v1 [math.AT] 10 May 2023

带标记的 ∞范畴中的框架组合拓扑

Lukas Heidemann

2023年5月11日

摘要

框架组合拓扑是一种近期用于驯化几何的方法，它通过易于处理的组合数据来表达高维分层空间。由此产生的空间理论性质良好且可计算。本文通过允许在 ∞-categories 中使用网格和桁架的标记系统来扩展 FCT，并通过构造用于分类网格和桁架的 ∞-categories，建立 FCT 的另一种模型。这将为未来基于广义弦图的高阶范畴模型研究，以及广义缠结的研究奠定基础。

目录

1 引言.1 2 桁架.3 3 分层空间.7 4 网格.11 5 带标记网格.14

1 引言

框架组合拓扑[DD21] 是一种近期出现的驯化几何的方法。行为良好的分层空间配备了坐标维度的典范序，称为框架，由此形成一种非常易于处理的理论。网格将分层空间表示为一系列1维丛，每个丛都按照框架的顺序增加一个额外坐标；桁架则是带框架的网格同构类的纯组合表示，能忠实捕捉网格的全部几何结构，并以便于计算机实现的形式呈现。本文将框架组合拓扑扩展为带有∞-范畴中的标记。

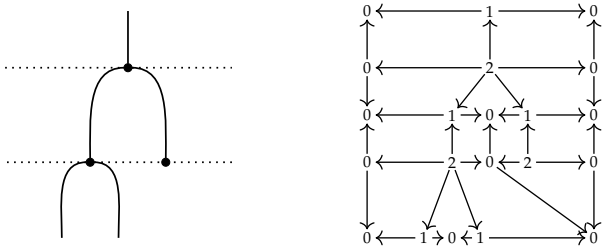


图 1： 一个弦图，既以网格的几何形式表示，也以桁架的组合形式表示。这两种表示在图示布局的可缩选择意义下等价。

<escape>**动机**。 框架组合拓扑（FCT）的一个核心应用是基于弦图向任意维度的推广来构建高维范畴模型 [DDV22、RV19、HRV22]。</escape>

网格可检测辫的临界点以及相对定位中的高维变化（见图 2），因此有助于表述一种源自几何的、带有弱交换律的半严格(∞, n)-范畴理论。框架组合拓扑有助于在图表的几何表示与基于桁架的组合表示之间进行转换（见图 1），后者已在证明助手 homotopy.io 中实现。

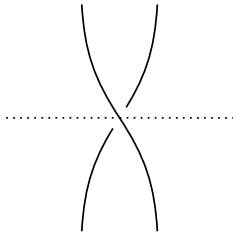


图 2： 框架组合拓扑能够检测辫子中两条线彼此交错时的临界点。这一方法可以推广，以组合方式捕捉高阶维范畴的弱结构，例如 Yang-Baxterator、Zamolodchikov 四面体等。

然而，基于弦图的高阶范畴论半严格方法，在三维以上尚未被证明是可靠或完备的 [BMS12]。通过带有 ∞-范畴标记的桁架和网格，以及对桁架态射与配边的统一处理，本文提出的框架组合拓扑表述旨在便于与公认的高阶范畴同伦论模型进行比较。特别是，我们将在未来的工作中探讨，如何利用从 n 重积 $\Delta^{\times n}$ 到 n-桁架的包含函子，实现与 n 重 Segal 空间 [Rez01、Lur08、Lur09、BSP11]的比较。

框架组合拓扑在几何和奇点理论中也有很有前景的应用，首先可以研究 [DD22]中提出的流形图表与驯 tame 缠结。通过 ∞-范畴标记，我们可以表达施加于实现为网格的流形之法丛和切丛上的局部结构。结合将网格解释为高维弦图，我们认为这是研究广义缠结的自然语境。

由于本文是一篇奠基性论文，我们不会详细讨论其应用。有关应用的更详细讨论，请参见[DD21、DDV22、HRV22] 以及作者的后续工作。

结果。 [DD21] 中定义的桁架和网格可以赋予 1-范畴中的标记。本文展示了如何将其推广为赋予 $(\infty, 1)$-范畴中的标记，从而允许标记来自几何数据。对于每个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们刻画一个 ∞-范畴 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$，使得函子 $\mathcal{B} \to \mathbb{T}(\mathcal{C})$ 等价于以 $\mathcal{C}$ 为标记的 $\mathcal{B}$ 上的桁架丛。此外，我们构造一个 ∞-范畴 $\mathbb{M}(\mathcal{C})$，使得对于任意（良态的）分层空间 B，函子 $\mathrm{Exit}(B) \to \mathbb{M}(\mathcal{C})$ 与以 $\mathcal{C}$ 为标记的 B 上的网格丛之间存在等价。我们证明存在自然等价 $\mathbb{T}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{M}(\mathcal{C})$，因此由我们的构造得到的桁架理论与网格理论等价。由于 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$ 和 $\mathbb{M}(\mathcal{C})$ 是 ∞-范畴，它们本身也可以充当标记，从而使我们能够得到 n-桁架和 n-网格 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{M}^n(\mathcal{C})$。

相关工作。 框架组合拓扑项目 [DD21] 首次定义了桁架和网格。本文中的结果最初是作为该项目中之字形构造的演进而发展出来的，该项目的介绍见 [RV19，HRV22] 该项目旨在研究证明助手 homotopy.io的理论和算法基础；而本文的结果则是独立得出的。为避免术语分化，我们决定采用后者所用的“桁架”和“网格”这两个术语，不过需要注意的是，我们的定义并不完全等同于后者的定义。我们认为，本文仍然具有重要价值

对其中讨论的贡献 [DD21] 由于其截然不同的方法，以及在 ∞-范畴中定义标记的能力。

我们将网格的 ∞-范畴刻画为分层空间上的层，这一做法受到 [AFR18] 中分层层与可构造丛的启发。由于本文采用的分层空间概念更为一般，我们必须重建理论中的一部分。

致谢。 作者感谢 Christoph Dorn、Christopher Douglas、Eric Finster、Nick Hu、ChiaraSarti、Calin Tataru、Jamie Vicary 和 Vincent Wang 提供的宝贵讨论，并特别感谢 Jamie Vicary 作为 DPhil 导师给予的出色支持。

记号。 我们用 $[n]$ 表示元素为 $\{0, \dots, n\}$ 的有限序数。 Δ 是有限非空序数及其间保序映射构成的范畴。严格区间范畴 ∇ 是 Δ的子范畴，由序数 $[n]$ （其中 $n \geq 1$ ）以及保持最小值和最大值的保序映射构成。存在一个同构$\Delta^{\mathrm{op}} \cong \nabla$。

我们用 ∞-范畴一词指代拟范畴或完全 Segal 空间意义下的 $(\infty, 1)$-范畴，但力求尽可能不依赖任何特定模型。我们用 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 表示小型 ∞-范畴构成的（大） ∞-范畴，用 $\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 表示空间构成的（大） ∞-范畴。对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 及其中一对对象 X、Y，我们将从 X 到 Y 的映射空间记为 $\mathcal{C}(X, Y)$。当 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$ 是 ∞- 范畴时，$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 构成的 ∞-范畴，而空间 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{C}, \mathcal{D})$（与映射空间的记法一致）则是 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 的核心。给定函子 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ ，我们用 $\mathrm{Gr}^-(F) \to \mathcal{C}$ 表示反变 Grothendieck 构造或解直化。我们用 $\downarrow$ 表示逗号范畴和切片 ∞-范畴。

2 桁架

桁架定义中的基本组成部分是桁架丛，它们是 ∞-范畴的函子，是如下定义的函子 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 的拉回。

定义 2.1。 范畴 ET 的对象是形如 $s_i[n]$ 的奇异对象，其中 $0 \leq i < n$，以及形如 $r_i[n]$ 的正则对象，其中 $0 \leq i \leq n$。ET 的态射定义如下：

$$\mathrm{ET}(r_i[n], r_j[m]) = \{\alpha : [n] \to [m] \mid \alpha(i) = j\} \tag{1}$$
$$\mathrm{ET}(s_i[n], s_j[m]) = \{\alpha : [n] \to [m] \mid \alpha(i) \leq j < \alpha(i+1)\} \tag{2}$$
$$\mathrm{ET}(s_i[n], r_j[m]) = \{\alpha : [n] \to [m] \mid \alpha(i) \leq j \leq \alpha(i+1)\} \tag{3}$$
$$\mathrm{ET}(r_i[n], s_j[m]) = \varnothing \tag{4}$$

并按底层保序映射进行复合。存在一个典范遗忘函子 $\mathrm{ET} \to \Delta$，称为万有桁架丛，它将 $s_i[n]$ 和 $r_i[n]$ 都映射到 $[n]$。

例 2.2。 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 在序数 $[n]$ 上的纤维是一个跨度序列

$$r_0[n] \longleftarrow s_0[n] \longrightarrow r_1[n] \longleftarrow \cdots \longrightarrow r_{n-1}[n] \longleftarrow s_{n-1}[n] \longrightarrow r_n[n]$$

在正则对象和奇异对象之间交替。特别地，终端序数 $[0]$ 上的纤维由单个对象 $r_0[0]$ 构成。

示例 2.3。 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 在保序映射 $\alpha : [n] \to [m]$ 之上的纤维由两个跨度序列组成，长度分别为 n 和 m，它们连接在一起形成一个平面图表。在以下图表中，为避免杂乱，我们省略了从奇异对象指向由其他箭头复合而成的正则对象的箭头。

1. 由 $(0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2)$ 定义的外面映射 $[1] \to [2]$ 将一个跨度嵌入到一个跨度序列中。我们将利用这一点来定义子图表到更大图表中的嵌入。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & r_0[1] & \longleftarrow & s_0[1] & \longrightarrow & r_1[1] \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ r_0[2] & \longleftarrow & s_0[2] & \longrightarrow & r_1[2] & \longleftarrow & s_1[2] & \longrightarrow & r_2[2] \end{array}$$

2. 退化映射 $[1] \to [0]$ 通过移除两个正则层之间的奇异层，将这两个正则层合并。这将用于为恒等胞腔建模。

$$\begin{array}{ccccc} r_0[1] & \longleftarrow & s_0[1] & \longrightarrow & r_1[1] \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & r_0[0] & & \end{array}$$

3. 内面映射 $[1] \to [2]$ 由 $(0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2)$ 定义，它将一个奇异对象拆分为两个（这是由方程 2中奇异对象之间映射的定义方式所致），并在它们之间插入一个正则层。

$$\begin{array}{ccccccccc} r_0[1] & & \longleftarrow & & s_0[1] & & \longrightarrow & & r_1[1] \\ \downarrow & & & \swarrow & & \searrow & & & \downarrow \\ r_0[2] & \longleftarrow & s_0[2] & \longrightarrow & r_1[2] & \longleftarrow & s_1[2] & \longrightarrow & r_2[2] \end{array}$$

定义 2.4. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴。$\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 表示以 $\mathcal{B}$ 为底、标记取自 $\mathcal{C}$ 的桁架丛空间，它由如下形式的 ∞-范畴图表构成：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \longleftarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{ET} \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ & & \mathcal{B} & \longrightarrow & \Delta \end{array} \tag{5}$$

其中该方块是笛卡尔的，且 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 是定义 2.1 中的万有桁架丛。底层 ∞-范畴之间的函子 $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ 通过取拉回，诱导出空间映射 $\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}(\mathcal{B}', \mathcal{C})$。标记 ∞-范畴之间的函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 通过将标记函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 后复合，诱导出空间映射 $\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C}')$。这共同定义了一个函子 $\mathbb{T}(-,-) : \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$。

换一种表述，给定 ∞-范畴 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$，空间 $\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 中的一个点由以下数据构成：∞-范畴 $\mathcal{E}$、函子 $\mathcal{B} \to \Delta$、$\mathcal{E} \to \mathcal{B}$、$\mathcal{E} \to \mathrm{ET}$ 和 $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$，以及一个见证，表明方形（5）交换，且该方形是拉回方形。上下文清楚时，我们通常只用函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ 来表示桁架丛，省略其余结构。

特别地，由于拉回和到终对象范畴 $*$ 的映射都定义到可缩选择为止，因此在 $*$ 中标记的桁架丛空间 $\mathbb{T}(\mathcal{B}, *)$ 自然等价于函子空间 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{B}, \Delta)$，所以预层 $\mathbb{T}(-, *)$ 由范畴 Δ表示。为了证明对于一般的标记 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，$\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 可表示，我们将使用可指数化纤维化理论，具体如 [AF17] 对一般的 ∞-范畴所述，或如 [Lur17] 对拟范畴所述；这推广了 1-范畴的 Conduché函子。

引理 2.5。 设 $\mathcal{B}$ 是一个偏序集，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。那么，$\mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 中的每个桁架丛都等价于形如 $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ 的对象，其中 $\mathcal{E}$ 是一个偏序集。

引理 2.6。 万有桁架丛 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 是可指数化的，也就是说，其基变换函子

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \mathrm{ET}$$

有一个右伴随。

证明。 我们使用 [AF17，引理 1.11。] 来验证该断言。设 $\alpha : \Delta[2] \to \Delta$ 是 Δ中的一个交换三角形。接下来需要证明限制函子的纤维

$$\mathrm{Fun}_{/\Delta}(\Delta[2], \mathrm{ET}) \to \mathrm{Fun}_{/\Delta}(\Delta\{0 < 2\}, \mathrm{ET}) \tag{6}$$

在任意映射 $h : \Delta\{0 < 2\} \to \mathrm{ET}$ 是弱可缩的。由于 $\mathrm{ET} \times_\Delta \Delta[2]$ 是一个偏序集，ET 中的一个分解 $\times_\Delta \Delta[2]$ 由其经过分解的对象唯一确定。因此，(6) 在任意 h 上的纤维都同构于 ET 的一个子偏序集 $\times_\Delta \{\alpha(1)\}$。通过分类讨论可知，该子偏序集是弱可缩的。 □

命题 2.7。 令 $\mathcal{C}$ 为一个 ∞-范畴。那么， ∞-预层

$$\mathbb{T}(-, \mathcal{C}) : \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$$

可由一个 ∞-范畴 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$表示，即存在一个自然等价

$$\mathbb{T}(-, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(-, \mathbb{T}(\mathcal{C})).$$

证明。 由于 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 是可指数化的，底变换与

$$\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \mathrm{ET} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$$

遗忘函子的复合具有一个右伴随，该右伴随将 $\mathcal{C}$ 发送到位于 Δ之上的一个 ∞-范畴$\mathbb{T}(\mathcal{C})$。函子 $\mathbb{T}(-, \mathcal{C}) \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$ 的非直化 $\mathrm{Gr}^-(\mathbb{T}(-, \mathcal{C})) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是由形如 (5) 的图表组成的 ∞-范畴，其中 ∞-范畴 $\mathcal{B}$ 可以变化。右纤维化 $\mathrm{Gr}^-(\mathbb{T}(-, \mathcal{C})) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 随后分解为右纤维化 $\mathrm{Gr}^-(\mathbb{T}(-, \mathcal{C})) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta$ 与右纤维化 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$的复合；前者只记录映射 $\mathcal{B} \to \Delta$。由于对于任意 $\varphi : \mathcal{B} \to \Delta$，沿 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 对 φ 进行拉回的 Space 是可缩的，因此存在一个自然等价

$$\mathrm{Gr}^-(\mathbb{T}(-, \mathcal{C})) \times_{\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta} \{\varphi\} \simeq \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathcal{B} \times_\Delta \mathrm{ET}, \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta)(\mathcal{B}, \mathbb{T}(\mathcal{C})).$$

由于此等价在 φ中是自然的，我们得到一个位于 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta$ 之上的等价 $\mathrm{Gr}^-(\mathbb{T}(-, \mathcal{C})) \simeq (\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \mathbb{T})(\mathcal{C})$；通过与遗忘函子 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \downarrow \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 后复合，此等价位于 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$之上。通过直化，我们随后得到一个自然等价 $\mathbb{T}(-, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(-, \mathbb{T}(\mathcal{C}))$. □

由于 ∞-预层 $\mathbb{T}(-, \mathcal{C})$ 关于标记 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是自然的，并且 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$ 被定义为由 $\mathbb{T}(-, \mathcal{C})$ 表示的 ∞- 范畴，因此可知 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$ 本身关于 $\mathcal{C}$ 是自然的，并定义了一个自函子 $\mathbb{T}(-) : \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$

我们已经证明，对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，存在一个以 $\mathcal{C}$ 为标记的桁架丛 ∞-范畴 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$。特别地， $\mathbb{T}(\mathcal{C})$ 本身可以作为标记的 ∞-范畴，因此我们得到一个 ∞-范畴 $\mathbb{T}(\mathbb{T}(\mathcal{C}))$。这一过程可以迭代，从而对于任意由 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C}) = \mathbb{T}(\mathbb{T}^{n-1}(\mathcal{C}))$ 定义的$n \geq 0$，得到 ∞-范畴 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C})$。

定义 2.8. 令 $n \geq 0$ 和 $\mathcal{C}$ 为一个 ∞-范畴。带有 $\mathcal{C}$ 中标记的 n-桁架 是 ∞-范畴 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C})$的一个对象。 n-桁架之间的配边 是 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C})$中的一个 1-态射。

∞-范畴 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C})$ 可通过桁架丛序列进行另一种刻画。

定义 2.9。设 $n \geq 0$，并设 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 为 ∞-范畴。$\mathbb{T}^n(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 表示以 $\mathcal{B}$ 为底、带有 $\mathcal{C}$ 中标记的 n 重桁架丛所构成的空间；它是如下形式的 ∞- 范畴图表空间：

$$\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{E}_n \xrightarrow{\pi_n} \mathcal{E}_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}_0 = \mathcal{B}$$

以及一个形如以下形式的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{k+1} & \longrightarrow & \mathrm{ET} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_k} & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{E}_k & \longrightarrow & \Delta \end{array}$$

对每个 $0 \leq k < n$。这组装成一个函子 $\mathbb{T}^n(-,\ -) : \mathcal{C}在_{\infty}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}在_{\infty} \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上作用于底 ∞-范畴 $\mathcal{B}$，通过对丛取拉回；并作用于标记 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，通过后复合，如定义 2.4中所述。

例 2.10。这种 n重桁架丛定义的特殊情形包括 $\mathbb{T}^0(\mathcal{B},\ \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}在_{\infty}(\mathcal{B},\ \mathcal{C})$ 和 $\mathbb{T}^1(\mathcal{B},\ \mathcal{C}) \simeq \mathbb{T}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$。

构造 2.11。设 $n \geq 0$，并设 $\mathcal{B},\ \mathcal{C}$ 为 ∞-范畴。装填函子

$$\mathbb{T}^{n+1}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}^n(\mathcal{B}, \mathbb{T}(\mathcal{C}))$$

将一个 $(n+1)$ 重桁架丛

$$\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{E}_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} \mathcal{E}_n \xrightarrow{\pi_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}_0 = \mathcal{B} \tag{7}$$

映到该 n重桁架丛

$$\mathbb{T}(\mathcal{C}) \longleftarrow \mathcal{E}_n \xrightarrow{\pi_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}_0 = \mathcal{B} \tag{8}$$

其中 $\mathcal{E}_n \to \mathbb{T}(\mathcal{C})$ 由应用命题 2.7 的等价确定。

命题 2.12。构造 2.11 中的装包函子是一个自然等价。特别地，预层 $\mathbb{T}^n(-, \mathcal{C})$ 由以下 ∞-范畴 $\mathbb{T}^n(\mathcal{C})$ 表示

证明。两者 $\mathbb{T}^{n+1}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 和 $\mathbb{T}^n(\mathcal{B}, \mathbb{T}(\mathcal{C}))$ 都存在一个到 $\mathbb{T}^n(\mathcal{B}, *)$ 的函子，分别将（7）和（8）截断为无标记的 n-重桁架丛

$$\mathcal{E}_n \xrightarrow{\pi_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}_0 = \mathcal{B}$$

截断函子是右纤维化（通过对丛作拉回以及对标记函子作前复合），并且与装包函子可交换。因此，只需证明装包函子在纤维上诱导出一个等价，这可由命题2.7推出。□

文献 [DD21] 中的桁架理论包含（迭代）桁架丛的映射。在我们的理论表述中，这些映射归入桁架配边。尽管这一选择使得对偶性理论，或如文献 [DD21]中那样同时处理开桁架与闭桁架，因外面映射的存在而变得更加困难，但它使我们能够以统一的方式处理桁架映射与配边。特别是，它允许构造以下与 Δ 的比较函子。

构造 2.13。对于任意 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，存在一个自然的全忠实函子

$$\Delta \times \mathcal{C} \to \mathbb{T}(\mathcal{C})$$

它将 $([k], c)$ 送到 $[k]$ 上恒定标记为 c 的桁架丛。通过对 $n \geq 0$ 使用归纳法，这诱导出一个全忠实函子 $\Delta^{\times n} \times \mathcal{C} \to \mathbb{T}^n(\mathcal{C})$，它将 Δ 与 $\mathcal{C}$ 的 n 重积映至标记为 $\mathcal{C}$ 的 n 重桁架丛。

特别地，对于 $\mathcal{C} = *$，我们得到一个包含关系 $\Delta^{\times n} \to \mathbb{T}^n(*)$。在未来的工作中，我们将利用这一包含关系，将基于桁架构建的 (∞, n)-范畴理论与 n-重 Segal 空间进行比较。

3 分层空间

框架组合拓扑研究可通过网格表示的分层空间。一般的偏序集分层空间、锥状分层空间或同伦分层空间对于我们的目的而言过于一般，而 [AFR18]中的锥光滑分层空间又过于僵化。本节旨在勾勒一种适用于我们理论的分层空间概念，以求兼顾两者。

特别地，我们定义一个由 Kan 富集范畴 Strat 表示的、良性分层空间的 ∞-范畴 $\mathcal{S}$trat，并配备一个全忠实函子 Exit : $\mathcal{S}\mathrm{trat} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，它将分层空间映射到出射路径的 ∞-范畴。这将使我们能够将 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 刻画为 $\mathcal{P}(\mathcal{S}\mathrm{trat})$ 的满子范畴。本节中的概念，例如偏序集分层空间和出射路径 ∞-范畴，都是标准的；我们仅主张将这些部分整合起来的方式具有原创性。

定义 3.1。偏序集 P 上的 Alexandroff 拓扑，是其底集 P 上的一种拓扑，其中子集 $U \subseteq P$ 为开集，当且仅当它是向上封闭的；也就是说，对于每个 $x \in U$，若 $x \leq y$，则也有 $y \in U$。

为了使用一个方便的拓扑空间范畴，我们采用数值生成拓扑空间范畴 Top [Dug，FR 08]。给偏序集赋予 Alexandroff 拓扑，可诱导出一个全忠实函子 Pos $\hookrightarrow$ Top。对于更常见的弱 Hausdorff 空间则并非如此，因为赋予 Alexandroff 拓扑时，只有离散偏序集才是弱 Hausdorff 的。此外，数值生成拓扑空间构成一个局部可呈范畴，这将使一些论证更加便利。

定义 3.2。偏序集分层空间 构成逗号范畴 Top $\downarrow$ Pos，即包含 Pos $\to$ Top 的逗号范畴。特别地，其对象是从数值生成的拓扑空间到赋有 Alexandroff 拓扑的偏序集的映射。元素的原像 $p \in P$ 称为 X的一个分层 。Top $\downarrow$ Pos 中的映射是如下形式的交换方块

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Q \end{array}$$

将空间 X 映射到唯一映射 $X \to [0]$，我们得到一个全忠实函子 Top $\to$ Top $\downarrow$ Pos；我们将利用它把未分层空间视为平凡分层空间。特别地，我们得到拓扑标准单纯形 $|\Delta[n]|$的平凡分层空间，并用它们将 Top $\downarrow$ Pos 丰富为单纯集。

定义 3.3。偏序集分层空间范畴 Top $\downarrow$Pos 可以作单纯富集：对于偏序集分层空间 $X \to P$ 和 $Y \to Q$，映射的单纯集为

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow\mathrm{Pos}}(X \to P, Y \to Q) : [n] \mapsto (\mathrm{Top} \downarrow \mathrm{Pos})(X \times |\Delta[n]|, Y).$$

映射 $f\colon X \times |\Delta[n]| \to Y$ 和 $g\colon Y \times |\Delta[n]| \to Z$ 的复合映射定义为映射 $X \times |\Delta[n]| \to Z$，该映射将 (x, s) 发送到 $g(f(x, s), s)$。

引理 3.4. Top $\downarrow$ Pos 作为一个单纯形富集范畴，具有张量化和余张量化结构。

证明。 Top $\downarrow$ Pos 由映射的单纯集定义为张量化的。

令 $X \to P$ 为 Top $\downarrow$ Pos 中的一个对象，并令 A 为一个单纯集。由于张量运算$A \otimes -$: Top $\downarrow$Pos $\to$ Top $\downarrow$Pos 保持余极限，且 Top $\downarrow$Pos 是局部可呈范畴，因此它存在一个右伴随 $-^A$: Top $\downarrow$Pos $\to$ Top $\downarrow$Pos。由于我们有一个自然同构

$$(\mathrm{Top} \downarrow \mathrm{Pos})(X \times |A| \times |\Delta[n]|, Y) \cong (\mathrm{Top} \downarrow \mathrm{Pos})(X \times |\Delta[n]|, Y^A)$$

这个函子定义了一个余张量结构。 □

引理 3.5. Top $\downarrow$ Pos 是以 *Kan* 复形为富集的。

证明。 Kan 填充体可以通过对拓扑号角包含 $|\Lambda_k[n]| \hookrightarrow |\Delta[n]|$ for $0 \leq k \leq n$ 的任意收缩来构造。 □

分层空间的一个重要例子是配备其典范分层的单纯复形 [Lur17，截面 A。6]。

定义 3.6. 抽象单形复形 (V, S) 是由有限顶点集 V 和单形集 S 组成的一个二元组，其中单形是 V 的有限子集。只要 $\sigma \subseteq V$ 是 S 中的一个单形，那么它的任意子集 $\tau \subseteq \sigma$ 也是 S 中的一个单形。

一个抽象单纯复形(V, S)可以实现为一个拓扑空间$|(V, S)|$。为方便起见，我们将 $|(V, S)|$ 定义为S 视为偏序集时其神经的几何实现；这与通常的几何实现概念同胚。于是，通过将 $x \in |(V, S)|$ 映射到 $s \in S$（当 x 包含于单形 σ 的内部时），我们得到典范分层 $|(V, S)| \to S$: $[n] \to S$ 其中 $\sigma(n) = s$。

定义 3.7。 偏序集分层空间 $X \to P$ 称为可三角剖分的，如果存在一个单纯复形 (S, V)，以及 Top 中如下形式的图表

$$\begin{array}{ccc} |(V,\ S)| & \xrightarrow{\cong} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & P \end{array}$$

在此定义中，我们不要求 $S \to P$ 是同构；特别地，我们允许将 S 中的不同元素映射到 P中的同一元素，从而使 X 的分层比 $|(V, S)|$ 的分层更粗。

定义 3.8。 设 $n \geq 0$。分层 n-单形 $\mathrm{st}[n]$ 是拓扑n-单形 $|\Delta[n]|$ 在映射 $|\Delta[n]| \to [n]$ 下的分层。该映射将重心坐标中的点 $(t_0, \ldots, t_n)$映射到满足 $t_i \neq 0$的最大 $0 \leq i \leq n$。这在偏序集分层空间中诱导出一个余单纯对象$\Delta \to$ Top $\downarrow$ Pos。

定义 3.9。 对于任意偏序集分层空间 $X \to P$，都有一个单纯集 Exit(X)，其n-单形是分层映射 $\mathrm{st}[n] \to X$。这定义了一个函子 Exit : Top $\downarrow$ Pos $\to$ sSet。

定义 3.10。 当 Exit(X) 是拟范畴时，偏序集分层空间 $X \to P$ 称为纤维化的 。

定义 3.11。 我们用 Strat 表示 Top $\downarrow$ Pos 的满子范畴，其中对象是纤维化、可三角剖分且具有非空道路连通分层的偏序集分层空间 $X \to P$。然后令 $\mathcal{S}$trat 表示由 Strat 在分层同伦等价处作 Dwyer-Kan 局部化所得到的 ∞-范畴。

例 3.12。 根据 [Lur17，定义 A.5.5，] 任何具有锥形结构（按其定义）的偏序集分层空间都是纤维化的，见 [Lur17，定理 A.6.4。]此外，任何单纯形复形的典范分层都是纤维化的，见[Lur17，推论 A.6.9。]然而，并非每个可三角剖分的偏序集分层空间都是纤维化的：例如，作为 st 的子空间的 horn $|\Lambda_1[2]|$的分层 st[2]就不是纤维化的。

Dwyer-Kan 局部化的泛性质指出，对于每个 ∞-范畴，$\mathcal{C}$ 函子空间 $\mathcal{S}$trat $\to \mathcal{C}$ 等价于函子空间 Strat $\to \mathcal{C}$，后者将分层同伦等价映射为 $\mathcal{C}$中的等价。特别地，我们看到 Exit : Top $\downarrow$ Pos $\to$ sSet 下降为 ∞-范畴之间的函子 Exit : $\mathcal{S}$trat $\to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$。

我们将证明 Exit : $\mathcal{S}$trat $\to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是全忠实的。为此，注意到根据 [Lur17，例 1.3.4.8。] 该 ∞-范畴 $\mathcal{S}$trat 等价于由 Stratas 表示的 ∞-范畴，它是一个 Kan 富集范畴，其富集结构继承自

Top ↓ Pos。 ∞-范畴 $\mathcal{S}$trat 的映射空间因此由 Strat 的 Kan 丰富化中的映射空间表示。

定义 3.13. 逗号范畴之间存在一个伴随

$$\|-\| : \mathrm{sSet}\downarrow \mathrm{Pos} \rightleftarrows \mathrm{Top}\downarrow \mathrm{Pos} : \mathbb{S}\mathrm{ing}$$

其中，$\mathrm{k}X \to P\mathrm{k}$ 是几何实现 $|X|$，它经由复合$|X| \to |P| \to P$在 P 上分层；而 $\mathbb{S}\mathrm{ing}(X \to P)$ 是单纯集 $\mathrm{Exit}(X) \to P$的典范映射。对于任意固定的偏序集 P，该伴随限制为一个伴随

$$\|-\|_P : \mathrm{sSet}\downarrow P \rightleftarrows \mathrm{Top}\downarrow P : \mathbb{S}\mathrm{ing}_P$$

引理 3.14. 对于每个偏序集 P，伴随 $\|-\| \vdash \mathbb{S}\mathrm{ing}$ 和 $\|-\|_P \vdash \mathbb{S}\mathrm{ing}_P$ 都是单纯的。

证明. 对于任意单纯集 A 以及 sSet/Pos 中的对象 $B \to P$，我们有 $\mathrm{k}A \otimes B\mathrm{k} \cong A \otimes \mathrm{k}B\mathrm{k}$，因为通常的几何实现 $|-| : \mathrm{sSet} \to \mathrm{Top}$ 保持积。因此，$\mathrm{k}\ -\ \mathrm{k}$ 定义了一个单纯函子，它在 n-单形上的作用为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet/Pos}}(\Delta[n] \otimes A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top/Pos}}(\|\Delta[n] \otimes A\|, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top/Pos}}(\Delta[n] \otimes \|A\|, B)$$

现在可得，$\|-\| \vdash \mathbb{S}\mathrm{ing}$ 定义了一个单纯伴随，其依据是 [Rie14，命题 3.7.10。]。于是该单纯伴随限制为一个单纯伴随 $\|-\|_P \vdash \mathbb{S}\mathrm{ing}_P$ 对任意偏序集 P。□

引理 3.15。设 $A \to P$ 和 $B \to Q$ 是偏序集分层的单纯集。当 $A \to P$ 在 sSet ↓ P 上的 *Joyal-Kan* 模型结构中具有纤维性，且 A 具有道路连通分层时，遗忘函子 sSet ↓ Pos → sSet 诱导 *Kan* 复形的一个同构

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}\downarrow\mathrm{Pos}}(A, B) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}}(A, B)$$

证明。由于 $A \to P$ 具有纤维性，A 是拟范畴，而 $A \to P$ 是保守函子。于是 P 是拟范畴 A 的（−1）截断；对于每个分层单纯集 $B \to Q$ 和映射 $A \to B$，存在唯一的映射 $P \to Q$，使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \overset{\exists!}{\dashrightarrow} & Q \end{array}$$

现在，由于与 $\Delta[n] \to [0]$ 的积保持纤维性，结论成立。 □

命题 3.16。设 P 是一个偏序集。则存在一个单纯组合模型结构$(\mathrm{sSet}\downarrow P)^{\mathrm{JK}}$，称为 *Joyal-Kan* 模型结构，其中余纤维化是单态射，并且满足以下性质：当 $X \to P$ 是一个偏序集分层空间时，$\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(X)$ 在 $(\mathrm{sSet}\downarrow P)^{\mathrm{JK}}$ 中具有纤维性，当且仅当$\mathrm{Exit}(X)$ 是一个拟范畴。

证明。参见[Hai22]。 □

命题 3.17。函子 $\mathrm{Exit} : \mathcal{S}\mathrm{trat} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是全忠实的。

证明。设 $X \to P$ 是一个分层空间。我们选取一个三角剖分

$$\begin{array}{ccc} |(V,\ S)| & \xrightarrow{\cong} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & P \end{array}$$

其中 (V, S) 是一个抽象单纯复形。通过映射 $S \to P$，我们可以将 S 本身视为 sSet $\downarrow P$ 中的一个 P-分层单纯集。于是根据 [DW21, 引理 5.3.] 和 [DW21, 注 2.51.]，伴随 $-\mathrm{k}_P \dashv \mathbb{S}\mathrm{ing}_P$ 的单位 $\eta_S\colon S \to \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(\mathrm{k}S\mathrm{k}_P)$ 在 sSet $\downarrow P$ 上的 Joyal-Kan 模型结构中是弱等价。当 $Y \to P$ 是一个偏序集分层空间，且 $\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(Y)$ 是纤维化的时，前复合映射 $\eta_S{}^*$ 在图表中诱导出 Kan 复形之间的弱同伦等价

$$\begin{array}{ccc} \text{映射}_{\mathrm{Top}\downarrow P}(\mathrm{k}S\mathrm{k}_P, Y) & \xrightarrow{\mathbb{S}\mathrm{ing}_P} & \text{映射}_{\mathrm{sSet}\downarrow P}(\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(\mathrm{k}S\mathrm{k}_P),\ \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(Y)) \\ & \searrow^{\simeq} & \downarrow{\scriptstyle \eta_S{}^*} \\ & & \mathrm{Map}^{\mathrm{sSet}\downarrow P}(S, \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(Y)) \end{array}$$

那么，根据三取二性质可知，Sing_P 诱导出一个弱同伦等价。

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow P}(\|S\|_P, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}\downarrow P}(\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(\|S\|_P), \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(Y)).$$

由于 $|S| \cong |(V,\ S)| \cong X$，因此 Sing_P 诱导出一个弱同伦等价。

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow P}(X, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}\downarrow P}(\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(X), \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(Y)).$$

现在设 $X \to P$ 和 $Y \to Q$ 为分层空间。每个分层映射 $f\colon X \to Y$，其底层偏序集映射为 $\alpha\colon P \to Q$，都可通过拉回分解。

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \alpha^*Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\mathrm{id}} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q \end{array}$$

特别地，存在一个由 Kan 复形构成的交换方形。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow\mathrm{Pos}}(X, Y) & \xrightarrow{\mathbb{S}\mathrm{ing}_*} & \mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}\downarrow\mathrm{Pos}}(\mathbb{S}\mathrm{ing}(X), \mathbb{S}\mathrm{ing}(Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \coprod_{\alpha:P\to Q} \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow P}(X, \alpha^*Y) & \longrightarrow & \coprod_{\alpha:P\to Q} \mathrm{Map}_{\mathrm{sSet}\downarrow P}(\mathbb{S}\mathrm{ing}_P(X), \mathbb{S}\mathrm{ing}_P(\alpha^*Y)) \end{array}$$

<escape>由于每个 α^*Y 都是纤维化的，底部的映射是弱同伦等价，因此顶部的映射也是如此。所以 $\mathbb{S}\mathrm{ing}$ 限制为一个全忠实的单纯形函子 Strat $\to$ sSet $\downarrow$ Pos，并且根据引理 3.15，通过与遗忘函子 sSet $\to$ Pos $\downarrow$ sSet 后复合，得到一个全忠实的单纯形函子 Strat $\to$ sSet。但这个函子就是 Exit。□
</escape>

现在我们可以将 $\mathcal{C}$视为$_\infty$ 的一个满子范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{S}\mathrm{trat})$。这与 [AFR18] 的分层层的想法类似。不过，我们不打算刻画那些取值于本质像的$\mathcal{S}$trat 上的预层，因为本文的目的并不需要这样的刻画。

命题 3.18。 将一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 映射到取值于 *Space* 的预层 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(-), \mathcal{C})$ 的函子 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \to \mathcal{P}(\mathcal{S}\mathrm{trat})$ 是全忠实的。

证明。 我们有一个函子的交换三角

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathrm{st}[-]} & \mathcal{S}\mathrm{trat} \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Exit}} \\ & & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \end{array}$$

因此可得，st[−] 是全忠实的。这意味着，右伴随 $\mathcal{P}(\Delta) \to \mathcal{P}(\mathcal{S}\mathrm{trat})$（限制函子 $\mathcal{P}(\mathcal{S}\mathrm{trat}) \to \mathcal{P}(\Delta)$ 的）也同样是全忠实的。 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是 $\mathcal{P}(\Delta)$ 的满子范畴，并且显然，右伴随函子就是断言中的函子。
□

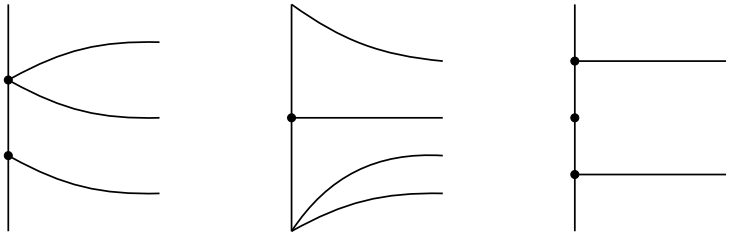


图3： st[1] 上的网格丛，它们分别表示内面映射（$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3$）：$[2] \to [3]$、外面映射（$0 \mapsto 2, 1 \mapsto 3$）：$[1] \to [4]$ 以及退化映射（$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$）：$[3] \to [2]$。竖线是 st[1]的 0-层上的纤维。对于外面映射，顶部和底部的两条线在趋近图表左侧时，逐渐趋近开区间（–1,1）的边界。

根据命题 3.17，分层空间 X 的可表预层 $\mathcal{S}\mathrm{trat}(-, X)$ 等价于预层 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(-), \mathrm{Exit}(X))$。因此，我们有 $\mathcal{S}\mathrm{trat}(-, X)$ 表示 ∞-范畴 $\mathrm{Exit}(X)$。

4 Meshes

网格是桁架的一种几何化形式，通过引入坐标的选择来扩展桁架丛。基于网格，我们可以构建一套温和分层空间理论，该理论与纯组合性的桁架理论等价。

定义 4.1. 一个 1-网格 是开区间 $(-1,1)$ 的一个有限分层，其中每个分层要么是一个孤立点，要么是一个开子区间。1-网格中的一个点若为孤立点，则称为奇异点，否则称为正则点。

应将 1-网格视为表示有限序数 $[n]$，其中每个元素$i \in [n]$ 都是该网格的正则分层。1-网格的出射路径 ∞-范畴是一个 1-桁架，其正则分层和奇异分层分别对应于桁架的正则元素和奇异元素。

定义 4.2。 分层空间 B 上的网格丛 是偏序集分层空间p 的映射 $E \to B$，其满足以下性质：

1. p 的底层空间映射是投影 $B \times (-1,1) \to B$。
2. p 限制在每个层 $S \subseteq B$ 上为一个平凡的空间丛 $S \times (-1,1) \to S$。
3. 对于每个 $b \in B$，纤维 $p^{-1}(b)$ 是一个 1-网格。
4. 所有纤维的正则点构成 $B \times (-1,\ 1)$ 的一个开子集。

分层空间上的网格丛 1-单形 st[1] 对应于端点上 1-网格所对应的序数之间的保序映射。这一点在图 3 中有所说明。

注 4.3. 将开区间 $(-1,\ 1)$ 替换为 $\mathbb{R}$ 中任意其他开区间，都会得到等价的网格理论。当网格用于刻画嵌入 $\mathbb{R}^n$ 的流形或分层空间时，使用 $\mathbb{R}$ 本身最为自然。为简化基于线性插值的论证，本文选用了一个有限长度的区间。

我们注意到，我们将网格丛定义为 $p:\ E \to B$ 在分层空间 B 上，但只要求 E 是一个偏序集分层空间。下文的引理4.9表明，E 必须是可三角剖分的；而通过命题5.5我们将看到，E 实际上是一个分层空间。

引理 4.4。 网格丛在拉回下封闭。

证明。 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛，而 $f\colon B' \to B$ 是分层空间之间的映射。定义 4.2 的前三个性质由粘贴引理在拉回下保持不变，且由于遗忘函子 $\mathrm{Strat} \to \mathrm{Top}$ 保持拉回。$E \times_B B'$ 中的点 $b' \in B$当且仅当它在纤维 $(E \times_B B') \times_{B'} \{b'\} \cong E \times_B \{f(b')\}$中是正则点时，才是正则点。因此， $E \times_B B'$ 中的正则点集合是 E 在诱导连续映射 $E \times_B B' \to E$ 下对正则点集合的原像，因而是开集。 □

如上所述，网格丛 $p\colon E \to B$ 在任意给定点上的纤维，其坐标在区间（-1，1）内仅在可缩选择意义下由其正则分层的数量决定。我们证明，这些数据能够相容地组合成函子 $\mathrm{reg}^p : \mathrm{Exit}(B) \to \Delta$。类似地，我们可以得到函子 $\mathrm{sing}^p : \mathrm{Exit}(B)^{\mathrm{op}} \to \nabla$，其特征由纤维的奇异分层给出。此外，任意这样的函子都导出一个网格丛，且该网格丛在可缩选择意义下唯一。就此而言，任意网格丛都由组合数据决定。

引理 4.5. 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。那么存在唯一且定义良好的函子

$$\mathrm{reg}_p : \mathrm{Exit}(B) \to \Delta$$

满足以下性质：

1. 当 $b \in B$ 是底空间中的一个点时，$\mathit{reg}^p(b)$ 是纤维$p^{-1}(b)$ 中正则分层的集合，并带有由 $(-1, 1)$ 上的典范序诱导的全序。*2.* 当 $\gamma : \mathit{st}[1] \to B$ 是底空间中的一条出射路径时，若存在 γ的一个提升 $\hat{\gamma} : \mathit{st}[1] \to E$，其起点为 R_0，终点为 R_1，则 $\mathit{reg}^p(\gamma)$ 将位于 $\gamma(0)$ 上方的正则分层R_0 映射到位于 $\gamma(1)$ 上方的正则分层 R_1。

证明. 为了证明 reg^p 是一个定义良好的集合映射，我们首先证明，诱导函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathrm{Exit}(B)$在 $\mathrm{Exit}(E)$ 的正则对象上限制为一个离散纤维化。

设 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$ 是底空间中的一条初等退出路径， $e \in E$ 是一个正则元素，且 $p(e) = \gamma(0)$。由于 $E \cong B \times (-1, 1)$ 作为空间，我们可以将 e 写成乘积 $(\gamma(0), h)$。由于 E 的正则点构成一个开子集，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得由 $t \mapsto (\gamma(t), h)$ 定义的映射 $\hat{\gamma}\colon [0, \varepsilon] \to E$ 是 E 中的一条退出路径，并且提升了受限路径$\gamma \restriction [0, \varepsilon]$。于是，我们可以将 $\hat{\gamma}$ 延拓为一条退出路径 $\mathrm{st}[1] \to E$，通过始终留在包含 $\hat{\gamma}(\varepsilon)$ 的正则分层中，提升 γ 的全部路径。

假设 $\hat{\gamma}_1$，$\hat{\gamma}_2$ 是 γ 的两条提升，它们都从 $\gamma(0)$ 上方的一个正则元素 $e \in E$ 出发。由于 E 的正则点构成开子集，存在 e 的一个开邻域 $U \subseteq E$，它不与任何奇异元素相交。特别地，当 $t > 0$ 足够小时，使得纤维 $\gamma(t)$ 中从 $\hat{\gamma}_1(t)$ 到 $\hat{\gamma}_2(t)$ 的路径包含在 U 中时，$\hat{\gamma}_1(t)$ 与 $\hat{\gamma}_2(t)$ 之间就没有奇异分层，因此二者必定处于同一个正则分层中。但这样一来，$\hat{\gamma}_1(1)$ 和 $\hat{\gamma}_2(1)$ 也必定处于同一个正则分层中。

为了证明该函子保序，令 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$ 为一条初等退出路径， e_1， e_2 为满足 $e_1 \le e_2$ 且 $p(e_1) = p(e_2) = \gamma(0)$ 的正则点，并令 $\hat{\gamma}_1$、 $\hat{\gamma}_2$ 为从 e_1 和 e_2 出发的 γ 的提升。假设 $\hat{\gamma}_1(1) > \hat{\gamma}_2(1)$。那么，由连续性可知，存在一个 $0 < t < 1$，使得 $\hat{\gamma}_1(t) = \hat{\gamma}_2(t)$，因此 $\hat{\gamma}_1(1)$ 和 $\hat{\gamma}_2(1)$ 位于同一个正则分层中。□

类似地，每个网格丛 $p\colon E \to B$ 都根据其奇异分层确定一个取值于 ∇ 的反变函子。为精确定义这一点，我们需要定义 p的紧化。

定义 4.6。 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。 p 的紧化是分层的¯丛 $\bar{p}\colon E \to B$，其底层空间映射为 $B \times [-1, 1] \to B$，且对每个 $b \in B$，纤维 $\bar{p}^{-1}(b)$ 都是通过在端点处添加两个 0 维层，从纤维 $p^{-1}(b)$ 得到的。

引理 4.7。 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。那么存在唯一良定义的函子

$$\mathrm{sing}_p : \mathrm{Exit}(B)^{\mathrm{op}} \to \nabla$$

它满足以下性质：

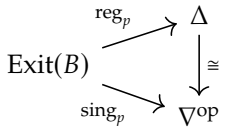
1. 当 $b \in B$ 是底空间中的一个点时，$\mathrm{sing}^p(b)$ 是紧化的纤维$\bar{p}^{-1}(b)$ 中的奇异分层集合，其全序由 $[-1,1]$ 上的典范序诱导。*2.* 当 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$ 是底空间中的一条出射路径时，$\mathrm{sing}^p(\gamma)$ 将一个奇异分层$_S_1$ 映至 $\gamma(1)$ 上方的奇异分层；若存在 γ 的一个提升$\hat{}\gamma : \mathrm{st}[1] \to E$，其起点为 S_0、终点为 S_1，则将该奇异分层映至 $\gamma(0)$ 上方的奇异分层 S_0。

证明。 为了证明 sing^p 作为集合映射是良定义的，我们首先证明，诱导函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathrm{Exit}(B)$ 限制在 $\mathrm{Exit}(E)$ 中的奇异对象上时是一个离散纤维化。

设 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$ 是底空间中的一条初等退出路径， $e \in E$ 是一个奇异元素，且 $p(e) = \gamma(1)$。利用局部平凡化，可得到将γ 限制在 $\mathrm{st}[1] \cap (0,1]$ 上的唯一提升。由于奇异点集合在 $B \times [0,1]$ 中是闭的，我们可以利用连续性将该提升唯一地延拓为一个提升 $\hat{}\gamma : \mathrm{st}[1] \to \mathrm{sing}(E)$。

为证明该函子保持序，令 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$ 为一条初等退出路径， e_1， e_2 为奇异点，且 $e_1 \le e_2$ 和 $p(e_1) = p(e_2) = \gamma(1)$，并令 $\hat{}\gamma_1$、$\hat{}\gamma_2$ 为 γ 的唯一提升，分别终止于 e_1 和 e_2。假设 $\hat{}\gamma_1(0) > \hat{}\gamma_2(0)$。由连续性可知，必存在一个 $0 < t < 1$，使得 $\hat{}\gamma_1(t) = \hat{}\gamma_2(t)$。由于这些提升保持分层，这意味着 $e_1 = e_2$，从而导致矛盾。因此，$\hat{}\gamma_1(0) \le \hat{}\gamma_2(0)$。□

引理 4.8。 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。那么下图交换：



其中 $\Delta \cong \nabla^{\mathrm{op}}$ 是有限非空序数范畴与严格区间范畴之间的典范对偶性。

引理4.9。 设 B 是一个分层空间，且 $f\colon \mathrm{Exit}(B)^{\mathrm{op}} \to \nabla$ 是一个函子。那么存在一个网格丛 $p\colon E \to B$，使得 $\mathrm{sing}_p = f$。此外，若 B 是分片线性的，则 E 也可以选为分片线性的。

证明。 我们选取 B 的一个与分层相容的三角剖分。当 B 是分片线性时，我们可以选取这样的三角剖分，使得该三角剖分的每个单形 $\mathrm{st}[k] \hookrightarrow B$ 都是¯线性的。接着，我们构造一个分层丛 $\bar{p}\colon E \to B$，使其纤维内部是一个网格丛 $p\colon E \to B$。

对于三角剖分的每个顶点 x，我们选取一个严格单调端点保持映射 $f(x) \to [0,1]$。这确定了奇异分层在 x 上方的高度。

设 $k > 0$，并假设根据归纳法，我们已经构造了三角剖分的 B 的 $(k-1)$-骨架上方的扩展网格丛。设 $\sigma : \mathrm{st}[k] \hookrightarrow B$ 是三角剖分的一个分层单形，那么对于每个 $0 \le i \le k$，函子 $f(\sigma)\colon [k]^{\mathrm{op}} \to \nabla$ 诱导出一个映射 $f_i\colon f(k) \to f(i)$。对于 $\mathrm{st}[k]$ 内的任意点 x，我们将 $\sigma(x)$ 上方、对应于某个 $s \in f(\sigma(x))$ 的奇异分层的高度，定义为 σ 各顶点上方奇异分层 $f_i(s)$ 高度的凸组合，其系数取自 x 的重心坐标。□

构造 4.10。 对于分层空间 B，我们将 $\mathrm{BM}(B)$ 记作这样一个单纯集：其 n-单纯形由形如 $p\colon E \to B \times |\Delta[n]|$ 的网格丛组成。沿底空间 B 进行拉回后，空间 $\mathrm{BM}(B)$ 排列成一个函子 $\mathrm{BM}(\text{–})\colon \mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}$。

下面的命题表明，BM 是 Δ 的几何版本，其中每个有限非空序数都配备了坐标，而保序映射则如图 3 所示被实现为配边。选择这些坐标的空间是可缩的，因此 BM 等价于 Δ 作为一个 ∞-范畴。

命题 4.11. 构造 BM : $\mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}$ *4.10* 中的函子会 4.10分解通过包含映射 $\mathcal{S}\mathrm{pace} \hookrightarrow \mathrm{sSet}$，并表示一个与 ∞-范畴等价的 Δ。

证明。 我们证明，对于每个分层空间 B，将网格丛 $p : E \to B \times |\Delta[n]|$ 赋予诱导映射 $\mathrm{reg}^p : \mathrm{Exit}(B) \times \Delta[n] \to \Delta$ 的单纯集映射 $\mathrm{BM}(B) \to \mathrm{sSet}(\mathrm{Exit}(B), \Delta)$ 是一个平凡 Kan 纤维化。设 $k \geq 0$，并考虑一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[k] & \longrightarrow & \mathrm{BM}(B) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[k] & \longrightarrow & \mathrm{sSet}(\mathrm{Exit}(B), \Delta) \end{array}$$

当 $k = 0$ 这由引理 4.9 得出。对于 $k > 0$，我们在 $B \times \partial|\Delta[k]|$上有一个网格丛，可以通过对奇异分层的位置进行线性插值，将其延拓为 $B \times |\Delta[k]|$ 上的网格丛。 □

对于每个网格丛 $p : E \to B$，等价 $\mathrm{BM}(B) \simeq \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B),\mathrm{BM})$ 给出一个函子 $\mathrm{Exit}(B) \to \mathrm{BM}$，它在各个分量上将分层映射 $A \to B$ 发送为拉回网格丛 $E \times_B A \to A$。

5 带标记网格

由于分层空间 B 上的网格丛由函子 $\mathrm{Exit}(B) \to \Delta$确定，因此 B 上的网格丛与 $\mathrm{Exit}(B)$ 上未标记的桁架丛等价。我们将看到，对于任意网格丛 $p : E \to B$，E 也是一个分层空间，因此 $\mathrm{Exit}(E)$ 是一个 ∞- 范畴。接着，通过为网格丛 $p : E \to B$ 配备取值于一个 ∞- 范畴 $\mathcal{C}$ 的标记函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathcal{C}$，我们可以将网格与桁架之间的等价推广到带标记的情形。

定义5.1。 设 B 是一个分层空间。那么，$\mathrm{EM}(B)$ 是一个单纯集，其 n-单形由如下形式的网格丛 $p : E \to B \times |\Delta[n]|$ 及一个截面$B \times |\Delta[n]| \to E$组成。通过沿底空间拉回，空间 $\mathrm{EM}(B)$ 构成一个函子 $\mathrm{EM}(B) : \mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}$。

引理5.2。 设 B 是一个分层空间。则典范映射

$$\mathrm{EM}(B) \to \mathrm{BM}(B)$$

遗忘截面的映射是一个 *Kan* 纤维化。特别地，$\mathrm{EM}(-)$ 定义了一个函子 $\mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$。

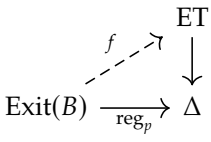
证明。 我们需要验证，对于每个形如以下形式的实图表

$$\begin{array}{ccc} B \times |\Lambda_i[n]| & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B \times |\Delta[n]| & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & B \times |\Delta[n]| \end{array}$$

当 p 是网格丛时，存在一个虚线填充。可以先固定 B 的一个与分层相容的三角剖分，再对各个骨架使用归纳法来构造该填充。□

当 $p\colon\ E \to B$ 是网格丛时，将 p 沿自身作拉回 $E \times_B E \to E$，所得仍是网格丛，并且有一个典范截面 $E \to E \times_B E$。这定义了 $\mathrm{EM}(E)$ 的一个元素，因而得到一个函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathrm{EM}$。

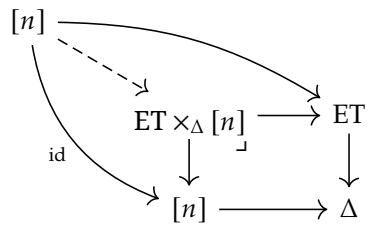
引理 5.3。设 $p\colon\ E \to B$ 是一个带有截面的网格丛 $s\colon\ B \to E$。则存在唯一良定义的函子 $f\colon\ \mathrm{Exit}(B) \to \mathrm{ET}$，使其适合于图表



并定义在对象 $b \in B$ 上如下：

1. $f(b) = r_i[n]$ 当 $s(b)$ 是位于 b 之上的第 i 个正则分层，且 $\mathrm{reg}^p(b) = [n]$。
2. $f(b) = s_i[n]$ 当 $s(b)$ 是位于 b 之上的第 i 个奇异分层，且 $\mathrm{reg}^p(b) = [n]$。

证明。每个函子 $[n] \to \mathrm{ET}$ 都唯一地分解为经过以下拉回：



由于 $[n]$ 是一个偏序集，$\mathrm{ET}\times_\Delta [n]$也是偏序集。因此，函子 f由其在对象上的作用唯一确定。为证明它存在，只需证明：当 $\gamma : \mathrm{st}[1] \to B$是一条出射路径时，在 ET 中存在一个位于映射 $\mathrm{reg}^p(\gamma)$ 之上的映射 $f(\gamma(0)) \to f(\gamma(1))$，其中该映射保持序关系。

1. 假设 $f(\gamma(0)) = r_i[n]$ 且 $f(\gamma(1)) = r_j[m]$。由于 $s \circ \gamma$ 是将 γ 提升为E 中的一条出射路径的提升，根据引理 4.5，我们有 $\mathrm{reg}^p(i) = j$，因此存在一个在 $\mathrm{reg}^p(\gamma)$ 上方的映射 $r_i[n] \to r_j[m]$，属于 ET。2. 假设 $f(\gamma(0)) = s_i[n]$ 且 $f(\gamma(1)) = s_j[m]$。由引理 4.7，我们有 $\mathrm{sing}^p(j+1) = i+1$，这意味着通过对偶性 $\nabla^{\mathrm{op}} \cong \Delta$，$\mathrm{reg}^p(i) \le j < \mathrm{reg}^p(i+1)$。
3. 假设 $f(\gamma(0)) = s_i[n]$ 且 $f(\gamma(1)) = r_j[m]$。由于从 $\gamma(0)$ 出发的出射路径，最多只能到达与从紧邻 $\gamma(0)$ 上方或下方的正则分层出发的出射路径同样高或低的位置，因此 $\mathrm{reg}^p(i) \le j \le \mathrm{reg}^p(i+1)$。□

命题 5.4。引理 5.3 中的函子组装成一个空间等价

$$\mathrm{EM}(B) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B), \mathrm{ET})$$

它关于 $B \in \mathcal{S}\mathrm{trat}$ 是自然的。特别地，EM 表示一个等价于ET的 ∞-范畴。此外，这个函子嵌入一个空间的交换方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{EM}(B) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B), \mathrm{ET}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BM}(B) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B), \Delta) \end{array}$$

证明。 我们首先构造单纯集之间的映射

$$\mathrm{EM}(B) \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B), \mathrm{ET}).$$

$\mathrm{EM}(B)$ 的一个 n-单形由一个网格丛 $p\colon E \to B \times |\Delta[n]|$ 和一个截面 $s\colon B \times |\Delta[n]| \to E$ 组成。然后，引理 5.3 确定一个函子 $\mathrm{Exit}(B \times |\Delta[n]|) \to \mathrm{ET}$。接着，通过与自然等价 $\mathrm{Exit}(B) \times E[n] \to \mathrm{Exit}(B \times |\Delta[n]|)$ 作预复合，我们得到 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B),\mathrm{ET})$ 的一个 n-单形。这个对单形的赋值随后延拓为一个单纯集映射。

对于分层空间的自然性 B 注意，引理中构造的函子 5.3由纤维决定，因此在丛的拉回下表现良好。

根据命题 4.11方形图中的底部水平映射是等价，且根据引理 5.2左侧垂直映射是 Kan 纤维化。由于 $\mathrm{ET} \to \Delta$ 是等纤维化，右侧的垂直映射也是 Kan 纤维化。因此，只需验证顶部水平映射在纤维之间诱导出等价。

设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。$\mathrm{EM}(B) \to \mathrm{BM}(B)$ 在 p 上的纤维具有可缩的连通分支，因此只需证明水平映射在连通分支之间诱导双射。

为证明满射，假设有一个映射 $f\colon \mathrm{Exit}(B) \to \mathrm{ET}$，使其与下图相容

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{ET} \\ & \overset{f}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathrm{Exit}(B) & \xrightarrow[\mathrm{reg}_p]{} & \Delta \end{array}$$

取 B 的一个与其分层相容的三角剖分。对于三角剖分的每个顶点 x，定义 $s(x)$：当 $f(x) = s_i[n]$时，令其为 $p^{-1}(x)$中的第 i个奇点；当 $f(x) = r_i[n]$时，则令其为 $p^{-1}(x)$中第 i个正则分层中的任意一点。随后，我们可以通过线性插值将 s 延拓为 p 的截面 $s\colon B \to E$。

为证明单射，假设有两个截面 $s_1\colon B \to E$ 和 $s_2\colon B \to E$，它们确定相同的映射 $f\colon \mathrm{Exit}(B) \to \mathrm{ET}$。于是，对于每个 $x \in B$，点 $s_1(x)$ 和 $s_2(x)$ 都属于 E 的同一个分层。由于网格丛的分层都是可缩的，因此 s_1 和 s_2 同伦。□

命题 5.5. 设 $p\colon E \to B$ 是一个网格丛。那么 E 是一个分层空间，∞-范畴的方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Exit}(E) & \xrightarrow{(E\times_B E \leftrightarrows E)} & \mathrm{EM} \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow \\ \mathrm{Exit}(B) & \xrightarrow{(E \overset{p}{\to} B)} & \mathrm{BM} \end{array}$$

交换图表是笛卡尔图表。

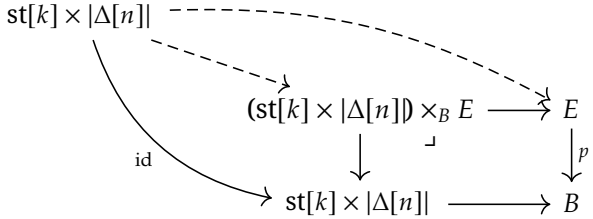
证明。 我们首先考虑单纯空间的方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow\mathrm{Pos}}(\mathrm{st}[-], E) & \longrightarrow & \mathrm{EM}(\mathrm{st}[-]) \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}\downarrow\mathrm{Pos}}(\mathrm{st}[-], B) & \longrightarrow & \mathrm{BM}(\mathrm{st}[-]) \end{array} \tag{9}$$

这个方形是交换的，因为两边都将分层映射 $\mathrm{st}[k] \times |\Delta[n]| \to E$ 送到偏序集分层空间图表中的左侧网格丛

$$\begin{array}{ccccc} E \times_B (\mathrm{st}[k] \times |\Delta[n]|) & \longrightarrow & E \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{st}[k] \times |\Delta[n]| & \longrightarrow & E & \xrightarrow[p]{} & B \end{array}$$

其中两个方块都是拉回。要证明方块（9）是笛卡尔的，只需证明对于任意 $[k] \in \Delta$，它逐点都是笛卡尔的。由于 $\mathrm{EM}(\mathrm{st}[k]) \to \mathrm{BM}(\mathrm{st}[k])$ 是 Kan 纤维化，Space 的拉回可由单纯集的普通拉回表示。当 $[n] \in \Delta$ 时，根据拉回的泛性质，以下图表中的两条虚线映射由彼此唯一确定。



现在由于 EM 和 BM 是 ∞-范畴，且 E 是纤维化的，因此方形图（9）将 $\mathrm{Map}^{\mathrm{Top}_{\downarrow \mathrm{Pos}}}(\mathrm{st}[-], E)$ 展示为完备 Segal 空间的拉回，因而其自身也是完备 Segal 空间。由此可知，$\mathrm{Exit}(E)$ 是一个拟范畴，因此 E 是纤维化的。根据引理 4.9，我们还知道 E 是可三角剖分的。因此 E 是一个分层空间。□

定义 5.6. 设 B 是一个分层空间，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。那么 $\mathbb{M}(B, \mathcal{C})$ 是这样的单纯集：其 n-单形由形如 $p\colon E \to B \times |\Delta[n]|$ 的网格丛以及一个函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathcal{C}$ 组成。沿底空间拉回后，空间 $\mathbb{M}(B, \mathcal{C})$ 构成一个函子 $\mathbb{M}(-, \mathcal{C})\colon \mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}$。

引理 5.7. 设 B 是一个分层空间，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。那么典范映射

$$\mathbb{M}(B, \mathcal{C}) \to \mathrm{BM}(B)$$

是一个 *Kan* 纤维化。特别地，$\mathbb{M}(-, \mathcal{C})$ 定义了一个函子 $\mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{pace}$。

证明。 我们需要求解如下形式的提升问题

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i[k] & \longrightarrow & \mathbb{M}(B, \mathcal{C}) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[k] & \longrightarrow & \mathrm{BM}(B) \end{array}$$

等价地，我们给定一个网格丛的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B \times |\Lambda_i[k]| & \longrightarrow & B \times |\Delta[k]| \end{array}$$

连同一个函子 $f\colon \mathrm{Exit}(E') \to \mathcal{C}$，我们需要将其扩展为一个函子 $\mathrm{Exit}(E) \to \mathcal{C}$。这可以通过由 $|\Lambda_i[k]| \to |\Delta[k]|$ 的一个收缩所诱导的 $E' \to E$ 的收缩来实现。□

由此可知，对于每个网格丛 $p\colon E \to B$，所诱导的函子 $p_*\colon \mathrm{Exit}(E) \to \mathrm{Exit}(B)$ 通过拉回方块的复合构成一个桁架丛。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Exit}(E) & \longrightarrow & \mathrm{EM} & \longrightarrow & \mathrm{ET} \\ \downarrow{\scriptstyle p_*} & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{Exit}(B) & \longrightarrow & \mathrm{BM} & \longrightarrow & \Delta \end{array}$$

这诱导出一个自然函子 $\mathbb{M}(B,\ \mathcal{C}) \to \mathbb{T}(\mathrm{Exit}(B),\ \mathcal{C})$。

命题 5.8. 设 B 是一个分层空间，$\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴。那么

$$\mathbb{M}(B, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}(\mathrm{Exit}(B), \mathcal{C})$$

是空间等价。特别地，$\mathbb{M}(-, \mathcal{C})$ 表示一个 ∞-范畴 $\mathbb{M}(\mathcal{C})$，其对象是网格，且等价于在 $\mathcal{C}$ 中标记的桁架的 ∞-范畴 $\mathbb{T}(\mathcal{C})$。

证明. 考虑空间的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}(B, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{T}(\mathrm{Exit}(B), \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BM}(B) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(B), \Delta) \end{array}$$

根据命题 4.11，下方的水平映射是一个等价，因此只需验证上方的水平映射在同伦纤维上诱导出等价。设 $\pi\colon E \to B$是 B 上的一个网格丛。根据引理 5.7，Kan 复形之间的映射 $\mathbb{M}(B, \mathcal{C}) \to \mathrm{BM}(B)$ 是一个 Kan 纤维化，因此其在 π 上的同伦纤维由单纯集的通常纤维给出。但此时，映射 $\mathbb{M}(B, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}(\mathrm{Exit}(B), \mathcal{C})$ 在纤维中的 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty(\mathrm{Exit}(E), \mathcal{C})$ 上限制为恒等映射。 □

现在，我们可以像对桁架所做的那样迭代这一构造，从而得到 ∞-范畴 $\mathbb{M}^n(\mathcal{C})$。

定义5.9。设 $n \geq 0$，设 B 为一个分层空间，设 $\mathcal{C}$ 为一个 ∞-范畴。那么$\mathbb{M}^n(B, \mathcal{C})$ 是一个单纯集，其 k-单形是网格丛序列

$$E_n \xrightarrow{\pi_n} E_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} E_0 = \mathcal{B} \times |\Delta[k]|$$

并附带一个函子 $\mathrm{Exit}(E_n) \to \mathcal{C}$。这通过对丛作拉回，组装成一个函子 $\mathbb{M}^n(-, \mathcal{C})\colon \mathcal{S}\mathrm{trat}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}$。

然后，利用类似于构造 2.11 的打包构造，我们可以看出 $\mathbb{M}^n(-, \mathcal{C})$表示 ∞-范畴 $\mathbb{M}^n(\mathcal{C})$，因此 $\mathbb{M}^n(\mathcal{C})$ 对带有标记且取值于某个 n-范畴 ∞中的 $\mathcal{C}$-重网格丛进行分类。由此出发，可以进一步发展该理论，引入如 [DD21、HRV22]中所述的规范化和最粗细化网格等概念。这留待未来工作。

参考文献

[AF17] David Ayala 和 John Francis。∞-范畴的纤维化，2017。

[AFR18] David Ayala、John Francis 和 Nick Rozenblyum。分层同伦假设。《欧洲数学学会杂志》，21(4):1071–1178，2018 年。[BMS12] John W. Barrett、Catherine Meusburger 和 Gregor Schaumann。带对偶的 Gray 范畴及其图表。2012 年。[BSP11] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries。关于高阶范畴同伦理论的唯一性。arXiv 预印本 arXiv:1112.0040，2011 年。[DD21] Christoph Dorn 和 Christopher L. Douglas。框架组合拓扑，2021 年。[DD22] Christoph Dorn 和 Christopher L Douglas。流形图表与驯切结。arXiv 预印本 arXiv:2208.13758，2022 年。[DDV22] Christoph Dorn、Christopher Douglas 和 Jamie Vicary。结合*n*-范畴理论。准备中，2022 年。[Dug] Daniel Dugger。关于 delta 生成空间的笔记。预印本，网址：http://www.math.berkeley.edu/~dugger/delta.pdf。[DW21] Sylvain Douteau 和 Lukas Waas。从同伦链接到分层同伦理论。arXiv 预印本 arXiv:2112.02394，2021 年。[FR08] L Fajstrup 和 J Rosicky。一个适用于有向同伦的便利范畴。《范畴论及其应用》，21(1):7–20，2008 年。[Hai22] Peter J Haine。关于分层空间的同伦理论。2022 年。[HRV22] Lukas Heidemann、David Reutter 和 Jamie Vicary。结合 n-范畴的锯齿正规化。载于第 37 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会论文集。ACM，2022 年 8 月。[Lur08] Jacob Lurie。关于拓扑场论的分类。《数学当前进展》，2008(1):129–280，2008 年。[Lur09] Jacob Lurie。（无穷，2）-范畴与 Goodwillie 微积分 I。arXiv 预印本 arXiv:0905.0462，2009 年。[Lur17] Jacob Lurie。高等代数。2017 年。[Rez01] Charles Rezk。一个用于同伦理论之同伦理论的模型。《美国数学会汇刊》，353(3):973–1007，2001 年。[Rie14] Emily Riehl。范畴同伦论，第 24 卷。剑桥大学出版社，2014 年。[RV19] David Reutter 和 Jamie Vicary。结合 *n*-范畴中同伦构造的高级方法。载于 LICS 2019。IEEE，2019 年。