arXiv:2305.06316v1 [math.GT] 10 May 2023

群 Γ_n^4、辫与 3-流形

V.O.Manturov*，I.M.Nikonov

2023年4月

摘要

我们引入了一族群 Γ_n^k，其参数为整数 $n > k.$。这些群源于关于 2-曲面上辫群的讨论。另一方面，它们被发现与 3-流形（尤其是，它们带来了辫与流形之间的新联系）、三角剖分（理想三角剖分）、簇代数、运动点的动力学、箭图、双曲结构、热带几何，以及可能还有许多尚待发现的领域有关。

关于群 Γ_n^4 如此重要的几个关键原因，我们提到了托勒密关系、五边形关系、簇代数和斯塔谢夫多面体。

关键词：德劳内三角剖分、辫、3-流形、图拉耶夫–维罗不变量、重耦理论、脊

MSC 2020：20F36，57K20，57K31，13F60

1 引言

在 [7], 中，作者引入了一族由整数参数 $n > 5$决定的群 Γ_n^4。这些群借助沃罗诺伊镶嵌和德劳内三角剖分，自然地描述平面（或二维曲面）上点的运动。当点经过非一般位置时刻， Γ_n^k 的生成元便会出现：它们对应于三角剖分的翻转（图 1）。

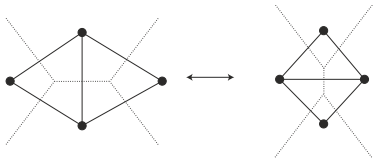


图 1：一次翻转

*本文是与 L.H.Kauffman、E.A.Mudraya 和 N.D.Shaposhnik 讨论的成果。我由衷感谢他们为本文撰写了部分内容。

群 Γ 的关系经过精心安排，使得同痕的辫对应群中的相同元素 Γ。换句话说，存在一个从 n 股纯辫群到群 Γ_n^4 的同态。映射 $PB_n \to \Gamma_n^4$ 的核似乎由整圈扭转（纯辫群的中心）构成，参见 [15]。然而，这个映射远非满射： Γ 字母表中有许多词并非源自任何辫。深入理解群 Γ_n^4 的完整内涵（尤其是拓扑方面）是一项专门的研究课题。

在 [12], 中，通过 Γ 得到一些辫群的表示。

群 Γ_n^4 最有趣的关系是五边形关系。图形上如图 3 右图所示。这个关系表示，可以对五边形的某个给定三角剖分连续进行五次翻转，并回到初始三角剖分。

五边形关系在数学的各个分支中以不同的名称出现。这里只列举其中几个: 簇代数、多面体的三角剖分、*Teichm¨uller* 空间、结合子（*Stasheff* 多面体）、关于 3-流形的重耦合理论 （即 Biedenharn–Elliot 恒等式）。

这自然表明，数学的所有这些分支都应当彼此相关。其中一些确实存在联系：例如，在 [5], 中，作者发现了二维曲面的可能三角剖分、簇代数以及..... 之间极其深刻的联系。参见图 2。

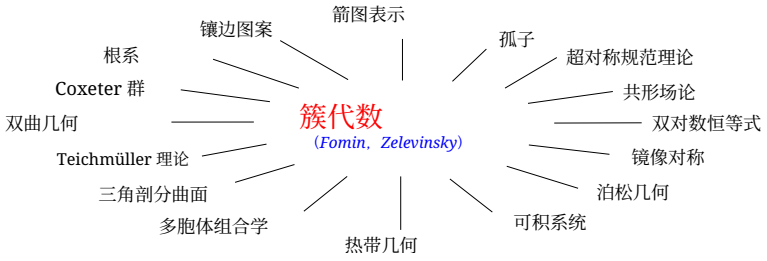


图 2：簇代数的关联与应用 [1]

然而，作者似乎忽略了群结构。一旦得到这种群结构，就能立即获得辫的不变量，如[12]所示。因此，上述列出的所有结构都可能与辫群有关（不仅是平面上的经典辫群，也包括 2-曲面上的辫群）。

一个例外是与簇代数及 *Teichm¨uller* 空间相关的群胚结构 [2] 。这种关联似乎相当自然，因为 Teichm¨uller 空间与映射类群和辫群有关。辫群与这些群胚之间的关系将在别处讨论。

另一方面，从低维拓扑学家的角度来看，值得一提的是，在研究三维流形不变量（Turaev–Viro不变量 [17, 18]）时，或多或少相同的方程会以另一种形式（实际上是张量形式）出现。

本文的目的是在上述各主题之间建立更深层次的联系。

我们将更详细地介绍以下两个具体应用：

1. 如何运用重耦理论（此前曾用于构造 3-流形不变量 [6]）来获得辫的不变量。这项研究的一小部分曾在 [16] 中作过概述。2. 如何运用辫不变量的构造方法，获得类似 Turaev–Viro 的 3-流形不变量。

当然，我们并不打算在这篇论文中涵盖所有可能的关系。特别是，我们不讨论高阶群 $\Gamma_n^k,\ k \geq 5$；I.M. Nikonov 在著作 [12] 中介绍了这些群。这些群描述了高维流形的三角剖分；同样，从其他视角也能发现类似的结构，而且许多深入而严谨的论文也同样忽视了群结构。

本文安排如下。第 2 节定义这些群 Γ_n^4，第 3 节介绍从辫群到 Γ_n^4 的同态。第 4 节回顾托勒密关系。第 6 节介绍由重耦理论得到的辫不变量。第 7 节回顾 3- 流形的特殊脊。第 10 节介绍基于托勒密关系的 3- 流形不变量。第 12 节讨论这些群 Γ 可能的进一步应用，并以此作为全文的结论。

致谢

我们衷心感谢 Louis H.Kauffman、Vladimir G.Turaev、Victor M.Buchstaber、Elizaveta A.Mudraya、Nikita D.Shaposhnik 和 Zheyan Wan 与我们进行了各种富有启发性的讨论。

Igor G.Korepanov 向第一作者指出了五边形方程的一些关系（这些关系也能导出各种辫群的表示）。我们衷心感谢他指出这些关系，也感谢第一作者在共同开展这项研究时与他分享的乐趣。Korepanov 的文章 [9, 10, 11] 应能为群Γ_n^k （不只是 Γ_n^4）带来许多进一步的深刻联系；这些结果将在别处发表。

2 群 Γ_n^4

群 Γ_n^4 是在 [7, 12, 13, 14]中引入的，旨在为具有固定顶点数的三角剖分空间提供一种代数描述。

定义 1. 群 Γ_n^4 由生成元 $\{d_{(ijkl)} \mid \{i,j,k,l\} \subset \bar{n}, |\{i,j,k,l\}| = 4\}$ 及以下关系给出：

1. $d_{(ijkl)}^2 = 1$ 对于 (i,j,k,l)，$\subset \bar{n}$，2. $d_{(ijkl)} d_{(stuv)} = d_{(stuv)} d_{(ijkl)}$，对于 $|\{i,j,k,l\} \cap \{s,t,u,v\}| < 3$，

3. $d_{(ijkl)}d_{(ijlm)}d_{(jklm)}d_{(ijkm)}d_{(iklm)} = 1$ 对于互不相同的 i, j, k, l, m。

4. 对于不同的 i、j、k、l。

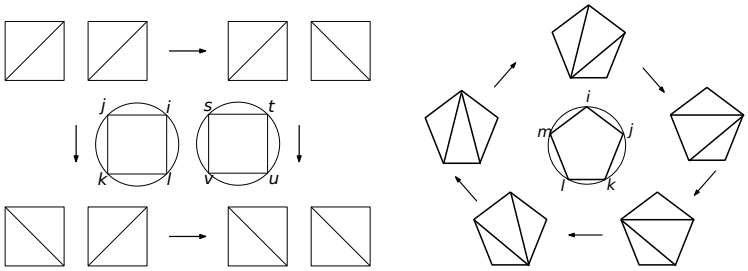


图 3：对应于 Γ_n^4 中关系的翻转序列

2.1 dogroups Γ 从何而来?

我们考虑一条辫：n 个两两不同的点在平面（或二维曲面）上移动。它们形成 Voronoï 镶嵌及其对偶德劳内三角剖分；随着它们一般性地移动，会经历翻转，我们将对应于这些翻转的生成元写下来。因此，对每条一般性辫，我们都能得到一个词。

来自群 Γ 的关系规定，同位的辫对应相等的字。

已知事实：五边形关系在带标记的三角剖分上产生辫群作用。（每条边都由一个 Laurent 多项式标记。正如我们将看到的，群 Γ 导出三维流形的不变量。

以及用于构造 3-流形不变量的技巧，可以导出 Γ 的有限维表示。

3 从纯辫群到 Γ_n^4 的映射

在本节中，我们描述从纯辫群 PB_n 到 Γ_n^4 [7] 的群同态 f_n。其拓扑背景非常简单：我们考虑与生成元（翻转）相对应的余维 1“墙”，以及群 Γ 的余维 2 关系。在此基础上，我们构造一个定义在生成元层面上的映射。

让我们使用记号 $\bar{n} := \{1, \cdots n\}$。

定义 2。 n 股纯辫群 PB_n 是由 $\{b_{ij} | i, j \in \bar{n}, i < j\}$ 生成并满足以下关系的群表示：

1. $b_{ij}b_{kl} = b_{kl}b_{ij}$ 对于 $i,\ j,\ k,\ l \in \bar{n}$ 使得 $i < j < k < l$ 或 $i < k < l < j$;

2. $b_{ij}b_{ik}b_{jk} = b_{ik}b_{jk}b_{ij} = b_{jk}b_{ij}b_{ik}$ 对于 $i, j, k \in \bar{n}$ 使得 $i < j < k$;

3. $b_{ik}b_{jk}b_{jl}b_{jk} = b_{jk}b_{jl}b_{jk}b_{ik}$ 对于 $i,\ j,\ k,\ l \in \bar{n}$ 使得 $i < j < k < l$。

映射 $f_n : PB_n \to \Gamma_n^4$ 可表述如下：记

$$d_{\{p,q,(r,s)_s\}} = \begin{cases} d_{(pqrs)} & \text{if } p < q < s, \\ d_{(prsq)} & \text{if } p < s < q, \\ d_{(rspq)} & \text{if } s < p < q, \\ d_{(qprs)} & \text{if } q < p < s, \\ d_{(qrsp)} & \text{if } q < s < p, \\ d_{(rsqp)} & \text{if } s < q < p. \end{cases}$$

注释 1. 注意，生成元 $d_{\{p,q,(r,s)_s\}}$ 对应四个点P_p，P_q，P_r，P_s 它们按照p，q，s的顺序位于一个圆上，并且点 P_r靠近 P_s，使得从 P_r到 P_s的方向为逆时针方向，见图 4。$(r,\ s)_s$ 的下标 s 表示点 P_s 不移动，而点 P_r 在此之后将绕点 P_s 转动。换言之，当我们使用记号$d_{\{p,q,(r,s)_s\}}$时，我们指的是点 P_r "移动"到靠近点 P_s的位置，并绕着 P_s转动。我们想强调的是

$d_{\{p,q,(r,s)_s\}} \neq d_{\{p,q,(s,r)_s\}}$。

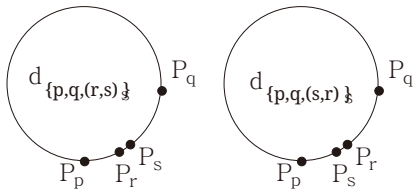


图 4：对于 $p < s < q$、$d_{\{p,q,(r,s)_s\}} = d_{(prsq)}$，但 $d_{\{p,q,(s,r)_s\}} = d_{(psrq)}$。

设 $b_{ij} \in PB_n$、$1 \le i < j \le n$ 为一个生成元。考虑这些元素

$$\gamma^I_{i,(i,j)} = \prod_{p=2}^{j-1}\prod_{q=1}^{p-1} d_{\{p,q,(i,j)_j\}},$$

$$\gamma^{II}_{i,(i,j)} = \prod_{p=1}^{j-1}\prod_{q=1}^{n-j} d_{\{(j-p),(j+p),(i,j)_j\}},$$

$$\gamma^{III}_{i,(i,j)} = \prod_{p=1}^{n-j+1}\prod_{q=0}^{n-p+1} d_{\{(n-p),(n-q),(i,j)_j\}},$$

$$\gamma_{i,(i,j)} = \gamma^{II}_{i,(i,j)}\gamma^{I}_{i,(i,j)}\gamma^{III}_{i,(i,j)}.$$

现在我们定义 $f_n :\ PB_n \to \Gamma_n^4$ 如下

$f_n(b_{ij}) = \gamma_{i,\ (i,(i+1))} \cdots \gamma_{i,\ (i,(j-1))}\gamma_{i,\ (i,j)}\gamma_{i,\ (j,i)}\gamma_i^{-1}{}_{,\ ((j-1)\ i)} \cdots \gamma_i^{-1}{}_{,\ ((i+1)\ i)}$，对于 $1 \le i < j \le n$。

定理 1 （[7]）。 映射 f_n： $PB_n \to \Gamma_n^4$（其定义见上文）是一个定义良好的同态。

4 托勒密关系与五边形关系

对于一个内接四边形，其依次对应的边长为 a、b、c、d，两条对角线为 x、y，则有： $ac + bd = xy$

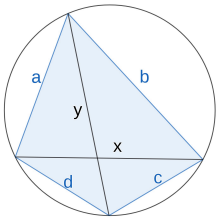


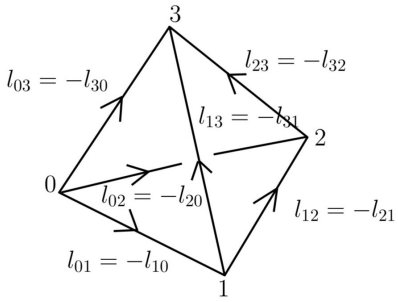
图 5：内接四边形

理解这一关系的另一种方式如下。我们用 1 到 4 的数字为四边形的顶点编号，并将变量x_{ij} 与从 i 指向 j的有向边相关联，因此，与之相对的边被赋予变量$x_{ji} = -x_{ij}$。于是，Ptolemy 关系可以写成：

$$x_{12}x_{34} + x_{23}x_{14} + x_{13}x_{42} = 0. \tag{1}$$

该方程在指标（1,2, 3, 4）的置换下保持不变，因此它对于自相交四边形也成立。

带符号的托勒密关系



$$l_{02}l_{13} = l_{03}l_{12} + l_{01}l_{23}$$

图 6：内接四边形

该标记对应一条有向边。反转这条边会改变标记的符号。

如上所定义的“定向”托勒密关系在指标 1,2,3, 4 的任意排列下均保持不变。

5 五边形关系

一个没有额外点的五边形恰好有五种三角剖分。
这些三角剖分各自包含两条互不相交（相邻）的对角线。

对于每个三角剖分，都可以翻转其中一条所讨论的对角线。
连续进行五次翻转后，我们回到初始位置。
因此，从示意上看，五边形关系如下所示。
这一关系早已为簇代数领域的专家所知 [3, 4]。
对我们而言，它是群 Γ_n^4 中的主要关系。
从辫群的角度来看，这个关系的几何意义如下:

我们考虑五个几乎位于同一个圆上的点。德劳内三角剖分由三个三角形组成，它们铺满了这个五边形。
当我们稍微移动这些点时，德劳内三角剖分会连续经历五次翻转；由于这一过程中没有辫操作，由这些翻转的乘积表示的群元素 Γ 必定是平凡的。

6 重耦理论

重耦合理论的本质 [6, 8]如下。
我们在平面或二维曲面上绘制三价图，并用整数标记其边的标签。

每当我们看到数字 k 时，都可以认为这条边上有一束 k 条平行的线。每条线在每个顶点处都会向右或向左转（图 7）。

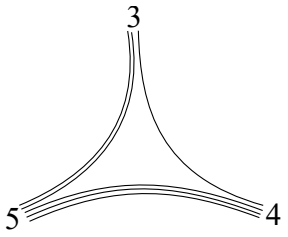


图 7：顶点处的线股

由此自然得到两个条件：奇偶性条件和三角不等式。

此外，固定一个整数 $r \geq 3$，并将讨论范围限制在这样的情形：对于连接到同一顶点的三条边，其股数 $f(a)$ $f(b)$ $f(c)$ 满足 $f(a)+f(b)+f(c) \leq 2r$。由此引出**可容许着色**（*admissible colouring*）的概念。

随着时间 t 推移，树会经历翻转。

固定一个整数 $r \geq 3$。记 $q = e^{\frac{i\pi}{r}} \in \mathbb{C}$。对于任意正则值 t，考虑德劳内三角剖分 $G(t)$ 的边的可容许着色集合 $F_r(t) = F_r(G(t))$，即映射 $f\colon E(G(t)) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，满足对于 $G(t)$ 中任意一个边为 a, b, c 的三角形，有

1. $f(a) + f(b) + f(c)$ is even;
2. $f(a) + f(b) \geq f(c)$, $f(a) + f(c) \geq f(b)$, $f(b) + f(c) \geq f(a)$;
3. $f(a) + f(b) + f(c) \leq 2r - 4$.

设 $V_r(t)$ 是以 $F_r(t)$ 为基的线性空间。

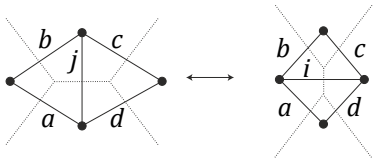


图 8：德劳内三角剖分的变换

考虑一个奇异值 t_k。在时刻 t_k，三角剖分发生一次变换（翻转）（图 8）。根据重耦合定理 [6, 定理 6.2]，可以定义一个线性算子 $A_r(t_k)\colon V_r(X(t_k-0)) \to V_r(X(t_k+0))$，其系数为 $q-6j$-符号。更具体地说，三角剖分 $G(t_k-0)$ 和 $G(t_k+0)$ 相差一条边：$j = E(G(t_k-0)) \setminus E(G(t_k+0))$，$i = E(G(t_k+0)) \setminus E(G(t_k-0))$。设 a, b, c, d 为与 i 或 j 属于同一三角形的边。对于任意被视为 $V_r(t_k-0)$ 的一个基元素的 $f \in F_r(t_k-0)$，我们定义

$$A_r(t_k) f = \sum_{g \in F_r(t_k-0)\colon f = g|_{E(G(t_k-0)) \cap E(G(t_k+0))}} \left\{ \begin{array}{ccc} g(a) & g(b) & g(i) \\ f(c) & f(d) & f(j) \end{array} \right\}_q \cdot g,$$

其中 $\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \xi \\ \gamma & \delta & \eta \end{array} \right\}_q$ 是 $q-6j$ 符号（定义见 [6, 命题11]）。

令 $A_r(\beta) = \prod_{k=1}^{m} A_r(t_k)\colon V(X) \to V(X)$ 为算子复合$A(t_k)$。

定理 2. 算子 $A_r(\beta)$ 是一个纯辫不变量。

证明。考虑一个纯辫同痕 β_s, $s \in [0,1]$。我们可以假设该同痕是一般的。这意味着该同痕包含有限个值 s_l，使得辫 β_{s_l} 有一个唯一值 t^*，在该值处，集合 $X_s(t^*)$ 包含以下奇异构型之一

1. 五个点属于同一个圆（或直线）；2. 两组各有四个点，且每组的点都位于同一个圆上。这两组点所在的圆不同。

第一种情况导出德劳内三角剖分变换的五边形关系（图 9）。该关系诱导出算子$A_r(\beta)$的五边形关系，根据定理 [6, 命题 10]，此关系成立。

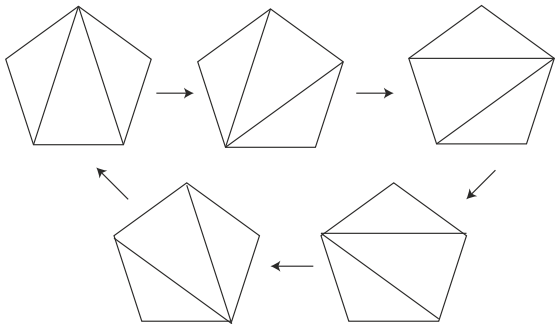


图 9：五边形关系

第二种情况导出了交换关系 $A_1A_2 = A_2A_1$，其中 A_1、A_2 对应于给定四元点组上的翻转。根据算子 A_1、A_2 的构造，该关系成立。□

因此，我们得到了一个类似于 [12, 第 16 节6] 中利用托勒密关系的构造。

例 1. 考虑点配置 $P_1 = (0,0)$，$P_2 = (\frac{1}{3},0)$，$P_3 = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_3 = (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_5 = (1,0)$。考虑纯辫 β，它由 P_2 围绕 P_1 运动的动力学给出：$P_2(t) = (\frac{1}{3}\cos t, \frac{1}{3}\sin t)$，$t \in [0, 2\pi]$。该动力学产生六种不同的德劳内三角剖分。对于 $r = 4$，每种三角剖分都有 160 种可容许着色。维数为 160 的算子 $A_4(\beta)$ 不是恒等算子（其特征值为 -1，重数为 20）。因此，不变量 A_r 并非平凡。

7 三维流形的特殊脊骨

这里我们将给出特殊脊的定义（见 [17]）。

定义 3。 一个简单多面体 是一个有限 CW 复形 P，使得其中的每个点 $x \in P$ 都有一个邻域与三种构型之一同胚（见图10）：

1. 一个圆盘;

2. 三个圆盘的边界沿一条公共弧相交，其中点 x 位于公共弧上；或

3. 蝴蝶，这是由四条弧构成的一种构型，它们交于点 x，每一对可能的弧之间都延伸着一个面。

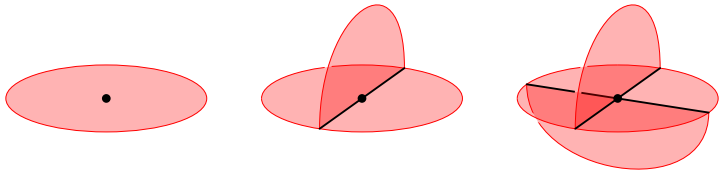


图10：简单多面体中的三种点 P。

每个简单多面体都具有自然的分层结构。在这种分层中，维数为 2 的每一层（一个 2-分支）都是非奇异点集合的一个连通分支。维数为 1 的层由开三重线或闭三重线组成，而维数为 0 的层则是真顶点。

简单多面体 P 称为特殊的，如果：

1. P 的每个 1-层都是一个开 1-胞腔。
2. P 的每个2-分支都是一个开2-胞腔。

紧致连通三维流形（带边界）的一个脊 M 是一个子多面体 $P \subset IntM$，使得 $M \setminus P$与 $\partial M \times [0,1)$ 同胚。闭连通三维流形 M 的脊，指的是 $M \setminus IntB^3$ 的一个脊，其中 B^3 是 M中的一个三维球。

8 Turaev–Viro不变量

考虑一个 3-流形的特殊脊，并将蝴蝶的权赋予真顶点。这些权取决于 6 个参数，称为 $(q-6j)$-符号。

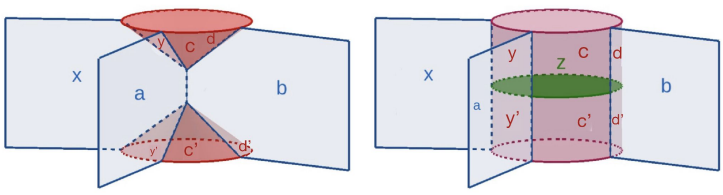


图11：Matveev-Piergallini变换

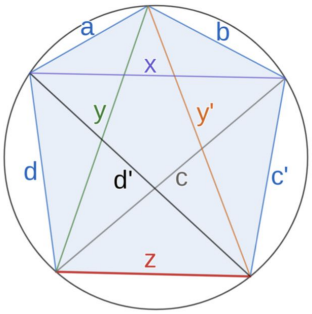


图 12：将四边形补全为五边形

9 $(q-6j)$-符号

每只蝴蝶有 6 个翼，自然分为三对相对的翼。用 3-单形的 1-框架来编码蝴蝶是很自然的。

因此，一个着色蝴蝶对应 6 个数（或某个环的元素）。由于每个蝴蝶都有许多对称性，自然应要求这些赋值在旋转下保持不变。换句话说，我们将数（$(q-6j)$-符号）对应于

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

整数六元组 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$，使得

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & e & a \\ c & b & d \end{bmatrix}.$$

10 从 Γ 构造 3-流形不变量

下面，我们给出一个提示，说明如何从几何上构造这个不变量。

然而，这个论证存在一个小小的漏洞。

受这个例子的启发，我们给出该不变量的代数描述。

对于边长为（$a,\ b,\ x$）的每个三角形，以及两个内接四边形（$a,\ b,\ c,\ d$），（$a,\ b,\ c',\ d'$），它们的对角线分别为 $y,\ y'$，存在唯一的 z，由此产生三个（自相交的）四边形。

解答：补成一个五边形。

10.1 托勒密推出比登哈恩–埃利奥特

为特殊胞腔的（定向）2-胞腔赋予实值变量。对于每个真顶点，都有一个蝴蝶；将该蝴蝶的权重赋予该顶点。

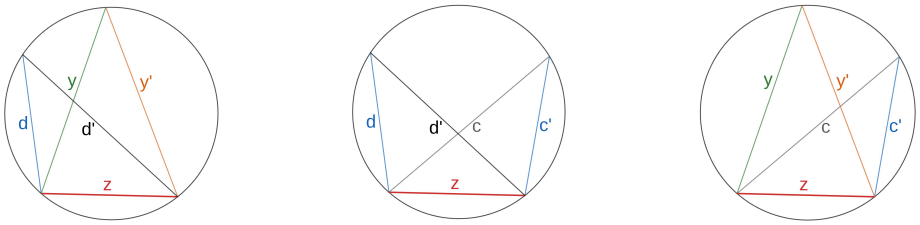


图 13:

设 S 是一个脊。考虑交换代数。

$$P(S) = \mathbb{Z}_2\langle x \in S_2 \mid \Pi_c, c \in S_0\rangle$$

其中， S_0 是脊 S的顶点集， S_2 是脊的 2-胞腔集，而 Π_c 是顶点 c处的托勒密关系式 (2)。令 $F(S)$ 表示代数 $P(S)$ 的分式域。

若存在集合 X_1, X_2，使得 $F_1 \otimes \mathbb{Z}_2(X_1) \simeq F_2 \otimes \mathbb{Z}_2(X_2)$，则特征为 2 的两个域 F_1 和 F_2 称为稳定等价，其中 $\mathbb{Z}_2(X_1)$ 是以生成元集合 X_i, $i = 1,2$ 为基的有理函数域。

定理 3. 给定一个 *3*-流形 M，分式域 $F(S)$ 的稳定等价类与流形 M的脊 S的选取无关。

证明. 设 S 和 S' 是由 Matveev–Piergallini 变换（图 11）连接的脊。我们来证明代数 $P(S)$ 和 $P(S')$ 稳定等价。脊 S 和 S' 的 2-胞腔之间存在一一对应（除去胞腔z），并由此诱导出同态 ϕ: $F(S) \to F(S')$。我们需要验证 ϕ定义良好且为双射。

代数 $P(S)$ 和 $P(S')$ 具有相同的关系，除了参与 Matveev–Piergallini 变换的那些顶点的关系。让我们来看看这些关系。对于代数 $P(S)$，我们有

$$ad + by + cx = 0, \quad ad' + by' + c'x = 0,$$

因此

$$x = \frac{ad' + by'}{c'}, \quad y = \frac{ad + cx}{b} = \frac{acd' + ac'd + bcy'}{bc'}$$

在域 $F(S)$ 中。对于代数 $P(S')$，我们有

$$az + cy' + c'y = 0, \quad bz + cd' + c'd = 0, \quad dy' + d'y + xz = 0,$$

因此

$$z = \frac{cd' + c'd}{b},$$

$$y = \frac{az + cy'}{c'} = \frac{acd' + ac'd + bcy'}{bc'},$$

$$x = \frac{dy' + d'y}{z} = \frac{b(bc'dy' + ac(d')^2 + ac'dd' + bcd'y')}{bc'(cd' + c'd)} = \frac{ad' + by'}{c'}$$

在 $F(S')$ 中。因此， $F(S)$ 和 $F(S')$ 中 x 和 y 的表达式相同。这意味着映射 ϕ 建立了分式域之间的同构。

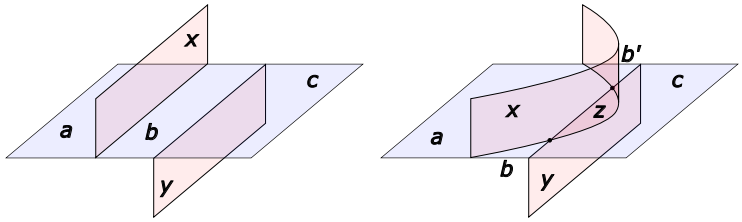


图 14：第二个 Matveev-Piergallini变换

对于第二类 Matveev–Piergallini 变换（图 14），我们没有关于脊 S 的关系，而这些关系

$$ac + bz + xy = 0, \quad ac + b'z + xy = 0$$

对脊 S'。然后 $z = \frac{ac+xy}{b}$ 和 ~~$b' = b$~~。因此，我们可以将域 $F(S)$ 和 $F(S')$ 视为相同。

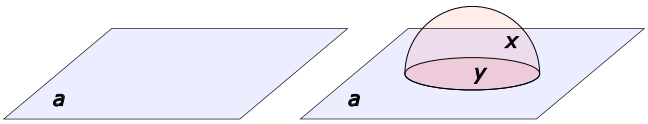


图 15：气泡变换

对于泡泡移动（图 15），我们得到两个额外变量，且没有新的关系。因此， $F(S') = F(S) \otimes \mathbb{Z}_2(x, y)$。

因此，场 $F(S)$ 和 $F(S')$ 稳定等价。 □

11 上述 3-流形不变量构造的推广

在上述构造中，我们处理了一个以 2-胞腔权作为变量的方程组。

对于每组六个标记，我们都写下了一个如下类型的方程式。

$$ac + bd = xy. \tag{2}$$

称其为 主方程。

我们固定某个曲率 κ（正、负或零），并固定某个半径 r （正数或无穷大）。

我们将 (κ, r)-主方程 称为常曲率三维空间中内接于半径为 r 的圆的四面体六条边长所满足的方程

κ。对于 $r = 0$ 的情况，我们取内接四边形及其两条对角线所满足的方程。

因此，(0，0)-主方程恰好就是上述主方程 $ac+bd=xy$。

我们认为，如果固定 κ，r 并将主方程替换为 (κ，r)-主方程，那么这些方程的解空间仍将是不变量，取决于 3-流形。

事实上，我们对四边形所用到的唯一性质是：每当我们画出两个共享同一个三角形的（内接）四边形（见图）时，就能找到且仅能找到一个边长（即五边形第五条边的长度），由此得到其余三个四边形。

上述论证中唯一需要修改的地方，就是将“内接于平面上的圆”替换为“内接于常曲率空间中半径为 r 的球面上 κ。”

12 为什么群 Γ 无处不在?

数学中的许多结构之所以极其重要，并非仅仅因为它们能解决问题或提供优美的不变量（当然也可能如此），而是因为它们揭示了数学不同分支之间的紧密联系。这使人们能够构建一种“通用翻译器”，在不同数学家所使用的语言之间进行转换。

在这些著名对象中，我们已经提到过簇代数（见图 2），这里只再提一下 Coxeter 群和 Associahedra（Stasheff 多面体）。在数学的其他分支中，群 Γ 至少与这三者有关。

在未来的论文中可能会出现的其他研究方向里，我们只提两个：

在拓扑学中：从辫到结，从 3-流形到 4-流形，等等。

在群论中：更深入地理解群 Γ 本身的结构。

在群 Γ_n^k 的所有可能表示和作用中，我们只提一种方法，第一作者称之为摄影法：

我们为某幅图拍几张（比如两张）照片，如果发现其中一些照片足以还原整幅图，那么我们就仔细记录一张图如何变换为另一张图。

托勒密变换以及上一节给出的推广便是证据。

也就是说，为了证明托勒密推出五边形，我们无需进行任何计算（见 [7, 12, 13, 14]），无需进行任何计算：只需说明，如果两个共享三个顶点的四边形都内接于圆，那么整个五边形也内接于圆；而且，可以根据这两个四边形的数据恢复其中任意一个四边形的**数据**。

我们所说的**数据**是什么意思？在几何学中，数据可以是边长、角、二面角、面积、体积等。

但有趣的数论中也可能产生其他**数据**（比如四元组、五元组等），从而得到（至少是）辫和 3-流形的新不变量。

我们预计，许多群 Γ 以及其他群（无论是已知的还是尚待发现的）的表示，都可以通过这种方法得到解释。簇代数理论中的许多命题和关系可能也可以通过这种方法推导出来。

参考文献

[1] A. Felikson，《托勒密关系及其相关内容》，arXiv:2302.06379。

[2] V.V. Fock、L.O. Chekhov，《量子 Teichm¨uller 空间》，理论数学物理**120**:3 (1999) 1245–1259。[3] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，《簇代数 I：基础》，美国数学会杂志**15** (2002) 497–529。[4] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，《簇代数 II：有限型分类》，数学发明**154**:1 (2003) 63–121。[5] I.M. Gelfand、M.M. Kapranov、A.V. Zelevinsky，《判别式、结式与多维行列式》，Springer，2008。[6] L.H. Kauffman、S. Lins，《*Temperley–Lieb* 复耦理论与 *3*-流形不变量》，普林斯顿大学出版社，1994。[7] S. Kim、V.O. Manturov，《Artin 辫、三维空间中的辫与群Γ_n^4 和 G_n^k》，结理论及其推广**28**:10 (2019) 1950063。[8] A.N. Kirillov、N.Y. Reshetikhin，《代数 $U_q(sl_2)$ 的表示、q- 正交多项式与链环不变量》，载于无限维李代数与群，数学物理高级丛书**7**，World Scientific，新加坡 (1988)，285–339。[9] I. G. Korepanov、S. Saito，《弦 $s \leftrightarrow t$对偶与五边形方程的有限维类比》，理论与数学物理**120**:1 (1999)，862–869。[10] I.G. Korepanov、N.M. Sadykov，《直和与 Grassmann 代数中的五边形关系》，$SIGMA$ **9** (2013) 030。[11] I.G. Korepanov，《二上同调给出最简单 3–3 关系的完整非线性参数化》，数学物理快报**104** (2014) 1235–1261。[12] V.O. Manturov、D. Fedoseev、S. Kim、I. Nikonov，《不变量与图像：低维拓扑与组合群论，结与万物丛书**66**》，World Scientific，2020。

[13] V.O. Manturov、D. Fedoseev、I. Nikonov，《三角剖分流形、流形辫群与群 Γ_n^k 》，载于：*Garanzha*、*V.A.*、*Kamenski*、*L.*、*Si*、*H.*（编），《数值几何、网格生成与科学计算》。计算科学与工程讲义，第 *143* 卷。Springer，Cham，2021，13–36。[14] V.O. Manturov、D. Fedoseev、S. Kim、I. Nikonov，《群 G_n^k 与 Γ_n^k：流形、动力学与不变量研究》，数学科学通报**11**:2 (2021) 2150004。[15] V.O. Manturov，《 G_n^3的可实现性、可实现性投影与 G_n^3-辫表示的核》，arXiv:2210.13338。[16]V.O. Manturov、I. Nikonov，《纯辫的一个不变量》，arXiv:2303.04423。[17]S. Matveev，《算法拓扑学与 3-流形分类》，Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2007。[18] V. G. Turaev、O. Ya. Viro，《3-流形的态和不变量与量子 $6j$-符号》，拓扑学**31**:4 (1992)，865–902。