arXiv:2305.06302v1 [math.DS] 10 May 2023

将反可积性与三维二次微分同胚的吸引子联系起来

Amanda E. Hampton 和 James D. Meiss*科罗拉多大学博尔德分校应用数学系，科罗拉多州博尔德市，邮编 80309-0526 Amanda.Hampton@colorado.edu James.Meiss@colorado.edu

2023年5月11日

摘要

我们此前证明，三维二次微分同胚具有反可积（AI）极限，该极限对应于一个二次对应关系，即一对一维映射。在 AI 极限下，动力学与作用于两个符号上的全移位共轭。在本文中，我们考虑一种更一般的 AI 极限，允许映射的两个参数趋于无穷。我们针对二次对应关系的三种情形——抛物线、椭圆和双曲线，证明了每个符号序列都存在相应的 AI 状态。通过压缩映射论证，我们得到了使这一对应关系成为双射的参数区域，但观察发现，该对应关系在更一般的情况下同样适用。我们证明，在体积收缩情形下，可以通过数值延拓获得原始映射的轨道。这些结果表明，周期 AI 状态会演化为所观察到的微分同胚的周期吸引子。我们还对一个周期 AI 状态进行延拓，其符号序列经过特定选择，使其延拓后形成一条轨道，该轨道类似于混沌吸引子，是经典二维 Hénon吸引子的三维版本。

目录

1 引言
<escape>22 双参数反可积极限 4</escape>

3 AI 状态的存在 **6**
3.1 一一对应.63.2 AI 状态的数值验证.8

4 分析界限 **8**
4.1 抛物型情形.104.2 椭圆型情形.114.3 双曲情形.12

*作者的研究部分得到了 NSF 项目 DMS-181248 和 Northrup Grumman 捐赠的资助。谨此感谢与 Yi-Chiuan Chen 的有益交流。

5 强收缩情形
135.1 低周期轨道与倍周期级联.155.2 Hénon类吸引子.18

6 结论 **19**

逆向映射 23B 抛物型情形：两次迭代 23C 延拓算法 24

1 引言

动力系统在可积时可能表现出简单的行为，而在与之互补的极限下也可能表现得相对简单；在这一极限下，系统是反可积（AI）的 [AA90]。对于前者，所有轨道都位于由系统一组完备不变量决定的不变环面上；对于后者，所有轨道都可由有限符号集上的伯努利移位表示——这是一种纯粹的混沌形式。事实上，正如我们可以从可积系统延拓到近可积系统，并利用 KAM 理论寻找持久环面一样，在假设非退化条件成立的情况下，也可以从 AI 极限延拓以寻找混沌动力学 [MM92、Aub95、SM98]。这两种方法虽然本质上不同，却都能帮助阐明更为复杂的中间情形，在那里规则运动与混沌运动可能复杂地交织在一起。

本文继续将这些思想应用于二次微分同胚的研究 [HM22b、HM22a]。我们的工作以二维亨农映射的类似分析为基础[SM98、SDM99、DMS05、Che06]，，并将其扩展到三维二次微分同胚[LM98]。这些二次映射具有一个双符号 AI 极限。经过延拓后，每个符号序列都会成为确定性映射的一条轨道。最简单的延拓论证使用压缩映射定理，但数值方法可以在定理适用的参数区域之外继续延拓这些轨道。

将高维系统写成标量差分方程来研究其反可积性，这方面的工作也已由 [DLM06、LM06、JLM08、LM10] 开展，并已用于将 [MM92] 推广到更一般的多维情形 [CL15]。我们在 [HM22b]中将我们的方法与这些思想进行了比较。本文的目标是将这些论证推广到一个包含两个极限参数的、更一般的反可积极限。

我们研究三维二次微分同胚 $L\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 它具有二次逆映射，正如 [LM98、LLM99],所示，可以写成如下形式

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= (\delta z + \alpha + \tau x - \sigma y + Q(x,y), x, y), \\ Q(x,y) &\equiv ax^2 + bxy + cy^2. \end{aligned} \tag{1}$$

（1）的轨道是满足以下条件的序列 $\{(x_t, y_t, z_t)\colon t \in \mathbb{Z}\}$：

$$(x_{t+1}, y_{t+1}, z_{t+1}) = L(x_t, y_t, z_t).$$

该映射有七个参数 $(\alpha, \tau, \sigma, a, b, c)$，且 $\delta = \det DL$为雅可比矩阵的行列式。体积保持情形 $\delta = 1$ 是三重特征值 1 的不动点附近的一种标准形[DM08]。体积收缩情形 $|\delta| < 1$源于同宿分岔附近的一种标准形[GMO06]，并可产生离散的类洛伦兹吸引子 [GGKS21]。

我们采用 [LM98] 中所述的约定：假设 $a + b + c \neq 0$ 且 $2a + b \neq 0$，则可通过仿射坐标变换令

$$a + b + c = 1 \text{ and } \tau = 0. \tag{2}$$

我们采用这一简化，使映射仅依赖于 $(\alpha,\ \sigma,\ a,\ c)$，以及雅可比矩阵 δ.[1]。

按照 [HM22b], 建立反可积极限，首先将（1）改写为关于 $\{x_t$ 的三阶差分方程： $t \in \mathbb{Z}\}$ 注意到 $y_{t+1} = x_t$ 且 $z_{t+1} = x_{t-1}$,

$$x_{t+1} = \delta x_{t-2} + \alpha - \sigma x_{t-1} + Q(x_t, x_{t-1}). \tag{3}$$

因此，对相空间变量进行重新缩放会很方便，定义 $\xi_t = \varepsilon x_t$，从而引入参数 ε。然后，利用（2）、（3）可得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\varepsilon(\xi_{t+1}, \xi_t, \xi_{t-1}, \xi_{t-2}) \\ &= Q(\xi_t, \xi_{t-1}) + \varepsilon^2\alpha - \varepsilon(\xi_{t+1} + \sigma\xi_{t-1} - \delta\xi_{t-2}). \end{aligned} \tag{4}$$

通常，如果某个差分方程（4）以某种方式退化——例如退化为一个低阶方程，以致不再是确定性映射——那么它就具有一个 AI 极限。如果满足以下条件，这样的极限就很有用：（a）能够简单地刻画 AI 极限处的轨道（例如通过符号动力学）；（b）能够证明每条这样的轨道都可以从极限处延拓出去（例如通过压缩映射论证或数值延拓）。这是 [SM98] 中为 Hénon 映射引入的方法，我们在 [HM22b] 中将其扩展到了（4）。

要获得这样的极限，我们将假设 a、b、c是保持有限的“结构”参数，并且 $|\delta| \leq 1$，从而映射不是体积扩张的。不同的 AI 极限可以通过对剩余参数 α 和 σ 进行缩放来分类，其中 ε，使得三阶差分方程（4）在 $\varepsilon = 0$处退化为低阶的非确定性系统。在 [HM22b], 中，参数 ε 被定义为 $\alpha\varepsilon^2 = 1$。在这种情况下，$\varepsilon \to 0$ 对应于反可积极限 $\alpha \to -\infty$。这里我们将允许两个参数无界：$\alpha \to -\infty$ 和 $\sigma \to \pm\infty$。令

$$\alpha = -\varepsilon^{-2}, \quad \sigma = r\varepsilon^{-1}, \tag{5}$$

使得 $\sigma^2/\alpha = -r^2$ 有限，从而得到差分方程

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\xi_{t+1}, \xi_t, \xi_{t-1}, \xi_{t-2}) = Q(\xi_t, \xi_{t-1}) - r\xi_{t-1} - 1 - \varepsilon(\xi_{t+1} - \delta\xi_{t-2}), \tag{6}$$

<escape>当 $\varepsilon = 0$, （6）退化为</escape>

$$Q(\xi_t, \xi_{t-1}) = r\xi_{t-1} + 1, \tag{7}$$

这意味着，连续的点必须位于一条由判别式确定的二次曲线上，

$$\Delta \equiv b^2 - 4ac. \tag{8}$$

[1]如果 $c = 1$ 和 $a = b = 0$，那么假设 $b + 2c \neq 0$ 并设定 $\sigma = 0$ 会更合适。

当 $\Delta < 0$ 时，(7) 在 $(\xi_{t-1},\ \xi_t)$ 平面上定义一条椭圆； $\Delta = 0$ 给出一条抛物线；而 $\Delta > 0$ 则给出一条双曲线。注意，当 $\Delta = -4ac = ar^2$ 时，曲线 (7) 会退化：抛物线变为一对平行线，双曲线变为两条相交直线，而椭圆则变为一个点。判别式将在第 2 节的分析中发挥关键作用。

在接下来的讨论中，我们假设 $a \neq 0$ 并令 $b = 0$，于是 $a = 1 - c$ 且$\Delta = -4ac$ 现在只取决于 c的值。关于 AI 状态存在性的证明见 §3 ，该证明采用了与 [HM22b], 中类似的压缩映射论证，但得出的参数区域更大。§3余下部分给出了 (r, c)参数空间中 AI 状态存在区域的数值结果。§4 中我们将看到，该区域似乎收敛到一个更简单的区域，我们对此进行了解析计算。我们将详细介绍针对三类二次曲线对该解析区域的计算。

在 §5 中，我们聚焦于“强收缩”情形，即 $\delta = 0.05$，这也是我们在 [HM22a]中研究过的情形。由于雅可比矩阵行列式很小，该映射的轨道接近于一个 Hénon 映射的轨道；该映射在 1）处退化为 $\delta = 0$。在 [HM22a] 中，我们发现此情形下存在周期、规则非周期和混沌的类 Hénon 吸引子，其对应的区域位于 (α, σ) 参数空间中。与周期吸引子对应的共振呈现出类似于圆映射中的阿诺德舌，以及在一维映射的双参数族中观察到的“虾状结构” [Gal94, MT87, FOG13]。在 §5中，我们使用参数 (α, r)重新进行这些计算。

随后，我们从 $\varepsilon = 0$继续延拓 AI 状态，以观察它们如何至少在低周期情况下演变为观测到的吸引子。在每种情况下，我们都发现，该吸引子可归因于一条与 AI 极限相连的轨道，这支持了 [SDM99]提出的“无气泡”猜想。最后，我们使用延拓方法寻找 Hénon 类吸引子的周期近似。该周期近似所对应的 AI 状态会延拓为一条能够很好地近似该吸引子的轨道。

2 双参数反可积极限

当 $b = 0$， $a = 1 - c$ 且（7）变为

$$a\xi_t^2 + c\xi_{t-1}^2 = r\xi_{t-1} + 1, \tag{9}$$

一条关于水平轴对称且以.....为中心的二次曲线

$$\xi^o = \tfrac{r}{2c}. \tag{10}$$

判别式化简为 $\Delta = 4c(c - 1)$，因此这条二次曲线完全由 c 的值决定：

$$\begin{aligned} \text{Ellipse: } \Delta < 0 &\implies 0 < c < 1 \\ \text{Parabola: } \Delta = 0 &\implies c = 0 \text{ and } c = 1 \\ \text{Hyperbola: } \Delta > 0 &\implies c < 0 \text{ and } c > 1 \end{aligned} \tag{11}$$

在$(r,\ c)$ 平面中，这些对应于图1所示的区域：蓝色表示椭圆，棕褐色表示双曲线，黑色边界线表示抛物线。回想一下， $\Delta = -4ac = ar^2$ 会导致退化。这里有三种情况：当 $c = 1 - a = 1$时，式（9）变为一对竖直直线（回想一下，我们假设 $a \neq 0$，不过对于逆向映射，我们确实考虑 $a = 0$ 的情况）；当

$c = -\frac{r^2}{4}$时，式（9）变为一对相交直线；最后，当 $c = r = 0$时，则为一对水平直线。图1 中的红色虚线曲线表示这些情况。最后，该图中的插图展示了在各个$(r,\ c)$ 区域或边界内，二次曲线（9）的示例。

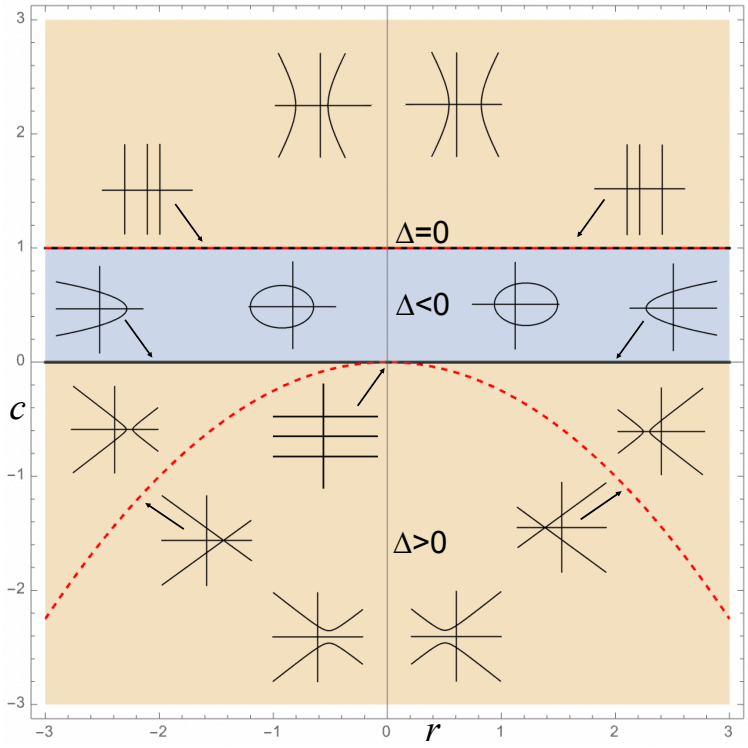

图 1：与 AI 曲线（(r, c)平面对应的区域，AI 曲线（7）分类：椭圆型（蓝色），对应$\Delta < 0$；双曲型（棕褐色），对应 $\Delta > 0$；抛物型（黑线），对应 $\Delta = 0$。红色虚线表示退化情形。插图展示了曲线（7），以说明不同7曲线对应于不同(r, c)取值时的曲线类型。

AI 状态是一条序列 $\{\xi_t :\ t \in \mathbb{Z}\}$ 对于所有 $t \in \mathbb{Z}$，该序列都位于曲线（7）上。由于映射（1）是三维的，曲线（7）在 $\mathbb{R}^3$ 中表示一个曲面。该关系必须对所有 t 都成立。因此，若坐标轴标记为 $(\xi_{t-1}, \xi_t, \xi_{t+1})$，AI 状态必须位于两个曲面的交线上

$$\{Q(\xi_t, \xi_{t-1}) = r\xi_{t-1} + 1\} \cap \{Q(\xi_{t+1}, \xi_t) = r\xi_t + 1\}\,.$$

For 例如，当 $\Delta < 0$ 这是两个椭圆柱面的交集 [HM22b] .

从动力学角度看，(9) 可以视为一种非确定性二次对应关系，而其解（若存在）即为 AI 状态。这些解可通过对 ξ_t求解 (9) 得到，从而得到一对一维映射：

$$\xi_t = f_{s_t}(\xi_{t-1}) = s_t\sqrt{\frac{-c\xi_{t-1}^2 + r\xi_{t-1} + 1}{a}}, \quad s_t \in \{-, +\}, \tag{12}$$

因为我们假设了 $a \neq 0$.[2]

[2]如果 $a = 0$ 集合（9）是位于不动点（14）处的一对垂直直线，并且 AI 状态只是由这些直线构成的一个序列

如果（12）的被开方数严格为正，则两种选择 $s_t = \pm$ 都有效，并且每个点 ξ_{t-1} 都有由分支定义的两个像，分别为 f_- 和 f_+。注意， $f_+ \geq 0$ 和 $f_- \leq 0$ 以及这些映射是对称的， f_-（ξ_{t-1}）$= -f_+$（ξ_{t-1}）。因此，每当 $\xi_t \neq 0$ 是一个 AI 状态时，它都有唯一的符号序列

$$s = \{\ldots s_0, s_1, s_2 \ldots\} \in \Sigma \equiv \{-, +\}^{\infty}, \tag{13}$$

使得 s_t =sign(ξ_t) 表示（7）在时刻 t的分支。例如，（12）的不动点对应于符号序列 $s = \{+\}^{\infty}$ 和 $\{-\}^{\infty}$，并且是

$$\{\pm\}^{\infty} : \xi_{\pm} = \tfrac{1}{2}(r \pm \sqrt{r^2 + 4}). \tag{14}$$

当 $r = 0$时，这是我们此前研究过的一种情况 [HM22a], 不动点本身就是符号序列，即 $\xi_t = s_t$。对于任意 $(r,\ c)$，不动点均存在，并且它们是符号序列为 $\{+\}^{\infty}$ 和 $\{-\}^{\infty}$的唯一轨道。

3 AI 状态的存在性

在本节中，我们将 [HM22b] 的结果推广到 $r \neq 0$ 对于（9）的情形，研究 AI 状态的存在性与唯一性。为了使一个点在关系（12）下具有正向轨道，只需值域是定义域的子集。此外，为了使每个 AI 状态都具有明确无歧义的符号序列，我们要求像集不包含原点。这等价于要求（12）的被开方数严格为正。因此，我们假设存在一个集合 $B \subset \mathbb{R}$使得

$$f_{\pm}(B) \subset B \setminus \{0\}. \tag{15}$$

当导数变为双射时，符号序列与 AI 状态之间的对应关系也变为一一对应，

$$f'_{s_t}(\xi_{t-1}) = \frac{s_t(r - 2c\xi_{t-1})}{2\sqrt{a(-c\xi_{t-1}^2 + r\xi_{t-1} + 1)}}. \tag{16}$$

在 B 上的绝对值小于 1 时，符号序列与 AI 状态之间的对应关系便成为双射。事实上，当 B 紧致时，正如我们在 [HM22b], 中指出的，压缩映射定理意味着存在这一双射：对于每个 $s \in \Sigma$，都存在唯一的 $\{\xi_t\} \in B^{\infty}$ 满足（12）。

在 §3.1 中，我们将推广这一结果，只要求 n 步复合映射在某个 $n \in \mathbb{N}$ 上的斜率绝对值小于 1。这样，轨道上的点便可以落在曲线（9）斜率更“陡”的部分，从而扩大我们能够证明 AI 状态存在的参数范围。在 §3.2 中，我们将通过数值计算得到 n 步界。

3.1 一一对应

假设 设 $B \subset \mathbb{R}$ 是紧的，并且 $\xi = \{\ldots \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots\}$ 表示一个序列 i n

$$\mathcal{B} = B^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\infty}, \tag{17}$$

点 $\xi_t = \xi_{\pm}$。

B的可数乘积。定义 $\mathcal{F}:\ \mathcal{B}\times\Sigma\to\mathcal{B}$ 为

$$\mathcal{F}_t(\xi;s)=f_{s_t}(\xi_{t-1}), \tag{18}$$

对于每个 $s\in\Sigma$ (13) 和 $t\in\mathbb{Z}$。注意， $\mathcal{F}$ 的任意不动点都是 (12) 的一个轨道，其序列为 s。更一般地，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{F}^k:\ \mathcal{B}\times\Sigma\to\mathcal{B}$ 表示 k^{th} 次迭代，

$$\mathcal{F}_t^k(\xi,s)=f_{s_t}\circ f_{s_{t-1}}\circ\ldots\circ f_{s_{t-k+1}}(\xi_{t-k})$$

例如，如果 s 是一个周期为k 的符号序列（例如， $s_{t+k}=s_t,\ \forall t\in\mathbb{Z}$），并且 ξ 是（12）的一个周期为k 的轨道，那么它就是 $\mathcal{F}^k$ 的一个不动点。

最后，对于 $n\in\mathbb{N}$，定义参数集

$$\mathcal{R}_n^+=\{(r,c):\exists B\neq\emptyset,\ f_{s_t}(B)\subset B,\ \|D\mathcal{F}^n\|_\infty<1\}, \tag{19}$$

其中

$$\|D\mathcal{F}^n\|_\infty=\max_{s_0,s_1,\ldots s_{n-1}}\sup_{x\in B}\left|\tfrac{d}{dx}(f_{s_{n-1}}(f_{s_{n-2}}(\ldots(f_{s_0}(x))\ldots)))\right|, \tag{20}$$

即， ∞上的 - 范数 $\mathcal{B}\times\Sigma$。对 [HM22b] 中的结果作简单推广，可得如下结论。

引理 1。 给定 $(r,\ c)\in\mathcal{R}_n^+$和 $\xi\in\mathcal{B}$，在每个序列$s\in\Sigma$ 与状态 $\{\xi\}\subset\mathcal{B}$ 之间存在一一对应，且满足（*12*）。

证明。 考虑一对序列 $\xi,\ \eta\in\mathcal{B}$。给定某个 $s\in\Sigma$ 和 $\mathcal{F}$ (18)， $\mathcal{F}$的不动点是映射（12）的轨道。由于 B 是 $\mathbb{R}$的紧子集，而 $\mathcal{B}$ 在 ℓ^∞ 范数下是完备的。因此

$$\|\mathcal{F}^n(\xi)-\mathcal{F}^n(\eta)\|_\infty\leq||D\mathcal{F}^n||_\infty\,\|\xi-\eta\|_\infty,$$

因此对于 param在 $\mathcal{R}_n^+$、 $\mathcal{F}^n$ 中是压缩映射。因此 $\mathcal{F}^n$有唯一的不动点 $\xi^*=\mathcal{F}^n$（ξ^*).

当（r、 c） $\in\mathcal{R}_n^+$、 f_{s_t}（B） $\subset B$；因此，对于每个 $s\in\Sigma$，存在一个 $\eta^*\in\mathcal{B}$，使得对于每个$t\in\mathbb{Z}$， $\mathcal{F}_t$（η^*、 s） $=\eta_t^*$，因为这只不过是一维映射（12）的一条轨道。由于 $\eta^*=\mathcal{F}$（η^*），显然我们也有 $\eta^*=\mathcal{F}^n$（η^*）。由于 $\mathcal{F}^n$的不动点是唯一的， $\eta^*=\xi^*$。因此，每个符号序列都对应于（12）的一条唯一轨道。

注意，根据构造，条件 $(r,c)\in\mathcal{R}_n^+$和 $\xi\in B$ 保证了 (12) 的被开方数严格为正，这意味着 (12) 的每个状态都有唯一的符号序列 $s\in\Sigma$。因此，符号序列与 (12) 的状态之间存在一一对应。□

此外，当 $c\neq0$ 时，可以利用逆向映射应用引理 1 中的论证，

$$\xi_{t-1}=g_{s_t}(\xi_t)=\frac{1}{2c}\left(r+s_t\sqrt{r^2+4c-4ac\xi_t^2}\right), \tag{21}$$

这是通过求解 (9) 得到的，其中 ξ_{t-1}。给定一个与 (19) 类似的区域 $\mathcal{R}_n^-$，并使用 (21) 对其进行定义，关于一一对应的证明与引理 1 的证明相同。

3.2 AI 状态的数值验证

当然，计算引理 $\mathcal{R}_n^{\pm}$ 所需的区域可能并非易事。这里我们假设满足式（19）的集合 B 是一个闭区间：

$$B = [-\beta, \beta]. \tag{22}$$

虽然这可能并非必要，但这样会使计算更简单。对于β 的具体取值取决于 Δ ，并将在下文第 §4节给出。考虑到这些结果，本节将计算满足 $\mathcal{R}_n^{\pm}$ 的$(r,\ c)$ 平面区域，其中（20）对 n 成立，直到15。

图2(a)展示了在区域$|r| \leq 3$ 和 $|c| \leq 3$内的 500^2 参数点网格上的计算结果。对于每个(r, c)点，沿 B 选取的100个初始条件，使用f_{s_t} (12)进行 $\mathcal{R}_n^+$ 次迭代，或使用 g_{s_t} (21)进行 $\mathcal{R}_n^-$次迭代。对于 $n \leq 15$的 2^n 种可能符号序列$\{s_1, s_2, \ldots s_n\} \in \{+,-\}^n$，均执行上述计算。在每次迭代中，导数(20)被估计为轨道网格和符号集合上的最大值。如果 $\|D\mathcal{F}^n\|_\infty < 1$，则将相应参数加入区域 $\mathcal{R}_n^{\pm}$。图2(a)所示结果的正向步数最多为 $n = 12$ ，反向步数最多为 $n = 14$ （即使用 $g_{\pm}$）。图2(b)中的放大图展示了在 $|r| \leq 1.17$ 和 $-0.35 \leq c \leq 0.75$的 500^2 参数网格上得到的类似结果，每个方向的步数最多为 $n = 15$ 。在每种情况下，颜色标度分别表示 $\mathcal{R}_n^+$ 的正向迭代次数（从黄色到绿色）以及 $\mathcal{R}_n^-$ 的反向迭代次数（从青色到洋红色）。图中的白色区域对应于导数上界始终无法达到的参数区域。显然，这些区域必然是嵌套的： $\mathcal{R}_{n-1}^{\pm} \subset \mathcal{R}_n^{\pm}$。此外，随着 n 增大，这些区域的扩张幅度相对较小，并且似乎趋于收敛。我们将在下一节对此作进一步讨论。

请注意，图 $(r,\ c)$ 所示区域中的大多数取值都对应于双曲情形，见图2(a)：当双曲线较 $c > 1$ 时 $\mathcal{R}_n^-$ ，对应的是更垂直 的情形；而当双曲线较 $c < -r^2/4$ 时 $\mathcal{R}_n^+$ ，对应的是更水平的情形。在这些情况下，反向映射或正向映射的斜率分别应较小，这一点也可从图 1的插图中看出。椭圆情形下，要满足引理 1 的条件则更为微妙， $0 < c < 1$；事实上，椭圆在顶点处的斜率必为零或无穷大，因此必须更谨慎地选取 B ，以避开这些点。

4 分析界限

本节报告参数$(r,\ c)$ 的结果；这些参数仅满足条件（15），这是最基本的要求，确保每个点都有正向或反向轨道，且对应的符号序列明确无歧义。我们将这些集合记为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+ &\equiv \{(r,c) : f_s(B) \subset B \setminus \{0\}, s \in \{+,-\}\}, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^- &\equiv \{(r,c) : g_s(B) \subset B \setminus \{0\}, s \in \{+,-\}\}, \end{aligned} \tag{23}$$

分别使用正向映射（12）和反向映射（21）。我们再次假设 B是形如（22）的闭区间。

这些结果将天天爱彩票 将在接下来的小节中针对三类二次曲线推导出 s:

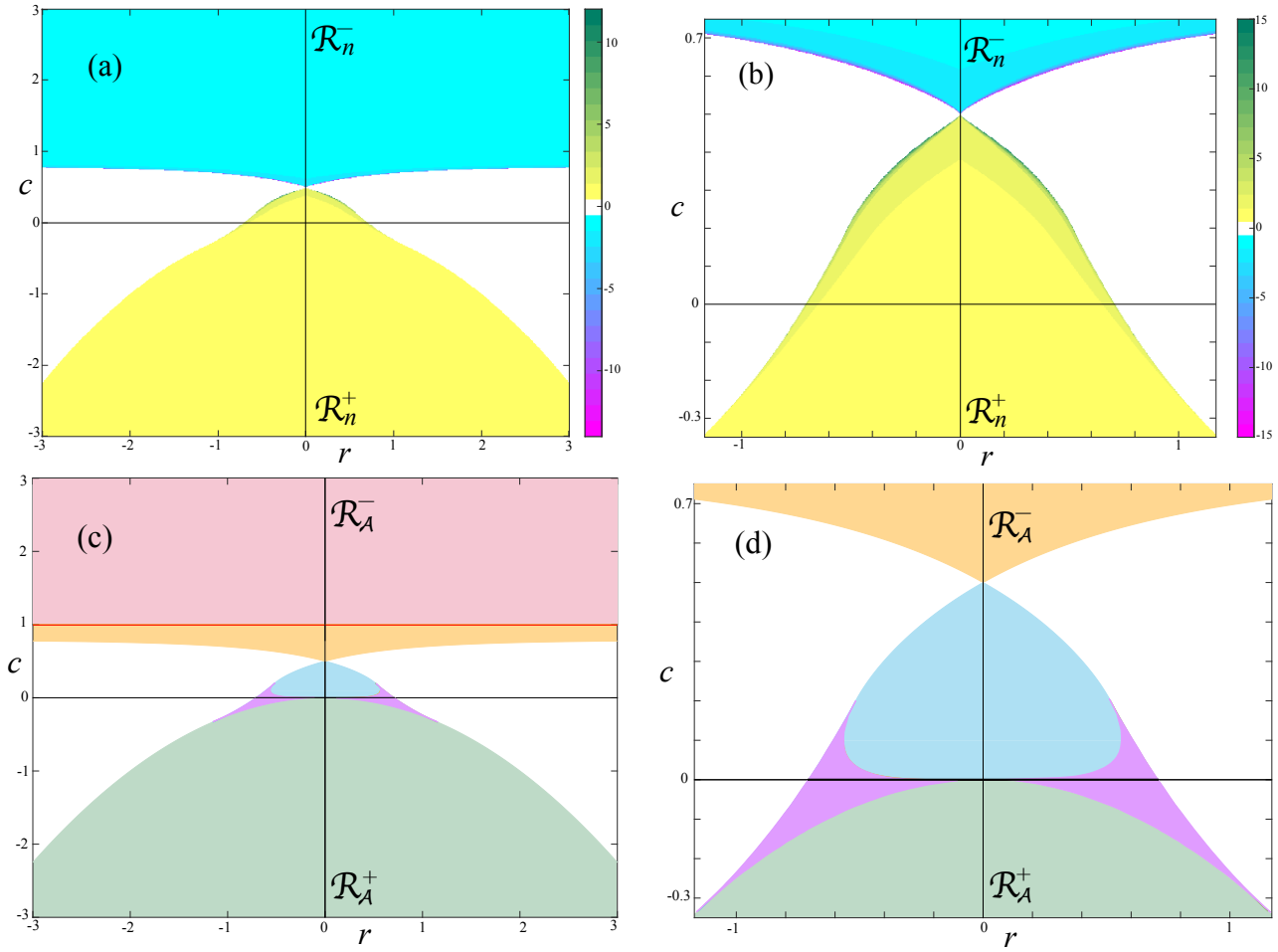

图2: （a）对 $\mathcal{R}_n^{\pm}$ 的数值计算近似结果。颜色对应于所使用的正向（从黄色到绿色）或反向（从青色到洋红色）迭代次数。正向的最大步数为 $n = 12$，反向的最大步数为 14。（b）以原点为中心对（a）进行放大，其中 $|r| \leq 1.17$ 和 $-0.35 \leq c \leq 0.75$，在任一方向上的 n 最大可达 15。（c）(r, c) 平面中的解析区域 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\pm}$ (24)，满足$f_s(B) \subset B$。对于 (12)。颜色对应于第 3.2 节各小节中描述的不同 Δ 情形：双曲型（ $c > 1$ 对应红色、绿色和紫色对应 $c < 0$）、椭圆型（棕褐色、蓝色和紫色对应 $0 < c < 1$）以及抛物型（沿 $c = 0$ 和 $c = 1$ 的一个区间）。（d）使用与（b）相同的界限对（c）进行放大。

抛物线、椭圆和双曲线。这些计算得出了如下形式

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{+} &= \left\{(r,c) : |r| \leq \tfrac{2}{\sqrt{15}}\,,\, c < \mathcal{C}_2(r)\right\} \bigcup \left\{(r,c) : \tfrac{2}{\sqrt{15}} \leq |r| \leq \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,,\, c < 1 + |r|(|r| - \sqrt{r^2+4})\right\} \\
&\quad \bigcup \left\{(r,c) : |r| \geq \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,,\, c < -\tfrac{r^2}{4}\right\}, \\
\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{-} &= \{(r,c) : c > \mathcal{C}_3(r)\}
\end{aligned} \tag{24}$$

这里，函数 $\mathcal{C}_i(r)$ 是三次多项式的根。

$$P(c) = 64c^3 + 32(r^2-2)c^2 + (r^2-4)(5r^2-4)c - 4r^4; \tag{25}$$

当 $|r| < 2\sqrt{2}/5$ 时，这些值为实数。关于 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{-}$ 的计算总结在附录 A。

区域（24）如图 2（c）和（d）所示。它们包括双曲情形的子集（红色对应 $c > 1$，绿色，以及紫色对应 $c < 0$）、椭圆情形的子集（棕褐色、蓝色，以及紫色对应 $0 < c < 1$）和抛物情形的子集（沿着 $c = 0$ 和 $c = 1$的一段区间）。

比较图 2的上、下两个面板可以看出，数值求得的区域$\mathcal{R}_n^+$ 和 $\mathcal{R}_n^-$ 随着 n 增大，逐渐收敛到解析确定的区域（24）。为验证这一点，我们计算了 $\mathcal{R}_n^{\pm}$与 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\pm}$之间的 Hausdorff 距离，结果列于表 1中，并表示为 n的函数（r，c）$= [0, \frac{2}{\sqrt{3}}] \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}]$。在此，我们在 500^2 网格上比较定义于该区域的集合。选择这一区域是为了利用对称性 $r \to -r$ 。

n	$\|\|\|\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+\|\|_H$	$\|\|\|\mathcal{R}_n^- - \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^-\|\|_H$
1	0.112941	0.113266
2	0.020430	0.015774
5	0.014207	0.012091
10	0.008460	0.007873
15	0.007008	0.006532

表 1：集合 $\mathcal{R}_n^{\pm}$ 与 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\pm}$ 之间的 Hausdorff 距离，随 n增大而变化。对于较大的 n，距离逐渐减小，这一点也可从图 2中直观地得到验证。

由于表1 中的距离似乎趋于零，因此推断如下结论似乎是合理的：

猜想 2. 当 $n \to \infty$ 时，$\mathcal{R}_n^{\pm}$ 收敛至 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\pm}$。

注意，（15）要求满足严格不等式 $f_+ > 0$ 和 $f_- < 0$，从而每条轨道都有唯一确定的符号序列，即 $f_+(B) \cap f_-(B) = \emptyset$。由于值域必须是定义域的真子集，连续迭代会产生嵌套集合：$B \supset f_{\pm}(B) \supset f_{\pm}(f_{\pm}(B)) \ldots$。AI 状态位于由此形成的类康托尔集合中。

4.1 抛物型情形

本节计算抛物型情形下的区域（23），$\Delta = 0$。由于我们假设 $b = 0$，这要求$(a, c) = (0, 1)$ 或 $(1, 0)$。当 $a = 0$时，曲线（9）退化为经过不动点的两条竖直线，$\xi_{\pm}$，（14）。在这种情况下，正向映射未定义，必须使用逆向映射（21），参见附录A。

对于情形 $c = 0$，抛物线（9）的顶点位于$(-\frac{1}{r}, 0)$，当 $r \neq 0$时开口方向为正 ξ_{t-1} 方向（当 $r > 0$ $(r < 0$ 时则为负方向）；请回顾图1中的示意图。当 $r = 0$时，抛物线退化为两条水平线，且 $f_{\pm}(\xi) = \xi_{\pm}$，（14）。

由于区间 B 必须包含这些不动点，因为它们是具有 $s = \{+\}^{\infty}$ 和 $\{-\}^{\infty}$ 的轨道；同时它还必须包含像 $f_{\mp}(\xi_{\pm}) = -\xi_{\pm}$，因此我们利用最大绝对值不动点 $\beta = \xi_{max}$ 来定义 B，其中

$$\xi_{max} = \max(|\xi_+|, |\xi_-|) = \tfrac{1}{2}(|r| + \sqrt{r^2 + 4}). \tag{26}$$

由于每个分支在 B 上都是单调的，因此显然有 $f_{\pm}(B) \subset B$。为保证 (12) 的被开方数为正，抛物线顶点必须位于 B 之外；即 $-1/r < -\beta$，这要求$|r| < \frac{1}{\sqrt{2}}$。由此得到

$$\{(r, 0) : |r| < \tfrac{1}{\sqrt{2}}\} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{+}.$$

图 2(d) 中以较粗黑线段表示了这一点。

也很容易找到区域 $\mathcal{R}_1^+$，其中 $|f'_\pm(\xi)|<1$ 当 $\xi\in B$。利用 (16)，$|f'_\pm(\xi)|=1$ 在$\xi=\frac{r}{4}-\frac{1}{r}$，这要求该值位于 B之外，等价地

$$16-40r^2+5r^4>0 \implies |r|<\sqrt{\tfrac{1}{5}(20-8\sqrt{5})}\approx 0.6498394.$$

请注意，这一段仅比对应于 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ 的区间短10% 。我们在附录 $\mathcal{R}_2^+$ 中将这项计算扩展，以计算 B；由此得到 $|r|<0.6984177$，现在仅比对应于短约$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ 1%。这些数值与图2(b) 中沿 $c=0$的数值结果一致。对于表 1 （即 $\mathcal{R}_{15}^+$的数值结果）的计算，区间为 $|r|\le 0.7057789$，仅比 0.2% $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ 短。图中的网格大小为 $2.314(10)^{-3}$，因此下一个网格点为 $r=0.70809$，位于 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^+$ 之外；故计算得到的区间是最优的。

4.2 椭圆型情形

当 $0<c<1$ 时，曲线 (9) 是一个以 (10) 为中心的椭圆，并且位于矩形

$$\left[\tfrac{1}{2c}(r-\sqrt{r^2+4c}),\tfrac{1}{2c}(r+\sqrt{r^2+4c})\right]\times\left[-\sqrt{\tfrac{r^2+4c}{4ac}},\sqrt{\tfrac{r^2+4c}{4ac}}\right]. \tag{27}$$

有两种情况需要考虑。首先，若区间 $[-\xi_{max},\xi_{max}]$ (26) 包含椭圆的中心 (10)，即

$$|\xi^o|<\xi_{max}, \tag{28}$$

那么，由于 B 必须包含不动点，(15) 要求椭圆的垂直范围必须是 B 的子集，见图 3(a) 中的示意图。事实上，在这种情况下，我们可以取 (22)，其中 β 等于矩形的顶部 (27)。要求该范围是定义域的真子集，可得条件

$$\beta<\frac{1}{2c}(-|r|+\sqrt{r^2+4c}).$$

经过一些代数运算，可得

$$\left\{(r,c):|r|<\tfrac{2\sqrt{2}}{5},\,\mathcal{C}_1(r)<c<\mathcal{C}_2(r)\right\}\subset\mathcal{R}_A^+, \tag{29}$$

其中 $\mathcal{C}_{1,\ 2}(r)$ 是三次多项式 (25) 的较小两个根。该多项式的判别式 $2^8r^2(r^2+4)^4(8-25r^2)$ 在 $|r|<2\sqrt{2}/5$ 时为正，此时它有三个正实根。这对应于图 2(c) 和 (d) 中的蓝色区域。

当不满足（28）时，由不动点界定的区域不包含椭圆的顶部或底部顶点；因此，f_+ 在集合 $[-\xi_{max},\xi_{max}]$（26）中的斜率始终为正。图3（b）给出了一个例子。对于这种情况，与抛物线情形一样，我们可以在区间（22）内使用 $\beta=\xi_{max}$ $\{0\}\notin f_\pm(B)$，椭圆的水平顶点必须位于 B之外；由此得到条件

$$\frac{-|r|+\sqrt{r^2+4c}}{2c}>\frac{1}{2}(|r|+\sqrt{r^2+4}). \tag{30}$$

进一步进行一些代数运算后，可得到附加区域

$$\left\{(r,c):\tfrac{2}{\sqrt{15}}<|r|<\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,0<c<1+|r|(|r|-\sqrt{r^2+4})\right\}\subset\mathcal{R}_A^+.$$

在图 2 （c）和（d）中，这一附加部分在 $0<c<1$ 中以紫色标示。反向情形 $\mathcal{R}_A^-$ 将在附录 A中讨论，并对应于图 2（c）和（d）中的棕褐色区域。

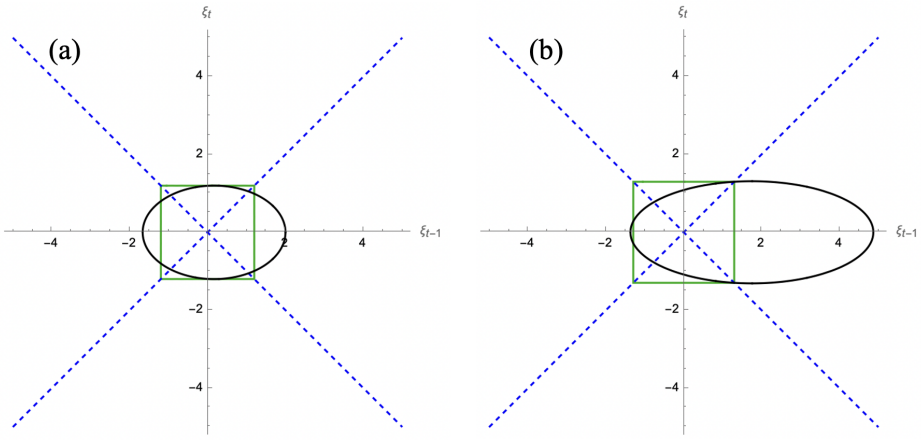

图3： 参数 (a) $(r,\ c) = (0.1,\ 0.3)$ 和 (b) $(r,\ c) = (0.525,\ 0.15)$ 对应的椭圆曲线。方框 B^2 以绿色显示，对角线 $\xi_t = \pm\xi_{t-1}$ 以蓝色虚线显示。

4.3 双曲情形

对于双曲情形 $\Delta < 0$。由于 $a = 1 - c$ 这意味着 $c < 0$ 或 $c > 1$。首先假设

$$c < -\frac{r^2}{4}, \tag{31}$$

于是，双曲线的各分支是定义在 ξ_{t-1}上的函数图像，见图 4(a) 中的示意图。在这种情况下，我们可以取 $B = [-\xi_{max}, \xi_{max}]$，其定义见式（26）。 B 的像于是满足式（15）。这意味着

$$\left\{(r, c) : c < -\frac{r^2}{4}\right\} \subset \mathcal{R}^+_{\mathcal{A}}.$$

该区域在图 2(c) 和 (d) 中以绿色表示。

此外，注意双曲线的渐近线为以下直线

$$\xi_t = \pm\sqrt{\frac{c}{c-1}}\left(\xi_{t-1} - \frac{r}{2c}\right). \tag{32}$$

因此，当 $c < 0$ 时，这些斜率的绝对值小于一。此外，由于式（31）意味着各分支是定义在 ξ_{t-1} 上的函数图像，因此这些斜率界定了 $f_\pm$ 在 B上的斜率。因此，根据引理 1 在 $n = 1$中的结论，只要满足式（31），AI 状态与符号序列之间便存在一一对应关系。

当 $-r^4/4 < c < 0$时，双曲线的分支是关于 ξ_t的函数图像，如图4(b) 所示。在这种情况下，定义域不包含开区间

$$\left(\frac{1}{2c}(r - \sqrt{r^2 + 4c}),\ \frac{1}{2c}(r + \sqrt{r^2 + 4c})\right),$$

位于各顶点之间。此集合必须与 B 不相交，以确保映射 $f_\pm$ 定义良好。根据相同的条件，顶点位于 $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$ 之外（30），这与椭圆情形中的条件相同。这意味着

$$\left\{(r, c) : \tfrac{1}{\sqrt{2}} \le |r| \le \tfrac{2}{\sqrt{3}},\ -\tfrac{r^2}{4} < c < 1 + |r|(|r| - \sqrt{r^2 + 4})\right\} \subset \mathcal{R}^+_{\mathcal{A}}.$$

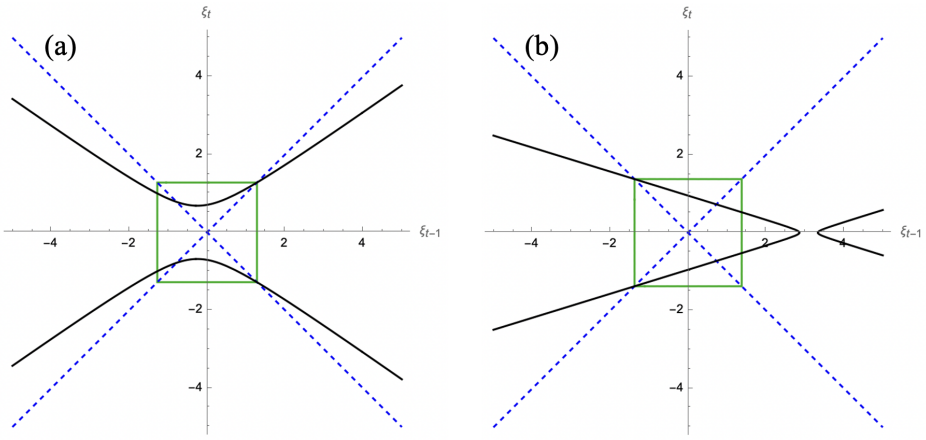

图 4：参数 (a) $(r,\ c) = (0.5,\ -1)$、(b) $(r,\ c) = (-0.65,\ -0.105)$ 的双曲曲线。方框 B^2 以绿色显示，对角线 $\xi_t = \pm\xi_{t-1}$ 以蓝色虚线表示。

该区域在图 $c < 0$ 中以紫色标出，见图 2(a) 和 (d)。

请注意，当 $c > 1$ 时，条件 (30) 永远不会成立；此情形的一个子集变为 $\mathcal{R}_A^-$，并在附录 A 中处理。

5 强收缩情形

当 $\delta = 1$ 时，映射 (1) 保持体积不变；当 $(x,\ y)$ 满足 $\delta = 0$ 时，它投影为二维 Hénon 映射。[3] 本节研究“强收缩情形”下的轨道，令

(SC) Strongly Contracting: $(a, c, \delta) = (1, 0, 0.05)$.

我们此前在 [HM22b] 中研究过 $r = 0$；这对应于 AI 极限 $\alpha \to -\infty$，其中 σ 为有限值。在那里，我们发现了若干周期吸引子，其中许多随着 α 减小而经历周期倍增分岔。我们还发现了具有三维马蹄形结构的混沌吸引子，让人联想到 Hénon吸引子。

在此，我们将这些结果推广，以考察 $r \neq 0$的影响。注意，由于 $a = 1$ 且 $c = 0$，AI 极限处的二次曲线是一条抛物线。当$|r| < 2^{-1/2}$时，§4.1 的结果表明，在这种情况下，符号序列与 AI 状态之间存在一一对应关系。

图 5 展示了 (SC) 在 (α, r) 区域内的吸引子的特征。在假设 $\alpha < 0$ 的前提下，令 $\sigma = r\varepsilon^{-1} = r\sqrt{-\alpha}$，对差分方程 (3) 进行迭代即可得到这些特征。对于 1500^2 网格上的每个 (α, r)，我们选择初始点 $(x_0, x_{-1}, x_{-2}) = (x_-, x_-, x_-) + (0.001, 0, 0)$，其中

$$x_- = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sigma - \delta - \sqrt{(1 + \sigma - \delta)^2 - 4\alpha}\right),$$

[3] 例如，经典的 Hénon吸引子出现在$(\alpha,\ \sigma,\ \delta) = (-1.4,\ -0.3,\ 0)$时，或等价地，$(\varepsilon,\ r) \approx (0.84515,\ -0.2535)$ [HM22b，附录]。

是 (3) 的一个不动点。对该点向前迭代 $T = 5000$ 次以消除暂态。如果存在某个 $t \le T$, $|x_t| > \kappa_{max}$[4]，对于图 $\kappa_{max} = 3.26724$ 中的 5(a)，以及$\kappa_{max} = 2.28343$ 图 5(b) 中的情况，则判定轨道发散。图 5中以白色标出这些发散情形。若轨道保持有界，则通过最多再迭代90 步并检查是否近返回来检测低周期：近似周期 p是满足以下条件的最小时间

$$\|x_{T+p} - x_T\| < 10^{-4}.$$

具有这些周期的轨道按照图中所示的颜色映射着色。5。对于其余参数值，我们按照 [HM22a]中所述，通过计算近似最大李雅普诺夫指数，将轨道标记为规则（黑色）或混沌（灰色）。因此，图 5 中的颜色表示每个（α， r）对应的预期吸引子类型。

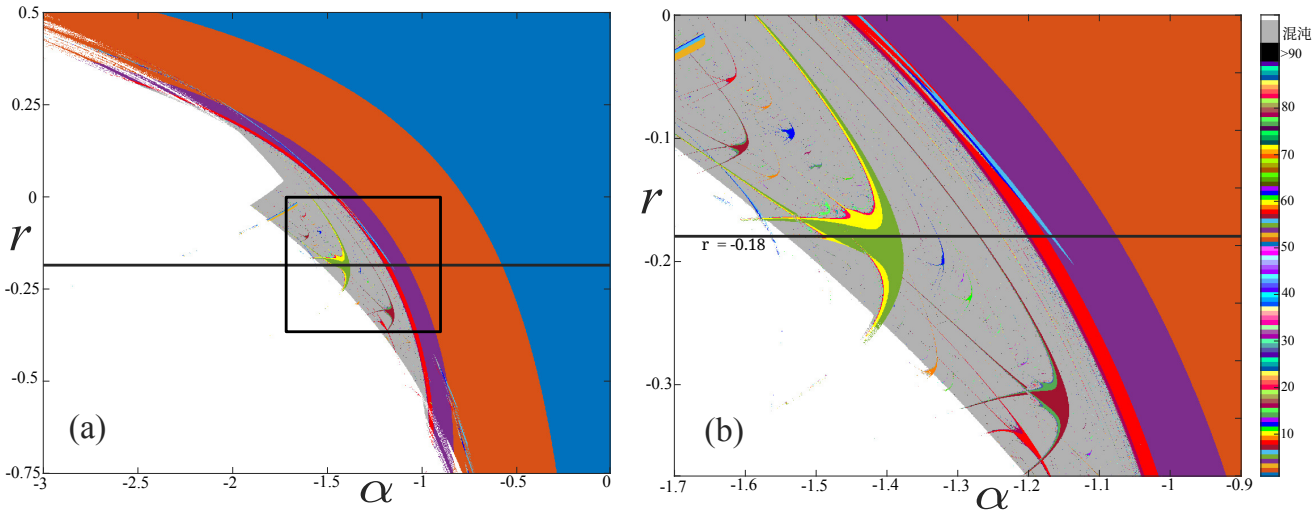

图5： （a）映射1）在参数（SC）对应的强收缩情形下的有界、周期性和混沌轨道。颜色刻度表示周期，混沌轨道以灰色表示，无界轨道以白色表示。如果轨道有界且非混沌，但无法判定其周期至多为90，则该点标为黑色。图中还标出了位于 $r = -0.18$处的线段。（b）放大图（a）中方框所示的区域，可见五周期虾状结构。

请注意，由于我们只研究一个初始条件，因此无法排除多个吸引子的出现，也无法排除在图中“无界”区域内、从其他初始点出发时可能出现的吸引子。事实上，图6展示了与图5（a）相同的参数范围，但此处选取的初始点为（x_0， x_{-1}， x_{-2}） = （0。0125839，0。677585， -1.25765）。请注意，与图 $r > 0$ 以及α 较小的情形相比，图5中稳定不动点及其倍周期序列显著缺失。此外，还出现了一个新的稳定区域（金色），对应一个周期3 吸引子，并伴有一个小型倍周期级联，周期依次为6和12。

图 5(a) 显示了范围 $(\alpha,\ r) \in [-3, 0] \times [-0.75, 0.5]$。不动点 x_- 在“深蓝色”区域内稳定，并沿曲线发生倍周期分岔

$$(3r^2 - 4)^2\alpha^2 + 2\left((5\delta^2 + 6\delta + 9)r^2 - 4\delta^2 + 8\delta + 12\right)\alpha + (\delta + 1)^2(\delta - 3)^2 = 0, \qquad (33)$$

[4]在 [HM22a], 中证明了，所有有界轨道都位于集合 $|x| < \kappa$ 中，其中给定 $\kappa > 0$ 取决于映射参数。我们令 κ_{max} 为所研究参数范围内 κ 的最大值。

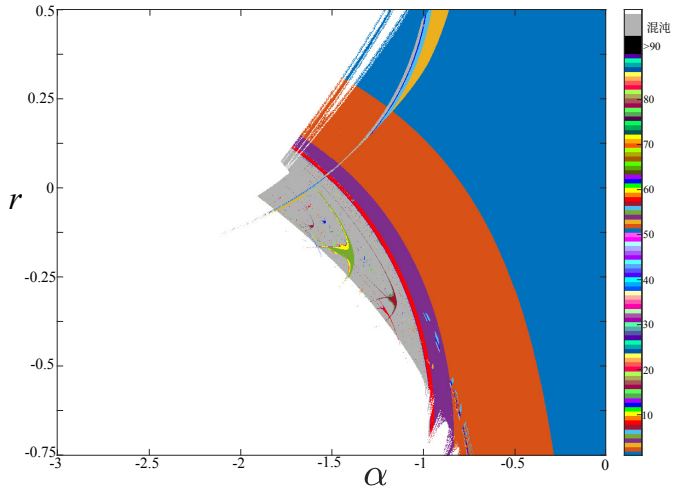

图6： 情形 (SC) 在与图 5（a）相同参数范围内的有界、周期性和混沌轨道，但采用了不同的初始条件。图 5（a）中未显示的金色新区域是周期3吸引区域，表明可能存在多个吸引子。

变为稳定的周期二轨道（鲜橙色）。随着 α 逐渐减小，后续的倍周期分岔产生周期四轨道（洋红色）和周期八轨道（红色）。

图 5（a）中的方框区域放大后如图 5（b）所示，参数为 $(\alpha,\ r) \in [-1.7, -0.9] \times [-0.375, 0]$。该区域的显著特征是共振“虾形”结构，包括周期五（深绿色）和周期七（深红色）情形。虾形结构是一种余维二结构，在二维映射和一维映射的二参数族中已得到广泛研究 [Gal94、MT87、FOG13]。在周期n 虾形结构中，存在一个吸引的周期n 轨道及其对应的周期n 鞍点。虾形结构的“头部”对应一对鞍结分岔曲线，“尾部”对应一系列倍周期分岔。虾形结构的内骨架靠近雅可比矩阵的迹为零的曲线 [FOG13]。如图所示，虾形结构在“混沌之海”中游弋。

为了更详细地研究分岔，我们设 $r = -0.18$，如图 5 中的线段所示。该线段在 $\alpha = -1.541$ 进入有界轨道区域，在 $-1.480 \le \alpha \le -1.381$ 穿过深绿色的五周期虾形区域，并在 $\alpha = -1.2031$ 进入不动点的倍周期级联。在以下小节中，我们将沿着这条线，使用附录 C 中讨论的数值延拓算法，从 $\varepsilon = 0$ 延拓周期轨道。

5.1 低周期轨道与倍周期分岔级联

周期为 $p \le 6$ 的可能周期符号序列有 23 个。请注意，根据 §4.1，对于 (SC) 的情况，当 $|r| < 2^{-1/2}$ 时，符号序列与 AI 状态一一对应。从区间 B 中任意一点开始迭代，都可以轻松找到 AI 状态，因为映射 f_s (12) 在这种情况下是压缩映射。本节将继续追踪这些 AI 状态，直到 $r = -0.18$。

我们预计至少有一个周期n AI 状态会延续到 α 存在稳定周期n 轨道的区域，如图 5所示。这与提出的“无气泡”猜想相一致

在 [SDM99]中：映射的每条轨道都与 AI 极限连续相连。由于图 5 中的吸引子是在特定初始条件下找到的，因此 AI 状态当然可能延续到图中所示 α 范围之外：可能存在多个吸引子，其吸引域可能包含也可能不包含我们选定的初始点。

周期不超过 $p = 5$ 的轨道延拓结果显示在分岔图中，并投影到 ξ_t轴上，如图7(a) 所示，每个周期轨道都以其符号序列标记，并列于图例中。注意，不动点 $\{\pm\}^\infty$ 在图中所示的整个 ε 范围内延伸，但所有更高周期的轨道都被 $\varepsilon = 1.4$摧毁；最后观测到的分岔是反向倍周期分岔，它在周期二轨道 $\{-+\}^\infty$ 与 $\{-\}^\infty$碰撞时将其摧毁。请注意，AI 状态本身，即位于 $\varepsilon = 0$ 处的轨道，都落在一个有限点集或某种类康托集上，这与上文讨论的猜想2 的直觉相符。

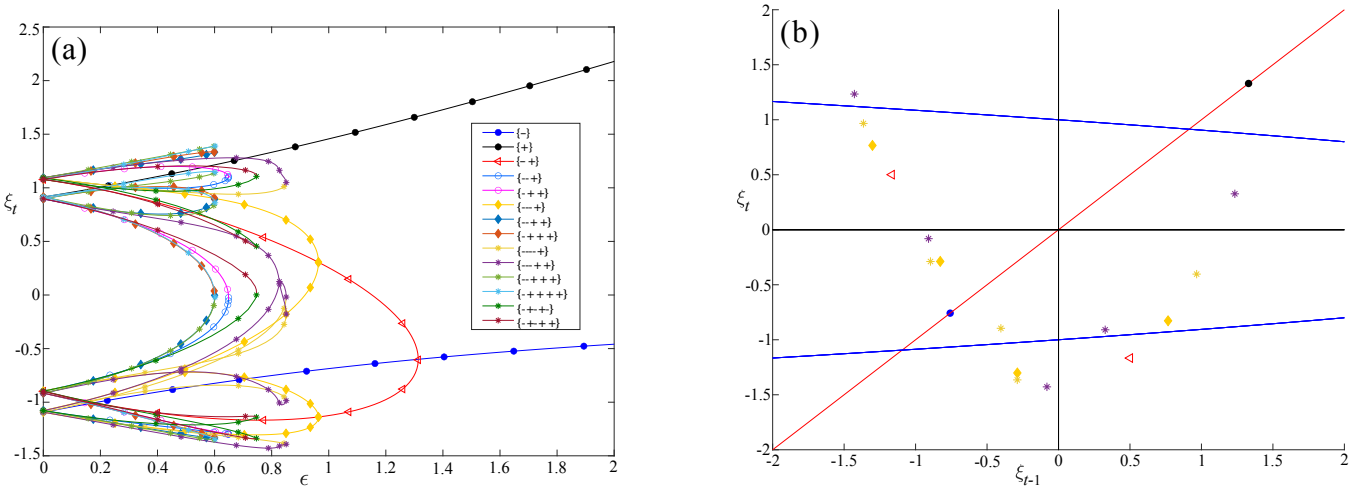

图 7： （a）情形（SC）沿着 $r = -0.18$的低周期轨道分岔图，周期最长为周期五。（b）将（a）中的轨道投影到二维平面，所取延拓步最接近 $\varepsilon = 0.8$。轨道所用符号与（a）相同。图中还包括 AI 极限曲线（9）（蓝色），在此情形下它是一条抛物线；以及作为参照的对角线（红色）。

通过这一过程找到的倍周期分岔和鞍结分岔汇总于表2。表的第四列给出了延拓算法估算的分岔值，精确到5位数字。利用（33）进行解析计算可知，当 $r = -0.18$ 时，不动点在 $\alpha_{PD} = -0.579494815477836$处倍增。计算继续到 $\alpha = -0.5794956$，两者相差$8(10)^{-7}$。由于延拓算法中没有采用分岔检测判据，我们不指望这些值具有很高的精度。此外，使用乘子检测分岔可能存在问题，对于 $\delta = 0.05$而言尤其如此：由于（1）线性化的乘积等于其雅可比矩阵的行列式，因此对于周期为n 的轨道， $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \delta^n$。要实现此类检测判据以计算 $\lambda = 1$ 或 -1，需要进行高精度计算，因为 n 会不断增大。

注意，在表 2所示的每种情况下，余维一分岔都发生在仅有一个符号不同的轨道之间。这与我们此前在 [HM22b]中提出的猜想一致。

两个周期三轨道都在图中有界吸引子的出现点以下被鞍结分岔摧毁。5，位于 $(\alpha, r) = (-1.541, -0.18)$。这与沿直线 $r = -0.18$不存在周期三吸引子这一事实相符。三个周期四轨道中有两个同样

父级	Type	子级	ε	α
$\{-\}^\infty$	pd	$\{-+\}^\infty$	1.3136	-0.5795
$\{-+\}^\infty$	pd	$\{---+\}^\infty$	0.9639	-1.0764
$\{-++\}^\infty$	pd	$\{--++-+\}^\infty$	0.6478	-2.3843
$\{---+\}^\infty$	pd	$\{---+-+-+\}^\infty$	0.9220	-1.1763
	sn	$\{-\pm+\}^\infty$	0.6492	-2.3723
	sn	$\{-\pm++\}^\infty$	0.6002	-2.7762
	sn	$\{---\pm+\}^\infty$	0.8510	-1.3808
	sn	$\{-+-+\pm\}^\infty$	0.7473	-1.7908
	sn	$\{-\pm+++\}^\infty$	0.6017	-2.7622
	sn	$\{---\pm-+\}^\infty$	0.9266	-1.1648
	sn	$\{---\pm++\}^\infty$	0.8007	-1.5597
	sn	$\{-+-++\pm\}^\infty$	0.6889	-2.1070
	sn	$\{-\pm+++\}^\infty$	0.6005	-2.7734

表 2：参数 ε 和 $\alpha = -\varepsilon^{-2}$ 对于 （SC）情形下 $r = -0.18$的所有周期不超过六的轨道的倍周期分岔（pd）和鞍结分岔（sn）。第一列和第三列通过符号序列标识轨道。对于鞍结分岔，两个相撞轨道的符号序列并列列出：其中 $\pm$ 标出了唯一不同的符号。

在鞍结分岔中被摧毁，发生于 $\alpha = -2.7762$，此时有界吸引子尚未出现。剩余的周期四轨道 $\{---+\}^\infty$ 在图 5 的洋红色区域内变得稳定，并在 $\{-+\}^\infty$ 轨道于 $\alpha = -1.0764$ 处发生（反向）倍周期分岔时被摧毁。只有两个周期五轨道延续进入有界区域，即 $\{---\pm+\}^\infty$；它们正是在图 5 中构成周期五虾状结构的轨道。吸引轨道的序列为 $\{---++\}^\infty$；另一个轨道 $\{----+\}^\infty$ 则是一个鞍点轨道。这些轨道在该线段于 $\alpha = -1.3808$ 处离开虾状结构时，恰好发生鞍结分岔并相互碰撞。

这对 $\{---\pm-+\}^\infty$六周期轨道延续进入有界轨道区域，并进入不动点的倍周期级联。在图5中可见的窄而浅的蓝色条带内，轨道 $\{---+-+\}^\infty$ 是稳定的。该区域内还有一个吸引的四周期轨道：这是多个吸引子的情形。

如图 5 所示，不动点 $\{-\}^\infty$ 在 α 减小时经历倍周期级联；最初几次倍增对应于表3所示的符号序列。若将序列恰当排序（如表3所示），它们呈现出简单的规律：要得到周期 2^{n+1}的序列，只需将周期为2^n 的序列加倍，并翻转第一个符号。这一规律与[Hao91] 中针对一维映射发现的规律有关。若先将周期-3轨道写成 $(+\,-\,+)$，那么如表 2第三行所示，这一规律似乎也适用于周期-3轨道的倍增。我们已对有限步数验证了这一规律。下文将提出一个正式猜想。

猜想 3。映射 *(1)* 的周期倍增周期轨道之间的符号序列恰有一个不同的符号。以适当方式书写时，倍增轨道的序列只是原轨道序列的重复，且首个符号反转。

在图 7(b) 中，具有 $p \le 5$ 、存在于 $\varepsilon = 0.8$ 处的六条轨道被投影到 (ξ_{t-1}, ξ_t)平面上。对于这些参数，线段 $r = -0.18$ 尚未进入有界吸引子区域

周期	序列
1	$\{-\}^{\infty}$
2	$\{+(-)\}^{\infty}$
4	$\{--(+-)\}^{\infty}$
8	$\{+-+-(--+-)\}^{\infty}$
16	$\{--+---+-(+-+---+-)\}^{\infty}$
32	$\{+-+---+-+-+----+-(--+---+-+-+----+-)\}^{\infty}$

表 3：不动点 ξ_- 倍周期级联的符号序列 .

尽管如此，这幅图表明，低周期轨道似乎描绘出一种马蹄形结构，让人联想到 Hénon吸引子。

5.2 Hénon类吸引子

当 $r = -0.18$时，在 α 位于图 5 的灰色区域、恰好位于五周期虾状结构外侧时，确实可以找到混沌吸引子。其中一个具有 $\alpha = -1.25$ 的吸引子如图 8（a）所示。事实上，这是一个混沌吸引子，因为使用 [HM22a], 中所述的方法，其最大李雅普诺夫指数为1.30116。为了理解该吸引子是如何形成的，我们首先通过迭代吸引子上的点 $(-1.3387,\ -0.2563,\ -0.9553)$，使用映射（1），直到其出现近返回——距离小于 0.005。前面三个这样的近返回周期列于表 4。

周期	返回距离	ε	α
273	$7.96(10)^{-5}$	0.894	-1.250
423	$2.4(10)^{-3}$	0.894	-1.252
1200	$4.0(10)^{-5}$	0.893	-1.255

表4：(α, r) =$(-1.250, -0.18)$ 的混沌吸引子上轨道的近似周期和返回距离。最后两列显示了根据推断出的周期符号序列，从 AI 极限延拓而来的轨道的分岔值。

利用这些轨道，在假设.....的条件下，我们可以构造出相应的符号序列

$$s_t = \text{sign}\,(\xi_t),$$

因为在 AI 极限处需要使用 (12)。因此，每个周期近似都有相应的周期符号序列，我们利用它来寻找 AI 状态。随后，我们再次采用附录C中描述的方法，从 $\varepsilon = 0$ 处向外延拓。这些轨道一直延续到表4第三列所示的 ε 值。这些轨道在各自可达到的最大 ε 值处显示于图 8(b,c,d) 中。对混沌吸引子的周期 273 近似持续时间最长，可达到 $\alpha = -1.250$。另外两个周期近似的延续范围没有这么远，尽管周期 1200 轨道的回归距离更小。图 9 中的六个图窗展示了周期 1200 轨道（黑色）的延拓解如何随 ε 增大，在 $(\xi_{t-1}, \xi_t, \xi_{t+1})$ 空间中演化。同时还显示了通过生成图 5 所用算法检测到的吸引子（蓝色）。在图 9(a) 中，周期 1200 轨道处于 AI 极限；它位于一个类似康托尔集的集合上。在图 9(b,c) 中，ε 尚未进入有界吸引子所在区域，周期 1200 轨道仍在演化，彼此逐渐远离

并形成折叠结构。只有图 9 (d) 展示了延拓后的周期 1200 轨道与一个吸引子共存的情况；它们似乎覆盖同一个不变集。当 ε 稍大一些时，周期 1200 轨道便会被破坏；如图9(e) 所示，吸引子分裂成两个混沌带。实际上，这两个混沌带是从图 (d) 中所见的混沌吸引子“（反向）合并”而来的。随后，这些混沌带经由（反向）倍周期级联而坍缩；图 (f) 中展示了周期二情形。图 9(f)。

供参考，我们给出周期 273 符号序列：

$$\{(-(+-)^4\,-^2\,(+-)^6\,-^2\,(+-)^6\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^3\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^7\,-^2\,(+-)^9\,-^2\,(+-)^2-^2$$
$$(+-)^4\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^2\,-^4+-^3\,(+-)^2\,-^7\,(+-^3)^8(+-)^3\,-^2\,(+-)^5-^2$$
$$(+-)^2\,-^2\,(+-)^3+-^3(+-)^2\,-^2\,(+-)^3\,-^2\,(+-)^5\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^3\,-^2\,(+-)^2\,-^2\,(+-)^5-\}$$

有趣的是，可以看出该轨道的每个子序列都是不动点倍周期级联中的一个序列，即表 3中的一个序列。例如，简写形式下，周期四轨道可表示为 $\{(+-)-^2\}^\infty$ 或 $\{+-^3\}^\infty$，周期八轨道则可表示为 $\{(+-)^3-^2\}^\infty$，依此类推。倍周期级联之后常会出现混沌吸引子，因此，与混沌吸引子相关的符号序列由这类子序列构成，似乎也恰如其分。值得思考的是，我们或许可以在不对 s_t进行形式计算的情况下，预测此类混沌吸引子的符号序列。

6 结论

本文分析了三维二次微分同胚（1）的双参数 AI 极限，扩展了我们此前的单参数结果 [HM22b]。为得到 AI 极限，我们现在假设 α 和 σ 均趋于 ∞，并将比值 $\sigma^2/\alpha = -r^2$ 作为一个附加参数；我们此前的结果假设 σ 保持有限，因此只有单个参数 α 趋于无穷大。在这一新极限下，AI 状态仍由一维对应（9）确定，但新增参数 r 会使二次曲线的中心发生偏移。据我们所知，此前所有关于 AI 极限的研究都只考虑单参数极限。关于不同类别的 AI 极限——即令不同参数趋于无穷大——如何随着参数变化而相互转变，仍有许多值得研究之处。

在 §3中，我们将 [HM22b] 中的一个结果推广到了这种情形，得到了符号序列与 AI 状态一一对应的判据，见引理 1。在 §3.2中，我们找到了数值计算得到的、满足该引理假设的参数区域。我们观察到，这些区域似乎收敛到一个区域 $\mathcal{R}_\mathcal{A}$——该区域由式（15）简单定义，并在 §4中找到——且 可以 通过解析方法得到，参见式（24）。

在 §5 中，我们从一个 AI 状态出发，使用数值延拓获得了当 $\varepsilon = 1/\sqrt{-\alpha}$从零开始增大时，映射（1）的轨道。对于我们研究的情形，$b = c = 0$ 在（1）中，因此得到的微分同胚只有一个二次项——可以将其视为 Hénon 二次映射的三维版本。我们选择了较小的映射的雅可比矩阵，$\delta = 0.05$，使得该映射具有强烈的体积收缩性。因此，该映射与 Hénon 二维映射“接近”。

我们通过考察初始条件在（1）的某个不动点附近时的轨迹，研究了该映射的吸引子。当这条轨迹保持有界时，它可能收敛到周期吸引子或混沌吸引子；图 5 展示了在一系列 α 和 r取值下对这些吸引子的分类。我们还展示了类似的图

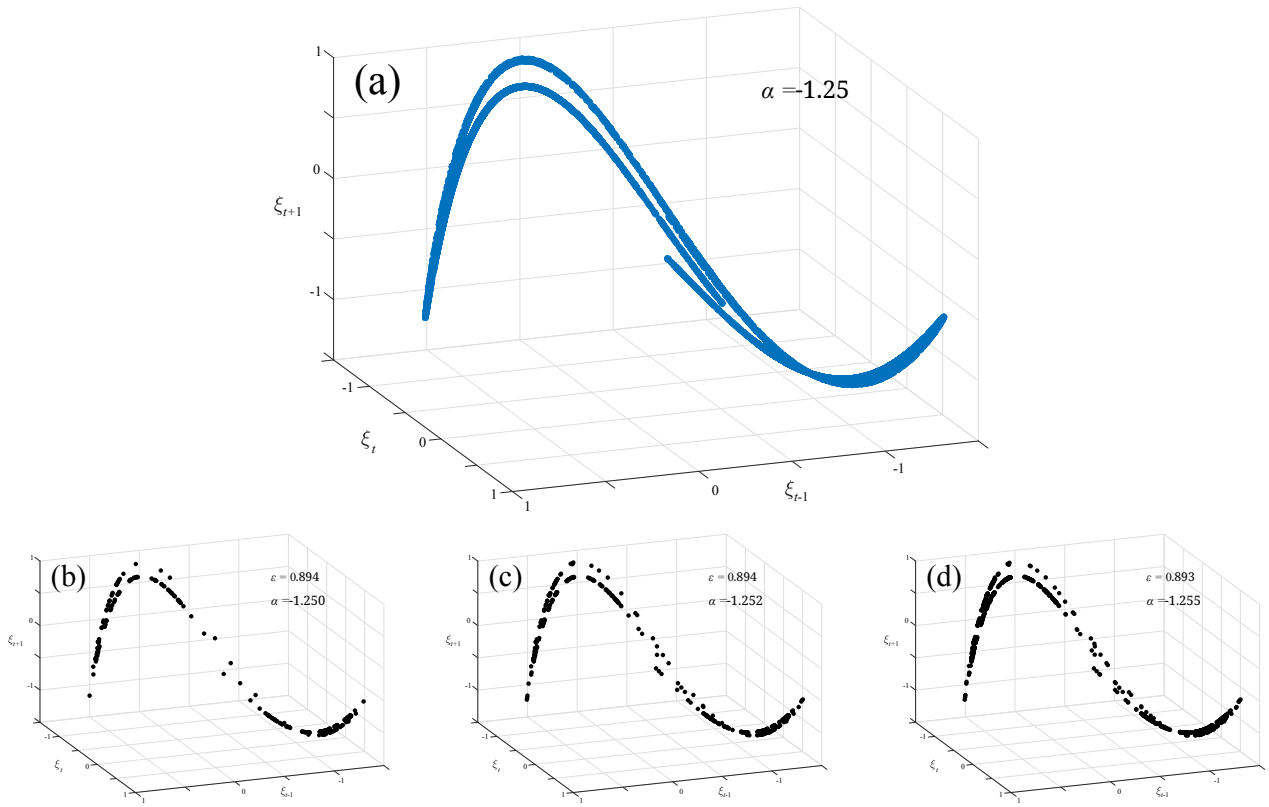

图8：(a) $(\alpha,\ r) = (-1.25,\ -0.18)$ 在重标度空间坐标 $\xi = \varepsilon x$下绘制的混沌吸引子。由混沌吸引子上的近返回得到的周期（b）273、（c）423 和（d）1200 轨道的延拓结果。它们对应于表 4 最后一列给出的 4。

，用于展示 [HM22a]中相关的参数扫描结果。我们观察到，图 5 中“阿诺德舌”内稳定的低周期轨道，对应于与 AI 极限处的轨道相连的轨道。我们追踪了所有周期不超过六的 AI 状态，并在 §5.1 中找到了它们的余维一分岔。这些结果与关于二维亨农映射 [SM98]的“无泡”猜想一致，不过该猜想尚未得到证明。此外，我们观察到，余维一分岔发生在 AI 序列恰好相差一个符号的轨道之间；这与我们在 [HM22b]中的先前结果一致。同样，我们猜想，由倍周期分岔产生的轨道，其符号序列可以通过将母轨道的序列加倍后再翻转恰好一个符号而得到——按适当顺序排列时，翻转的是第一个符号。

我们图5的构造存在一个不足之处，即我们只追踪了单个初始条件的演化过程。然而，对于固定参数，映射（1）当然可能存在多个吸引子。例如，我们观察到了一对从 AI 极限出发追踪的周期六轨道：它们在延拓过程中进入了不动点的倍周期级联，并在某个参数区域内变得稳定，而该区域内还存在一个稳定的周期四轨道。图 6也展示了这一现象，该图采用了不同于图 5（a）中的初始条件，并清楚地展现了不同周期吸引子的存在。可以推测，从反可积极限出发进行延拓，可能是一种寻找多个吸引子及其吸引域较小的吸引子的有效方法，同时也有助于寻找不稳定轨道。我们希望能够

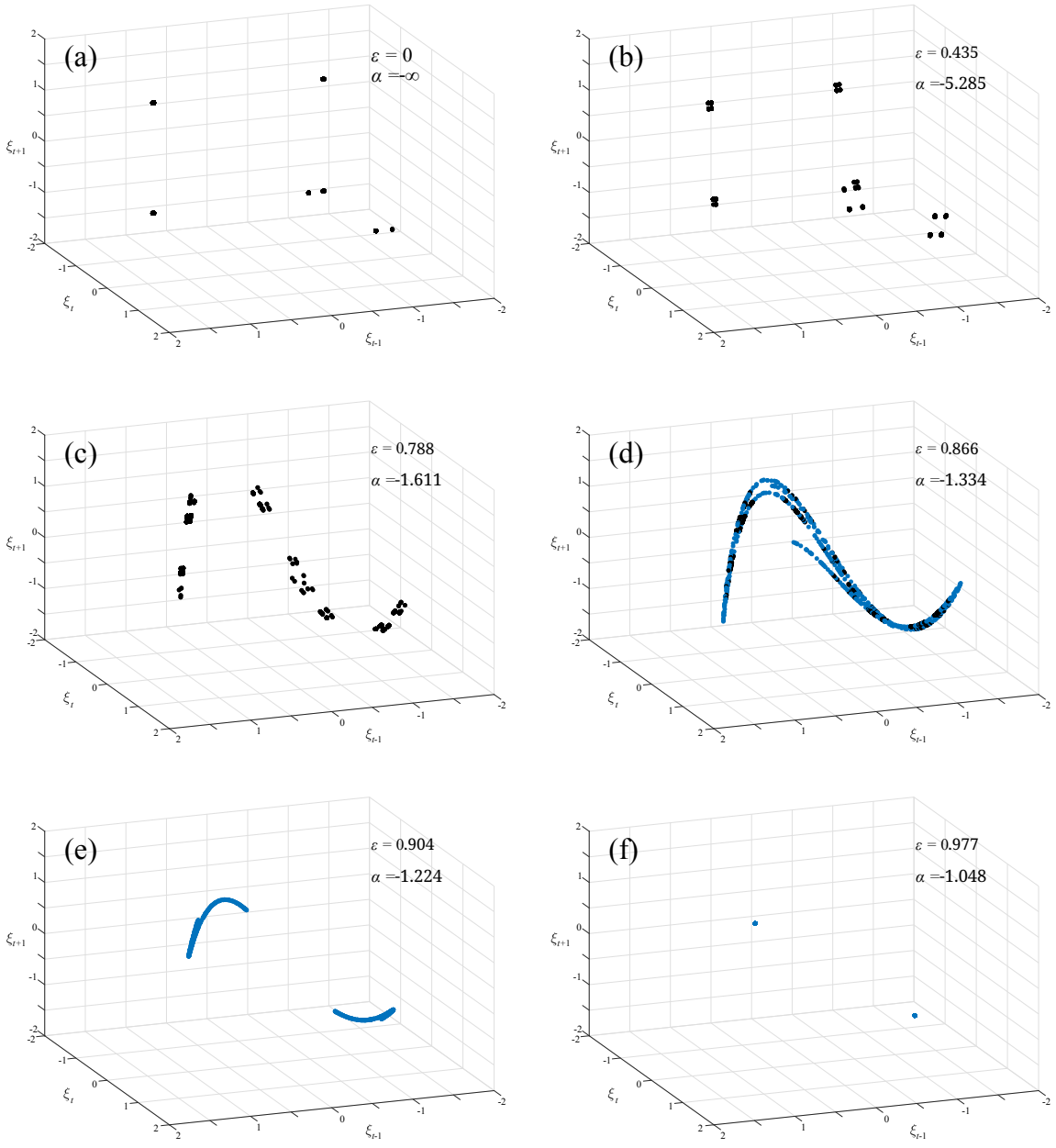

图 9： 周期-1200 轨道在 ε （黑色）下的六个参数值对应的延拓，位于 $(\xi_{t-1}, \xi_t, \xi_{t+1})$空间。还展示了图 5 中有界轨道参数对应的吸引子（蓝色）。(a,b,c) 周期轨道不稳定，随后进入有界轨道区域。(d) 对于 $\varepsilon = 0.866$，周期轨道几乎与一个混沌吸引子重合。(e) 两条混沌带从 (d) 中所示的混沌吸引子反向合并而来。(f) 当 ε 更大时，吸引子经历反向倍周期级联，图中展示了其中两个例子。展示这些结果随 ε 变化的影片可在 此处观看。

未来的研究将探索这种方法，以研究多个吸引子。

注意，尽管我们在图 80 中检测到的轨道周期最长仅为 5，但我们没有找到任何参数值能产生周期更长的吸引周期轨道。这与我们先前工作中一些类似的参数扫描形成对比 [HM22a]。对于这种强收缩情形，我们也没有观察到吸引不变圆——在更大的 δ 中曾观察到这类圆 [HM22b, HM22a]。未来，我们希望进一步研究演化到不变圆的 AI 状态所对应的符号序列。特别值得探究的是，符号与旋转数之间是否存在类似于二维 Hénon 情形中所发现的关系 [DMS05]。类似地，对于保体积情形，可以探讨符号与不变环面的旋转向量之间是否存在对应关系。

逆向映射

这里我们com pute 区域 $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{-}$，满足 §4中的条件 (15，适用于反向 AI 映射 (21).

首先假设 $\Delta = -4ac = 0$。对于特殊情况 $c = 0$，逆向映射化简为 $\xi_{t-1} = \frac{1}{r}(\xi_t^2 - 1)$，这是一个简单的确定性一维映射:-不存在非平凡的 AI 极限。因此，当$\Delta = 0$时，只有 $1 - c = a = 0$这一情况，其中曲线（9）是一对平行直线,

$$\xi_{t-1} = -\tfrac{1}{2}(r + s_t\sqrt{r^2+4}),$$

给出了一个非平凡的 AI 极限。在这种情况下，我们的论证确实适用，采用 B (22) 和 $\beta = \xi_{max}$ (26)。这意味着

$$\{(r,c) : c = 1\} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{-},$$

如图中红线所示 2(c)。

对于椭圆， $\Delta < 0$，映射 $g_{\pm}$ 的定义域由矩形的垂直边界（27）给出，值域则由其水平边界给出。因此，为满足 $g_{s_t}(B) \subset B$，我们令 $\beta = \frac{1}{2c}(|r| + \sqrt{r^2+4c})$并要求

$$\beta < \sqrt{\frac{r^2+4c}{4ac}}.$$

满足这一条件的参数区域为

$$\{(r,c) : \mathcal{C}_3(r) < c < 1\},$$

where $\mathcal{C}_3$ （25）的最大根。这是图2（c）和（d）中的棕褐色区域 .

双曲型情形下， $\Delta > 0$ 情形需要多做一些推导，因为反向 $\pm$ 映射不再具有正向映射的上下反射对称性。尽管如此，我们仍可取 $B = [-\xi_{max}, \xi_{max}]$。为了使映射 $g_{\pm}$ 定义良好且产生不同的轨道，（21）的被开方数必须为正，

$$r^2 + 4c - 4ac\xi_t^2 > 0.$$

当 $c > 1$时，因此 $a = 1 - c < 0$，这一条件总是成立。注意，当 $c > 1$时，将双曲线（32）的渐近线视为 ξ_{t-1} 关于 ξ_t的函数时，其斜率小于 1。因此 g_{s_t} 在 B上是压缩映射。这意味着

$$\{(r,c) : c > 1\} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{-},$$

如图2（c）和（d）中的红色所示。

B 抛物型情形：两次迭代

对于 $n = 2$ 的情况，我们要求 $\|D\mathcal{F}^2\|_{\infty} < 1$。这必然会产生一个更大的参数区间，$\mathcal{R}_2^{+} \supset \mathcal{R}_1^{+}$，因为即使其中一个斜率大于 1，两个斜率的乘积仍可能小于 1。复合映射

$$f_{s_{t+1}}(f_{s_t}(\xi_{t-1})) = s_{t+1}\sqrt{rs_t\sqrt{r\xi_{t-1}+1}+1},$$

具有导数

$$f'_{s_{t+1}}(f_{s_t}(\xi_{t-1}))f'_{s_t}(\xi_{t-1}) = \frac{s_t s_{t+1} r^2}{4\sqrt{(rs_t\sqrt{r\xi_{t-1}+1}+1)(r\xi_{t-1}+1)}}. \tag{34}$$

当 ξ 是三次多项式的一个根时，其模长为 1。

$$P_P(\xi_{t-1}) = 256r^5\xi_{t-1}^3 + 256r^2(3r^2-1)\xi_{t-1}^2 + 32r(r^4+24r^2-16)\xi_{t-1} - r^8 + 32r^4 + 256r^2 - 256$$

注意，该多项式的判别式 $2^{16}r^{20}(64-27r^6)$在区间$|r| < \frac{1}{\sqrt{2}}$上始终为正；因此， P_P的三个根均为实数。因此，为了使导数（34）的绝对值小于 1，这些根必须位于 B之外。通过数值计算，可得如下界限

$$|r| \lesssim 0.6984177,$$

这仅比 $n = 1$的情况略有改善。

C 延拓算法

利用压缩论证可以证明，远离 AI 极限时 AI 状态的持久性[SM98，HM22b]。对于（1）的周期轨道，可以采用直接的数值延拓方法。该延拓算法基于对差分方程（6）进行重新表述，以便采用预测-校正方法。一个周期为n 的轨道，即一个序列

$$\xi \in \{\xi \in \mathbb{R}^\infty \mid \xi_{t+n} \equiv \xi_t,\ \forall t \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{R}^n,$$

必须是函数 $\mathcal{G}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 的零点，由其定义为

$$\mathcal{G}(\xi,\varepsilon) = \left(\mathcal{L}_\varepsilon(\xi_1,\xi_0,\xi_{n-1},\xi_{n-2}), \mathcal{L}_\varepsilon(\xi_2,\xi_1,\xi_0,\xi_{n-1}), \ldots, \mathcal{L}_\varepsilon(\xi_0,\xi_{n-1},\xi_{n-2},\xi_{n-3})\right).$$

我们使用标准的伪弧长延拓算法 [KOGV07，第 1.2 节，3]，以求得解曲线的离散化， $\mathcal{G}(\xi,\varepsilon) = 0$，取离散点 $(\xi^k,\varepsilon^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$，其中 $k = 0,\ 1, \ldots$。

给定索引 k 处的预设解 (ξ^k,ε^k)，以及目标为找到一个新解 $(\xi^{k+1},\varepsilon^{k+1})$，使其位于与 v^k 正交的超平面上，且距前一个解 ℓ 。因此，要得到 $(\xi^{k+1},\varepsilon^{k+1})$，必须求解以下方程组

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}(\xi^{k+1},\varepsilon^{k+1}) = 0,\\ &\dot{\xi}^k(\xi^{k+1}-\xi^k) + \dot{\varepsilon}^k(\varepsilon^{k+1}-\varepsilon^k) = \ell. \end{aligned} \tag{35}$$

这可以通过迭代完成：从沿着 v^k，$(\xi^{k+1},\varepsilon^{k+1}) = (\xi^k,\varepsilon^k) + \frac{\ell}{\|v^k\|}v^k$的超平面上的点开始，即将其作为初始猜测。随后使用 Broyden 准牛顿方法近似35的雅可比矩阵，并通过35的 QR分解求其逆矩阵 [AG90]。在我们的计算中，当 $\|\mathcal{G}\|_\infty < 10^{-12}$ 或达到预设的最大步数时，Broyden 迭代停止；此处最大步数设为150。

算法以一个 AI 状态初始化，$(\xi^0,\ 0)$，该状态通过针对给定的周期- f_{s_t} (12) 符号序列 s，从随机选择的点 $\xi_0 \in B$开始迭代 n ，然后

持续迭代，直到轨道收敛到容差 10^{-12}。初始向量 $v^0 = (\dot{\xi}^0,\ 0。005)$ 的选取使得 $\dot{\xi}^0$ 满足前 n 行的

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \mathcal{G}(\xi^k, \varepsilon^k) & \partial_\varepsilon \mathcal{G}(\xi^k, \varepsilon^k) \\ \dot{\xi^k}^T & \dot{\varepsilon}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}^{k+1} \\ \dot{\varepsilon}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

随后，通过求解完整方程组（$(\dot{\xi}^{k+1},\ \dot{\varepsilon}^{k+1}$），即可得到每一个新的方向向量，并获得一个归一化切向量。

除了映射参数 $a, c, r,$ 和 δ外，我们还选择一个初始弧长步长 ℓ，它会根据周期 n 和参数值而变化。对于长度小于 10 的周期轨道，我们选择 $\ell = 10^{-2}$。对于更长的轨道，我们选择 $\ell = 10^{-1}$。在延拓过程中，如果解与前一个解的距离大于 0.1（也就是说，解“跳得太远”），则将 ℓ 减半。延拓会一直进行，直到 ε “转向”，即 $\varepsilon^{k+1} < \varepsilon^k$，或者直到 ℓ 小于 10^{-15}。

参考文献

[AA90] S. Aubry 和 G. Abramovici。标准映射中的混沌轨迹、反可积性的概念。Physica D，43:199–219，1990。https://doi.org/10.1016/ 0167-2789(90)90133-A。[AG90] E.L. Allgower 和 K. Georg。数值延拓方法：导论，Computational Mathematcs 第 13 卷。Springer，1990。https://www.springer.com/ gp/book/9783642647642。[Aub95] S.J. Aubry。动力系统与变分问题中的反可积性。Physica D，86:284– 296，1995。https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00109-H。[Che06] Y.C. Chen。通过反可积性构造Smale马蹄。Chaos, Solitons & Fractals，28(2):377–385，2006。https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.050。[CL15] Hung-Ju Chen 和 Ming-Chia Li。差分方程及其多维扰动的符号嵌入稳定性。Journal of Differential Equations，258(3):906–918，2015。https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.10.008。[DLM06] B.-S. Du、M.-C. Li 和 M.I. Malkin。Arneodo-Coullet-Tresser 映射的拓扑马蹄。Regul. Chaotic Dyn.，11(2):181–190，2006。https://doi.org/10.1070/ RD2006v011n02ABEH000344。[DM08] H.R. Dullin 和 J.D. Meiss。无散向量场与保体积映射的幂零正规形。Physica D，237(2):155–166，2008。https://doi.org/10. 1016/j.physd.2007.08.014。[DMS05] H.R. Dullin、J.D. Meiss 和 D. Sterling。旋转轨道的符号编码。SIAM J. Appl. Dyn. Sys.，4:515–562，2005。https://doi.org/10.1137/040612877。

[FOG13] W. Façanha、B. Oldeman 和 L. Glass。二维映射中的分岔结构：虾的内骨架。Physics Letters A，377(18):1264–1268，2013。https: //doi.org/10.1016/j.physleta.2013.03.025。[Gal94] J.A.C. Gallas。剖析虾：若干一维物理模型的结果。Physica A: Statistical Mechanics and its Applications，202(1):196–223，1994。https: //www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437194901740。[GGKS21] S.V. Gonchenko、A. Gonchenko、A. Kazakov 和 E. Samylina。关于离散 Lorenz 型吸引子。Chaos，31(2):023117，2021。https://doi.org/10.1063/5.0037621。[GMO06] S V. Gonchenko、J.D. Meiss 和 I.I. Ovsyannikov。源于同宿分岔的三维 Hénon 映射的混沌动力学。Regul. Chaotic Dyn.，11(2):191–212，2006。https://doi.org/10.1070/RD2006v011n02ABEH000345。[Hao 91] Bai-lin Hao。符号动力学与复杂性刻画。Physica D，51(1- 3):161–176，1991。https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90229-3。[HM22a] A.E. Hampton 和 J. D. Meiss。三维广义 Hénon 映射：分岔与吸引子。Chaos，32(11):113127，2022。https://doi.org/10.1063/5.0103436。[HM22b] A.E. Hampton 和 J.D. Meiss。三维二次映射的反可积性。SIAM J. Appl. Dyn. Sys.，21(1):650–675，2022。https://doi.org/10.1137/ 21M1433289。[JLM08] J. Juang、M.C. Li 和 M.I. Malkin。二维变量中的混沌差分方程及其多维扰动。Nonlinearity，21(5):1019–1040，2008。https: //doi.org/10.1088/0951-7715/21/5/007。[KOGV07] B. Krauskopf、H. Osinga 和 G. Galan-Vioque。动力系统的数值延拓方法。复杂系统理解。Springer，柏林，2007。[LLM99] K.E. Lenz、H.E. Lomelí 和 J.D. Meiss。二次保体积映射：Moser 结果的推广。Regul. Chaotic Dyn.，3:122–130，1999。https: //doi.org/10.1070/RD1998v003n03ABEH000085。[LM98] H.E. Lomelí 和 J.D. Meiss。二次保体积映射。Nonlinearity，11(3):557–574，1998。https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/3/009。[LM06] M.C. Li 和 M.I. Malkin。奇异差分方程扰动的拓扑马蹄。Nonlinearity，19(4):795–811，2006。https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/4/002。[LM10] M.C. Li 和 M.I. Malkin。一维映射双曲集上的熵及其多维扰动的逼近。Regular & Chaotic Dy- namics，15(2-3):210–221，2010。https://doi.org/10.1134/s1560354710020097。

[MM92] R.S. MacKay 和 J.D. Meiss。辛映射在反可积极限附近的 Cantori。*Nonlinearity*, 5:149–160，1992。 https://doi.org/10.1088/0951-7715/5/1/006。[MT87] R.S. MacKay 和 C. Tresser。为骨架增添血肉：双模态映射的分岔结构。*Physica D*，27:412–422，1987。 https://doi.org/10.1016/0167-2789(87)90040-6。[SDM99] D. Sterling、H.R. Dullin 和 J. D. Meiss。Hénon 映射的同宿分岔。*Physica D*，134(2):153–184，1999。 https://doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00125-6。[SM98] D. Sterling 和 J.D. Meiss。使用反可积极限计算周期轨道。*Phys. Lett. A*，241(1/2):46–52，1998。 https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00094-2。