arXiv:2305.06338v1 [cs.CE] 10 May 2023

面向自然灾害的结构可靠性评估高效广义分层抽样

Srinivasan Arunachalam, S.M.ASCE[1] 和 Seymour M.J. Spence, Ph.D., A.M.ASCE[2]1研究生，密歇根大学土木与环境工程系，密歇根州安娜堡，邮编 48109。电子邮箱：sriarun@umich.edu[2]副教授，密歇根大学土木与环境工程系，密歇根州安娜堡，邮编 48109（通讯作者）。电子邮箱：smjs@umich.edu

摘要

面向自然灾害的基于性能的工程，通过严格评估结构在潜在极端随机荷载作用下的不确定结构行为（以相对于既定准则的失效概率表示），有助于结构的设计与评估。因此，对于旨在利用有限样本集估计与多个极限状态相关的失效概率的计算框架而言，高效的随机模拟方案至关重要。本文提出了一种广义分层抽样方案，其中包含两个抽样阶段：第一阶段用于生成分层样本并估计层概率，第二阶段则旨在估计分层失效概率。第一阶段抽样能够选择一个广义分层变量（即，该变量不一定属于随机变量输入集），且无需预先知道其概率分布先验。为提高效率，当蒙特卡罗模拟被认为不可行时，本文提出采用马尔可夫链蒙特卡尔第一阶段抽样，并根据用户为所关注的极限状态指定的目标变异系数实施最优第二阶段抽样。推导这些变异系数的表达式时，充分考虑了马尔可夫链所引起的样本相关性，以及估计层概率的不确定性。所提出的随机模拟♀♀♀

该方案在高维可靠性问题中，能够针对更广泛的分层变量选择，发挥近似最优分层抽样的优势，并通过一种机制近似控制多个失效概率估计量的精度。通过两个涉及估计由风和地震激励引起的高度非线性响应相关失效概率的示例，展示了该方案的实用性和效率。

关键词： 分层抽样、蒙特卡罗方法、子集模拟、自然灾害。

引言

过去几十年来，计算能力、算法和框架不断进步，使我们能够以前所未有的细致程度分析工程系统。然而，计算模型并不能完美模拟现实世界的系统及其行为，而现实世界本身也存在不确定性。模型和参数选择中的不确定性可通过随机变量、随机过程、随机场和随机波来表征，这些变量、过程、场和波既涵盖认知的不确定性（源于知识或数据的缺乏），也涵盖偶然的不确定性（源于现象本身的随机性）（Shinozuka and Deodatis, 1991年, 1996年；Gurley et al., 1997；Gurley and Kareem, 1999；Der Kiureghian and Ditlevsen, 2009；Melchers and Beck, 2018）。对于实际问题而言，输入不确定性对模型输出的影响至关重要；要表征系统违反多项约束（或极限状态）的安全性，可采用失效概率，或等价地采用可靠度。确定部件或系统的失效概率，$P_{f,h}$ 需要求解以下 N_d 维积分：

$$P_{f,h} = P(\boldsymbol{\Theta} \in \Gamma_h) = \int_{\mathbb{S}} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}) q(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{N_d}$ 是基本随机变量 $\boldsymbol{\Theta}$组成的 N_d维向量的一次实现，其联合概率密度函数（概率密度函数）为 q；Γ_h 是与第h个极限状态相关的样本空间 $\mathbb{S}$内的失效区域；$\mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta})$ 是指示函数，当 $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma_h$ 时取值为 1，否则取值为 0。对于自然灾害工程中的大多数应用，以下特征使得式 (1) 中$P_{f,h}$ 的估计面临挑战：(i) 高维不确定空间，N_d

其维数可达数千，以容纳用于模拟荷载随机性的白噪声序列 $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{Z}}$；(ii) 需要同时评估多个非线性极限状态函数（LSF），G_h，其中$h = \{1,2,\ldots,H\}$，H为相关性能目标的总数；(iii) 需要在可接受的计算成本下估计小失效概率（例如，$P_{f,h} \leq 10^{-4}$），同时保持工程应用所需的精度。

越界法是处理时变可靠性问题的常用方法之一。然而，只有在对响应（及其导数）作出一系列严格假设、从而能够应用（广义）Rice公式时，才能针对少数特殊情况解析计算越界率（Rice，1944年；Der Kiureghian，2022；Li等人，2022）。一般而言，极限状态函数可能表现出强烈的非高斯性和非平稳响应。鉴于上述与式（1）相关的挑战，越界率的近似计算也可能十分困难。蒙特卡罗模拟（MC）是最简单的基于模拟的不确定性量化技术，其对不确定性的维数以及极限状态的数量和性质均具有稳健性。然而，若要以足够精度估计小失效概率，就需要进行大量系统评估，n（例如，若要估计范围为10^{-k}的$P_{f,h}$，并使变异系数达到10%，则需要 $n = 10^{k+2}$个样本）。对于具有显著非线性且／或在空间／时间上离散得很精细的复杂计算模型，这通常会带来难以承受的计算开销。关于降低蒙特卡罗模拟计算负担的方差缩减技术，已有大量研究。重要抽样通过修改抽样密度函数，从 $\mathbb{S}$ 的“重要区域”抽取更多样本（Melchers，1989；Fishman，2013）。然而，通常很难确定最优重要抽样密度（ISD）；若所采用的ISD形式不合适，在不确定参数数量较多时，估计量的变异性便无法得到控制（Au和Beck，2003a）。重要抽样及其变体（例如Au和Beck（1999）；Papaioannou等人（2016）），以及线抽样（Koutsourelakis等人，2004；Schueller等人，2004）和子集模拟（SuS）（Au和Beck，2001，2003b）等其他方法，均基于生成样本，

以便更有效地探索失效区域，从而使更大比例的样本能够用于评估失效概率。子集模拟的基本思想是引入中间失效事件，将小失效概率估计为较大的条件概率之积。尽管原始算法（Au和Beck，2001）侧重于评估单个罕见失效事件（即与单个极限状态函数相关）的失效概率，但已有一些变体将这一方法推广至多个极限状态函数（Hsu和Ching，2010；Li等人，2015，2017）。相比之下，基于分层设计的模拟方案包括但不限于分层随机抽样（Cochran，2007）、拉丁超立方抽样（LHS）（Stein，1987）和部分分层抽样（PSS）（Shields和Zhang，2016）。这些方法因具有更好的空间填充特性而形成了更优的抽样方案，但可能并不特别针对任何失效区域或极限状态函数。代理辅助近似技术旨在用仿真器（极限状态函数或极限状态曲面）的替代模型（例如多项式混沌展开、克里金代理模型（Sudret，2012））取代计算开销巨大的仿真器；替代模型基于所谓的试验设计构建，即一组用于近似真实函数／曲面的观测点。然而，这些方法通常不适用于高维且高度非线性的问题。

传统分层抽样仅适用于这样一类问题：已知 $\boldsymbol{\Theta}$ 的联合概率密度函数 q，且能够通过直接指定其各分量的区间来实现有效分层。对于更广泛的一类问题，该方法通常并不适用；在这些问题中，潜在的有效分层变量可能是辅助计算模型的输出，也可能是用于估计系统响应的模型链中某个中间计算模型的输出。在基于性能的自然灾害工程可靠性问题中，这可能构成一项重大限制，因为此类问题面临以下挑战：（i）定义所关注极限状态函数（LSF）的响应量，通常需要依次评估一系列计算模型，以刻画灾害、灾害与结构的相互作用、结构响应以及损失/损伤；（ii）对于某些极限状态函数，直接针对 $\boldsymbol{\Theta}$ 的子集划分区间并不能实现有效分层；（iii）用于表征所关注极限状态函数超越情况的指示函数，因需要依次评估一系列高保真度模型而计算成本高昂；（iv）性能目标涉及小

失效概率，或等价地说，较高的可靠度。后分层技术鲜少有用，因为 $\boldsymbol{\Theta}$ 之外变量的概率分布通常无法获得。与分层抽样的形式类似，双重抽样程序包含两个抽样阶段：第一阶段用于生成分层样本并估计层概率，第二阶段则用于估计分层失效概率。本文提出一种扩展的、基于双重抽样的随机模拟方案，用于估计一组极限状态对应的多个失效概率，并内置优化程序，以便在使用有限样本集的同时控制估计误差。该方案的创新之处在于：当蒙特卡罗模拟不可行时，采用由马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）驱动的第一阶段抽样，其方式类似于子集模拟；并依据用户指定的所关注极限状态目标变异系数（c.o.v），优化执行第二阶段抽样。推导这些变异系数的表达式时，充分考虑了马尔可夫链引起的样本相关性以及估计层概率的不确定性。本文通过两个示例展示了所提出的方案，涉及估计风和地震激励引起的高度非线性响应所对应的失效概率。

背景

分层抽样的基本思想是定义样本空间的划分，$\mathbb{S}$，使得从每个划分（或层）$\{\mathbb{S}_i : i = 1, \ldots, m\}$ 中按优先方式抽取样本。这意味着用户可以决定分层变量（记作向量 $\boldsymbol{\chi}$）、层边界，以及每层中的样本数量 n_i。各层需要满足：$\cup_{i=1}^{m} \mathbb{S}_i = \mathbb{S}$ 和 $\mathbb{S}_i \cap \mathbb{S}_j = \emptyset$，对于 $i \neq j$。因此，式（1）可以分解为若干子积分，如下所示：

$$P_{f,h} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{S}_i} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}) q(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \tag{2}$$

由于条件概率密度函数满足：$q(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbb{S}_i) = q(\boldsymbol{\theta}) \mathbb{1}_{\mathbb{S}_i}(\boldsymbol{\theta}) / P(\mathbb{S}_i)$；$P_{f,h}$ 可以表示为

进一步简化为:

$$P_{f,h} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{S}_i} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}) q(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbb{S}_i) P(\mathbb{S}_i) d\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{m} P_{f_i,h} P(\mathbb{S}_i) \tag{3}$$

其中， $P(\mathbb{S}_i)$ = 概率空间中第 i层的体积， $P_{f_i,h}$ = 条件失效概率。在每一层内进行蒙特卡罗抽样时，该过程称为分层随机抽样，而$P_{f,h}$ 可近似为:

$$P_{f,h} \approx \tilde{P}_{f,h} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i)}) P(\mathbb{S}_i)/n_i \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_k^{(i)}$ = 是第i层中 n_i 个样本里的第 k个独立同分布样本。显然，式（1）的积分分解得益于全~ ~概率定理。具体而言，式（4）中的 $P_{f,h}$ 可视为 $P_{f_i,h}$ 的加权和，权重为$P(\mathbb{S}_i)$。更重要的是，只有在通过指定 $\boldsymbol{\chi}$各分量的上下界直接进行分层，且满足 $\boldsymbol{\chi} \subseteq \boldsymbol{\Theta}$时， $P(\mathbb{S}_i)$才是完全已知的，因为在这种情况下，可以得到 $q(\boldsymbol{\chi})$。此外，独立同分布样本 $\boldsymbol{\theta}_k^{(i)}$ 的模拟十分直接，因为可以根据联合密度 $q(\boldsymbol{\theta})$得到条件密度 $q(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbb{S}_i)$。通过分层随机抽样实现的方差缩减取决于 $\boldsymbol{\chi}, \{\mathbb{S}_i\}_{1 \le i \le m}$和 $\{n_i\}_{1 \le i \le m}$的选择。实现不当可能导致性能比直接蒙特卡罗模拟更差。

分层抽样最初由调查抽样领域发展而来，该领域通常依据人口统计特征进行分层，以估计子总体的特征/参数（Cochran，2007年；Arnab，2017年）。采用精确的概率权重（即层概率），可以校正样本集与实际总体中特征分布的差异；这也解释了为何在采用比例样本分配（即 $n_i = nP$（$\mathbb{S}_i$）） 时，无条件方差会降低。在某些情况下，由于 $\boldsymbol{\chi}$的选择，无法从每一层生成固定数量的样本，此时可在抽样后将样本归入各自所属的层，这一过程称为

事后分层。事后分层假设层概率已准确知晓，唯一未知的是样本所属的层（Cochran，2007年；Glasgow，2005）。此外，如果层概率也并非事先已知，则可抽取一个较大的简单随机样本集，先估计层概率，并为每一层准备一个样本池，再从中选取较小的样本集来评估失效概率。这种技术称为双重抽样，因为该过程先通过第一阶段抽样进行分层构建、按层分类样本并估计层概率，然后再通过第二阶段抽样进行分层，以估计所关注的失效概率（Cochran，2007年；Glasgow，2005；Rao，1973）。本文重点探讨采用双重抽样方法，开发适用于自然灾害工程风险评估问题的广义分层抽样方案。具体而言，本文研究如何通过最优样本分配以及采用马尔可夫链蒙特卡罗加速第一阶段抽样，提高双重抽样（即 $\boldsymbol{\chi} \not\subseteq \boldsymbol{\Theta}$）的计算效率。

基于双重抽样的拟议模拟方案

分层样本的模拟

双重抽样的基本思想

如前所述，若已知 $\boldsymbol{\chi} \subseteq \boldsymbol{\Theta}$ 和 $q(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbb{S}_i)$，则只需通过蒙特卡罗模拟对 $q(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbb{S}_i)$ 进行抽样，即可轻松生成各层的输入样本，这项任务通常只需很少的计算工作量。现在考虑 $\boldsymbol{\chi} = \mathrm{H}(\boldsymbol{\sigma})$，其中 H 是一个计算模型，它取决于部分输入不确定性 $\boldsymbol{\sigma}$；其余输入不确定性（为简单起见，假设与 $\boldsymbol{\sigma}$ 独立）记为 $\boldsymbol{\tau}$，使得 $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\}$。例如，如果选取小时平均风速峰值作为分层变量，且它不是基本随机变量，那么 H 可以表示随机风灾害参数（构成 $\boldsymbol{\sigma}$）与风速（即 $\boldsymbol{\chi}$）之间的映射函数（即危险性模型）。其余不确定性，例如系统不确定性和空气动力学不确定性，则构成 $\boldsymbol{\tau}$。显然，分层变量的选择决定了问题中的计算模型 H。对于给定问题，如果 H 的求值成本（记为 $\mathscr{C}(\mathrm{H})$）远低于

极限状态函数的求值成本 $\mathscr{C}(\mathrm{G}_h)\forall h$，则可以采用蒙特卡罗模拟生成大量样本，从而确保每层$\{n_i\}_{1\le i\le m}$ 都能获得所需数量的样本。需要注意的是，尽管这种方法确实能在每一层中生成独立同分布样本 $\boldsymbol{\theta}_k^{(i)}$，但如果$P(\mathbb{S}_m) \approx 10^{-k}$，那么生成大约 10^2 个位于 $\mathbb{S}_m$（即最后分层）的样本需要对 H 求值 10^{k+2} 次，由此可得到 $P(\mathbb{S}_m)$ 的估计值，其变异系数为 10%。具体而言，估计量的表达式为：

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{f,h} &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n_i} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i)})}{n_i} \right) \frac{\hat{n}_i}{\hat{n}}\end{aligned} \tag{5}$$

$\boldsymbol{\theta}_k^{(i)} = [\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}, \boldsymbol{\tau}_k]$ 其中，$\boldsymbol{\tau}_k$ =表示非条件蒙特卡洛样本；$\hat{}n$ =表示生成的蒙特卡洛样本总数，其中有$\hat{}n_i$ 个样本属于第 i层；而 $n_i \le \hat{}n_i$ 则表示用于计算条件失效概率的样本。这意味着总共需要进行 $n = \sum_i n_i$ 次极限状态求值，而为了填充各层中的样本并估计层概率，还需要进行$\hat{}n = \sum_i \hat{}n_i$次 H 的求值。值得注意的是，现有文献尚未明确描述对 $\boldsymbol{\tau}$ 的考虑及其单独进行的蒙特卡罗抽样，但这对于本研究至关重要。

第“背景”节中经典分层抽样的一个重要特性，是利用了准确概率权重的知识，而这一点在此处被舍弃了。其影响体现在以下方面：(i) 如果$\hat{}n_i = n_i$，则式 (5) 化简为对$P_{f,h}$的简单蒙特卡洛估计。因此，需要$\hat{}n >> n$，使得 $\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$成为一个相对高精度的估计值；由于 H 的计算成本较低，这是可行的；(ii) 比例样本分配（即 $n_i = nP(\mathbb{S}_i)$）无论 $\boldsymbol{\chi}$ 和$\{\mathbb{S}_i\}_{1\le i\le m}$ 如何，都能保证经典分层抽样实现方差缩减，但由于该方案再次退化为简单蒙特卡洛估计，因此这一保证也随之丧失。这说明，为了获得较高的效率增益，样本分配需要尽可能地反映理论˜最优分配；这一问题将在“样本分配方案”一节中讨论。令 $P_{f_b h}$表示当 $n_i = \hat{}n_i$ 时 $P_{f_b h}$ 的估计值，则方差可写为（定理 1，Rao

（1973年）：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\tilde{P}_{f,h}) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{\tilde{P}}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i) + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{P}_{f_i,h} - \tilde{\tilde{P}}_{f_i,h})\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\hat{n}} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i)})}{\hat{n}}\right) + \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m} (\tilde{P}_{f_i,h} - \tilde{\tilde{P}}_{f_i,h})\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\hat{n}} \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i)})}{\hat{n}}\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m} (\tilde{P}_{f_i,h} - \tilde{\tilde{P}}_{f_i,h}) | \tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right)\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) \\
&= \frac{P_{f,h}(1 - P_{f,h})}{\hat{n}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{P(\mathbb{S}_i)P_{f_i,h}(1 - P_{f_i,h})}{\hat{n}}\left(\frac{1}{\nu_i} - 1\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中，$\mathbb{E}$ = 为期望算子，$\nu_i = n_i/\hat{n}_i \in (0,\ 1]$ = 为子抽样比例，其值假定为固定值，表示第一阶段第 i层中在第二阶段用于失效概率评估的样本比例。在上述推导中，使用了以下结果（Rao，1973年；Cochran，2007）：$\mathrm{Cov}(\tilde{P}_{f_i,h},\ \tilde{P}_{f_i,h} - \tilde{P}_{f_i,h}) = 0$, $\mathbb{E}(\tilde{P}_{f_i,h}) = \tilde{P}_{f_i,h}$, 以及 $\mathbb{V}(\tilde{P}_{f_i,h} - \tilde{P}_{f_i,h}) = \mathbb{V}(\tilde{P}_{f_i,h}) - \mathbb{V}(\tilde{P}_{f_i,h})$。值得注意的是，对于给定的极限状态和$\hat{n}$，式（6）最终表达式的第一项是固定的，而第二项表示取决于样本分配的方差贡献，当 $n_i \to \hat{n}_i$时趋于零。该估计量是无偏且一致的，即对于固定的 ν_i，当$\hat{n} \to \infty$时，其趋近于真实失效概率。最后，变异系数可估计为：

$$
\kappa_h = \frac{\sqrt{\mathbb{V}(\tilde{P}_{f,h})}}{P_{f_i,h}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{P}_{f,h}(1-\tilde{P}_{f,h})}{\hat{n}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\tilde{P}_{f_i,h}(1-\tilde{P}_{f_i,h})}{\hat{n}}\left(\frac{1}{\nu_i} - 1\right)}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)}
\tag{7}
$$

通过子集模拟扩展以实现高效率提升

当 $\mathcal{C}(\mathrm{H})$ 并非平凡，尤其是当 $P(\mathbb{S}_m)$ 极小时，采用蒙特卡罗模拟效率低下。为了生成极端响应，可能有必要关注 $\boldsymbol{\chi}$ 的稀有子空间（位于其

联合概率密度函数的尾部）。在这种情况下，需要采用更高效的技术来生成分层样本并近似计算层概率。基于马尔可夫链蒙特卡罗算法的方法能够根据条件分布（以 $\mathbb{S}_i$ 为条件）自适应地生成样本（Papaioannou等人，2015）。例如，可以通过序贯重要抽样生成条件样本：该方法对样本进行连续重加权，使其所依据的分布序列逐渐逼近目标条件分布（Papaioannou等人，2016）。本文考虑到子集模拟应用更广泛，采用其进行高效的第一阶段抽样（Au和Beck，2001）。与子集模拟的传统应用不同，本文中子集模拟仅为每一层提供足够的样本，以便基于分层抽样估计多个失效概率。

考虑一个记为 $\chi \in [\chi_L, \chi_U]$ 的分层变量，并固定阈值 χ_i，其中 $\chi_0 < \chi_1 <。。。< \chi_{m-1} < \chi_m$，则层 $\{\mathbb{S}_i\}_{1\le i\le m}$ 和嵌套中间事件序列 $F_1 \supset F_2 \supset。。。\supset F_{m-1}$ 定义如下：$F_i = \{\boldsymbol{\theta}: \chi > \chi_i\}$，$\forall i \le (m-1)$ 以及 $\mathbb{S}_i = \{\boldsymbol{\theta}: \chi \in (\chi_{i-1}, \chi_i]\}$，$\forall i \le m$。为方便记号，也定义 $F_0 = \mathbb{S}$，即某个事件。最后一层 $\mathbb{S}_m = F_{m-1}$ 的上界为 $\chi_m = \chi_U$（可能不是有限值），下界为 $\chi_0 = \chi_L$，以确保满足概率划分性质。SuS 的自适应程序通过从以 F_{i-1} 为条件的样本（或种子）出发，使用 MCMC 模拟马尔可夫链的状态，从而在 F_i（以及 $\mathbb{S}_{i+1}$）中生成样本，$\forall i \le (m-1)$（Au和Beck，2001；Papaioannou等人，2015）。可以证明，对于阈值固定的理想化 SuS 方法，阈值的最优选择是使条件概率 $P(F_i|F_{i-1})$ 相等（Bect等人，2017）。这为广泛采用的做法提供了依据：将 $P(F_i|F_{i-1})$ 的样本估计值 $\forall i \le (m-1)$ 固定为 $p \in [0。1、0.3],$，其中 χ_i 和 $\mathbb{S}_i$ 是自适应定义的常数。换言之，χ_i 被选为 F_{i-1} 中条件样本的第（$1-p$）分位数。容易注意到，$\tilde{P}(F_i) = p^i$ 和 $\tilde{P}(\mathbb{S}_i) = p^{i-1}(1-p)$，$\forall i \le (m-1)$，其中波浪号表示该量为样本估计值。设 F_i 的每个条件层中的马尔可夫链样本总数为 N，则对于 $\forall i \le (m-1)$，第 i 层中生成的马尔可夫链样本数为，$\hat{}n_i = (1-p)N$，其中 $\hat{}n_m = N$，由此可得

即 $\hat{n} = N(m(1-p) + p)$。然而，n_i 的取值是根据“样本分配方案”一节中的最优分配方案确定的。在每一层内以及各层之间，生成的样本 $\boldsymbol{\theta}_k^{(i)} = [\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}, \boldsymbol{\tau}_k]$ 由于马尔可夫链固有的相关性，会通过 $\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}$ 产生相关性；而 $\boldsymbol{\tau}_k$ 则彼此不相关，因为它们是独立同分布蒙特卡罗样本，不受 SuS 或分层程序的影响。方差表达式需要同时考虑 SuS 引起的样本相关性，以及层概率估计值中的不确定性。附录 I 讨论了 $\tilde{P}_{f_i,\,h}$、$\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$ 和 $\tilde{P}_{f,\,h}$ 的性质，其中包括推导 $\tilde{P}_{f,\,h}$ 的方差，从而得以引入扩展方案估计量变异系数的下列表达式：

$$\kappa_h \approx \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \tilde{\vartheta}_{i,h}^2 \left(\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_i}^2 + \tilde{P}^2(\mathbb{S}_i)\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}_{f_j,h}\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_{ij}}^2}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)} \tag{8}$$

其中，$\tilde{\vartheta}_{i,h}^2$ =表示 $\mathbb{V}(\tilde{P}_{f_i,h})$的估计值，$\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_{ij}}^2$ =表示 $\mathrm{Cov}(\tilde{P}(\mathbb{S}_i), \tilde{P}(\mathbb{S}_j))$ 的估计值，$\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_i}^2$ =表示 $\mathbb{V}(\tilde{P}(\mathbb{S}_i))$的估计值。所有这些量均可通过模拟马尔可夫链样本以及极限状态违规的评估来估计。值得注意的是，估计值 $\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_i}^2$ 和 $\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_{ij}}^2$ 仅取决于第一阶段样本，与极限状态和第二阶段抽样无关。另一方面，估计值$\tilde{\vartheta}_{i,h}^2$ 取决于第一阶段样本、n_i以及第h个极限状态函数。这意味着，对于给定的问题，方程（8）的方差分量$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}_{f_j,h}\tilde{\vartheta}_{\mathbb{S}_{ij}}^2$与样本分配（即$\{n_i\}_{1\le i\le m}$）无关，仅反映第一阶段抽样的充分性。

为直观说明所提出的方法，考虑一个二维问题，其中有两个相互独立的随机变量 $\tau \sim U(0,\ 10)$ 和 $\sigma \sim N(5,\ 1)$。图1(a)展示了蒙特卡洛模拟中用于估计失效概率的1000个样本的分布，该失效概率对应的失效区域在图中以红色阴影表示，由 $200\sin(\tau) + 3\sigma^3 > 1500$ 给出。相比之下，若希望将 $\chi = \mathrm{H}(\sigma) = \sigma^3$ 作为分层变量，则所提出的方法会生成分层样本，以便进行失效概率的分层计算。图1(b)展示了所提出的方法如何高效地探索失效区域，其中

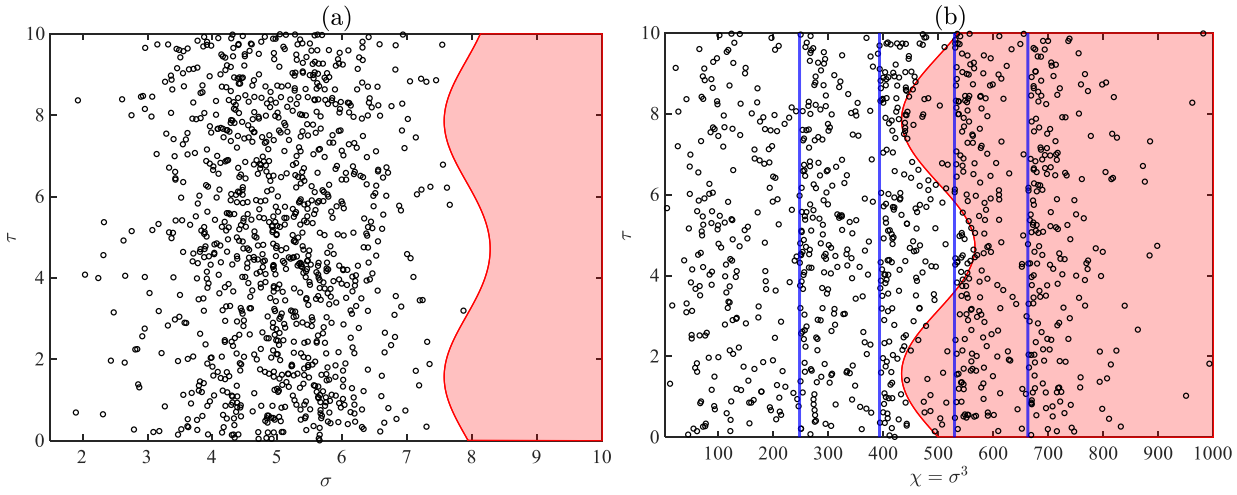


图1. 蒙特卡罗模拟 (a) 与所提出的模拟方案 (b) 中样本分布示意图。

竖直实线表示分层分界（根据 $p = 0.1$ 和 $m = 5$ 确定），而 τ 从其边缘分布中随机抽取。为简化说明，这里采用了等量样本分配（即每层200个样本）。此外，由于 χ 只是 σ^3，因此未展示子集模拟的应用；不过需要指出的是，通常 χ 是两个或多个随机变量的复杂函数，在这种情况下，生成分层样本就需要借助子集模拟。

补充说明

对于具有多个分层变量的更一般情形，可通过将子集模拟算法替换为广义子集模拟（GSS）算法来实现同一框架。GSS 最初是作为子集模拟的扩展而开发的，用于通过一次模拟方案运行来估计多个失效概率（Li等人，2015，2017）。基本上，在上述子集模拟程序中，$\{F_i\}$ 由单个驱动变量 χ 确定，而在 GSS 中，可定义统一的中间事件（即，对于两个分层变量 $\chi^{(1)}$ 和 $\chi^{(2)}$，$F_i = \{\boldsymbol{\theta}: \chi^{(1)} > \chi_i^{(1)}\} \cup \{\boldsymbol{\theta}: \chi^{(2)} > \chi_i^{(2)}\}$），以将样本引导至多个层。然而，这种修改可能难以确保所有层中都有足够的样本，而且无法得到可计算的方差表达式；而这些表达式是最优样本分配程序所必需的，也是所提出模拟方案的核心。

值得一提的是，尽管这一扩展的开发是独立进行的，但它与并行子集模拟（P-SuS）算法（Hsu和Ching，2010）以及Au（2007）提出的响应条件化方法（RCM）有一些相似之处。P-SuS的核心思想是引入一个与所有性能函数相关的主变量，作为子集模拟中的驱动变量，并同时估计多个失效概率。在这里，主变量是一个代表性输出变量（例如，最大层间漂移的平均值），因此每次模拟不仅能得到主变量的一个实现值，还能一次性得到所有性能函数的实现值（例如，所有楼层的最大层间漂移），而无需额外的模拟/计算。这可以视为所提出方案的一个特例，其中不存在第二阶段抽样/模拟（包括由 $\boldsymbol{\tau}$给出的不确定性）。另一方面，RCM利用目标问题的计算成本低廉的近似解所提供的信息，以获得高效且一致的可靠性估计值。对目标响应进行近似的“条件响应”会被分层，而子集模拟则用于实现条件样本生成。不过，该方法并非针对具有多个极限状态的可靠性问题，而且这两种方法都不能对来自各层的样本进行最优评估；本文通过基于约束优化的样本分配程序实现了这一点。此外，与必须对失效域进行参数化的子集模拟不同，所提出的方法适用于更通用的极限状态表示，例如结构倒塌；对于这类情况，未必总能指定一个非二元的可测极限状态函数。

分层变量的选择

如果 $\boldsymbol{\chi}$ 的选择能够使由 $\{\mathbb{S}_i\}_{1\le i\le m}$ 定义的分层，相较于 $\mathbb{S}$ 中的整体同质性，在层内展现出更高的同质性（就第h个极限状态违背而言），那么分层带来的收益可能会非常显著。层内同质性可以通过 MC 条件概率估计量的单位方差 来衡量（即与一个简单随机样本相关的估计量），其表达式为 $P_{f_h,h}(1-P_{f_h,h})$。事实上，对于 $P_{f,h}$，理想的分层变量就是第h个极限状态函数 G_h 本身。显然，不可能按照某个极限..... 的值递减来进行分层。

状态函数，因此可以采用一个或多个与关注的响应高度相关的变量进行分层。此外，在所提出的方案中，由于分层基于随机变量且独立于极限状态，因此每个层内的同一组样本可用于估计所有极限状态的分层失效概率。也就是说，无需针对每个关注的极限状态重新运行模拟。通过扩大选择范围（即 $\boldsymbol{\chi} \not\subseteq \boldsymbol{\Theta}$），可以从任何中间模型（通常参与响应估计的一系列数值模型）或未用于模型链的辅助模型的输出中，选出适合 $\boldsymbol{\chi}$ 的候选变量。然而，每种选择都伴随着相应的计算工作量，与模拟分层样本所需的 $\mathcal{C}(\mathrm{H})$ 成正比。在自然灾害应用中，借助专家知识或物理直觉，适合 $\boldsymbol{\chi}$ 的候选变量可以是危险性强度指标，例如最大每小时风速、谱加速度的几何平均值，或风激系统的弹性底部弯矩。一般而言，在涉及显式危险性建模的自然灾害应用中，强度指标本身是数值模型的输出，其概率分布通常可能未知。此外，所提出的方案支持采用混合分层变量，例如在风场和同期降雨场都可能显著影响建筑系统性能（如围护板性能）的应用中，将峰值风速与平均每小时降雨强度进行某种组合。应当强调，所提出的估计量是无偏且一致的（即随着计算工作量增加而收敛至真实概率，也就是对于 $N \to \infty$ 和 $n_i \to \infty$），如附录 I 所示。

分层抽样会受到“维度灾难”的影响，因为在 k 个维度中进行完全分层，并为每个维度设置 m 个层，会迅速导致层数激增，m^k，同时也会增加为满足单位方差估计的特定精度而产生的抽样需求，而这种估计是实现最优样本分配所必需的，进而影响失效概率的估计值（Pharr 等，2017）。因此，应审慎选择一到两个对响应有显著影响的变量进行分层；通常可以从中间模型的输入/输出中较容易地识别出这些变量，应用于

自然灾害应用。层数 m 通常由 $P(\mathbb{S}_m)$ 和最小概率的阶数 $\min_h P_{f_i,\,h}$确定；然而，将 m 增加到 10 以上通常很少有益，因为这会增加抽样需求，或者由于单位方差估计中的不确定性较大，以及在固定抽样成本下样本分配欠优而导致估计量方差增加（Cochran, 2007）。

样本分配方案

除了选择 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\{\mathbb{S}_i\}_{1\le i\le m}$之外，在由 $\{n_i\}_{1\le i\le m}$ 定义的各层之间分配样本，也会影响在极限状态评估次数固定为 n 时的方差缩减。对于单个极限状态函数，最优分配方案称为“内曼分配”，即按照 $P(\mathbb{S}_i)$ 以及单位方差的平方根比例分配样本（Neyman，1934；Cochran，2007；Arunachalam 和 Spence，2021）。对于多个极限状态函数，由于任何一种样本分配都不可能同时对所有极限状态函数达到内曼最优，因此需要考虑以下基于变异系数的约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\{n_i\}_{1\le i\le m}} \quad & n = \sum_{i=1}^{m} n_i \\ \text{subject to:} \quad & \kappa_h\,(n_1,\ldots,n_m) \le \omega_h \qquad h \le H \\ & n_i \le \hat{n}_i \qquad\qquad\qquad i \le m \end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\kappa_h(n_1,\ldots,n_m)$ =为依赖于样本分配的$\tilde{P}_{f,h}$ 变异系数，而 ω_h =为用户指定的变异系数目标，用于控制估计精度。上述问题的“最优解”记为$\{\check{n}_i\}_{1\le i\le m}$，可通过任何基于梯度的优化技术求得。然而，计算变异系数需要知道所有极限状态函数和各层的单位方差，而这些信息无法直接获得，因此需要进行初步研究（Evans，1951）。初步模拟研究的目标，例如在每层使用n_p 个样本，纯粹是通过量化与所选极限状态函数对应的估计失效概率的层内变异性，来求解方程（9）（以高效分配剩余的$n - n_p$ 个样本）。初步研究可以视为一种

探索步骤，在随后通过最优执行第二阶段抽样来估计失效概率这一利用步骤之前进行。需要指出的是，初步研究可能会引入估计中的系统误差，即基数误差；当探索不足时，任何单位方差都可能被误判为零，从而产生这种误差（Amelin，2004年；Arunachalam 和 Spence，2021）。通过谨慎进行分层构建，并对 n_i $\forall i$施加一个恒定的下限，可以在一定程度上避免这一问题。

总体算法

所提出的流程总结如下：

1. 初始化：选择一个分层变量 χ、层数 m和概率常数 $p \in [0。1，0。3]$，，以定义分层并固定层概率的估计值。2. 分层与条件样本生成：如果 $\mathscr{C}(\mathrm{H})/(P(\mathbb{S}_m)\mathscr{C}(\mathrm{G}_h)) \ll 1$, $\forall h$，则可以进行基于蒙特卡罗的第一阶段抽样；否则，考虑基于子集模拟的抽样。如果采用基于蒙特卡罗的第一阶段抽样，则选择第一阶段样本总数 $\hat{n}$；如果采用基于子集模拟的第一阶段抽样，则选择 N。选择每层的初步测试样本数 n_p。生成分层样本 $\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}$，并在此过程中自适应地定义 χ_i 和 $\mathbb{S}_i$。

3. 初步研究与最优样本分配：从每一层中随机抽取 n_p 个样本（以及 $\boldsymbol{\tau}$ 个蒙特卡洛样本）进行初步研究，以获得失效概率的第一层级估计值，并利用这些估计值求解方程（9），得到 $\{\check{n}_i\}_{1\leq i\leq m}$。如果采用基于子集模拟的第一阶段抽样，计算 κ_h 时需要用到 $\vartheta^2_{\mathbb{S}_i}$、$\vartheta^2_{\mathbb{S}_{ij}}$、$\vartheta^2_{i,h}$ 和 $P_{f_i,\,h}$ 的样本估计值。

4. 失效概率及相关误差的估计：使用 $\mathbb{S}_i$ 中的 $\check{n}_i$ 样本，估计条件失效概率，并结合层概率估计总体失效概率及其相关变异系数，可使用方程（7）或方程（8）。

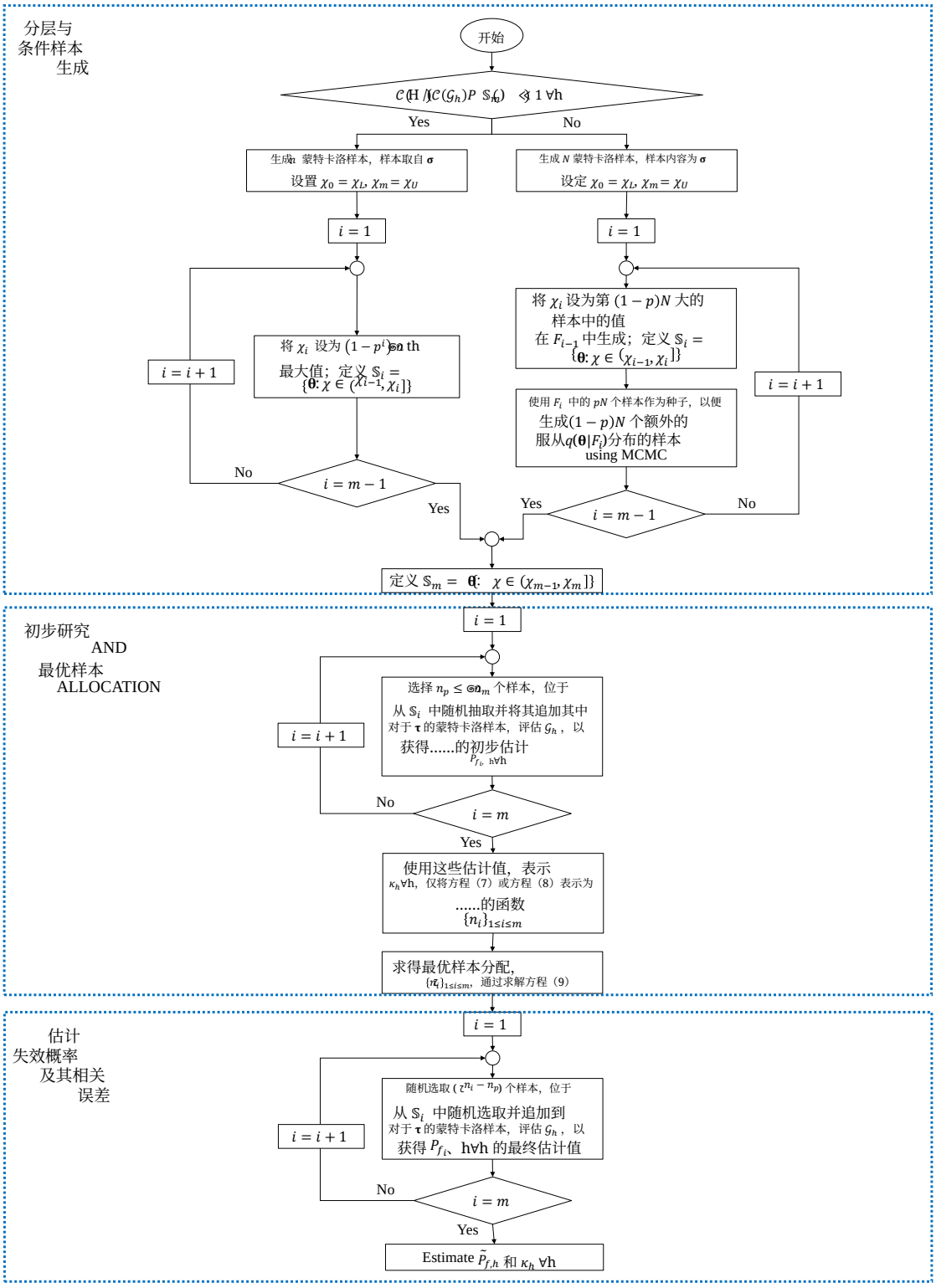


图2. 所提出的随机模拟过程的流程图。

当基于初步研究的最优样本分配与真实最优分配大致吻合时，预计变异系数 κ_h 将接近相应的目标值 ω_h，同时只需投入有限的计算工作量。所提出的流程总结于图2的流程图中。

如果采用等量样本分配，该方案也可用于次优情形。这样就无需先进行初步研究，再进行最优样本分配。此外，如果不需要衡量最终估计的准确性，则实施该方案无需计算方程（7）或方程（8）。

案例研究

示例1：风激励45层钢筋混凝土建筑

概述

考虑一栋高45层、总高度为 H = 180.6 m、楼层高度为h_s = 4m的钢筋混凝土建筑，在极端风荷载作用下，采用所提出的方法同时估计超越概率，以作说明。假设该结构位于纽约市，危险性模型基于完整飓风路径的模拟，其由风暴路径模型（Vickery and Twisdale, 1995a）、风场模型（Jakobsen and Madsen, 2004年）和填充率模型（ Vickery and Twisdale, 1995b）组合构成。通过建筑高度处随时间变化的小时平均风速 $v_H(t)$和随时间变化的风向 $\alpha(t)$，对建筑所在地不断演变的风速场进行建模，并据此校准完全非平稳、非直线的随机风荷载模型（Ouyang and Spence, 2021）。在本例中，选取小时平均风速峰值$\hat{v}_H = \max_t v_H(t)$作为分层变量，因为它与关注的响应高度相关，同时又是飓风危险性模型的输出，因此适合用于展示所提出的方法。以下六项关注的响应ˆ定义了极限状态函数：两个正交方向上的屋顶侧移比峰值，$\Upsilon_{X,roof}$和ˆ$\Upsilon_{Y,roof}$；残余层间侧移比（IDR）， $\Upsilon^{(r)}$ X 和 $\Upsilon^{(r)}$ Y；以及建筑高度范围内的层间侧移比峰值ˆˆ， Υ_X 和 Υ_Y。屋顶侧移比峰值考虑两个阈值：1/400，对应正常使用性能目标（美国土木工程师学会，2019）；以及1/200，对应连续占用性能目标（美国土木工程师学会，

2019）。残余层间侧移比的阈值选为1/1000，对应持续占用目标（美国土木工程师学会，2019）；峰值层间侧移比的阈值则为1/200。在可靠性评估中考虑屋顶峰值漂移，旨在限制建筑顶部的摆动，并避免电梯运行/对齐方面的问题；考虑残余层间侧移比，则旨在限制非弹性响应造成的永久变形（美国土木工程师学会，2019）。各正交方向上的峰值和残余层间侧移比，均按其最大值所在楼层位置报告为绝对值。值得注意的是，每层内的结构分析结果可用于一次性评估所有极限状态函数，并计算各层的分层失效概率。

随机风荷载

飓风事件的完整演化过程通过参数化飓风模型来描述，该模型将飓风路径模拟为穿过以建筑场址为中心的圆形子区域的直线。输出 $v_H(t)$和 $\alpha(t)$被建模为建筑场址与飓风眼之间距离的函数，同时考虑登陆后的气压衰减（Vickery and Twisdale, 1995a；Vickery et al., 2000；Vickery and Twisdale, 1995b；Jakobsen and Madsen, 2004；Ouyang and Spence, 2021）。分层变量$\hat{v}_H$取决于飓风路径输入参数 $\mathbf{\Phi}$，这些参数由初始中心气压差 Δp_0、平移速度 c、飓风大小 r_M、接近角 θ_{app}、建筑场址与飓风路径之间的最小距离 $d_{\min}$，以及填充率模型的系数 a_0、 a_1和ϵ_f组成。因此，超过给定风速$\lambda_{\hat{v}_H}$的年平均发生率（也称为无方向性飓风危险性曲线）可表示为：

$$\lambda_{\hat{v}_H}(v') = \lambda_{\text{hurr}} \int_{v'}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{\Phi}} f_{\hat{v}_H|\mathbf{\Phi}}(v|\mathbf{\Phi}) f_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{\Phi}) d\mathbf{\Phi} \right) dv \tag{10}$$

其中 $f_{\hat{v}_H|\mathbf{\Phi}}$ 为v_H在给定 $\mathbf{\Phi}$条件下的概率密度函数， $f_{\mathbf{\Phi}}$ = $\mathbf{\Phi}$各分量的联合概率密度函数，且 λ_{hurr} = 0。67 是场址特定飓风的年平均重现率。公式（10）括号中的表达式等于 $f_{\hat{v}_H}$。在所提出的方法中，通过生成层-

wise 样本 $\mathbf{\Phi}|\mathbb{S}_i$ 及其相应的场址特定风速 $\hat{v}_H$，可用于按层构建 $f_{\hat{v}_H|\mathbb{S}_i}$（或等价地，条件累积分布函数）。随后，将这些经验量与 $\tilde{P}$（$\mathbb{S}_i$）结合起来，以获得危险性曲线；该量也在此过程中进行了估计。在此示例中，以下关系成立 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{\Phi}$。

尽管危险性模型 H 的评估所需计算量小于响应估计中涉及的非线性动力分析，但其计算成本仍然很高，无法直接使用蒙特卡罗模拟生成分层样本。本文采用了 Ouyang and Spence（2021）提出的非直线、非平稳高斯随机风荷载模型，并利用针对具体建筑的风洞试验数据进行了标定，通过谱正交适当分解将风速和风向时程转换为随机气动楼面荷载（Chen and Kareem，2005）。符合飓风演化过程的时变风荷载在该子区域内持续数小时。

建筑系统

这座45层钢筋混凝土核心筒建筑由ASCE 7-22性能风工程任务委员会设计。其抗侧力体系由多片剪力墙组成，各层均以连梁连接。剪力墙采用等效框架法建模，将其视为由基于位移的梁柱单元和刚性连杆组成的柱；楼板则建模为刚性楼盖，以模拟水平运动。图3展示了该建筑的结构模型。模态阻尼比取2%。研究建立了应力合力塑性模型，并通过自适应快速非线性分析（AFNA）方案求解（Li，2022；Li等人，2021）。该方法通过线性化P-Delta模型捕捉二阶P-Delta效应。采用三维分段线性屈服面表示钢筋混凝土构件的屈服域，具体细节见Li（2022）。研究未考虑系统不确定性，材料属性和重力荷载采用Li（2022）报告的均值。需要指出的是，本案例研究中不考虑系统不确定性仅是一种建模选择，不应视为所提方案的局限性。此处，$\boldsymbol{\tau}$ 由随机风荷载模型中的高维随机

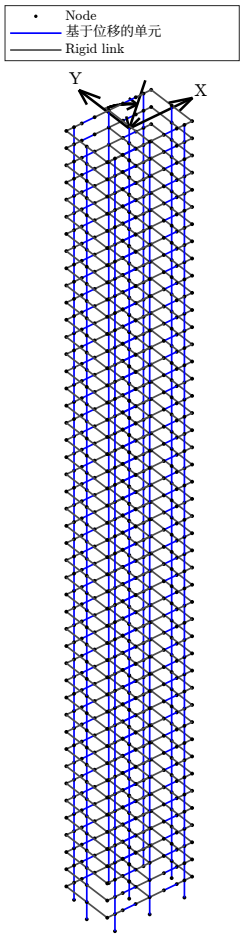


图3。 采用等效框架法建立的45层混凝土建筑三维数值模型。

序列（包含数万量级的随机变量）构成，从而能够捕捉记录间变异性。

Results

为了估计小失效概率，构建概率较低的层至关重要。因此，采用基于 SuS 的第一阶段抽样来初始化流程时， $m = 9$， $p = 0$。2 和 $N = 1300$ 均纳入考虑。这确保了最后一层中有 1300 个样本，其中 $\tilde{P}(\mathbb{S}_m)$ =0。$2^8 = 2$。56×10^{-6}。在 Intel i7-7700 3.60 GHz 处理器上顺序运行时，基于 SuS 的流程耗时约四分钟，生成了 9620 个样本。相比之下，考虑到 $\mathscr{C}(\mathrm{H}) \approx 6$ 毫秒，基于蒙特卡罗的第一阶段抽样需要一个多月。初步研究中采用了 $n_p = 150$，且仅针对……，将变异系数目标值 ω_h 设为 10%

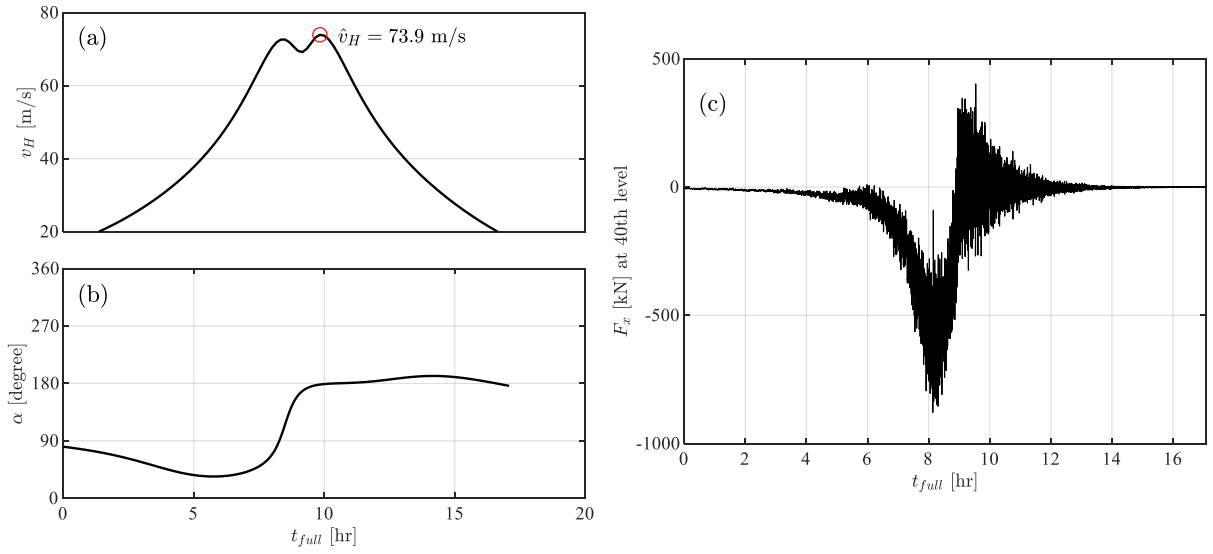


图4. 最后分层中代表性样本的风荷载：（a）小时平均风速的变化；（b）风向；（c）第40层的X方向风荷载。

.....与 Υ_{Y}、roof 和 Υ_{Y} 相关的极限状态。X方向第37层和Y方向第45层最常观测到最大的峰值层间位移比。同样，X方向第28层和Y方向第45层最常观测到最大的残余层间位移比。对于最后一层中的一个代表性样本，图4展示了对应于一场17小时风暴的时变风速和风向。图4(a)还标示了小时平均风速峰值，图4(c)则显示了第40层由此产生的X方向荷载。面对如此大的荷载强度，结构出现了显著非线性；图5对此进行了说明，值得注意的是，风事件结束时屈服构件（红色）所占比例相当高，约为56%。生成 $mn_p = 1350$ 响应样本需要进行非线性动力分析，计算耗时约10天。根据初步研究结果，由于存在显著的、独立于样本分配的方差贡献，变异系数无法降至约20%以下。这意味着 $N = 1300$ 构建危险性曲线并估计层概率时存在较大不确定性，无法满足目标变异系数。因此，使用 $N = 10,000$ 重新进行了第一阶段抽样，但采用了前一次试验给出的固定分层阈值。

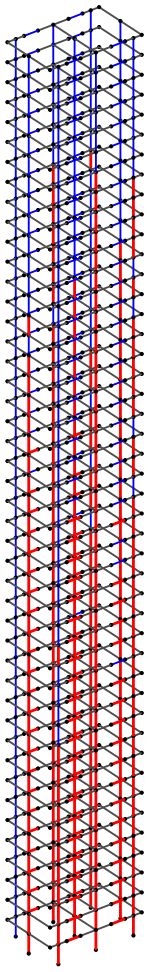


图 5. 最后分层中代表性样本的风致结构屈服 .

预计变异系数的下限将约缩小 $\sqrt{\frac{1300}{10000}}$ 倍，并可降至10%以下。值得注意的是，重复进行第一阶段抽样仅耗时约20分钟。图6(a)比较了使用 $N = 1300$ 和$N = 10,000$构建的危险性曲线，同时展示了反映分层情况的风速范围划分。由于在 $N = 1300$的情况下误差逐步累积，大风速范围内的差异十分显著。此外，还报告了场地特定的ASCE 7-22风速（ASCE 7-22, 2022）。图6(a)还展示了如何通过应用基于子集模拟的第一阶段抽样，高效抽取分布尾部的大风速，从而直接模拟结构的极端响应。图6(a)与

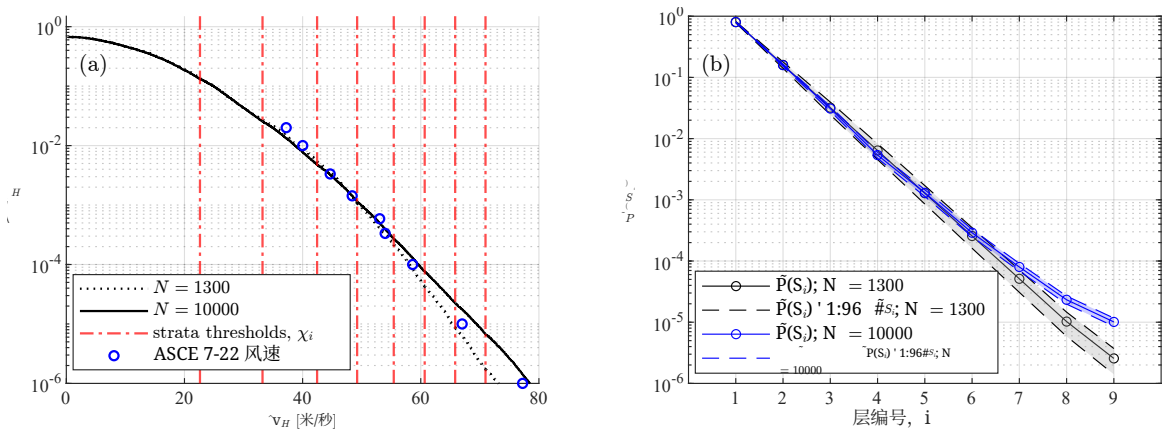


图 6. (a) 更新后的风速危险性曲线；(b) 更新后的层概率 .

表1. 分层与最优样本分配。

层	χ_L [m/s]	χ_U [m/s]	$\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$	n_i
层1	0.00	22.63	8.04×10^{-1}	150
第2层	22.63	33.21	$1。58 \times 10^{-1}$	150
第3层	33.21	42.45	3.10×10^{-2}	150
第4层	42.45	49.23	5.38×10^{-3}	150
第5层	49.23	55.43	1.30×10^{-3}	150
第6层	55.43	60.66	2.90×10^{-4}	150
第7层	60.66	65.82	7.99×10^{-5}	170
第8层	65.82	70.96	2.33×10^{-5}	514
第9层	70.96	∞	1.01×10^{-5}	1146

图1(b)之间的对应关系也值得一提。更重要的是，图6(b)展示了层概率的更新情况，包括估计误差；其中，阴影区域表示估计值周围1.96˜倍标准差（ $\vartheta_{\mathbb{S}_i}$）范围内的散布。更新后的层概率和优化结果见表1。尽管估计值 $\tilde{P}(\mathbb{S}_m)$有所增加，其估计变异系数却从23.0%降至7.9%，约缩小了 $\sqrt{\frac{1300}{10000}}$ 倍。对于优化程序中考虑的三个极限状态，仅在最后三个层中需要额外样本（$n_i - n_p$）˜。所有八个极限状态的年失效概率$P_{f,\ h}$，均使用总计 $n = 2730$ 次响应评估进行了估计。由于这些概率是以发生飓风事件为条件的，因此通过乘以 λ_{hurr}将其转换为年超越率（年失效率）。年超越率、相应的变异系数以及50年可靠性指标，估计为 $\beta_{50} = \Phi_N^{-1}[(1 - \lambda_{\text{hurr}}\tilde{P}_{f,\ h})^{50}]$，其中 Φ_N是标准正态分布函数，

表2. 示例1的年失效概率和估计误差。

极限状态	描述	AER	β_{50}	变异系数	n_{MC}/n
LS1	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{X,\ roof}} > 1/200$	1.24×10^{-7}	4.37	24.0%	3.45×10^{4}
LS2	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{Y,\ roof}} > 1/200$	1.43×10^{-6}	3.80	11.2%	1.37×10^{4}
LS3	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{X,\ roof}} > 1/400$	8.52×10^{-7}	3.93	12.8%	1.75×10^{4}
LS4	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{Y,\ roof}} > 1/400$	8.04×10^{-5}	2.65	9.6%	3.32×10^{2}
LS5	$\Upsilon^{(r)}_{\mathrm{X},28} > 1/1000$	6.15×10^{-7}	4.01	14.7%	1.84×10^{4}
LS6	$\Upsilon^{(r)}_{\mathrm{Y},45} > 1/1000$	7.09×10^{-7}	3.97	12.4%	2.25×10^{4}
LS7	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{X,\ 37}} > 1/200$	2.19×10^{-7}	4.24	18.3%	3.37×10^{4}
LS8	$\hat{\Upsilon}_{\mathrm{Y,\ 45}} > 1/200$	8.21×10^{-6}	3.35	10.7%	2.63×10^{3}

结果列于表2。显然，极限状态 LS2、LS4 和 LS8 的变异系数约为预期的 10%，这表明所提出的方法能够使估计值达到所需的置信度。通过观察表2所列变异系数对应的样本数量，可以更清楚地看出该方法带来的巨大效率提升：若采用简单的蒙特卡罗模拟，除 LS8 需要 $\approx 10^{3}n$ 个样本、LS4 需要 $\approx 10^{2}n$ 个样本外，所有极限状态都需要 $n_{\mathrm{MC}} \approx 10^{4}n$ 范围内的样本数。换言之，如表2中的比值 n_{MC}/n 所示，采用所提出的方法可将达到目标精度所需的样本数减少几个数量级。根据全概率定理，还可以像构建危险性曲线一样，构建感兴趣量关于响应值的年超越率曲线，结果见图7。该图还表明，所提出的方案能够模拟与较低年超越率相关的极端响应。从这些曲线可以看出，总体而言，相较于 X方向，Y方向响应对结构的影响更为显著。

示例 2：地震动激励的钢框架

概述

本例旨在估计四层原型结构在随机地震动作用下，与层间侧移比相关的多个极限状态失效概率。选取第一振型周期处、5%阻尼下的谱加速度， $S_a(T_1,\ 5\%)$，作为

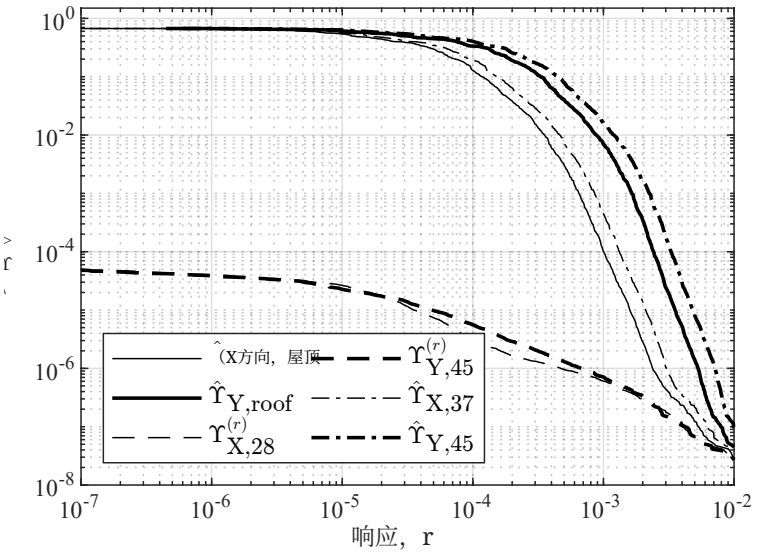


图7. 极限状态函数的年超越率曲线。

分层变量。与仅反映地震动特征的峰值地面加速度（PGA）不同，谱加速度还考虑了激励在结构第一振型周期附近的频率成分（Jalayer and Beck, 2006）。它是地震风险分析中常用的强度指标（IM）。选择 $\chi = S_a$ 的原因是，预计在给定 S_a 值时，非线性响应的变异性远小于整个响应集中的变异性（Shome et al., 1998）。本文考虑以下12种极限状态：结构倒塌，即最大峰值层间侧移比超过15%（Elkady, 2019）；四个楼层各自的峰值层间侧移比 Υ_k，$1 \le k \le 4$及其最大值（所有楼层中的最大值）超过3%；各楼层的残余层间位移比 $\Upsilon_k^{(r)}$，$1 \le k \le 4$及其最大值（所有楼层中的最大值）超过1.41%；以及残余屋顶侧移比 $\Upsilon^{(r)}$ 屋顶超过0.91%。峰值和残余层间位移比以及残余屋顶侧移比的阈值，依据文献建议的可修复性限值选取（Iwata et al., 2006; Bojórquez and Ruiz-García, 2013）。

随机地震动模型

采用点源随机模型进行地面运动建模，其中地震动的频谱同时包含断层破裂和波传播的物理特性，并表示为震源 $E(f; M)$、路径 $P(f; r)$ 和场地 $G(f)$ 的贡献的乘积-

布里（Boore，2003）。频率相关总谱， $A(f; M, r)$，通过地震矩震级 M 和震中距 r 进行参数化，以表征地震危险性。也就是说，

$$A(f; M, r) = (2\pi f)^2 E(f; M) P(f; r) G(f) \tag{11}$$

特别是，采用了 Atkinson 和 Silva（2000）针对加利福尼亚州场址开发的双拐角点源模型，其中震源谱的函数形式包含两个拐角频率。地震动的持续时间由时变包络函数 $e(t; M, r)$ 确定，该函数再次由 M 和 r 参数化。最终，根据此模型，通过用 $e(t; M, r)$ 调制白噪声序列 Z，转换到频域，在乘以 $A(f; M, r)$ 前进行归一化，最后再转换回时域，从而生成地震动加速度时程（Boore，2003）。高维向量 Z 对记录间变异性进行建模，而不确定的地震危险性参数 M 和 r 则代表主要风险因素（Vetter 和 Taflanidis，2012）。用于描述震源、路径和场地贡献，以及时域包络函数与 M 和 r 之间关系的预测关系，可参见其他文献（Atkinson 和 Silva，2000；Boore，2003；Vetter 和 Taflanidis，2012）。校准地震动模型时，采用了以下参数：辐射模式 $R_\Phi = 0.55$，震源剪切波速度 $\beta_s = 3.5$ km/s，密度 $\rho_s = 2.8$ g/cm^3, 地震波速度 $c_Q = 3.5$ km/s；弹性衰减因子 $Q(f) = 180 f^{0.45}$（根据 Atkinson 和 Silva（2000），适用于加利福尼亚州地区），几何扩散函数 $Z(R) = 1/R$，适用于 $R < 70$ km，以及 $Z(R) = 1/70$，适用于 $R >= 70$ km，其中 R 是从震源到场址的径向距离；与路径无关的能量损失通过衰减函数建模，该函数由 f_{max} 滤波器表示，其中 $f_{max} = 15$ rad/s；最后，使用 Boore 和 Joyner（1997）提出的经验曲线，描述 NEHRP “D”类场地条件（即建筑场址条件）下的场地放大。模拟随机地面加速度的持续时间为 60 s，时间步长为 $\Delta t = 0.01$ s。因此，Z 的长度为 6001。包络函数中的参数 λ_t 和 η_t 分别设为 0.2 和 0.05，这与 Boore （2003）的建议一致。

矩震级 M 采用有界古登堡–里希特复发关系建模，

即作为截断指数分布，其中 $M_{min} = 6$和 $M_{max} = 8$（Kramer，2003）：

$$p(M) = \frac{\beta \exp(-\beta(M - M_{min}))}{1 - \exp(-\beta(M_{max} - M_{min}))} \quad M_{min} \le M \le M_{max} \tag{12}$$

其中，区域地震活动性因子 β取值为 0.9 $\log_e(10)$。通过设定下限震级$\lambda_{M_{min}}$ 对应的超越率值，可将式（12）等价地表示为震级为M 的地震的年均超越率 λ_M的方程（Kramer，2003）。在本研究中， $\lambda_{M6} = 0.6$。采用中位数为 15 km、变异系数为 0.4 的对数正态分布对 r 的不确定性进行建模。这里， $\boldsymbol{\sigma} = [M, r, \mathbf{Z}]$，用于计算 S_a 的函数 H 是先进行地震动模型评估，再进行线性振子反应估计；两者依次执行，在 Intel i7-7700 3.60 GHz 处理器上总共仅需 3–4 毫秒。

建筑描述

本研究考虑一栋位于加利福尼亚州洛杉矶市中心、采用周边特殊抗弯框架（SMF）设计的四层原型办公钢结构建筑。建筑的示意平面图如图 8 所示。所考虑的二维非线性模型（在 Elkady 和 Lignos（2015）中称为“B 模型”）表示建筑在东西向加载方向上的响应。该模型对 SMF 的裸钢结构构件进行建模，同时忽略组合楼板和重力框架的影响。Elkady（2016, 2019）在地震工程模拟开放系统（OpenSees）平台（Mazzoni 等，2006）上开发了该模型。结构的基本周期 T_1为 1.43 s，建筑高度 H 为 16.5 m。建模的关键方面包括节点域建模、削弱梁段连接、采用虚拟“ leaning”柱考虑 P-Delta效应，以及使用弹性单元与构件端部弯曲弹簧相结合的方式对构件进行建模。通过指定第一振型和第三振型的阻尼比 ζ，对 Rayleigh阻尼进行校准。材料屈服强度 F_y和 ζ 采用对数正态随机变量建模，其均值分别为 417 MPa 和 1.5%，变异系数分别为 0.06 和 0.4。这里，$\boldsymbol{\tau} = [F_y, \zeta]$。

结果

由于 $\mathscr{C}(\mathrm{H})$ 可忽略，因此采用基于蒙特卡罗的第一阶段抽样。通过设置 $m = 5$、$p = 0.1$ 和 $\hat{n} = 5 \times 10^5$，生成足够数量的样本（使最后分层中有 50 个样本）耗时约 30 分钟，且 $\tilde{P}(\mathbb{S}_5) = 10^{-4}$。层边界通过自适应方式确定为 $\{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\} = \{0, 0.20, 0.48, 0.83, 1.21, \infty\}$，单位为 g（重力加速度）。图 9 展示了地震危险性参数 M 和 r 的分层样本散点图。该图说明了蒙特卡罗抽样众所周知的缺点：为了在最后分层中生成所需数量的样本，第一阶段样本会大量且浪费地生成在较早的层中，其数量大致与层概率成正比。在初步研究中，考虑了 $n_p = 25$，并将变异系数目标值 ω_h 设为所有极限状态均为 10%，但倒塌极限状态设为 5%。表 3 报告了若干关键极限状态的初步研究结果以及估计的最优样本量。值得注意的是，$\mathbb{S}_5$ 中无需增加样本，因为优化算法认为，在层概率较高的较早层中精细估计条件概率，更有利于满足变异系数目标值。结果发现，所需模拟总次数为 $n = 1574$，其中包括 125 个初步测试样本。

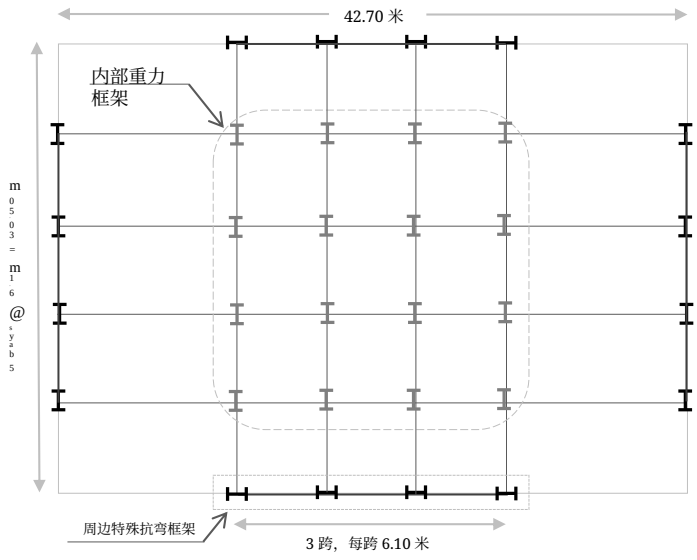


图 8. 四层原型钢结构建筑的平面图。

表 3. 初步研究与最优样本分配。

层	$\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$	$\tilde{P}$(最大$_k$ $\hat{\Upsilon}_k > 15\%$)	$\tilde{P}$(最大$_k$ $\hat{\Upsilon}_k > 3\%$)	$\tilde{P}$(最大$_k$ $\Upsilon_k^{(r)} > 1.41\%$)	$\tilde{P}(\Upsilon^{(r)}$ 屋顶 $> 0。91\%)$	n_i
层 1	9×10^{-1}	0	0	0	0	25
第 2	9×10^{-2}层	0	0	0.04	0.12	659
第 3	9×10^{-3}层	0.24	0.52	0.52	0.60	797
第 4	9×10^{-4}层	0.84	0.92	0.96	0.96	68
第5层	1×10^{-4}	0.92	1.00	1.00	1.00	25

图10展示了估计的谱加速度危险性曲线以及分层阈值。图11(a)展示了不同S_a强度水平（$T_1, 5\%$）和层编号下 $\max_k \hat{\Upsilon}_k$ and $\max_k \Upsilon_k^{(r)}$ 的演变情况。随着谱加速度的增加，漂移比呈上升趋势，这为选择后者作为分层变量提供了依据。需要注意的是，该图仅展示了未倒塌样本的最大残余层间位移角，因为倒塌样本无法量化该指标，但假定相应的极限状态均已被违反。当选取相关的危险性强度指标作为分层变量时，该程序还能够自然地构建易损性函数。例如，对数正态倒塌易损性可以通过以下方式定义：首先，假设条件倒塌概率的每个点估计值位于相应层内的平均 S_a（$T_1, 5\%$）处；其次，采用最大似然法进行拟合（Baker，2015）。此外，计算

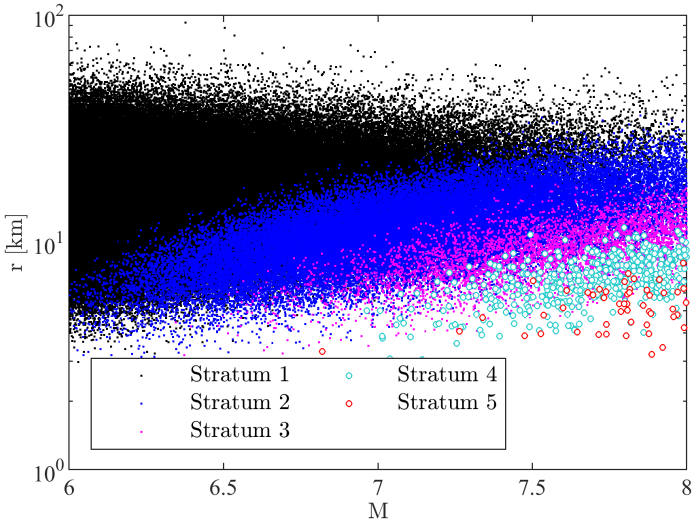


图9。 M 和 r的分层样本散点图。

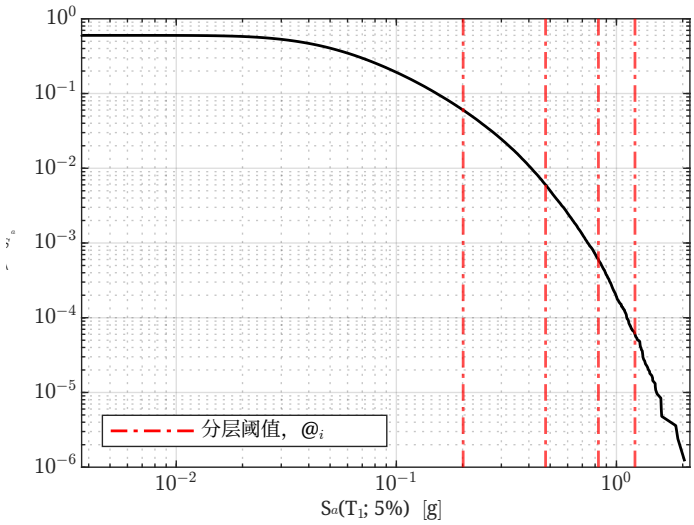


图10. 谱加速度危险性曲线。

˜（$\vartheta_{i,\ h}$）用于倒塌时，可为易损性曲线指定误差界限。采用这一方法，图 11(b) 给出了倒塌易损性曲线，以及在条件概率设为 $P_{fi,\ h}\pm 1$。$65\vartheta_{i,\ h}$ 时估计得到的误差置信界限。倒塌易损性曲线的中位数为 0.69 g，离散性为 0.37。最后，估计总体失效概率并乘以 $\lambda_{M6}=0$。6，将其转换为年失效率。年失效率及其变异系数在图 12 和表 4 中均有展示。图 12 给出了估计的年失效率，以及以标准差表示的误差范围˜， $\kappa_h\lambda_h$。显然，除倒塌外，所有极限状态的估计均达到了目标精度。未满足这一变异系数目标值，可能是因为 5% 的目标值在优化程序中作为一项有效约束，因此对基于初步研究得出的最优样本量的精度更加敏感。然而，初步研究错误地将$\mathbb{S}_2$ 约 0.91% 的条件倒塌概率估计为零，这也凸显了n_p 的重要性。如果要严格达到目标，那么在优化阶段将变异系数目标值设得比实际要求更严格是合理的，不过这可能会增加抽样需求。值得注意的是，本案例研究中相对较高的年失效率，证明采用 $m=5$ 且仅使用 $n=1574$ 个样本即可实现高精度估计是合理的。正如预期，方差缩减因子 n_{MC}/n比第一个示例中的更为有限，但仍达到一个数量级，这归因于우우우우우

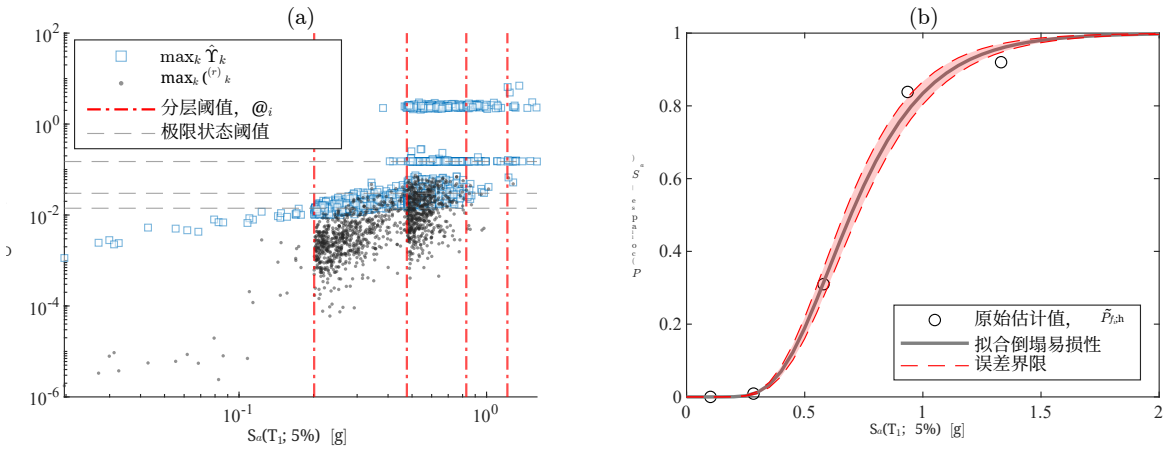


图1(a) 随着 S_a 增加，漂移比的变化情况（T_1，5%）及层数；(b) 估计的倒塌易损性曲线及其误差界限。

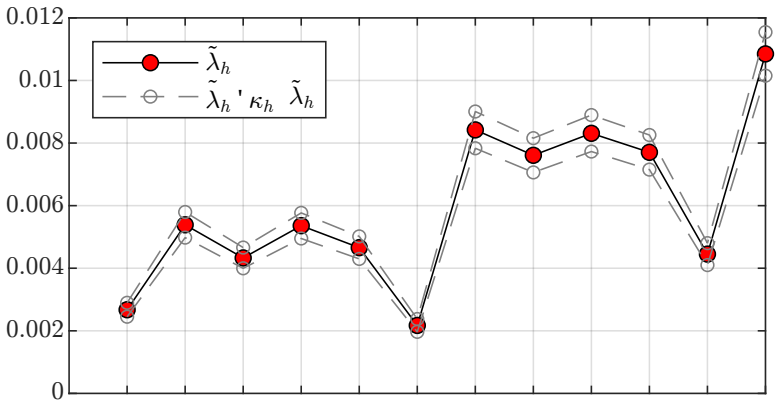


图12。 考虑误差估计的AER。

与第一个示例相比，失效概率相对较高。

结论

使用复杂模型评估极端非线性结构响应，并以失效概率描述超过相关验收准则的不确定性，已成为现代基于性能的工程方法的核心。本文基于经典双重抽样的思想，提出了一种扩展的两阶段抽样随机模拟

表 4. 示例 2 的年失效概率和估计误差。

Limit states	Description	AER	c.o.v	n_{MC}/n
LS1	$\max_k \hat{\Upsilon}_k > 15\%$	$2。67 \times 10^{-3}$	8.32%	20.5
LS2	$\max_k \hat{\Upsilon}_k > 3\%$	5.39×10^{-3}	7.59%	12.2
LS3	$\hat{\Upsilon}_1 > 3\%$	$4。33 \times 10^{-3}$	7.66%	14.9
LS4	$\hat{\Upsilon}_2 > 3\%$	5.36×10^{-3}	7.63%	12.1
LS5	$\hat{\Upsilon}_3 > 3\%$	$4。66 \times 10^{-3}$	7.72%	13.6
LS6	$\hat{\Upsilon}_4 > 3\%$	$2。17 \times 10^{-3}$	9.43%	19.7
LS7	$\max_k \Upsilon_k^{(r)} > 1。41\%$	8.42×10^{-3}	6.98%	9.2
LS8	$\Upsilon_1^{(r)} > 1。41\%$	$7。61 \times 10^{-3}$	7.19%	9.6
LS9	$\Upsilon_2^{(r)} > 1。41\%$	8.31×10^{-3}	7.01%	9.2
LS10	$\Upsilon_3^{(r)} > 1。41\%$	$7。70 \times 10^{-3}$	7.17%	9.5
LS11	$\Upsilon_4^{(r)} > 1。41\%$	$4。45 \times 10^{-3}$	7.87%	13.7
LS12	$\Upsilon_{\mathrm{roof}}^{(r)} > 0。91\%$	$1。08 \times 10^{-2}$	6.42%	8.4

方案，用于应对具有多个极限状态的自然灾害应用中的高维可靠性问题。所提出的方法可视为分层抽样的一种推广，其中第一阶段抽样生成分层样本并估计层概率。第一阶段抽样能够选择一种概率分布事先未知的广义分层变量。为提高效率，当认为蒙特卡罗模拟不可行时，第一阶段抽样采用子集模拟。值得注意的是，第一个案例研究表明，第一阶段抽样对于充分准确地估计层概率至关重要，而这进而影响了变异系数可达到的下限。当第一阶段抽样需求较高时，采用子集模拟相较于蒙特卡罗模拟具有显著优势。另一方面，第二阶段抽样旨在满足目标变异系数的约束，同时以尽可能少的性能函数评估次数估计最终失效概率。为此，采用了一种优化方法，该方法需要开展初步的基于模拟的研究，并推导变异系数的数学表达式。因此，在推导所需表达式时，考虑了马尔可夫链蒙特卡罗所引入的样本相关性，以及层概率的不确定性。案例研究示例不仅展示了如何估计多个极限状态下较大的可靠度并量化误差，也展示了如何以较低的计算开销大致控制这些估计误差。

致谢

本研究部分由美国国家科学基金会（NSF）通过资助项目 CMMI-1750339 和 CMMI-2118488 提供支持。谨此致谢。

数据可用性声明

研究期间生成或使用的所有数据、模型和代码均已包含在提交的文章中。

附录 I. 基于子集模拟的双重抽样估计量的统计特性

˜.....的性质$P_{f_b}h$

本研究采用 Au和Beck（2001）提出的 Metropolis-Hastings（M–H）采样器的改进版本。该版本基于逐分量样本生成，旨在避免原始 M–H 采样器在高维情况下接受率较低的问题。样本 $\boldsymbol{\theta}^{(i-1)}$在 $F_{i-1},\ 2 \le i \le m$ 中服从 $q(\boldsymbol{\theta}|F_{i-1})$，并表示马尔可夫链的连续状态（通常，由多个种子产生多条链），其平稳分布为 $q(\boldsymbol{\theta}|F_{i-1})$。无需对 $\boldsymbol{\tau}$ 进行单独处理，因为它独立于 $\boldsymbol{\sigma}$，因此不受对 $\mathbb{S}_i$进行任何条件化的影响（即，$q(\boldsymbol{\tau}|\mathbb{S}_i) = q(\boldsymbol{\tau})$）。因此，为简化记号，$\boldsymbol{\theta}$ 中同时包含 $\boldsymbol{\sigma}$（使用子集模拟生成的样本）和 $\boldsymbol{\tau}$（使用蒙特卡罗模拟生成的样本），下文不再明确说明。可以证明，样本 $\boldsymbol{\theta}_k^{(i-1)} \in \mathbb{S}_i$将服从：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{1}_{\mathbb{S}_i}(\boldsymbol{\theta}|F_{i-1})q(\boldsymbol{\theta}|F_{i-1})}{P(\mathbb{S}_i|F_{i-1})} &= \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{S}_i}(\boldsymbol{\theta}|F_{i-1})q(\boldsymbol{\theta})\mathbb{1}_{F_{i-1}}(\boldsymbol{\theta})}{P(F_{i-1})P(\mathbb{S}_i|F_{i-1})} \\ &= \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{S}_i}(\boldsymbol{\theta})q(\boldsymbol{\theta})}{P(\mathbb{S}_i)} = q(\boldsymbol{\theta}|\mathbb{S}_i)\end{aligned} \tag{13}$$

这意味着 $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i-1)})\right) = P_{f_p}h$，因此 $\mathbb{E}(\tilde{P}_{f_b}h) = P_{f_b}h$，其中 $\tilde{P}_{f_b}h$ 是从 $\mathbb{S}_i$ 中选取的 n_i 个样本（记作 W_i）ˆ 的随机子集上失效指示函数的样本均值，所选样本来自 ˆn_i 个样本的集合（记作 W_i），表示为：

$$\tilde{P}_{f_i,h} = \frac{1}{n_i}\sum_k \mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i-1)}) \tag{14}$$

˜$P_{f_b}h$ 的方差可根据以下假设和记号推导，这些假设和记号与 Au ˆ 和 Beck（2001）类似：(a) 在（$i-1$）模拟层级，尽管 W_i（和 W_i）中的样本通常彼此相关，这是由于随机种子本身存在相关性，但假设各链间与失效发生相关的相关性为零，即 $\mathbb{E}\left((\mathbb{1}_{(i-1)fh,jk} - P_{f_i,h})\,(\mathbb{1}_{(i-1)fh,j'k'} - P_{f_i,h})\right) = 0$

对于 $j \neq j'$，其中 $\mathbb{1}_{(i-1)fh,\,jk}$表示 $\mathbb{1}_{f,h}(\boldsymbol{\theta}_{jk}^{(i-1)})$，而 $\boldsymbol{\theta}_{jk}^{(i-1)} \in F_{i-1}$表示第 j 条马尔可夫链中的第 k 个样本；(b) $\mathbb{S}_i$中样本的 $\mathbb{1}_{(i-1)fh,\,jk}$与$\mathbb{1}_{(i-1)fh,\,jk'}$之间的协方差记为：

$$R_{\mathbb{S}_i}(k-k') = \mathbb{E}\left((\mathbb{1}_{fh,jk}^{(i-1)} - P_{f_i,h})(\mathbb{1}_{fh,jk'}^{(i-1)} - P_{f_i,h})\right) \tag{15}$$

其中，调用了样本序列的平稳性，因此其依赖关系仅取决于马尔可夫链中状态（$k-k'$）之间的相对距离。此外，由于所有链在概率上是等价的，因此与链索引 j 的独立性是合理的。值得注意的是，零时滞下的协方差 $R_{\mathbb{S}_i}(0)$ 等于 $P_{f_i,h}(1-P_{f_i,h})$，因为它等于 $\mathbb{S}_i$中样本的失效指示函数（伯努利随机变量）的方差。由于任意 jth 条链的所有马尔可夫链状态不一定都位于 $\mathbb{S}_i$中，更具体地说，不一定位于 $\mathbb{W}_i$中，因此令 π_i 表示至少有一个样本位于 $\mathbb{W}_i$中的链索引集合，并令 π_{ij} 包含每个 $j \in \pi_i$对应的马尔可夫状态索引集合。于是，对于 $2 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\tilde{P}_{f_i,h}) = \vartheta_{i,h}^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j\in\pi_i}\sum_{k\in\pi_{ij}}(\mathbb{1}_{fh,jk}^{(i-1)} - P_{f_i,h})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n_i^2}\sum_{j\in\pi_i}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k\in\pi_{ij}}(\mathbb{1}_{fh,jk}^{(i-1)} - P_{f_i,h})\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n_i^2}\sum_{j\in\pi_i}\sum_{k,k'\in\pi_{ij}} R_{\mathbb{S}_i}(k-k') \\
&= \frac{1}{n_i^2}\sum_{j\in\pi_i} R_{\mathbb{S}_i}(0)\psi_{ij} = \frac{P_{f_i,h}(1-P_{f_i,h})}{n_i}\psi_i
\end{aligned} \tag{16}$$

其中，ψ_{ij}是比值 $R_{\mathbb{S}_i}(l)/R_{\mathbb{S}_i}(0)$的线性组合，其表达式（即待评估的索引 l 及相应系数）取决于 π_i，π_{ij}。层内相关性由 $\psi_i = \sum_{j\in\pi_i}\psi_{ij}/n_i$刻画，其依据是˜平稳马尔可夫链各状态之间的链内相关性。显然，估计量$P_{f_i,\ h}$是一致的；并且显然，对于第一层，$\mathbb{V}(\tilde{P}_{f_1,\ h}) = P_{f_1,\ h}(1-P_{f_1,\ h})/n_1$即为蒙特卡罗模拟方差表达式。由于假设链间˜˜样本相关性为零，因此$P_{f_i,\ h}$和$P_{f_j,\ h}$相互独立。值得注意的是，

$\vartheta^2_{i,h}$ 也考虑了 $\boldsymbol{\tau}$ 中不确定性的蒙特卡罗实现所带来的变异性，因为在计算公式（15）的 $R_{\mathbb{S}_i}$时，这些不确定性也包含在用于评估$\mathbb{1}_{(i-1)fh,jk}$的$\boldsymbol{\theta}$样本中。

$\tilde{P}$（$\mathbb{S}_i$）的性质

一般而言， $\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$ 是渐近无偏的，如下所示：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{P}(\mathbb{S}_i)) &= \mathbb{E}(\tilde{P}(F_{i-1})\tilde{P}(\bar{F}_i|F_{i-1})) \\ &= [P(F_{i-1}) + O(1/N)]P(\bar{F}_i|F_{i-1}) \\ &= P(\mathbb{S}_i) + O(1/N), \quad 2 \le i \le m-1\end{aligned} \tag{17}$$

其中，上方横线表示事件的补集。 $\tilde{P}(F_i|F_{i-1})$ 和$\tilde{P}(\bar{F}_{i-1})$ 的上述性质可见于原始的子集模拟论文（Au和Beck，2001）。显然，$\tilde{P}(\mathbb{S}_1)$ 仅使用蒙特卡罗模拟样本进行估计，且是无偏的。此外， $\mathbb{E}(\tilde{P}(\mathbb{S}_m)) = \mathbb{E}(\tilde{P}(F_{m-1})) = \sim \sim P(\mathbb{S}_m) + O(1/N)$。接下来，将根据 Au和Beck（2001）中用于计算 $\tilde{P}(F_i|F_{i-1})$ 变异系数的相关量，推导 $\mathbb{V}(P(\mathbb{S}_i))$ 和协方差 $\mathrm{Cov}(P(\mathbb{S}_i), P(\mathbb{S}_j))$ 的表达式：

$$\delta_i = \sqrt{\frac{(1-P(F_i|F_{i-1}))(1+\gamma_i)}{NP(F_i|F_{i-1})}}, \quad 1 \le i \le m-1 \tag{18}$$

其中， γ_i 是与 F_{i-1} 的样本相关的相关因子，这些样本也位于 F_i 中（Au和Beck，2001）。显然， $\gamma_1 = 0$。在以下讨论中，假设$\{P(F_i|F_{i-1}), P(F_j|F_{j-1})\}$相互独立；根据Au和Beck（2001），这是一个合理的假设。这也意味着 $\tilde{P}(\mathbb{S}_i)$是无偏的（即消除了 $O(1/N)$项）。由于 $\tilde{P}(\mathbb{S}_i) = \tilde{P}(F_{i-1}) - \tilde{P}(F_i)$，因此可将 $2 \le i \le m-1$写为：

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\tilde{P}(\mathbb{S}_i)) = \vartheta^2_{\mathbb{S}_i} &= \mathbb{V}(\tilde{P}(F_{i-1})) + \mathbb{V}(\tilde{P}(F_i)) \\ &\quad - 2\mathrm{Cov}(\tilde{P}(F_{i-1}), \tilde{P}(F_{i-1})\tilde{P}(F_i|F_{i-1})) \\ &= P^2(F_{i-1})(1-2P(F_i|F_{i-1}))\sum_{k=1}^{i-1}\delta_k^2 + P^2(F_i)\sum_{k=1}^{i}\delta_k^2\end{aligned} \tag{19}$$

在边界处，$\mathbb{V}(\tilde{P}(\mathbb{S}_1)) = \mathbb{V}(\tilde{P}(F_1)) = \tilde{P}(F_1)(1-\tilde{P}(F_1))/N$，类似地，$\mathbb{V}(\tilde{P}(\mathbb{S}_m)) = \mathbb{V}(\tilde{P}(F_{m-1})) = P^2(F_{m-1})\sum_{k=1}^{m-1}\delta_k^2$。同样，协方差$\vartheta^2_{\mathbb{S}_{ij}} = \mathsf{Cov}(\tilde{P}(\mathbb{S}_i), \tilde{P}(\mathbb{S}_j))$可推导为：

$$\begin{aligned}
\vartheta^2_{\mathbb{S}_{ij}} &= \mathbb{E}\left(\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\tilde{P}(\mathbb{S}_j)\right) - P(\mathbb{S}_i)P(\mathbb{S}_j) \\
&= \mathbb{E}\left(\tilde{P}(F_{i-1})\tilde{P}(\bar{F}_i|F_{i-1})\tilde{P}(F_{j-1})\tilde{P}(\bar{F}_j|F_{j-1})\right) - P(\mathbb{S}_i)P(\mathbb{S}_j) \\
&= \left(P(F_i|F_{i-1}) - P^2(F_i|F_{i-1})(\delta_i^2+1)\right)P(\bar{F}_j|F_{j-1}) \\
&\times P^2(F_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{i-1}\delta_k^2+1\right)\prod_{k=i+1}^{j-1}P(F_k|F_{k-1}) - P(\mathbb{S}_i)P(\mathbb{S}_j)
\end{aligned} \tag{20}$$

对于 $1 < i < m-1$ 和 $i < j < m$的情况。为方便记号起见，ξ_{ij} 将定义如下：

$$\xi_{ij} = \left(P(F_i|F_{i-1}) - P^2(F_i|F_{i-1})(\delta_i^2+1)\right)\prod_{k=i+1}^{j-1}P(F_k|F_{k-1}) \tag{21}$$

对于所有可能的情形，$i \le j$, $\left(\vartheta^2_{\mathbb{S}_{ij}} + P(\mathbb{S}_i)P(\mathbb{S}_j)\right)$可写为：

$$\begin{cases}
\xi_{ij}P^2(F_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{i-1}\delta_k^2+1\right)P(\bar{F}_j|F_{j-1}), & 1 < i < m-1, \\
& i < j < m \\
\xi_{ij}P^2(F_{i-1})\left(\sum_{k=1}^{i-1}\delta_k^2+1\right), & 1 < i < m, \\
& j = m \\
\xi_{ij}P(\bar{F}_j|F_{j-1}), & i = 1, 1 < j < m \\
\xi_{ij}, & i = 1, j = m \\
\vartheta^2_{\mathbb{S}_i} + P(\mathbb{S}_i)P(\mathbb{S}_j), & i = j
\end{cases} \tag{22}$$

显然，可以使用公式（22）构建完整的协方差矩阵（即 $i \le j$和 $i > j$）。

~的性质$P_{f,h}$

可以证明，总体估计量渐近无偏，如下所示：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{P}_{f,h}) &= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)|\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left(P_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) = \sum_{i=1}^{m}P_{f_i,h}(P(\mathbb{S}_i)+O(1/N))\\ &= P_{f,h}+O(1/N)\end{aligned} \tag{23}$$

虽然公式（23）通常成立，但在进一步假设 ~ ~$P(F_i|F_{i-1})$ 与 $P(F_j|F_{j-1})$，$i \neq j$ 相互独立的条件下，总体估计量是无偏的。根据全方差定理，总体估计量的方差可以分解为：

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)|\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right)\right)\\ &\quad+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{P}_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)|\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\vartheta_{i,h}^2\tilde{P}^2(\mathbb{S}_i)\right)+\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m}P_{f_i,h}\tilde{P}(\mathbb{S}_i)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\vartheta_{i,h}^2\left(\vartheta_{\mathbb{S}_i}^2+P^2(\mathbb{S}_i)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}P_{f_i,h}P_{f_j,h}\vartheta_{\mathbb{S}_{ij}}^2\end{aligned} \tag{24}$$

由于 $\delta_i^2 = O(1/N)$，$\vartheta_{\mathbb{S}_i}^2 = O(1/N)$，且 $\vartheta_{i,\,h}^2 = O(1/n_i)$，可以看出 $\tilde{P}_{f,\,h}$ 是一致的（即保证当 $N \to \infty$和 $n_i \to \infty$时收敛到真实概率）。

参考文献

Amelin, M.（2004年）。“关于电力市场的蒙特卡罗模拟与分析。”博士论文，瑞典皇家理工学院，斯德哥尔摩，瑞典。

美国土木工程师学会（2019）。基于性能的风设计预标准。弗吉尼亚州雷斯顿。

Arnab, R.（2017）。调查抽样理论与应用。学术出版社。

Arunachalam, S. 和 Spence, S. M. J.（2021）。“用于估算风工程应用中小失效概率的随机模拟方案。” 欧洲安全与可靠性会议论文集（*ESREL 2021*）。

ASCE 7-22（2022）。建筑物及其他结构的最低设计荷载。美国土木工程师学会（ASCE），弗吉尼亚州雷斯顿。

Atkinson, G. M. 和 Silva, W.（2000）。“加利福尼亚州地震动的随机建模。” 美国地震学会会刊，90(2)，255–274。

Au, S. (2007). “增强一致性可靠性分析的近似解。”《概率工程力学》, 22(1), 77–87.

Au, S.-K. and Beck, J. (2003a). “高维重要抽样。”《结构安全》, 25(2), 139–163. Au, S.-K. and Beck, J. L. (1999). “用于可靠性计算的新型自适应重要抽样方案。”《结构安全》, 21(2), 135–158.

Au, S.-K. and Beck, J. L. (2001). “通过子集模拟估算高维中的小失效概率。”《概率工程力学》, 16(4), 263–277.

Au, S.-K. and Beck, J. L. (2003b). “基于动力分析的子集模拟及其在地震风险中的应用。”《工程力学杂志》, 129(8), 901–917.

Baker, J. W. (2015)。“利用结构动力分析进行高效的解析脆弱性函数拟合。”*EarthquakeSpectra*，31(1)，579–599。

Bect, J.、Li, L. 和 Vazquez, E.（2017）。“贝叶斯子集模拟。”*SIAM/ASA*不确定性量化期刊，5(1)，762–786。Bojórquez, E. 和 Ruiz-García, J.（2013）。"窄带地震地面运动作用下抗弯钢框架的残余漂移需求。"地震工程与结构动力学，42(11)，1583–1598。Boore, D. M.（2003）。"利用随机方法模拟地震动。"纯粹与应用地球物理学，160(3)，635–676。Boore, D. M. 和 Joyner, W. B.（1997）。"一般岩石场地的场地放大效应。"美国地震学会会刊，87(2)，327–341。Chen, X. 和 Kareem, A.（2005）。"基于正交适当分解的结构动态风荷载效应建模、分析与模拟。"《工程力学杂志》，131(4)，325–339。Cochran, W. G.（2007）。抽样技术。John Wiley & Sons。Der Kiureghian, A.（2022）。结构与系统可靠性。剑桥大学出版社。Der Kiureghian, A. 和 Ditlevsen, O.（2009）。"偶然不确定性还是认知不确定性？这重要吗？"《结构安全》，31(2)，105–112。Elkady, A.（2016）。"地震区域中采用深翼缘宽翼缘柱设计的钢抗弯框架的倒塌风险评估。"博士论文，土木工程与应用力学系，麦吉尔大学，加拿大蒙特利尔。Elkady, A.（2019）。"采用特殊抗弯框架的原型钢结构建筑的二维OpenSees数值模型。"*GitHub*代码库。Elkady, A. 和 Lignos, D. G.（2015）。"重力框架对采用周边特殊抗弯框架的钢框架建筑超强度和倒塌承载力的影响。"地震工程与结构动力学，44(8)，1289–1307。

Evans, W. D. (1951). “关于分层与最优分配。” 美国统计学会杂志, 46(253), 95–104.

Fishman, G. (2013). 蒙特卡洛：概念、算法与应用. Springer Science & Business Media.

Glasgow, G. (2005). “分层抽样类型。”《社会测量百科全书》，爱思唯尔，纽约，683–688。

Gurley, K. and Kareem, A. (1999). “小波变换在地震、风与海洋工程中的应用。”《工程结构》，21(2), 149–167。

Gurley, K. R., Tognarelli, M. A., and Kareem, A. (1997). “风工程分析与模拟工具。”《概率工程力学》，12(1), 9–31。

Hsu, W.-C. and Ching, J. (2010). “通过并行子集模拟评估多个极限状态的小失效概率。”《概率工程力学》，25(3), 291–304。

Iwata, Y., Sugimoto, H., and Kuwamura, H. (2006). “基于兵库县南部地震实际数据的钢结构建筑可修复性极限。” 第*38*届联合小组会议论文集。风与地震效应。*NIST* 特别出版物，1057, 23–32。

Jakobsen, F. 和 Madsen, H.（2004）。“用于风暴潮建模的参数化热带气旋模型之比较与进一步发展。”《风工程与工业空气动力学杂志》，92(5)，375–391。

Jalayer, F. 和 Beck, J.（2006）。“运用信息论概念比较用于表征地震动不确定性的替代强度指标。”论文集，第*8*届美国全国地震工程会议，论文编号*974*。

Koutsourelakis, P.-S.、Pradlwarter, H. J. 和 Schueller, G. I.（2004）。“高维结构可靠性，第一部分：算法与应用。”《概率工程力学》，19(4)，409–417。

Kramer, S. L.（2003）。岩土地震工程。普伦蒂斯·霍尔。

Li, B.（2022）。“动态非线性结构的快速随机响应估计：创新框架与应用。”博士论文，密歇根大学，安娜堡，密歇根州。

Li, B.、Chuang, W.-C. 和 Spence, S. M.（2021）。“一种用于快速时程分析的自适应快速非线性分析（AFNA）算法。”第八届 *ECCOMAS* 结构动力学与地震工程计算方法专题会议。

Li, D.-Q.、Yang, Z.-Y.、Cao, Z.-J.、Au, S.-K. 和 Phoon, K.-K.（2017）。“采用广义子集模拟进行边坡稳定性系统可靠度分析。”应用数学建模，46，650–664。

Li, H.-S.、Ma, Y.-Z. 和 Cao, Z.（2015）。“一种用于估计多个随机响应的小失效概率的广义子集模拟方法。”《计算机与结构》，153，239–251。

Li, X.-W., Zhao, Y.-G., Zhang, X.-Y., 和 Lu, Z.-H. (2022)。“时变可靠性越界率的显式模型。” *ASCE-ASME*《工程系统风险与不确定性期刊》*A*辑：土木工程，8(1)，04021087。

Mazzoni, S., McKenna, F., Scott, M. H. 和 Fenves, G. L.（2006）。*OpenSees* 命令语言手册。加州大学伯克利分校，加利福尼亚州。

Melchers, R. (1989). “结构系统中的重要抽样。”《结构安全》, 6(1), 3–10. Melchers, R. E. and Beck, A. T. (2018). 结构可靠度分析与预测. John Wiley & Sons.

Neyman, J. (1934). “代表法的两个不同方面：分层抽样法与目的性选择法。”《皇家统计学会杂志》, 97(4), 558–606.

Ouyang, Z. and Spence, S. M. (2021). “适用于遭受飓风的工程化建筑系统的基于性能的风工程框架。”《建筑环境前沿》, 133.

Papaioannou, I., Betz, W., Zwirglmaier, K., and Straub, D. (2015). “用于子集模拟的马尔可夫链蒙特卡罗算法。”《概率工程力学》, 41, 89–103.

Papaioannou, I.、Papadimitriou, C. 和 Straub, D.（2016）。“用于结构可靠性分析的序贯重要抽样。”《结构安全》，62，66–75。

Pharr, M.、Jakob, W. 和 Humphreys, G.（2017）。“13 - 蒙特卡罗积分。”《基于物理的渲染》，M. Pharr、W. Jakob 和 G. Humphreys 编，摩根·考夫曼出版社，波士顿，第三版，747–802。

Rao, J. N. K.（1973年）。“关于分层和分析调查的双重抽样。”*Biometrika*，60(1)，125–133。

Rice, S. O. (1944年). “随机噪声的数学分析。”贝尔系统技术期刊, 23(3), 282–332.

Schueller, G. I., Pradlwarter, H. J., and Koutsourelakis, P.-S. (2004). “高维可靠性估计方法的批判性评析。”《概率工程力学》,19(4),463–474.

Shields, M. D. and Zhang, J. (2016). “拉丁超立方抽样的推广。”《可靠性工程与系统安全》，148, 96–108.

Shinozuka, M. and Deodatis, G. (1991年). “通过谱表示模拟随机过程。”《应用力学评论》，44(4), 191–204.

Shinozuka, M. and Deodatis, G. (1996年). “通过谱表示模拟多维高斯随机场。”《应用力学评论》，49(1),29–53.

Shome, N., Cornell, C. A., Bazzurro, P., and Carballo, J. E.（1998年）。“地震、记录与非线性响应。”《地震谱》，14(3)，469–500。

Stein, M.（1987年）。“使用拉丁超立方抽样进行模拟的大样本性质。”*Technometrics*，29(2)，143–151。

Sudret, B. (2012年)。“用于结构可靠性与不确定性量化的元模型。” *arXiv* 预印本 *arXiv:1203.2062*。

Vetter, C. and Taflanidis, A. A. (2012年). “用于地震风险评估中随机地震动建模的全局敏感性分析。” 土动力学与地震工程, 38, 128–143.

Vickery, P.、Skerlj, P. 和 Twisdale, L.（2000年）。“使用经验路径模型模拟美国的飓风风险。”结构工程学报，126(10)，1222–1237。

Vickery, P. J. 和 Twisdale, L. A. (1995a)。“美国飓风风速预测。”结构工程学报，121(11)，1691–1699。

Vickery, P. J. 和 Twisdale, L. A. (1995b)。“飓风风速预测的风场与填充模型。”结构工程学报，121(11)，1700–1709。