arXiv:2305.06354v1 [econ.TH] 10 May 2023

Multiple Adjusted Quantiles

Christopher P. Chambers and Alan D. Miller*

May 11, 2023

Abstract

We cardinally and ordinally rank distribution functions (CDFs). We present a new class of statistics, maximal adjusted quantiles, and show that a statistic is invariant with respect to cardinal shifts, preserves least upper bounds with respect to the first order stochastic dominance relation, and is lower semicontinuous if and only if it is a maximal adjusted quantile. A dual result is provided, as are ordinal results. Preservation of least upper bounds is given several interpretations, including one that relates to changes in tax brackets, and one that relates to valuing options composed of two assets.

1 引言

我们的目标是以基数方式对实值累积分布函数进行排序，具体方法将在下文说明。我们通过使用一种称为统计量的工具来实现这一目标；统计量为每个实值累积分布函数关联一个实数。我们主要关注这样一种性质：给定两个累积分布函数，其各自被某个累积分布函数一阶随机占优时，能够同时一阶随机占优这两个函数的最小累积分布函数（即“并”）的统计量，应与原先两个累积分布函数中较优者的统计量相同。对偶地，我们有时也要求：给定两个累积分布函数，同时被二者一阶随机占优的最大累积分布函数的统计量，应与原先两个累积分布函数中较差者的统计量相同。

我们还考虑一项要求这些统计量在基数平移下可交换的性质。我们利用这些性质刻画最大调整分位数。这是一类新的统计量，它将分布函数上的（下）分位数族加以推广。这类统计量可应用于广泛的情境，包括学术评分、金融、健康和不平等问题。

*Chambers：乔治城大学经济学系，ICC 580，西北区第37街与O街，华盛顿特区 20057。电子邮箱：Christopher.Chambers@georgetown.edu。网站：http://chambers.georgetown.domains/。Miller：西安大略大学法学院，加拿大安大略省伦敦市里士满街1151号，邮编N6A 3K7。电子邮箱：alan.miller@uwo.ca。网站：http://alandmiller.com/。本研究部分得益于加拿大研究主席计划的资助。完整致谢将在最终版本中补上。

考虑设定税档的问题；也就是说，收入达到某一水平后便需按特定税率纳税。在此情境中，我们的统计量以收入分布为输入，并输出税档的临界值。我们的第一条公理——交分离性——要求该统计量相对于累积分布函数上的交运算可交换；也就是说，给定两个累积分布函数，同时被二者一阶随机支配的最大累积分布函数，必须等价于原来两个累积分布函数中较小的那个。为理解这条公理，考虑收入分布 F，其中 $\rho(F)$ 表示税档临界值。假设由于税收转移制度或某个外生事件，收入分布变为 G，税档临界值降至 $\rho(G)$，因此现在收入较低的人也需按给定税率纳税。我们的公理指出，税档临界值之所以下降，必定是因为有些人的收入减少了，而不是因为有人获益。换言之，获益者无关紧要；去除他们获得的收益（得到分布$F \wedge G$）不会使税档临界值进一步下降（因此 $\rho(F \wedge G) = \rho(G)$）。

一条相关公理——并分离性——要求统计量与累积分布函数上的并运算可交换；也就是说，给定两个累积分布函数，在一阶随机占优意义上同时支配二者的最小累积分布函数，必须等价于这两个原始累积分布函数中较优的一个。在这里，收入分布的变化若导致税档临界值上升（从G 变为 F），必定是因为有些人变得更富裕，而不是因为另一些人境况变差。并分离性要求统计量忽略受损者——消除他们的损失（得到分布 $F \vee G$）不会使税档临界值进一步上升（因此 $\rho(F \vee G) = \rho(F)$）。

结合平移等变性和平弱连续性条件，我们利用这些公理刻画两类统计量，称之为最大调整分位数和最小调整分位数。政策制定者希望以第90百分位数为依据确定税档临界值，但她认为第80百分位数也能提供一些信息。根据以往经验，她认为这两个百分位数之间合理的差距为5000美元年收入。她分别计算这两个百分位数，并给第80百分位数加上5000美元进行调整。并分离性使我们能够刻画最大调整分位数，也就是这两个数中的较大值；而交分离性则使我们能够刻画最小调整分位数，其中临界值取两者中的较小值。我们的例子涉及在两个分位数之间作出选择，但她可以采用自己选择的任何调整方案，只需满足若干技术约束。

A second application comes from finance. Consider the problem of an investor who can invest in two comonotone assets, F and G, with statistics $\rho(F)$ and $\rho(G)$ respectively. Suppose that $\rho(F) \geq \rho(G)$. Join separability requires the statistic to ignore the states of the world in which F does worse than G. That is, the statistic must treat F as being equivalent to a derivative asset whose return tracks the better of F and G in all states of the world; we may think of this as an *option to choose* either F or G after the state is realized. Similarly, meet separability requires G to be equivalent to the derivative composed of the lesser of F and G.

我们的框架不允许我们追踪 F 和 G之间的相关结构。因此，我们关于并分离性的论述隐含着，我们研究的是统计量 ρ，它在任何时候都】【。

两个资产是共单调的，这与引入一项可在两者中择一的期权相兼容。然而，该统计量必须仅基于这两个资产的边际分布，而忽略其相关结构。

利用这些公理，我们将“风险价值”推广为一种统计量，投资者利用它根据投资组合在预先指定的分位数（例如第 5 个百分位数）处的价值来比较不同的投资组合。在实践中，投资者可能同时关注第 5 个和第 10 个百分位数。如果两者之间的差异较小，他们可能更关注第 5 个百分位数，因为他们知道自己具备一定的对冲风险的能力；如果差异较大，他们则可能更关注第 10 个百分位数。因此，在对投资组合进行评分时，他们会用一个常数（或许是对冲成本）调整第 5 个百分位数。我们利用并分离性来刻画一种统计量，该统计量根据两个数值中的最大值对投资组合进行评分；而交分离性则用于刻画其最小值。

我们提供了最大调整分位数的两种表示方式。最容易理解的方式如下（忽略一些技术细节）。给定任意一个累积分布函数（CDF）以及介于零和一之间的任意数值α ，我们可以讨论该 CDF 的 α-下分位数。[1] 现在，对于给定的 CDF，各个分位数之间具有弱序关系。因此，我们引入一个障碍函数 c。函数 c作用于零和一之间的一个数值子集，对于给定的 CDF 和分位数 α，我们从该 CDF 的 α 分位数中减去这一数值。我们将所得数值称为调整后的 α-下分位数；我们的统计量返回最大调整 α分位数。

In addition to our main characterization, we present two related theorems. First, we show that a dual result holds; that is, by replacing the join separability axiom with meet separability, and appropriately modifying our continuity axiom, we establish a characterization of the class of minimal adjusted quantiles described above. Second, we provide an ordinal analogue of our results.

1.1 Related literature

The join separability property that we employ has been used in economics since at least Kreps (1979) in the context of ranking menus of available options.[2] Kreps uses the property to characterize rankings that can be represented as “indirect utilities,” in the sense that there is an underlying ranking of alternatives such that a menu is indifferent to its highest ranked alternative. He shows that the ordinal content of this is that if a menu A is deemed as good as menu B, then A must be indifferent to the combined menu $A \cup B$. In our framework, the property is essentially identical to one postulated by Chateauneuf et al. (2008), and we interpret it in much the same way.

与 Kreps（1979）的联系可以表述得更加精确。若将任意

[1]本文大部分内容都考察下分位数：一般而言， α 分位数的集合可以是一个非退化的闭区间，而下分位数是该区间中的最小值。[2]Kreps 将这一性质称为策略理性。该性质已在其他经济学领域得到研究，包括群体识别（Miller，2008；Cho 和 Ju，2020）、信息聚合（Chambers 和 Miller，2011；Dimitrov 等，2012；Chambers 等，2020）、效率测度（Hougaard 和 Keiding，1998；Christensen 等，1999；Chambers 和 Miller，2014a）以及影响力测度（Chambers 和 Miller，2014b，2018）。关于菜单选择的近期研究，另见 Kopylov（2021）。

给定累积分布函数与其上图的闭包相对应，那么显然，这些上图的并集对应于原始累积分布函数关于一阶随机占优的并。在满足适当的技术假设时，只要满足并运算性质，就可以建立一种基于累积分布函数的克雷普斯式表示。[3] 我们不在此建立这种表示，而是通过加入平移等变性，展示如何由此确定一类特定的统计量。

Chateauneuf 等人（2008）基于一种称为 Sugeno 积分的概念，刻画了一类“广义分位数”，该概念源自 Sugeno（1974）。这些作者同时施加了交公理和并公理的变体。Sugeno 积分是一种技术性概念，是一类依赖于称为容量的非可加集合函数的积分。从这个意义上说，它与决策理论中 Choquet 积分的发展相呼应（Schmeidler，1989）。数学金融文献也研究了本质上相同的一类广义分位数（或 Sugeno 积分），并称之为“Lambda 风险价值”，即$\Lambda V@R$ （见 Frittelli 等人，2014；Burzoni 等人，2017；Corbetta 和 Peri，2018）。

有趣的是，经济学中对“Sugeno 积分”的运用似乎早于 Chateauneuf 等人（2008）。Moulin（1980）提出了一套策略无关机制理论，用于在单峰框架下确定公共选择。他的命题 3 仅依据策略无关性，刻画了本质上属于 Sugeno 积分的对象（但定义该积分的容量不必将 $\varnothing$ 赋值为 0，也不必将全集赋值为 1）。

回到集合，Hougaard 和 Keiding（1998）、Christensen 等（1999）以及 Chambers 和 Miller（2014a）表明，在有限维欧几里得环境中，对全面集同时施加并运性质和交运性质，会产生一条备选项的单调路径（如 Thomson 和 Myerson（1980）所述）；给定集合包含的路径越长，该集合的秩就越高。Chambers 和 Miller（2018）指出，“路径”之所以出现，是因为“全面性”带来的定义域限制。该文的推论 1 表明，在有限环境中，对于其他可用来定义集合全面性的偏序，排序的路径性质仍然成立。

不难看出，这与 Kreps（1979）的联系在于：“路径”对应于上图上的列昂惕夫式排序（这是并运性质所蕴含的），同时也对应于下图上的列昂惕夫式排序（这是交运性质所蕴含的）。事实上，列昂惕夫式偏好是唯一一类使集合上关系的最大化与其补集上的最小化大致对应的偏好。类似地，Sugeno 积分以一条“路径”为基础，该路径是相对于累积分布函数的下图而言的。

近年来，决策理论文献对分位数产生了浓厚兴趣，这一研究始于 Manski (1988)；Chambers (2007)；Rostek (2010)。近年来，de Castro 和 Galvao (2019a)；de Castro 等人 (2019) 进一步研究了动态环境中的分位数。经济学领域其他近期相关研究包括 Long 等人 (2021)；de Castro 等人 (2022)；de Castro 和 Galvao (2022)；de Castro 等人 (2019)；de Castro 和 Galvao (2019b)。尽管近期人们重新燃起了对这一主题的兴趣，但分位数（及其推广形式）在经济学领域的研究已有多年。在金融领域，分位数（以“价值……这一术语表示）

[3] Similar results can also be shown to result in the framework of Chateauneuf et al. (2008), when restricting the join axiom to comonotonic random variables.

“处于风险之中”）被广泛用作衡量风险的指标。我们还指出，理解随机变量的实值映射这一思想，也是现代经济理论中的一个重要主题；例如，参见 Mu 等人（2021）。

我们的刻画与决策理论中的“变分”模型具有一些共同特征；事实上，它也与经济学中的许多流行模型具有相似之处。在这类文献中，若暂不考虑风险态度，则首先设定一个状态空间，并按照以下方式评估状态依赖映射。每个定义在世界状态上的概率都与一个“成本”函数相关联，该函数类似于我们的障碍项；这一成本反映了决策者对模糊性的态度。对于每个概率测度和每个状态依赖映射，决策者将该映射在该概率下的期望值与成本相加。随后，决策者通过所有此类经成本调整后的期望值中的最小值来评估状态依赖映射。该模型最初由 Maccheroni 等人（2006）刻画，而这一刻画所采用的工具如今已成为标准方法，并出现在经济学的诸多研究领域中。为此，我们为自己的结果提供了一种对偶解释，其基本思路与上述方法相似，即用累积分布函数（CDF）和分位数水平取代状态依赖映射和概率测度。这种对偶化只需将并分离性替换为交分离性，并对连续性条件作出相应调整即可实现。此外，我们还确立了这一结果的序数内容，其出发点是定义在累积分布函数之上的原始二元关系。我们认为，这一研究还可以进一步拓展：从状态空间模型和一组状态依赖映射出发，内生地确定概率测度和效用指标（如 Rostek（2010）所做的那样），然后根据序数行为，对由此诱导的分位数函数给出完整的决策理论刻画。

2 预备知识

$\mathbb{R}$ 上的分布函数是一个映射 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它单调不减、上半连续，并满足 $\{0,1\}\subset F(\mathbb{R})\subseteq[0,1]$。分布函数的集合记为 $\mathcal{F}$。

分布函数可以按照一阶随机占优进行排序；也就是说，$G\geq_{\text{FOSD}}F$ 若对所有 $x\in\mathbb{R}$，均有 $G(x)\leq F(x)$。随机占优关系在分布函数集合上构成一个格。特别地，$G\vee_{\text{FOSD}}F$ 由 G 和 F逐点取最小值得到，而 $G\wedge_{\text{FOSD}}F$ 则由逐点取最大值得到。

对于概率空间 (Ω,Σ,p) 上的随机变量 X,Y，我们定义 $X\vee Y$和$X\wedge Y$为满足以下条件的随机变量：$(X\vee Y)(\omega)=\max\{X(\omega),Y(\omega)\}$，且 $(X\wedge Y)(\omega)=\min\{X(\omega),Y(\omega)\}$。对于随机变量 X，用 F_X表示其对应的分布函数。

We now discuss a connection between $F_{X\vee Y}$ and $F_X\vee_{\text{FOSD}}F_Y$. We will say random variables X,Y on a probability space (Ω,Σ,p) are **comonotonic** if

$$(X(\omega)-X(\omega'))(Y(\omega)-Y(\omega'))\geq 0.$$

共单调性要求两个随机变量几乎处处朝相同方向弱变。这是一种完全序相关的概念。以下结果确立了在具有.....性质的分布函数类上所诱导的格运算。

关于随机变量的逐点格运算，随机占优具有良好的相容性。特别地，如果两个随机变量是共单调的，那么格运算与分布函数的求取可以交换。定理1是一个众所周知的结果，为了完整起见，我们在此将其列出。该定理使我们能够将本研究与 Chateauneuf 等人（2008）的研究联系起来。

定理1. 设 $(\Omega\ \Sigma, p)$ 为一个概率空间，且 X, Y 是随机变量。则

$$F_{X\vee Y} \geq_{\text{FOSD}} F_X \vee_{\text{FOSD}} F_Y$$

and

$$F_X \wedge_{\text{FOSD}} F_Y \geq_{\text{FOSD}} F_{X\wedge Y}.$$

此外，如果 X和 Y是共单调的，那么 $F_{X\vee Y} = F_X \vee_{\text{FOSD}} F_Y$和 $F_{X\wedge Y} = F_X \wedge_{\text{FOSD}} F_Y$。

定理1的证明见附录。

显然，共单调性条件对于 $F_{X\vee Y} = F_X \vee_{\text{FOSD}} F_Y$ 并非必要条件。一种证明方式是，任何满足对于所有 ω， $X(\omega) \geq Y(\omega)$ 的 X 和 Y，显然都满足这一等式。然而，还可以构造更复杂的例子。这里唯一需要指出的是，完全序数依赖会导致并运算的保持（类似地，它也会导致交运算的保持）。

以下推论表明，对于任意两个分布函数，都存在生成这两个分布函数的实值随机变量，使得它们的并（期权）能够生成这两个分布函数的并。因此，与随机变量相比，直接使用分布函数会在一定程度上损失一般性，但期权的分布函数与其底层分布函数的并之间也存在紧密的联系。这一结果无疑是众所周知的，但为了完整起见，我们仍在此陈述。

推论 1. 设 F、$G \in \mathcal{F}$。则存在一个概率空间 $(\Omega\ \Sigma$、$p)$ 以及随机变量 X 和 Y，使得 $F = F_X$、 $G = F_Y$ 以及 $(F \wedge_{\text{FOSD}} G) = F_{X\wedge Y}$、$(F \vee_{\text{FOSD}} G) = F_{X\vee Y}$。

推论 1 的证明见附录。

3 关于分布函数的排序

我们将映射 $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 称为统计量。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的分布函数 F，有一个特别值得注意的统计量：下分位数函数，其中 $0 < \alpha < 1$ 的 α 分位数定义为

$$\rho_\alpha(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

From 从这里开始，我们省略形容词“下”，直接称其为分位数。

现在我们介绍一些统计量可能满足的性质。

其中前两个与累积分布函数的“期权”解释有关。第一条公理可以理解为：对于共单调随机变量，在两个随机变量中择优选择的期权，其价值等同于这两个随机变量中较优者的价值。Chateauneuf 等人（2008）以随机变量的形式提出了这条公理。

并分离性：对于所有 $F, G \in \mathcal{F}$, $\rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) = \max\{\rho(F)\ \rho(G)\}$。

我们称分布函数序列 $\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ 弱收敛到 $F \in \mathcal{F}$，如果对于 F 的所有连续点 x， $F_n(x) \to F(x)$。

下半连续性：假设对于所有 n， $\rho(F_n) \leq x^*$，且 $F_n \to F$。则 $\rho(F) \leq x^*$。

最后，我们定义两个公理，要求统计量在累积分布函数的基数变换下保持不变。第一个公理要求统计量对任意基数平移保持不变，即给随机变量的每个取值都加上一个常数。

平移等变性：对于所有 $b \in \mathbb{R}$，如果 $g(x) = x + b$，那么 $\rho(F \circ g^{-1}) = \rho(F) + b$。

第二个公理要求统计量在仿射变换下保持不变。

仿射等变性：对于所有 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，如果 $g(x) = ax + b$，那么 $\rho(F \circ g^{-1}) = a\rho(F) + b$。

Our main result provides two equivalent characterizations of join separability, translation equivariance, and lower semicontinuity.

令 Φ 为满足以下条件的函数 $\phi: \mathbb{R} \to [0, 1)$ 的集合：(a) ϕ 单调不减，(b) ϕ 右连续，(c) 存在 $x \in \mathbb{R}$，使得 $\phi(x) = 0$，(d) 存在 $x \in \mathbb{R}$，使得$\phi(x) > 0$，以及 (e) $\lim_{x\to\infty} \phi(x) < 1$。令 P^Φ 为满足以下条件的统计量 ρ^ϕ：$\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 的集合：对于所有 $\rho^\phi \in P^\Phi$，存在 $\phi \in \Phi$，使得 $\rho^\phi(F) = \min\{t: F(x) \geq \phi(x - t)$ 对所有 $x\}$ 均成立。[4]

令 $\mathcal{C}$ 为所有单调不减、下半连续函数 $c: (0, 1) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的集合，其中存在 $b \in (0, 1)$ 使得 $c(b) = \infty$。令 $P^\mathcal{C}$ 为满足以下条件的函数 ρ^c 的集合：对于 $c \in \mathcal{C}$， $\rho^c(F) = \sup_{\alpha\in(0,1)}(\rho_\alpha(F) - c(\alpha))$。[5]

Theorem 2. *For a statistic $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, the following three statements are equivalent:*

1. *ρ satisfies join separability, translation equivariance, and lower semicontinuity.*
2. *$\rho \in P^\Phi$.*
3. *$\rho \in P^\mathcal{C}$*

The proof of Theorem 2 is given in the appendix.

The following corollary shows that imposing affine equivariance in place of translation equivariance leads to a full characterization of quantiles.

Corollary 2. *A function $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ satisfies join separability, affine equivariance, and lower semicontinuity if and only if it is a quantile for some $\alpha \in (0, 1)$.*

推论 2 的证明见附录。

[4] Observe that the minimum in this expression exists; we will show that the set of t for which $F(x) \geq \phi(x - t)$ for all x is a closed set. Suppose that $t^n \to t^*$, and $F(x) \geq \phi(x - t^n)$ for all x and n. Then $F(x + t^n) \geq \phi(x)$ for all x and n. Fixing x and appealing to upper semicontinuity of F, we establish that $F(x + t^*) \geq \phi(x)$, or $F(x) \geq \phi(x - t^*)$ for all x, as desired.

[5] It will become clear that a function so-defined is always real valued.

4 The dual result

联分离性和下半连续性公理在某种意义上显然分别与交分离性和上半连续性互为对偶。本节将通过施加这些对偶性质，正式证明定理 2 的对偶陈述成立。

The upper quantile function, where the α quantile for $0 < \alpha < 1$ is defined by

$$\rho_\alpha^+(F) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\}.$$

We define dual analogues of the join separability and lower semicontinuity axioms.

Meet separability: For all $F, G \in \mathcal{F}$, $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) = \min\{\rho(F)\ \rho(G)\}$

Upper semicontinuity: Suppose that $\rho(F_n) \geq x^*$ for all n, and that $F_n \to F$. Then $\rho(F) \geq x^*$.

令 Ψ 为函数 $\psi\colon \mathbb{R} \to [0,1$ 的集合，满足 (a) ψ 单调不减，(b) ψ 右连续，(c) 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $\psi(x) = 1$，(d) 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得$\psi(x) < 1$，以及 (e) $\lim_{x\to-\infty} \psi(x) > 0$。令 P^Ψ 为统计量 $\rho^\psi\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 的集合，使得对于所有 $\rho^\psi \in P^\Psi$，均存在 $\psi \in \Psi$ 使得 $\rho^\psi(F) = \max\{t\colon F(x) \leq \psi(x-t)$ 对所有 $x\}$ 均成立。

令 $\mathcal{D}$ 为所有单调不减、上半连续函数 $d : (0,1) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的集合，其中存在 $b \in (0,1)$ 使得 $d(b) = -\infty$。令 $P^\mathcal{D}$ 为满足以下条件的函数 ρ^d 的集合：对于 $d \in \mathcal{D}$, $\rho^d(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(\rho_\alpha^+(F) - d(\alpha))$。

Theorem 3. *For a statistic $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, the following three statements are equivalent:*

1. *ρ satisfies meet separability, translation equivariance, and upper semicontinuity.*
2. *$\rho \in P^\Psi$*
3. *$\rho \in P^\mathcal{D}$.*

The proof of Theorem 3 is given in the appendix.

5 Ordinal comparisons

In this section, we investigate the ordinal content of our results. We focus on our meet separability and upper semicontinuity characterization Theorem 3, to keep things in line with classical economic literature. Given is a binary relation $\succeq$ on $\mathcal{F}$. We want to know when there is a $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ for which for all $F, G \in \mathcal{F}$, $\rho(F) \geq \rho(G)$ iff $F \succeq G$, and for which ρ conforms to the properties of Theorem 3.

To simplify the exposition, denote by $F + b$ the function $F \circ h^{-1}$ where $h(x) = x + b$.

Consider the following properties, meant to invoke the content of the cardinal properties in Theorem 3

The first property is a known necessary condition for any ranking which can be represented by a real-valued function:

Weak Order: $\succeq$ is complete and transitive.

Our first structural axiom is intended to capture the ordinal content of Meet separability.

Ordinal Meet Separability If $G \succeq F$, then $(F \wedge_{\text{FOSD}} G) \sim F$.

Our next property is an ordinal counterpart of translation equivariance.

Ordinal Translation Invariance $F \succeq G$ implies $F + b \succeq G + b$.

We need an analogue of the continuity condition. The following is standard:

Ordinal Upper Semicontinuity: If for all n, $F_n \succeq G$ and $F_n \to F$, then $F \succeq G$.

Finally, we postulate an axiom claiming that any F can be strictly dominated below by a degenerate distribution function.

For $x \in \mathbb{R}$, we define

$$F_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < x \\ 1 & \text{if } y \geq x \end{cases}.$$

F_x represents a point mass at x.

Lower Unboundedness: For all F, there exists x for which $F \succ F_x$.

We present an ordinal analogue of Theorem 3.

Theorem 4. *A binary relation $\succeq$ satisfies weak order, ordinal meet separability, ordinal translation invariance, ordinal upper semicontinuity, and lower unboundedness if and only if there is $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ for which $F \succeq G$ if and only if $\rho(F) \geq \rho(G)$ and ρ satisfies the properties of Theorem 3.*

The proof of Theorem 4 is given in the appendix.

6 Conclusion

We have presented a new class of statistics, maximal adjusted quantiles, and have shown that they are characterized by three axioms: join separability, translation equivariance, and lower semicontinuity. We have also provided dual and ordinal results.

我们介绍并提供的统计量有许多潜在用途。我们在引言中描述了两种应用。第一种涉及税档的设定。更广泛地说，在其他需要利用分布来选择临界点的情境中，我们也可以应用这些思路。例如，在考试评分时，教授必须选择临界点，以确定学生的分数是否足以获得 A，或是否通过考试。同样，

政府机构可能希望设定一条贫困线，以确定某人是否符合贫困人口的认定标准。

The second application we provided involved the ranking of financial assets. In this context, our statistic is a generalization of a commonly used measure known as value at risk. We may also apply this idea to other contexts in which a researcher may need to cardinally score or ordinally rank distributions, of incomes, wealth, health outcomes, student performance, weather, etc.

Appendix

Proof of Theorem 1. As $X \vee Y \geq X$ and $X \vee Y \geq Y$, it is clear that $F_{X \vee Y} \geq_{\text{FOSD}} F_X$ and $F_{X \vee Y} \geq_{\text{FOSD}} F_Y$. Consequently, $F_{X \vee Y} \geq_{\text{FOSD}} F_X \vee_{\text{FOSD}} F_Y$. A similar statement holds for meets.

Now, suppose that X and Y are comonotonic. We will establish that $F_{X \vee Y} = F_X \vee_{\text{FOSD}} F_Y$. By means of contradiction, suppose there exists $z \in \mathbb{R}$ for which $F_{X \vee Y}(z) < \min\{F_X(z) \;\; F_Y(z)\}$. Then

$$p(\{\omega : X(\omega) \vee Y(\omega) \leq z\}) < p(\{\omega : X(\omega) \leq z\}),$$

因此，存在某个 $\omega \in \Omega$，使得 $X(\omega) \leq z < Y(\omega)$。类似地，存在 $\omega' \in \Omega$，使得 $Y(\omega') \leq z < X(\omega')$。现在，若 $Y(\omega) \leq Y(\omega')$，则可得 $z < Y(\omega) \leq Y(\omega') \leq z$，即 $z < z$，这就产生了矛盾。因此，$Y(\omega') < Y(\omega)$。因此，由于 X 和Y的共单调性，$X(\omega') \leq X(\omega)$。于是，$z < X(\omega') \leq X(\omega) \leq z$，即 $z < z$，这就产生了矛盾。因此，$F_{X \vee Y}(z) = \min\{F_X(z) \;\; F_Y(z)\}$。类似的证明可得交的等式。

□

推论 1 的证明。设 F,$G \in \mathcal{F}$。按惯例，将 $[0,1]$ 上的点值逆函数定义为

$$\begin{aligned} F^{-1}(y) &= \inf\{x : F(x) \geq y\} \\ G^{-1}(y) &= \inf\{x : G(x) \geq y\}. \end{aligned}$$

Consider the probability space $((0,1) \;\; \Sigma, p)$, where Σ are the Lebesgue measurable sets and p is the uniform distribution on $(0,1)$. Let $X = F^{-1}$ and $Y = G^{-1}$. Note that $F_X = F$ and $F_Y = G$.[6] Moreover, X and Y are both weakly increasing, hence comonotonic. Therefore, by Theorem 1, the conclusion holds. □

We state and prove the following three lemmas.

引理1. 统计量 ρ 满足并分离性，当且仅当对于所有 F、G、 $F \geq_{\text{FOSD}} G$ ，都有 $\rho(F) \geq \rho(G)$。

[6]For example, we can show that $F^{-1}(y) \leq z$ if and only if $y \leq F(z)$. Hence, the probability of y for which $F^{-1}(y) \leq z$ is $F(z)$. To see this, if $y \leq F(z)$, then by definition $F^{-1}(y) \leq z$. Suppose instead that $y > F(z)$. By right continuity and nondecreasingness of F, there is $\epsilon^* > 0$ for which for all $0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*$, $y > F(z + \epsilon^*)$. Consequently, by definition $F^{-1}(y) > z$. These two facts establish the claim.

引理1的证明。设 ρ 满足并分离性，并设 F、$G \in \mathcal{F}$ 满足 $F \geq_{\text{FOSD}} G$。根据并分离性，$\rho(F) \vee \rho(G) = \rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) = \rho(F)$。由于 $\rho(F) \vee \rho(G) \geq \rho(G)$，因此可得 $\rho(F) \geq \rho(G)$。 □

引理 2. 设 $g\colon \mathbb{R} \to (0,1]$ 为任意非增函数，且存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x) < 1$。那么 $\rho(F) = \inf\{x\colon F(x) \geq g(x)\}$ 是下半连续的。

引理 2 的证明。设 $F_n \to F$，并假设对所有 n，都有 $\rho(F_n) \leq x^*$。根据定义，对所有 n 和 $\epsilon > 0$，都有 $F_n(x^* + \epsilon) \geq g(x^* + \epsilon)$。设 $x_m \to x^*$ 为 F 的任意一个连续点序列，并且 $x_m > x^*$（F 的连续点在 $\mathbb{R}$中稠密）。那么，由于 F_n是非减的而 g 是非增的，对所有 m，都有 $F_n(x_m) \geq g(x_m)$；又由于 $F_n \to F$，取极限可得，对所有 m，都有 $F(x_m) \geq g(x_m)$。因此，$\inf\{x\colon F(x) \geq g(x)\} \leq x^*$。 □

引理 3. 设 $g\colon \mathbb{R} \to (0,1]$ 是任意非递增函数，且存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x) < 1$。那么 $\rho(F) = \inf\{x\colon F(x) \geq g(x)\}$ 满足交分离性和并分离性。

引理 3 的证明。设 $F, G \in \mathcal{F}$，并假设 $\rho(F) \geq \rho(G)$。我们先考虑 $F \vee_{\text{FOSD}} G$，并令 $x^* = \rho(F)$。注意，对每个 $\epsilon > 0$，都有 $F(x^* - \epsilon) < g(x^* - \epsilon)$。因此，对于任意$\epsilon > 0$，$(F \vee_{\text{FOSD}} G)(x^* - \epsilon) < g(x^* - \epsilon)$，从而 $\rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) \geq x^*$。另一方面，对于任意$\epsilon > 0$，我们有 $F(x^* + \epsilon) \geq g(x^* + \epsilon)$；类似地，由于 $\rho(G) \leq x^*$，我们有 $G(x^* + \epsilon) \geq g(x^* + \epsilon)$，于是 $(F \vee_{\text{FOSD}} G)(x^* + \epsilon) \geq g(x^* + \epsilon)$，从而 $\rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) \leq x^*$，这意味着 $\rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) = x^*$。

接下来我们考虑 $F \wedge_{\text{FOSD}} G$。类似地，令 $y^* = \rho(G) \leq \rho(F)$。那么对于任意 $\epsilon > 0$,$G(y^* + \epsilon) \geq g(y^* + \epsilon)$，使得 $(F \wedge_{\text{FOSD}} G)(y^* + \epsilon) \geq g(y^* + \epsilon)$，从而 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) \leq y^*$。对于任意 $\epsilon > 0$, $G(y^* - \epsilon) < g(y^* - \epsilon)$，且由于 $y^* \leq \rho(F)$，$F(y^* - \epsilon) < g(y^* - \epsilon)$，从而 $(F \wedge_{\text{FOSD}} G)(y^* - \epsilon) < g(y^* - \epsilon)$，这意味着 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) \geq y^*$，或 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) = y^*$。 □

For the following proofs, we define, for $x \in \mathbb{R}$, the distribution F_x, where

$$F_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < x \\ 1 & \text{if } y \geq x \end{cases}.$$

Proof of Theorem 2. **Part 1:** We show that statement (1) implies statement (2). Let ρ satisfy the three axioms. For $z \in \mathbb{R}$, define $\phi_z(x) \equiv \inf\{F(x) : \rho(F) \leq z\}$. Denote $\phi \equiv \phi_0$.

第一步。我们首先证明，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$\phi_z(x) = \phi(x - z)$。令 $z \in \mathbb{R}$，并令 $h(x) = x - z$。回顾一下，$\phi_z(x) = \inf\{F(x)\colon \rho(F) \leq z\}$。根据平移等变性，$\rho(F \circ h^{-1}) = \rho(F) - z$，因此 $\rho(F) = \rho(F \circ h^{-1}) + z$。由此可得，$\phi_z(x) = \inf\{F(x) : \rho(F \circ h^{-1}) \leq 0\} = \inf\{(F \circ h)(x)\colon \rho(F) \leq 0\} = \inf\{F(x - z)\colon \rho(F) \leq 0\} = \phi(x - z)$。

Step Two. We demonstrate that ϕ is in Φ; that is, that it satisfies the five properties.

To see that ϕ is non-decreasing, let $x \leq x'$. Then for all F for which $\rho(F) \leq 0$, we have $F(x) \leq F(x')$. Obviously then $\phi(x) \leq F(x')$ for all $\rho(F) \leq 0$. It follows that $\phi(x) \leq \inf\{F(x') : \rho(F) \leq 0\} = \phi(x')$.

要证明 ϕ 是右连续的，注意到 $\mathcal{F}$ 中的所有函数都是上半连续且单调不减的。由于 ϕ 是上半连续函数族的逐点下确界，因此 ϕ 必定是上半连续的（参见 Berge，1997，第 76 页，定理 3）。由于 ϕ 是上半连续且单调不减的，因此 ϕ是右连续的。

要证明存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $\phi(x) = 0$，考虑分布 F_0，其中$F_0(x) = 0$ 对 $x < 0$ 成立，且 $F_0(x) = 1$ 对 $x \geq 0$成立。根据构造，对于所有 x，均有 $F_0(x) \geq \phi_{\rho(F_0)}(x)$。因此，对于所有 x，均有 $F_0(x) \geq \phi(x - \rho(F_0(x)))$。这意味着，对于所有 x，均有 $F_0(x + \rho(F_0(x))) \geq \phi(x)$。因此，对于所有 $x < -\rho(F_0(x))$，均有 $\phi(x) = 0$。

为了证明存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $\phi(x) > 0$，反设 $\phi(x) = 0$ 对所有 x都成立。我们证明对所有 $z \in \mathbb{R}$，$\rho(F_0) \leq z$，这与假设矛盾，从而证明所述结论。令 $z \in \mathbb{R}$。由第一步可知，对所有 $x \in \mathbb{R}$，$\phi_z(x) = 0$。

我们断言存在 $F^* \in \mathcal{F}$使得 $\rho(F^*) \leq z$且 $F^*(0) = 0$。由于 $\phi_z(0) = 0$，存在一个序列 $F^n \in \mathcal{F}$，使得 $\rho(F^n) \leq z$ 且 $F^n(0) \to 0$。考虑分布F_1，其中 $F_1(x) = 0$对于 $x < 1$成立，而 $F_1(x) = 1$对于 $x \geq 1$成立。定义 $G^n = F^n \wedge_{\text{FOSD}} F_1$。现在注意到 $F^n \geq_{\text{FOSD}} G^n$。由引理1，根据并分离性可得 $\rho(F^n) \geq \rho(G^n)$。因此，$\rho(G^n) \leq z$。接下来，定义 $H^1 = G^1$和 $H^n = G^n \vee_{\text{FOSD}} H^{n-1}$，其中 $n \geq 2$。根据并分离性，对每个 n，都有 $\rho(H^n) \leq z$；此外，对每个 x，对于所有 n，都有 $H^{n+1}(x) \leq H^n(x)$。最后，很容易看出，对于某个 $F^* \in \mathcal{F}$，$H^n \to F^*$。也就是说，取 $F^*(x) = \inf_n H^n(x) = \lim_{n\to\infty} H^n(x)$，并注意到 $F^* \in \mathcal{F}$：这是因为 F^*单调不减，满足相应的极限条件，并且作为上半连续函数的下包络，它也是上半连续的（引用与上文相同的 Berge，1997）。显然$F^*(0) = 0$。根据下半连续性，$\rho(F^*) \leq z$。

对于分布 F_0, $F_0(x) = 1$ 对 $x \geq 0$成立；因此，对所有 x，$F_0(x) \geq F^*(x)$。这意味着 $F^* \geq_{\text{FOSD}} F_0$。因此，根据引理 1 $\rho(F^*) \geq \rho(F_0)$，进而 $\rho(F_0) \leq z$。

为证明 $\lim_{x\to\infty} \phi(x) < 1$，反设 $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1$，从而得到矛盾。首先，假设存在 x^*，使得 $\phi(x^*) = 1$。令 $F \in \mathcal{F}$，使得对所有 x，$F(x) < 1$。定义 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使 $h(x) = x - \rho(F)$。由于 $(F \circ h^{-1})(x^*) < 1$，$\rho(F \circ h^{-1}) > 0$。但根据平移等变性，$\rho(F \circ h^{-1}) = \rho(F) - \rho(F)$，得到 $0 > 0$，这与假设矛盾。

接下来，假设不存在这样的 x^*。那么注意到 $\phi \in \mathcal{F}$。令 $h(x) = \sqrt[3]{x}$，并注意到 $F^* \equiv \phi \circ h \in \mathcal{F}$ 也成立。注意，存在 $\overline{x}$，使得对所有 $x \geq \overline{x}$，$x - \rho(F^*) > h(x)$，并且 $x - \rho(F^*) - h(x)$ 关于 x 单调递增。令 $\varepsilon > 0$，使得 $\varepsilon < \overline{x} - \rho(F^*) - h(\overline{x})$。令$x^* \geq \overline{x}$，使得 $\phi(h(x^*) + \varepsilon) > \phi(h(x^*))$.[7] 注意，根据构造，$x^* - \rho(F^*) > h(x^*) + \varepsilon$。因此，根据单调性，$\phi(x^* - \rho(F^*)) \geq \phi(h(x^*) + \varepsilon)$。所以，$\phi(x^* - \rho(F^*)) > \phi(h(x^*)) = F^*(x^*)$。这意味着 $\phi_{\rho(F^*)}(x^*) > F^*(x^*)$。但是，根据 ϕ 的定义，对于所有 x，$F^*(x) \geq \phi_{\rho(F^*)}(x)$，这就产生了矛盾。

第三步。令 $F^* \in \mathcal{F}$ 使得 $F^*(x) \geq \phi(x)$ 对所有 x 均成立。我们证明 $\rho(F^*) \leq 0$。对于函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，定义 $U(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > f(x)\}$为 $\mathbb{R}^2$中 f的下图的补集。由于 $U(\phi)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是开集，因此它是可分的，故为 Lindel¨空间（参见 Willard，2004，定理 16.11）。由于对所有满足$\rho(F) \leq 0$的 F，$U(F)$ 在 $U(\phi)$ 中是开集，并且 $U(\phi) \subseteq \bigcup_{F\in\mathcal{F}:\rho(F)\leq 0} U(F)$，可知 $\{U(F) \colon \rho(F) \leq 0\}$ 是 $U(\phi)$ 的一个开覆盖。因此，根据 Lindel¨空间的定义，存在一个可数子覆盖$\{F_n\} \subset \{F\colon \rho(F) \leq 0\}$，使得 $U(\phi) \subseteq \bigcup_n U(F_n)$。由于对每个 n，$U(F_n) \subseteq U(\phi)$，我们可以得出 $U(\phi) = \bigcup_n U(F_n)$。因此。

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) \geq y\} = \bigcap_n \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_n(x) \geq y\}.$$

[7] The existence of x^* follows as $\phi(x) < 1$ for every x and $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1$.

现在定义 $F_1'(x) = F_1(x)$，并对 $n \geq 2$，$F_n'(x) = \min\{F_n(x)\ F_{n-1}'(x)\}$ 进行归纳定义。对于每个 n，$\rho(F_n) \leq 0$，因此由归纳法和并分离性可得 $\rho(F_n') \leq 0$。然后，对于所有 $n \geq 1$ 以及所有 x，$F_{n+1}'(x) \leq F_n'(x)$，并注意到

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x) \geq y\} = \bigcap_n \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F_n'(x) \geq y\}. \tag{1}$$

最后，我们声称 $(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \to F^*$。对于所有 $x \in \mathbb{R}$，由于 $F_n'(x)$ 是关于 $\mathbb{R}$ 的递减序列，因此 $\lim_n F_n'(x) = \phi(x)$。由于对于所有 x，$F^*(x) \geq \phi(x)$，因此可得 $\lim_n \max\{F_n'(x)\ F^*(x)\} = F^*(x)$。因此，$(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \to F^*$。

Because $(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \leq_{\text{FOSD}} F_n'$, it follows from join separability and Lemma 1 that $\rho(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \leq \rho(F_n') \leq 0$ for all n. By lower semicontinuity, because $\rho(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \leq 0$ for all n and $(F_n' \wedge_{\text{FOSD}} F^*) \to F^*$, it follows that $\rho(F^*) \leq 0$.

第四步。令 $F \in \mathcal{F}$。我们证明，对于所有 $x\}$，$\rho(F) = \min\{t\colon F(x) \geq \phi(x-t)$。根据构造，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$F(x) \geq \phi_{\rho(F)}(x) = \phi(x - \rho(F))$。这意味着，对于所有 $x\}$，$\rho(F) \in \{t\colon F(x) \geq \phi(x-t)$，因此，对于所有 $x\} \leq \rho(F)$，$\min\{t\colon F(x) \geq \phi(x-t)$。接下来，令 $t \in \mathbb{R}$ 满足对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$F(x) \geq \phi(x-t)$。定义 $h(x) = x - t$，并注意到对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$F(x+t) = (F \circ h^{-1})(x) \geq \phi(x)$。根据第三步，$\rho(F \circ h^{-1}) \leq 0$，由平移等变性可得 $\rho(F) \leq t$。因此，对于所有 $x\}$，$\rho(F) \leq \min\{t\colon F(x) \geq \phi(x-t)$。综上，对于所有 $x\}$，$\rho(F) = \min\{t\colon F(x) \geq \phi(x-t)$】【。

第 2 部分：我们证明陈述（2）蕴含陈述（3）。令 $\rho \in P^\Phi$，并令 $\phi \in \Phi$ 满足 $\rho = \rho^\phi$。定义 $c\colon (0,1) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，使得 $c(\alpha) = \inf\{x\colon \phi(x) \geq \alpha\}$，其中空集上的下确界定义为 $+\infty$。我们证明 $c \in \mathcal{C}$ 和 $\rho = \rho^c$。

为证明 c 单调不减，令 $\alpha, \alpha' \in (0,1)$ 满足 $\alpha < \alpha'$。由 $\alpha < \alpha'$ 可得 $\{x\colon \phi(x) \geq \alpha'\} \subseteq \{x\colon \phi(x) \geq \alpha\}$。因此，$\inf\{x\colon \phi(x) \geq \alpha\} \leq \inf\{x\colon \phi(x) \geq \alpha'\}$，从而 $c(\alpha) \leq c(\alpha')$。

为证明 c 是下半连续的，我们证明其上图是闭集。由于 ϕ是上半连续的，其下图是闭集。因此，我们证明点$(x,y) \in \mathbb{R} \times (0,1)$ 属于 c 的上图，当且仅当(y,x)属于 ϕ的下图。设$(x,\alpha) \in \mathbb{R} \times (0,1)$，且 $\phi(x) \geq \alpha$。根据 c的定义，这意味着 $x \geq c(\alpha)$。接下来，设$(x,\alpha) \in \mathbb{R} \times (0,1)$，且 $x \geq c(\alpha)$。注意，由于 ϕ 的下图是闭集，$c(\alpha) = \inf\{x\colon \phi(x) \geq \alpha\} \in \{x\colon \phi(x) \geq \alpha\}$。因此，$\phi(x) \geq \alpha$。

To show that there exists $b \in (0,1)$ such that $c(b) = +\infty$, let $b \in (0,1)$ such that $b > \lim_{x \to \infty} \phi(x)$. By construction, the set $\{x : \phi(x) \geq b\}$ is empty. Hence $c(b) = \inf\{x : \phi(x) \geq b\} = +\infty$.

最后，我们声称对于所有 $F \in \mathcal{F}$, $\rho(F) = \sup^{\alpha \in (0,1)} (\rho_\alpha(F) - c(\alpha))$。首先，我们证明 $\rho(F) \geq \sup^{\alpha \in (0,1)} (\rho_\alpha(F) - c(\alpha))$。令 $\alpha \in (0,1)$ 为任意值，并任选满足对所有 y, $F(y+t) \geq \phi(y)$ 的 $t \in \mathbb{R}$。由于 ϕ 的上半连续性，我们有 $\phi(c(\alpha)) \geq \alpha$。由 t 的选取可知，$F(c(\alpha) + t) \geq \phi(c(\alpha)) \geq \alpha$。根据 $\rho_\alpha(F)$ 的定义，我们于是可以得出 $\rho_\alpha(F) \leq c(\alpha) + t$。因此，对于任意满足对所有 y 都有 $F(y+t) \geq \phi(y)$ 的 t，我们有 $\rho_\alpha(F) \leq c(\alpha) + t$。由此可得 $\rho_\alpha(F) \leq c(\alpha) + \inf\{t\colon F(y+t) \geq \phi(y)$ 对所有 $y\} = c(\alpha) + \rho(F)$ 都成立。由于 α 是任意的，$\sup^{\alpha \in (0,1)} \rho_\alpha(F) - c(\alpha) \leq \rho(F)$，这正是我们要证明的。

为证明其与上确界相等，假设存在某个 $F \in \mathcal{F}$ 和 $\hat{\epsilon} > 0$，使得对于所有 $\alpha \in (0,1)$ $\rho(F) - \hat{\epsilon} \geq \rho_\alpha(F) - c(\alpha)$ 都成立。我们不妨假设 $\rho(F) = 0$，于是 $-\hat{\epsilon} \geq \rho_\alpha(F) - c(\alpha)$。

根据 ρ 的定义，且由于 $\rho(F) = 0$，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $x(\epsilon)$，使得 $\phi(x(\epsilon) + \epsilon) > F(x(\epsilon))$。令 $\hat{\alpha} = \phi(x(\hat{\epsilon}) + \hat{\epsilon})$。由于 $\phi(x(\hat{\epsilon}) + \hat{\epsilon}) > F(x(\hat{\epsilon}))$，根据 F 的上半连续性，我们知道 $\rho_{\hat{\alpha}}(F) > x(\hat{\epsilon})$。由于 $\phi(x(\hat{\epsilon}) + \hat{\epsilon}) = \hat{\alpha}$，我们知道 $c(\hat{\alpha}) \leq x(\hat{\epsilon}) + \hat{\epsilon}$。因此：$\rho_{\hat{\alpha}}(F) - c(\hat{\alpha}) > x(\hat{\epsilon}) - (x(\hat{\epsilon}) + \hat{\epsilon}) = -\hat{\epsilon}$，这与我们假设对每个 $\alpha \in (0,1)$，都有 $-\hat{\epsilon} \geq \rho_\alpha(F) - c(\alpha)$ 矛盾。

第3部分：我们证明陈述（3）蕴含陈述（1）。令 $\rho \in P^{\mathcal{C}}$。我们证明 ρ 满足三条公理。令 $c \in \mathcal{C}$ 使得 $\rho = \rho^c$。

该证明利用了这样一个事实：对于所有 $\alpha \in (0,1)$，ρ_α 满足并分离性、仿射等变性和下半连续性。显然，ρ_α 满足仿射等变性。由引理2和引理3可知，ρ_α 满足下半连续性和并分离性。

为证明 ρ 满足并分离性，令 F、$G \in \mathcal{F}$。对于 $\alpha \in (0,1)$，由 ρ_α 满足并分离性这一事实可知 $(\rho_\alpha(F \vee_{\text{FOSD}} G) - c(\alpha)) = \max^{E \in \{F,G\}}(\rho_\alpha(E) - c(\alpha))$。因此，$\rho(F \vee_{\text{FOSD}} G) = \sup_{\alpha \in (0,1)} \max^{E \in \{F,G\}}(\rho_\alpha(E) - c(\alpha)) = \max^{E \in \{F,G\}} \sup^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha(E) - c(\alpha)) = \max\{\rho(F), \rho(G)\}$。

为证明 ρ 满足平移等变性，设 $b \in \mathbb{R}$ 和 $F \in \mathcal{F}$，并定义$h(x) = x + b$。由于 ρ_α 满足仿射等变性，$\rho_\alpha(F \circ h^{-1}) = \rho_\alpha(F) + b$。因此，$\rho(F \circ h^{-1}) = \sup^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha(F \circ h^{-1}) - c(\alpha)) = \sup^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha(F) + b - c(\alpha)) = \sup^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha(F) - c(\alpha)) + b$。因此，$\rho(F \circ h^{-1}) = \rho(F) + b$。

为证明 ρ 满足下半连续性，设 $F \in \mathcal{F}$，令 $z \in \mathbb{R}$，并设(F_n)是一个累积分布函数序列，满足(a) 对所有 n，$\rho(F_n) \leq z$，且(b) $F_n \to F$。我们证明 $\rho(F) \leq z$。由于对所有 n，$\rho(F_n) = \sup^{\alpha \in (0,1)} \rho_\alpha(F_n) - c(\alpha) \leq z$，可得对所有 n 和所有 α，$\rho_\alpha(F_n) \leq z + c(\alpha)$。由于 ρ_α 满足下半连续性，结合 $F_n \to F$ 和$\rho_\alpha(F_n) \leq z + c(\alpha)$，可知 $\rho_\alpha(F) \leq z + c(\alpha)$，因此 $\rho_\alpha(F) - c(\alpha) \leq z$。因此，$\sup^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha(F) - c(\alpha)) = \rho(F) \leq z$。 □

Proof of Corollary 2. First, we show that quantiles satisfy affine equivariance. To see this, let $F \in \mathcal{F}$ and let ρ_α be a quantile for some $\alpha \in (0,1)$. Recall that $\rho(F) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$. Let $a > 0$ and $b \in \mathcal{R}$ and define $h(x) = ax + b$. Then $\rho(F \circ h^{-1}) = \inf\{x : (F \circ h^{-1})(x) \geq \alpha\} = \inf\{h(x) : F(x) \geq \alpha\} = h(\rho(F)) = a\rho(F) + b$.

Next, let ρ satisfy the three axioms. Because ρ satisfies affine equivariance, it satisfies transnslation equivariance. Thus there is $\phi \in \Phi$ such that $\rho = \rho^\phi$. For $\alpha \in (0,1)$, define the function ϕ^α such that $\phi^\alpha(x) = 0$ for $x < 0$, and $\phi^\alpha(x) = \alpha$ otherwise. By the definition, $\rho_\alpha(F) = \rho^{\phi^\alpha}(F)$. We show that there is $\alpha \in (0,1)$ such that $\phi = \phi^\alpha$.

Define $\alpha = \phi(0)$, and suppose by means of contradiction that $\phi \neq \phi^\alpha$. There are two cases. First, suppose $x' = \inf\{x : \phi(x) > 0\} \neq 0$. For all $x \in \mathbb{R}$, $\rho(F_x) = x - x'$. Let $a > 1$ and define $h(x) = ax$. Note that $F_x \circ h^{-1} = F_{ax}$. By affine equivariance, $a\rho(F_x) = \rho(F_{ax})$. Then $0 = a\rho(F_{x'}) = \rho(F_{ax'}) = ax' - x' \neq 0$, a contradiction. Because ϕ is upper-semicontinuous and bounded away from 1, it follows that $\alpha \in (0,1)$.

接下来，假设存在 $x' > 0$ 使得 $\phi(x') > \alpha$。由 ϕ 的上半连续性，存在 $y < x'$ 使得 $y > 0$ 且 $\phi(y) < \phi(x')$。令 $\beta > 0$ 使得 $\beta y > x'$。定义

$F(x) \equiv \phi(x)$ 对于 $x < 3x'$ 成立，且 $F(x) \equiv 1$ 对于 $x \geq 3x'$ 成立。注意到 $F \in \mathcal{F}$。由于对于所有 x, $F(x) \geq \phi(x)$，因此可得 $\rho(F) \leq 0$。接下来，令 $h(x) = \beta x$。由于 $F \circ h^{-1}(\beta y) < \phi(\beta y)$，因此可得 $\rho(F \circ h^{-1}) > 0$。但根据仿射等变性， $\rho(F \circ h^{-1}) = h(\rho(F)) = \beta\rho(F) \leq 0$，这就产生了矛盾。 □

定理 3 的证明。第 1 部分。考虑如下定义的函数 $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$。令 X为任意随机变量 X，其累积分布函数为 F，并令 $\tau(F) \equiv F_{-X}$为 $-X$的累积分布函数。注意，根据 Billingsley（1999）的定理 2.7 及其例 2.3，我们有$F_n \to F$当且仅当 $\tau(F_n) \to \tau(F)$。另请注意， $\tau(F) \wedge_{\text{FOSD}} \tau(G) = \tau(F \vee_{\text{FOSD}} G)$ 且$\tau(F) \vee_{\text{FOSD}} \tau(G) = \tau(F \wedge_{\text{FOSD}} G)$。[8]

定义 $F(x^-) \equiv \sup_{y<x} F(y)$。我们证明 $\tau(F)(x) = 1 - F((-x)^-)$。由于 $\tau(F)$ 显然是单调不减的，且满足 $\{0, 1\} \subseteq F(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$，因此我们只需证明 $\tau(F)$ 是右连续的。注意，根据定义， $F(x^-)$ 是左连续的；也就是说，对于任意 x and$\varepsilon < 0$，通过令 $y < x$ 任意接近 x，我们可以选择 $F(y) \geq F(x) - \varepsilon$。由于 F 是单调不减的，结论得证。因此， $F((-x)^-)$ 是右连续的， $\tau(F)$ 也同样如此。

We show that $\tau \circ \tau$ is the identity map. Let $F \in \mathcal{F}$ and $x \in \mathbb{R}$. Then $\tau(\tau(F))(x) = 1 - \sup_{z:z<-x}[1 - \sup_{y:y<-z} F(y)] = \inf_{z:z<-x} \sup_{y:y<-z} F(y) = \inf_{z:z>x} \sup_{y:z>y} F(y)$, where the last equality follows as z is a dummy variable. Observe now that if $z > x$, $\sup_{y:y<z} F(y) \geq F(x)$, as $x < z$. So, $\tau(\tau(F))(x) \geq F(x)$. On the other hand, since F is right continuous, for every $\varepsilon > 0$, there is $z > x$ for which $F(z) < F(x) + \varepsilon$, so that for any such z, $\sup_{y:y<z} F(y) \leq F(x) + \varepsilon$, since F is nondecreasing. Therefore, $\inf_{z:z>x} \sup_{y:z>y} F(y) \leq F(x) + \varepsilon$, and we can conclude that $\tau(\tau(F))(x) = F(x)$.

Part 2. Let ρ satisfies meet separability, translation equivariance, and upper semicontinuity, and define $\rho^*(F) = -\rho(\tau(F))$. We show that ρ^* satisfies join separability, translation equivariance, and lower semicontinuity, and that $\rho(F) = -\rho^*(\tau(F))$ for all F.

要证明 ρ^* 满足并分离性，令 $F, G \in \mathcal{F}$。则 $\rho^*(F \vee_{\text{FOSD}} G) = -\rho(\tau(F \vee_{\text{FOSD}} G)) = -\rho(\tau(F) \wedge_{\text{FOSD}} \tau(G))$，且 $\rho^*(F) \vee \rho^*(G) = (-\rho(\tau(F))) \vee (-\rho(\tau(G))) = -(\rho(\tau(F)) \wedge \rho(\tau(G)))$。由于 ρ 满足交分离性， $\rho(\tau(F) \wedge_{\text{FOSD}} \tau(G)) = \rho(\tau(F)) \wedge \rho(\tau(G))$。由此可得 $\rho^*(F \vee_{\text{FOSD}} G) = \rho^*(F) \vee \rho^*(G)$。

为证明 ρ^* 满足平移等变性，令 $F \in \mathcal{F}$ 和 $b \in \mathbb{R}$，并定义 $g(x) = x + b$。于是 $\tau(F \circ g^{-1}) = \tau(F) \circ g$，因此 $\rho^*(F \circ g^{-1}) = -\rho(\tau(F \circ g^{-1})) = -\rho(\tau(F) \circ g)$。由于 ρ 满足平移等变性，可得 $-\rho(\tau(F) \circ g) = -(\rho(\tau(F)) - b)$，从而 $-(\rho(\tau(F)) - b) = -\rho(\tau(F)) + b = \rho^*(F) + b$。因此 $\rho^*(F \circ g^{-1}) = -\rho^*(F) + b$。

为了证明 ρ^* 满足下半连续性，设 $x^* \in \mathbb{R}$，并令 F_n 为一个序列，使得对所有 n， $\rho^*(F_n) \leq x^*$，且满足 $F_n \to F$。由于 $x^* \geq \rho^*(F_n) = -\rho(\tau(F_n))$，因此可得 $\rho(\tau(F_n)) \geq -x^*$。由于 ρ 满足上半连续性，且由于$\tau(F_n) \to \tau(F)$，因此可得 $\rho(\tau(F)) \geq -x^*$。因此， $\rho^*(F) = -\rho(\tau(F)) \leq x^*$。

[8]格结果可由以下事实得出： $F \geq_{\text{FOSD}} G$ 当且仅当 $\tau(G) \geq_{\text{FOSD}} \tau(F)$。具体而言，假设$F \geq_{\text{FOSD}} G$，并注意到 $\tau(F)(x) = 1 - F(-x^-) \geq 1 - G(-x^-) = \tau(G)(x)$，因此 $\tau(G) \geq_{\text{FOSD}} \tau(F)$。再假设 $\tau(G) \geq_{\text{FOSD}} \tau(F)$，但 $F \geq_{\text{FOSD}} G$不成立。那么存在 x使得 $F(x) > G(x)$；特别是，根据右连续性，存在 $\varepsilon^* > 0$ 和 $a > b$，使得对所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$，都有 $F(x + \varepsilon) \geq a > b \geq G(x + \varepsilon)$。于是 $\tau(F)(-(x + \varepsilon^*)) \leq 1 - a < 1 - b \leq \tau(G)(-(x + \varepsilon^*))$，因此 $\tau(G)$并非在一阶随机意义上支配 $\tau(F)$。

最后，我们证明 $\rho(F) = -\rho^*(\tau(F))$。根据定义，$\rho^*(F) = -\rho(\tau(F))$。因此，$-\rho^*(\tau(F)) = \rho(\tau(\tau((F)))$。由于对所有 F，$F = \tau(\tau(F))$，因此可得$-\rho^*(\tau(F)) = \rho(F)$。

第3部分。首先证明陈述（1）蕴含陈述（2）。设 ρ 满足三条公理。因此，ρ^* 满足并分离性、平移等变性和下半连续性。根据定理 2，可知存在一个 $\phi \in \Phi$，使得 $\rho^* = \rho^{\phi}$。因为对于所有 F，$\rho(F) = -\rho^*(\tau(F))$，所以 $\rho(F) = -\rho^*(\tau(F)) = -\min\{t\colon \tau(F)(x) \geq \phi(x-t)$ 对所有 $x\}$ 均成立。

因为 $-\min\{t\colon \tau(F)(x) \geq \phi(x-t)$ 对所有 $x\} = \max\{-t\colon \tau(F)(x) \geq \phi(x-t)$ 对所有 $x\}$ 均成立，并且因为 $\tau(F) = 1 - F((-x)^-)$，所以 $\rho(F) = \max\{t\colon 1 - F((-x)^-) \geq \phi(x+t)$ 对所有 $x\}$ 均成立。显然，$1 - F((-x)^-) \geq \phi(x+t)$ 对所有 x 均成立，这意味着 $1 - \phi(x+t) \geq F((-x)^-)$ 对所有 x 均成立。用 x 代替 $-x$，可得

$$\rho(F) = \max\{t : 1 - \phi(t-x) \geq F(x^-) \text{ for all } x\}. \tag{2}$$

令 $\psi_\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为 $\psi_\phi(x) = 1 - \sup_{y:y<-x} \phi(y)$。我们证明 $\psi_\phi \in \Psi$。为证明 ψ_ϕ 单调不减，取 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得 $x \geq y$。则由 $-x \leq -y$ 可得 $\{z\colon z < -x\} \subseteq \{z\colon z < -y\}$，因此 $\psi_\phi(x) = 1 - \sup_{z:z<-x} \phi(z) \geq 1 - \sup_{z:z<-y} \phi(z) = \psi_\phi(y)$。为证明 ψ_ϕ 右连续，注意到根据构造，$\sup_{y:y<x} \phi(x)$ 左连续，因此 $\sup_{y:y<x} \phi(-x) = \sup_{y:y<-x} \phi(x)$ 右连续。因此，$1 - \sup_{y:y<-x} \phi(x) = \psi_\phi(x)$ 右连续。为证明存在 x 使得 $\psi_\phi(x) = 1$，注意到存在 z 使得 $x < z$ 蕴含$\phi(x) = 0$。于是 $\psi_\phi(-z) = 1 - \sup_{y:y<z} \phi(y) = 1$。为证明存在 x 使得$\psi_\phi(x) < 1$，注意到存在 z 使得 $x \geq z$ 蕴含 $\phi(x) > 0$。令 $w > z$。则 $\psi_\phi(-w) = 1 - \sup_{y:y<w} \phi(y) = 1$。由于 $z < w$，$\sup_{y:y<w} \phi(y) \geq \phi(z)$，这意味着 $\psi_\phi(-w) = 1 - \sup_{y:y<w} \phi(y) < 1$。为证明 $\lim_{x\to-\infty} \psi_\phi(x) > 0$，注意到 $\lim_{x\to-\infty} \sup_{y:y<-x} \phi(y) = \lim_{x\to\infty} \sup_{y:y<x} \phi(y) = \lim_{x\to\infty} \phi(x) < 1$。于是 $\lim_{x\to-\infty} \psi_\phi(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} \phi(x) > 0$。

Finally, we claim that $\psi_\phi(x-t) \geq F(x)$ for every x if and only if $1 - \phi(t-x) \geq F(x^-)$ for every x.

First, let $1 - \phi(t-x) \geq F(x^-)$ for every x. Then for every $z > x$, we know that $1-\phi(t-z) \geq F(z^-) \geq F(x)$. Consequently, for every $y > z$, we also have $1-\phi(t-y) \geq F(x)$ as $y > z$ implies $y > x$. Note that $\psi_\phi(x) = 1 - \sup_{y:y<-x} \phi(y) = \inf_{y:y<-x}(1-\phi(y))$. Because $t - y < t - z$, it follows that $\psi_\phi(z-t) = \inf_{t-y:t-y<t-z}(1 - \phi(t-y)) \geq F(x)$. Finally, since ψ_ϕ is right continuous, we establish that $\psi_\phi(x-t) \geq F(x)$.

反之，假设通过反证法，对每个 x 都有 $\psi_\phi(x-t) \geq F(x)$，但存在一个 x，使得 $1 - \phi(t-x) < F(x^-)$。令 $\varepsilon > 0$。于是存在 $z < x$，使得对所有 $y \in [z, x)$，都有 $F(y) \geq F(x^-) - \varepsilon$。通过令 $\varepsilon > 0$ 足够小，我们得到一对数 a、b，使得对所有 $y \in [z, x)$，都有 $1 - \phi(t-y) \leq 1 - \phi(t-x) \leq a < b \leq F(y)$；其中第一个不等式是因为 ϕ 单调不减。现在，对于任意 $y \in (z, x)$，由单调不减性可得 $1 - \phi(t-z) \leq 1 - \phi(t-y) \leq a$。因此，$\inf_{t-y:t-y<t-z}(1 - \phi(t-y)) \leq a$。然而，$\psi_\phi(z-t) = \inf_{t-y:t-y<t-z}(1 - \phi(t-y)) \geq F(z) \geq b > a$，这就产生了矛盾。

利用这一事实和方程 (2)，我们可以得出结论：

$$\rho(F) = \max\{t : F(x) \leq \psi_\phi(x - t) \text{ for all } x\}.$$

第 4 部分。接下来，我们证明陈述（1）蕴含陈述（3）。设 ρ 满足三条公理。因此， ρ^* 满足并分离性、平移等变性和下半连续性。根据定理 2，可知存在一个 $c \in \mathcal{C}$，使得 $\rho^* = \rho^c$。

因为，对于所有 F， $\rho(F) = -\rho^*(\tau(F))$，可得 $\rho(F) = -\sup_{\alpha\in(0,1)}(\rho_\alpha(\tau(F)) - c(\alpha))$。因此， $\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(c(\alpha) - \rho_\alpha(\tau(F)))$。根据 ρ_α 的定义，且因为 $\tau(F)(x) = 1 - F((-x)^-)$，可得$\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(c(\alpha) - \inf\{x \in \mathbb{R}\colon 1 - F((-x)^-) \geq \alpha\}$。

Rearranging, we have $\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(c(\alpha) + \sup\{-x \in \mathbb{R} : 1 - F((-x)^-) \geq \alpha\})$, and therefore that $\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(c(\alpha) + \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x^-) \leq 1 - \alpha\})$.

定义 $d(c)(\alpha) \equiv -c(1-\alpha)$。我们证明 $d(c) \in \mathcal{D}$。由 $c(1-\alpha)$ 单调不增可知， $d(c)$ 单调不减。为证明 $d(c)$ 上半连续，注意到 $c(\alpha)$，因此 $c(1-\alpha)$ 下半连续。为证明存在$b \in (0,1)$，使得 $d(c) = -\infty$，注意到存在 $b' \in (0,1)$，使得 $c(b') = \infty$。这意味着 $1-b \in (0,1)$，且 $d(c)(1-b') = -\infty$。

将 c 替换为 $d(c)$，可得 $\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(\sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x^-) \leq \alpha\} - d(c)(\alpha))$。要证明 $\rho(F) = \inf_{\alpha\in(0,1)}(\rho_\alpha^+(F) - d(c)(\alpha))$，只需证明 $\sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x^-) \leq \alpha\} = \sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x^) \leq \alpha\}$。

注意到，由于 F 是非递减的，因此 $F(x^-) = \sup_{y<x} F(y) \leq F(x)$。因此， $F(x) \leq \alpha$ 意味着$F(x^-) \leq \alpha$，由此可得 $\sup\{x\colon F(x^-) \leq \alpha\} \geq \sup\{x\colon F(x) \leq \alpha\}$。由于 $F(x^-)$ 是左连续且非递减的，因此它是下半连续的，并且 $\sup\{x : F(x^-) \leq \alpha\}$ 实际上在某个最大值处取得，记为 x^*。根据 $F((x^*)^-)$ 的定义，对于任意 $y < x^*$，都有 $F(y) \leq \alpha$。因此，$\sup\{x\colon F(x) \leq \alpha\} \geq x^*$，从而证明了另一个方向。

第5部分。令 $\rho \equiv \rho^\psi$，其中 $\psi \in \Psi$。我们证明 ρ 满足交分离性、平移等变性和上半连续性。

为证明 ρ满足交分离性，令 F、$G \in \mathcal{F}$，并假设 $\rho(F) \leq \rho(G)$。令 $z = \rho(F)$。于是 $z = \max\{t\colon F(x) \leq \psi(x-t)$ 对所有 $x\} \leq \max\{t\colon G(x) \leq \psi(x-t)$ 对所有 $x\}$ 均成立，这意味着 $F(x) \leq \psi(x-z)$ 且 $G(x) \leq \psi(x-z)$ 对所有 x 均成立。因此 $(F \wedge_{\text{FOSD}} G)(x) \leq \psi(x-z)$ 对所有 x 均成立，这意味着 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) \geq z$。令 $\varepsilon > 0$。于是$z + \varepsilon > \rho(F)$，这意味着存在某个 x，使得 $F(x) > \psi(x - (z+\varepsilon))$。根据构造，对于所有 x，$(F \wedge_{\text{FOSD}} G)(x) \geq F(x)$ 均成立，这意味着存在某个 x，使得 $(F \wedge_{\text{FOSD}} G)(x) > \psi(x - (z+\varepsilon))$，因此 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) \leq z + \varepsilon$。由于 ε 是任意的，这意味着 $\rho(F \wedge_{\text{FOSD}} G) = z = \min\{\rho(F)\ \rho(G)\}$。

为证明 ρ 满足平移等变性，设 $b \in \mathbb{R}$ 和 $F \in \mathcal{F}$，并定义$h(x) = x + b$。那么，对于所有 $x\} = \max\{t$， $\rho(F \circ h^{-1}) = \max\{t : (F \circ h^{-1})(x) \leq \psi(x-t)$；对于所有 $x\} = \max\{t + b$， $F(x) \leq \psi(h(x) - t)$；对于所有 $x\} = \max\{t$， $F(x) \leq \psi(x-t)$；对于所有 $x\} + b = \rho(F) + b$， $F(x) \leq \psi(x-t)$。

为证明 ρ 满足上半连续性，设 $F \in \mathcal{F}$、$z \in \mathbb{R}$ 和 $\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ 满足 $F_n \to F$。假设对于所有 n， $\rho(F_n) \geq z$。我们声称 $\rho(F) \geq z$。为此，注意到对于所有 n 和所有 $x \in \mathbb{R}$， $F_n(x) \leq \phi(x-z)$。现在，对于 F 的所有连续点 y，

我们有 $F_n(y) \to F(y)$。因此，对于 F 的所有连续点 y， $F(y) \le \phi(y-z)$。由于 F 非递减，连续点集是稠密的，因此我们可以得出，对于所有 x， $F(x) \le \phi(x-z)$，因为 F 和 ϕ 都是右连续的。因此，$\rho(F) \ge z$。

第6部分。我们首先证明，上分位数 ρ_α^+ 满足交分离性、平移等变性和上半连续性。

为证明 ρ_α^+满足交分离性，设 $F, G \in \mathcal{F}$使得 $\rho_\alpha^+(F) \ge \rho_\alpha^+(G)$，并设 $z = \rho_\alpha^+(G)$。由于 $z = \rho_\alpha^+(G)$，可得 $z = \sup\{x \in \mathbb{R}\colon G(x) \le \alpha\}$。这意味着，对于所有 $\varepsilon > 0$， $G(z+\varepsilon) > \alpha$，进而有 $(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G)(z+\varepsilon) > \alpha$。因此，$\rho_\alpha^+(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G) \le z$。接下来，对于所有 $\varepsilon > 0$，$z - \varepsilon < \rho_\alpha^+(G) \le \rho_\alpha^+(F)$，这意味着 $G(z-\varepsilon) \le \alpha$ 且 $F(z-\varepsilon) \le \alpha$。由此可得 $(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G)(z-\varepsilon) \le \alpha$，因此 $z \le \rho_\alpha^+(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G)$。于是 $\rho_\alpha^+(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G) = z = \min\{\rho_\alpha^+(F)\ \rho_\alpha^+(G)\}$。

为证明 ρ_α^+ 满足平移等变性，令 $b \in \mathbb{R}$ 和 $F \in \mathcal{F}$，并定义$h(x) = x + b$。于是 $\rho_\alpha^+(F \circ h^{-1}) = \sup\{x \in \mathbb{R}\colon (F \circ h^{-1})(x) \le \alpha\} = \sup\{h(x) \in \mathbb{R}\colon F(x) \le \alpha\} = h(\sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \le \alpha\}) = h(\rho_\alpha^+(F)) = \rho_\alpha^+(F) + b$。

根据 Chambers（2009，定理1），ρ_α^+ 满足上半连续性。为此，注意到 $\sup\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \le \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) > \alpha\}$。

接下来，令 $\rho \equiv \rho^d$，其中某个 $d \in \mathcal{D}$。我们证明 ρ 满足交分离性、平移等变性和上半连续性。

为证明 ρ 满足交分离性，令 $F, G \in \mathcal{F}$。对于 $\alpha \in (0,1)$， ρ_α^+ 满足交分离性这一事实意味着 $(\rho_\alpha^+(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G) - d(\alpha)) = \min^{E \in \{F,G\}}(\rho_\alpha^+(E) - d(\alpha))$。因此，$\rho(F \wedge_{\mathrm{FOSD}} G) = \inf^{\alpha \in (0,1)} \min^{E \in \{F,G\}}(\rho_\alpha^+(E) - d(\alpha)) = \min^{E \in \{F,G\}} \inf^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha^+(E) - d(\alpha)) = \min\{\rho(F)\ \rho(G)\}$。

为了证明 ρ 满足平移等变性，设 $b \in \mathbb{R}$ 和 $F \in \mathcal{F}$，并定义 $h(x) = x + b$。由于 ρ_α^+ 满足平移等变性， $\rho_\alpha^+(F \circ h^{-1}) = \rho_\alpha^+(F) + b$。因此， $\rho(F \circ h^{-1}) = \inf^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha^+(F \circ h^{-1}) - d(\alpha)) = \inf^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha^+(F) + b - c(\alpha)) = \inf^{\alpha \in (0,1)}(\rho_\alpha^+(F) - d(\alpha)) + b$。因此， $\rho(F \circ h^{-1}) = \rho(F) + b$。

ρ 的上半连续性源于以下事实：上半连续函数的逐点下确界本身也是上半连续的，同时每个 ρ_α^+ 也都是上半连续的。例如，参见 Berge（1997）第 76 页的定理 3，该定理以关于下半连续性的表述给出了这一结果。 □

定理4的证明。任何满足定理 3 所述性质的函数 ρ 都必须满足这些公理，这一点显而易见。下面我们证明反过来也成立。

我们首先证明，对每个 $F \in \mathcal{F}$，都存在 $x \in \mathbb{R}$使得 $F_x \succeq F$。首先注意到，根据序数Meet可分性，若 $F \ge_{\mathrm{FOSD}} G$，则 $F \succeq G$。其次，注意到若 $x > y$，则 $F_x \succ F_y$；因为，假设并非如此，则根据完备性， $F_y \succeq F_x$。根据序数平移不变性， $F_{y-x} \succeq F_0$。再次根据序数平移不变性，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$F_{n(y-x)} \succeq F_{(n-1)(y-x)}$。继而根据传递性，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$F_{n(y-x)} \succeq F_0$。还要注意，根据下方无界性，存在 $z \in \mathbb{R}$ 使得 $F_0 \succ F_z$。因此，对任意 $n \in \mathbb{N}$，根据弱序有 $F_{n(y-x)} \succ F_z$。当 n 足够大时，这与单调性性质相矛盾（$F \ge_{\mathrm{FOSD}} G$ 意味着$F \succeq G$）。

In particular, for every F for which there exists $x \in \mathbb{R}$ for which $F(x) = 1$, we know that $F_x \ge_{\mathrm{FOSD}} G$, and so $F_x \succeq F$. Suppose now that there is no such $x \in \mathbb{R}$, so that $F(x) < 1$ for

every $x \in \mathbb{R}$.

We want to show that there is $x \in \mathbb{R}$ for which $F_x \succeq F$; by means of contradiction and invoking completeness, suppose that for all $x \in \mathbb{R}$, $F \succ F_x$.

By ordinal meet-separability, for every $x \in \mathbb{R}$, $F_x \sim (F_x \wedge_{\text{FOSD}} F)$. By ordinal translation invariance, for every $x \in \mathbb{R}$, $F_0 \sim (F_0 \wedge_{\text{FOSD}} (F - x))$. Now, consider $(F_0 \wedge_{\text{FOSD}} F - n) \vee_{\text{FOSD}} F_{-1}$; because $(F_0 \wedge_{\text{FOSD}} F - n) \vee_{\text{FOSD}} F_{-1} \geq_{\text{FOSD}} (F_0 \wedge_{\text{FOSD}} (F - n))$, we obtain by transitivity that $(F_0 \wedge_{\text{FOSD}} F - n) \vee_{\text{FOSD}} F_{-1} \succeq F_0$. Now observe that as $n \to \infty$, we have $(F_0 \wedge_{\text{FOSD}} F - n) \vee_{\text{FOSD}} F_{-1} \to F_{-1}$. Conclude by ordinal upper semicontinuity that $F_{-1} \succeq F_0$, but we have shown that $F_0 \succ F_{-1}$ as $0 > -1$, a contradiction.

应用 Rader 表示定理（Rader，1963；Richter，1980），求得一个上半连续函数 $V : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$，使其表示 $\succeq$。之所以能够做到这一点，是因为赋予弱收敛拓扑的 $\mathbb{R}$ 上的概率分布集合具有可数基——它是一个可分空间（Aliprantis 和 Border（2007）的定理 15.12），这意味着该空间具有可数基（Billingsley（1999），第237页）。

对于任意 $F \in \mathcal{F}$，我们知道存在 $\overline{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}$，使得 $F_{\overline{x}} \succeq F \succ F_{\underline{x}}$；下界由下方无界性得出。我们声称存在 $x \in \mathbb{R}$，使得 $F \sim F_x$。

为说明这一点，令 $x^* \equiv \inf\{x : F_x \succeq F\}$。前述界限表明，$x^*$ 存在且为实值。此外，根据序数上半连续性，我们有 $F_{x^*} \succeq F$。我们声称$F_{x^*} \sim F$。假设存在矛盾，即 $F_{x^*} \succ F$，并注意到这意味着 $V(F_{x^*}) > V(F)$。此外，根据 x^* 的定义，对于任意 $y < x^*$，我们有 $V(F) > V(F_y)$。现在，取 $b, b' \in \mathbb{R}$，使得 $b' < b$。注意到 $V(F_{x^*}) > V(F) > V(F_{x^*+(b'-b)})$。根据序数平移不变性，$V(F_{x^*} + b) > V(F + b) > V(F_{x^*} + b') > V(F + b')$。对于每个 $b \in \mathbb{R}$，令 $a(b) \in \mathbb{Q} \cap (V(F + b), V(F_{x^*} + b))$。[9] 由于 $b > b'$ 蕴含 $(V(F + b), V(F_{x^*} + b)) \cap (V(F + b'), V(F_{x^*} + b')) = \varnothing$，我们构造出了一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的一一映射，这显然构成矛盾。

现在，对每个 F，定义 $\rho(F) = x$，其中 $F \sim F_x$。显然，这个 x 的选取是唯一的；因为若 $x > y$，则 $F_x \succ F_y$。ρ 表示 $\succeq$，这一点可由以下事实推出：$F_x \succeq F_y$ 当且仅当 $x \geq y$，且 $F_{\rho(F)} \sim F \succeq G \sim F_{\rho(G)}$。[10] 我们声称 ρ 满足定理 3 的性质。交可分性显而易见。由序数平移不变性可得平移不变性：$F_{\rho(F)} \sim F$ 意味着 $F_{\rho(F)+b} = F_{\rho(F)+b} \sim F + b$。最后，上半连续性可由以下方式得出。假设 $\rho(F_n) \geq x^*$，且 $F_n \to F$。注意，由平移不变性，存在 G，使得 $\rho(G) = x^*$。因此，$F_n \succeq G$，因为 ρ 表示 $\succeq$。由序数上半连续性，$F \succeq G$，这意味着 $\rho(F) \geq \rho(G) = x^*$。 □

References

Aliprantis, C. D. and K. C. Border(2007)：无限维分析：入门指南，Springer，第3版。

[9] This does not require the axiom of choice.

[10] That $F_x \succeq F_y$ iff $x \geq y$ follows as $x \geq y$ implies $F_x \geq_{\text{FOSD}} F_y$, so that $F_x \succeq F_y$ and $x > y$ implies $F_x \succ F_y$.

Berge, C. (1997)：拓扑空间：包括对多值函数、向量空间和凸性的论述，Dover Publications。Billingsley, P.(1999)：概率测度的收敛，Wiley，第2版。Burzoni, M., I. Peri, and C. M. Ruffo (2017)："Lambda 风险价值的性质：稳健性、可诱导性和一致性"，Quantitative Finance，17，1735–1743。Chambers, C. P. (2007)："序数聚合与分位数"，Journal of Economic Theory，137，416–431。——— (2009)："分布函数域上的分位数公理化"，Mathematical Finance，19，335–342。Chambers, C. P. and A. D. Miller(2011)："信息聚合规则"，Social Choice and Welfare，36，75–82。——— (2014a)："低效率测度"，American Economic Journal: Microeconomics，6，79—92。——— (2014b)："学术影响力"，Journal of Economic Theory，151，571–583。——— (2018)："基准比较"，Theoretical Economics，13，485–504。Chambers, C. P., A. D. Miller, and M. B. Yenmez (2020)："闭包与偏好"，Journal of Mathematical Economics，88，161–166。Chateauneuf, A., M. Grabisch, and A. Rico (2008)："通过 Sugeno 积分建模不确定性态度"，Journal of Mathematical Economics，44，1084–1099。Cho, W. J. and B.-G. Ju (2020)："群体识别：一种综合方法"，Games and Economic Behavior，123，171–181。Christensen, F., J. L. Hougaard, and H. Keiding (1999)："效率指数的公理化刻画"，Economics Letters，63，33–37。Corbetta, J. and I. Peri(2018)："Lambda 风险价值的回溯测试"，The European Journal of Finance，24，1075–1087。de Castro, L. and A. F. Galvao (2019a)："理性行为的动态分位数模型"，Econometrica，87，1893–1939。——— (2019b)："理性行为的动态分位数模型"，Econometrica，87，1893–1939。——— (2022)："静态与动态分位数偏好"，Economic Theory，73，747–779。

de Castro, L., A. F. Galvao, D. M. Kaplan, and X. Liu (2019)：“分位数模型的平滑广义矩估计”，《计量经济学杂志》, 213, 121–144，纪念专刊：向 Roger Koenker 致敬。de Castro, L., A. F. Galvao, D. M. Kaplan, and X. Liu (2019)：“分位数模型的平滑广义矩估计”，《计量经济学杂志》, 213, 121–144。de Castro, L., A. F. Galvao, C. N. Noussair, and L. Qiao (2022)：“人们会最大化分位数吗？”，Games and Economic Behavior, 132, 22–40。Dimitrov, D., T. Marchant, and D. Mishra (2012)：“等价关系的可分性与聚合”，Economic Theory, 51, 191–212。Frittelli, M., M. Maggis, and I. Peri (2014)：“基于概率/损失函数的风险度量与风险价值”，Mathematical Finance, 24, 442–463。Hougaard, J. L. and H. Keiding (1998)：“效率指数的函数形式”，《生产率分析杂志》, 9, 103–111。Kopylov, I. (2021)：“最简理性化”，Economic Theory。Kreps, D. M. (1979)：“‘灵活性偏好’的表示定理”，Econo- metrica, 47, 565–577。Long, Y., J. Sethuraman, and J. Xue(2021)：“不确定需求下资源分配中的等分位数规则”，Journal of Economic Theory, 197, 105350。Maccheroni, F., M. Marinacci, and A. Rustichini(2006)：“模糊厌恶、稳健性与偏好的变分表示”，Econo metrica, 74, 1447– 1498。Manski, C. F. (1988)：“不确定条件下决策的序数效用模型”，《理论与决策》, 25, 79–104。Miller, A. D. (2008)：“群体识别”，Games and Economic Behavior, 63, 188– 202。Moulin, H. (1980)：“策略无关性与单峰性”，《公共选择》, 35, 437–455。Mu, X., L. Pomatto, P. Strack, and O. Tamuz (2021)：“单调可加统计量”，arXiv 预印本 arXiv:2102.00618。Rader, T. (1963)：“表示偏好的效用函数的存在性”，《经济研究评论》, 30, 229–232。Richter, M. K.(1980)：“连续效用与半连续效用”，《国际经济评论》, 293–299。

Rostek, M.(2010)：“决策理论中的分位数最大化”，《经济研究评论》, 77, 339–371。Schmeidler, D.(1989)：“无可加性的主观概率与期望效用”，Econometrica, 57, 571–587。Sugeno, M. (1974)：“模糊积分理论及其应用”，博士论文，东京工业大学。Thomson, W. and R. B. Myerson(1980)：“单调性与独立性公理”，《国际博弈论杂志》, 9, 37–49。Willard, S. (2004)：一般拓扑学，Dover Publications。