arXiv:2305.06462v2 [math.AG] 5 Mar 2025

Sagemath 中德尔佩佐曲面上仿射锥的泛灵活性

ALEXANDER PEREPECHKO

谨以此文献给尤里·普罗霍罗夫，祝贺他六十华诞。

摘要。近年来，关于 Fano 簇上的仿射锥的一般柔性是一个活跃的研究课题。对于德尔佩佐曲面，在次数至少为 3 的情形下，这一问题已得到全面研究，在 2 次情形下则得到部分研究。

我们介绍一个 Sagemath 模块，可根据极化，便于对任意次数的德尔佩佐曲面和弱德尔佩佐曲面上的仿射锥验证一般柔性的多数运算。该模块采用的组合方法基于泡循环形式体系，以及射影平面爆破的皮卡群的余极限。

例如，我们验证了在某些条件下，1次曲面的一些极化所对应的仿射锥具有一般柔性；此外，6次弱德尔佩佐曲面的任意非常 ample 极化所对应的仿射锥也具有一般柔性。

1. 引言

设 Y 是任意次数的（弱）德尔佩佐曲面，并由非常丰除子 H 极化。我们研究 Y 上的仿射锥何时是泛柔性的。等价地，这样的锥存在一个开子集，其上有特殊自同构群的无限传递作用。

我们考虑特征为零的代数闭域 $\mathbb{K}$ 上的情形。设 X 是定义在 $\mathbb{K}$上的仿射代数簇。若点 $p \in X$ 满足以下条件，则称其为 柔性点：其切空间T_pX 由域的加法群在 $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ 上的作用轨道的切向量张成 X。若簇 X 包含一个柔性点，则称其为泛柔性；若 的每个光滑点都是柔性点，则称其为柔性，参见 X 。[2], [18]

所有作用在 X 上的 $\mathbb{G}_a$-作用都生成了特殊自同构群 $\mathrm{SAut}\ X \subset \mathrm{Aut}\, X$。如果一个群 G 在集合 S 上的作用对于任意 $m \in \mathbb{N}$，都能在 S 中所有由两两不同点组成的有序 m 元组集合上传递，则称其为无限传递的 。下一个定理阐明了柔性这一概念的重要意义。

定理 1.1 ([2, 定理 2。2])。 设 X 是一个维数为≥ 2的仿射代数簇。则以下条件等价：

(i) 簇 X 含有一个柔性点；*(ii)* 群 $\mathrm{SAut}\, X$ 在 X 上有一个开轨道；*(iii)* $\mathrm{SAut}\, X$ 在该开轨道上的作用是无限传递的。

于是，该开轨道上的所有点都是柔性的。

仿射锥是柔性和泛柔性仿射代数簇的重要来源。过去十年，关于德尔佩佐曲面的极化所对应的仿射锥，已有大量研究。文献 [3], [16], [17] 证实，对于任意非常丰沛极化，次数为 ≥ 4 的德尔佩佐曲面上的仿射锥具有柔性。

这项研究在 HSE大学开展，资助来自俄罗斯科学基金会（项目编号：21-71-00062）。

三次曲面上仿射锥的一般柔性已在 [18] 对任意非常丰除子的极化 H 得到证实，其中该除子不是反典范除子的倍数，即不与反典范除子成比例；关于反典范倍数极化下不存在 $\mathbb{G}_a$-作用的结论已在 [4, 推论 1。8]中得到证明。2次的情形在 [11]和[12]中进行了研究。

关于柔性簇的一般理论及相关问题见 [1], [9], [10]。此外，还有关于奇异德尔佩佐曲面 [23], [21]以及法诺–穆凯四维簇[20], [8], [22]上的仿射锥的柔性研究。

低次数德尔佩佐曲面的计算高度依赖极化，并且需要将丰沛除子的族作为高维多面锥来处理。圆柱本身以及（弱）德尔佩佐曲面都可以用基于泡循环形式体系和皮卡群余极限的组合数据来描述。

因此，我们提出了一个基于这种组合方法的 Sagemath模块 [19] ，该模块简化了对上述锥的大多数运算，并能够验证任意次数的德尔佩佐曲面上的仿射锥的一般柔性。作为一项应用，我们检验了两族极化在次数为 1 时的一般柔性，参见定理 8.1 和8.3。

此外，我们针对弱德尔佩佐曲面对该模块进行了调整，并证明对于任意非常丰沛极化，次数为 6 的弱德尔佩佐曲面上的仿射锥都是泛柔性的，参见定理 9.3。

下面概述本文的内容。在第 2 节中，我们回顾文献 [18] 中关于柱体集的定义以及仿射锥的一般柔性判据。在第 3 节中，我们通过气泡循环和 Picard 群的余极限引入气泡类，并研究其性质。在第 4 节中，我们提出一种方法，利用线性系及相应的气泡类来描述（弱）德尔佩佐曲面的组合类型及其上的圆柱。在第 5 节中，我们回顾德尔佩佐曲面的莫里锥中各个锥的相关记号 Y。此外，我们在定义 5.1 和命题 5.2 中引入了此类锥的开细分。在第 6 节中，我们介绍一些已知的柱体集构造，并通过气泡类对其进行描述。在第 7 节中，我们给出这些构造在次数为 ≥ 2 的曲面上的应用示例，并提供相应的代码。在第 8 节中，我们给出一些关于 1 次情形的新结果。在第 9 节中，我们证明了 6 次（非环面）弱德尔佩佐曲面具有一般柔性。在附录 A 中，我们简要介绍模块 [19] 的使用方法。

2. 柔性判据

这里我们介绍来自 [18]的灵活性判据。在本节中，我们令 Y 表示一个正规射影簇， H 表示 Y 上的一个非常丰除子，并令 $X = \mathrm{AffCone}_H(Y)$表示与 H对应的 Y 上的仿射锥。我们用 $\pi\colon X \setminus \{0\} \to Y$表示射影化映射。

定义 2.1 ([13, 定义 3.1.7])。 如果开子集 $U \subset Y$ 的补集 $Y \setminus U$ 是某个有效 $\mathbb{Q}$-除子在 $\mathbb{Q}$ 上等价于 H 的支撑，则称 $U \subset Y$ 为 H-极性 。

定义 2.2 ([18, 定义 2.3])。 设 $\mathcal{U} = \{U\}$ 是 Y 的一组开仿射子集。

(i) 我们称 Z 中的子集 Y 是 $\mathcal{U}$-不变的，如果对任意 $U \in \mathcal{U}$，交集 $U \cap Z$ 都是 $\mathrm{SAut}(U)$-不变的。

(ii) 我们称 $\mathcal{U}$ 是横截的，如果 $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ 不存在非平凡的 $\mathcal{U}$-不变子集。(iii) 我们称 $\mathcal{U}$ 是 H-完备的，如果对于任意与 H 等价的（不一定有效的） $\mathbb{Q}$-除子，其支撑不包含在补集 $Y \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ 中。

定理 2.3 ([18, 定理 2.4])。 设 $\mathcal{U}$ 是一个横截的 H-极化开仿射子集族，其中各子集属于正规射影簇 Y，其对应的非常丰除子为 H。那么，在相应的仿射锥 X 上存在一个 $\mathrm{SAut}(X)$-轨道 S，其像包含 $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$。此外，若 $\mathcal{U}$ 是 H-完备的，则 S 是 X 中的开集，并且包含开子集 $\pi^{-1}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) \subset X$。

我们使用圆柱集合，其定义如下。

定义 2.4 ([13, 定义 3.1.5]). 如果某个开子集 $U \subset Y$ 满足$U \cong \mathbb{A}^1 \times Z$，其中 Z 是某个光滑簇，且 $\mathrm{Pic}(Z) = 0$，则称其为一个圆柱。我们所说的 U 的纤维是指投影到 Z 的$\mathbb{A}^1$-纤维。在 U上存在一个自然的 $\mathbb{G}_a$-作用，其轨道即为 U的纤维。

3. 气泡循环

本节的记号基于 [7, 第 7] 节。令 X 为光滑射影曲面。我们考虑由光滑射影曲面之间的双有理态射 $\phi_Y\colon Y \to X$ 诱导的范畴 $\mathcal{B}_X$。对象是曲面 Y，态射是覆盖 X 的双有理态射。也就是说，$\mathrm{Mor}(Y, Y')$ 至多包含一个元素，即复合$\phi_{Y'}^{-1} \circ \phi_Y$，前提是它是一个态射。在这种情况下，我们称 Y支配 Y'。

一个曲面 $Y \in \mathcal{B}_X$ 定义了一个子范畴 $\mathcal{B}_Y$。每个这样的曲面 Y 都是通过对 X进行迭代爆破 得到的，

$$Y \xrightarrow{\sigma_1} Y_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} Y_n = X,$$

其中，每个 σ_i 都是将一条 (-1)-曲线收缩到一个光滑点，且 $\phi_Y = \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1$。我们引入 Picard 群 $\mathrm{Pic}\, X$ 到迭代爆破的以下扩展。

定义 3.1. X 的气泡皮卡群 是以下对象的直接极限

$$\mathrm{Pic}\,\mathcal{B}_X = \varinjlim_{Y\in\mathcal{B}_X} \mathrm{Pic}\, Y \tag{1}$$

在单射 $\sigma^*\colon \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\ Y' \text{ for } Y' \xrightarrow{\sigma} Y \to X.$ 下。由于映射 σ^* 保持交叉形式，$\mathrm{Pic}\,\mathcal{B}_X$ 也带有交叉形式。

X 的气泡空间 X^{bb} 是X 的所有迭代吹起的闭点集合，再对自然等价关系取商：

$$X^{bb} = \sqcup_{Y\in\mathcal{B}_X} Y/\{p_1 \sim p_2\},$$

其中，若存在邻域 $p_i \in U_i \subset Y_i$，使得 $\sigma_{Y_2}^{-1} \circ \sigma_{Y_1}\colon U_1 \cong U_2$，则 $p_1 \sim p_2$，参见 [7, 定义 7.3.1]。它是集合范畴中的余积。我们称点 q 是无穷邻近于 p的，其中 $p, q \in X^{bb}$，并记作 $q \succ p$，若 $q \neq p$ 且 $\sigma(q) = p$，其中 σ 是 $\mathcal{B}_X$中的某个态射。设 k 为在 p 中对 p进行吹起并使其无穷邻近于 q所需的最少吹起次数。于是称 q 在 p 之上具有阶数 k，并记作 $q \succ_k p$。

以下定义基于 [7, 参见定义 7.3。2],但省略了一个额外的正性条件。

定义 3.2. X 上的泡循环 是由 X^{bb} 中的点构成的有限形式和 $\eta = \sum_{p\in X^{bb}} \eta(p)p \in \mathbb{Z}^{X^{bb}}$，其系数为整数。等价地， η 是一个具有有限支撑的映射 $X^{bb} \to \mathbb{Z}$。我们将泡循环 η 的支撑 记作 $\mathrm{supp}\,\eta$，它是由满足以下条件的点组成的集合

$p \in X^{bb}$ 使得对于某个 $q \succ p$， $\eta(p) \neq 0$ 或 $\eta(q) \neq 0$。我们将 X^{bb} 上的泡循环群记为 $\mathcal{Z}(X^{bb})$。

定义 3.3. 如果对于任意$p \in \operatorname{supp}\eta$，我们都有 $\eta(p) = 1$，则称泡循环 η 为爆破循环。

约定 3.4. 每个定义在 $Y \in \mathcal{B}_X$ 上的泡循环 η 都会诱导一个迭代爆破 $\sigma\colon Y_\eta \to Y$，首先爆破包含在 Y 中的点 $p \in \operatorname{supp}\eta$，然后依次爆破 1 阶无穷近点，等等。映射 σ 称为 η 的消解。注意，具有相同支撑的两个泡循环$\eta, \eta' \in \mathcal{Z}(Y^{bb}) \subset \mathcal{Z}(X^{bb})$ 会生成相同的曲面 $X_\eta = X_{\eta'}$。

将 η 发送到 Y_η，我们得到 blowup cycles η 与支配 Y 的曲面 $Y' \in \mathcal{B}_X$ 之间的自然双射。

约定 3.5. 考虑一个属于曲面 $Y \in \mathcal{B}_X$ 的点 $p \in X^{bb}$。令$\sigma : \operatorname{Bl}_p Y \to Y$ 表示在 p 处对 Y 进行的吹起，并令 $\mathcal{E}_p$ 表示 σ 的例外曲线 E 的除子类。于是，我们将 p 与 $\mathcal{E}_p$ 视为相同。

由可加性，这定义了一个自然嵌入 $\mathcal{Z}(X^{bb}) \hookrightarrow \operatorname{Pic}\mathcal{B}_X$。特别地，泡循环 η 被映射到相应迭代爆破的皮卡群 $\operatorname{Pic} X_\eta$。

注意，对于任意 Y' 支配 $\operatorname{Bl}_p Y$如上所述，除子类 $\mathcal{E}_p \in \operatorname{Pic}(Y')$ 包含唯一的有效除子 D_p。给定一个迭代爆破 $\sigma\colon Y_\eta \to Y$对应于 η 上的一个泡循环 Y，我们称 D_p 对于 $p \in \operatorname{supp}\eta$ 的 例外配置为双有理态射 σ的例外配置，见 [7,第 7.3 节。1]。

事实上，气泡皮卡群结合了泡循环和除子类这两个概念，如下述引理所示。

引理 3.6。 *(i)* 我们有

$$\operatorname{Pic}\mathcal{B}_X = \operatorname{Pic} X \oplus \mathcal{Z}(X^{bb}),$$

where $\mathcal{Z}(X^{bb})$ 被视为 $\operatorname{Pic}\mathcal{B}_X$的子群，依据约定 *3.5* .

(ii) 对于 $Y \in \mathcal{B}_X$，群 $\operatorname{Pic}\mathcal{B}_X$ 和 $\operatorname{Pic}\mathcal{B}_Y$ 重合。 (

iii) 我们有

$$\operatorname{Pic}\mathcal{B}_X = \operatorname{Pic} Y \oplus \mathcal{Z}(Y^{bb})$$

对于任意 $Y \in \mathcal{B}_X$.

证明。 断言 (i) 直接由 Picard 群 $\mathcal{B}_X$ 作为点吹起下 Picard 群的归纳极限的定义得出。断言 (ii) 显然成立，因为相应的直极限 (1) 相同。断言 (iii) 则由前两个断言得出。 □

这一观察使我们可以将 $\operatorname{Pic}\mathcal{B}_X$ 中的元素视为有序对，见以下定义。

定义 3.7。 在 $Y \in \mathcal{B}_X$ 上的一个气泡类 (D, η) 是由除子类 $D \in \operatorname{Pic} Y$和泡循环 η 组成的有序对，其中泡循环位于 $Y^{bb} \subset X^{bb}$上。

以下 翼引理展示了气泡类如何在爆破下作为一对进行变换 .

引理 3.8。 *(i)* 考虑 $Y \in \mathcal{B}_X$ 上的一个气泡类 (D, η)，以及在吹起 $\sigma\colon Y' \to Y$中，位于点 p 处且具有例外曲线 E 时，该气泡类在 Y' 上的表示 (D', η')。那么 $D' = D + kE$ 和 $\eta' = \eta|_{Y'^{bb}} = \eta - kp$，其中 $k = \eta(p) = D' \cdot E$。*(ii)* 考虑 $Y \in \mathcal{B}_X$ 上的一个气泡类 (D, η)，以及一个迭代爆破 $\sigma : Y' \to Y$，该爆破对$\operatorname{supp}\eta$中的所有点进行吹起。那么我们有

$$(D, \eta) = \left(D + \sum_{p \in \operatorname{supp}\eta} \eta(p)\mathcal{E}_p, 0\right) = D + \sum_{p \in \operatorname{supp}\eta} \eta(p)\mathcal{E}_p$$

在 Y' 上，其中 $\mathcal{E}_p$ 是与 Y' 上的 p 相对应的除子类。

证明。 注意到 $\sigma^*(D) = D$，因为根据我们的约定，$\operatorname{Pic} Y \subset \operatorname{Pic} Y'$ 是 $\operatorname{Pic} \mathcal{B}_X$ 的子群。因此，第一个断言显然成立。第二个断言通过对吹起次数进行归纳得到。□

每个气泡类还在 X 上定义了一个具有指定基概形的线性系，这便引出了以下定义。

定义 3.9. 与气泡类 泡线性系 相对应的$(D, -\eta)$ 在$Y \in \mathcal{B}_X$ 是线性系 $|D - \eta|$ 采用 [7, 第 7.3 节的记号。2]。

也就是说， $|D - \eta|$ 由有效除子 $D' \in |D|$ 组成，这些除子在每个 $p \in \operatorname{supp} \eta$处的重数至少为 η（p）（取严格变换后）。

注 3.10. $D' \in |D|$ 上的一个除子属于 $|D - \eta|$，当且仅当它在 Y_η 上的严格变换 $\tilde{D}$ 对任意 $p \in \operatorname{supp} \eta$都满足 $\tilde{D} \cdot \mathcal{E}_p \geq \eta(p)$。

$Y \in \mathcal{B}_X$ 上的泡线性系恰好是支配 Y 的曲面上的完全线性系，见以下命题。

命题 3.11。 设 $L = |D - \eta|$ 是 $Y \in \mathcal{B}_X$ 上的一个泡线性系，且 $\sigma_\eta\colon\ Y_\eta \to Y$ 是 η 的一个消解。那么 $\sigma_\eta^*(L)$ 是完备线性系 $|D'|$，其中 $D' \in \operatorname{Pic} Y_\eta$ 等于 $(D, -\eta)$。

反之，设 $Y, Y' \in \mathcal{B}_X$ 满足 Y' 支配 Y，且 $D' \in$ Picard 群 Y'。那么，对于 Y 上满足 $D' = (D, -\eta)$ 的气泡类 $(D, -\eta)$，完全线性系 $|D'|$ 的像等于 $|D - \eta|$。

证明。 令 $\sigma\colon\ Y_\eta \to \eta$ 为一次迭代爆破，吹起 支撑 η中的所有点。则$|D - \eta|$ 等于 $|\sigma^*(D) - \sum_{p \in \text{支撑}\,\eta} \eta(p)\mathcal{E}_p|$的直像，参见引理 3.8。反向命题显然。 □

4. $\mathbb{P}^2$ 上的泡线性系

在本节中，我们令 $X = \mathbb{P}^2$ 并将范围限制为 $\mathcal{B}_{dP} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{P}^2}$ 这一德尔佩佐曲面和弱德尔佩佐曲面的满子范畴（除 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$外）。一个 负曲线 在 $Y \in \mathcal{B}_{dP}$ 上是指一条曲线 $C \subset Y$ 同构于 $\mathbb{P}^1$ 且具有负自交数 C^2的曲线。如果 Y 是一个德尔佩佐曲面，那么 $C^2 = -1$否则 C^2 则等于 -1 或 -2本节的符号约定基于 [7, 第 8]节。

我们考虑 $\mathcal{B}_{dP}$ 中的曲面，按以下组合等价关系分类，参见 [14] 中的 Weyl 等价。

定义 4.1。 我们称 Y、$Y' \in \mathcal{B}_{dP}$ 等价，如果存在一个同构 Picard 群 $Y \xrightarrow{\sim}$ Picard 群 Y'，保持交叉形式，并诱导负曲线类的双射。 $\mathcal{B}_{dP}$ 中的曲面的等价类称为类型 的曲面。它由Picard 群 Y 作为带有交叉形式的格以及负曲线类的子集来定义。我们将 η 在 $\mathbb{P}^2$ 上的爆破循环的类型 定义为 X_η中的一种。

注记 4.2. Y 上的 (-2)-曲线子集定义了奇异德尔佩佐曲面 Y'上的奇点类型，而该曲面是 Y的（多重）反典范模型，参见[7, 第 8 节1]。

考虑 η 上的一个吹起循环 $\mathbb{P}^2$。根据 [7, 推论 8.1，17], 曲面 X_η 属于$\mathcal{B}_{dP}$，当且仅当 $\operatorname{supp} \eta$ 满足以下条件。

(i) $|\operatorname{supp} \eta| \leq 8$；(ii) 对于每个 $p \in \operatorname{supp}\ \eta$，至多存在一个 $q \in \operatorname{supp} \eta$ 使得 $q \succ_1 p$；

(iii) 没有四个点共线，即，对于任意 p_1，.....， $p_4 \in$ supp η， $|L-p_1-\ldots-p_4| = \emptyset$。(iv) 没有七个点共圆锥曲线，即，对于任意 p_1，.....， $p_7 \in$ supp η， $|2L-p_1-\ldots-p_7| = \emptyset$。

约定 4.3。 吹起循环 η for $X_\eta \in \mathcal{B}_{dP}$ 的类型由以下可能的依赖关系定义：

- $p \prec q$ for $p, q \in$ supp η;
- supp η 中的三个点位于一条直线上，即对于某些 p_1、p_2、$p_3 \in$， $|L-p_1-p_2-p_3|$ 是非空的 {supp} η;
- supp η 中的五个点位于一条圆锥曲线上，即对于某些 p_1、.....、$p_5 \in$， $|2L-p_1-\ldots-p_5|$ 是非空的 supp η;
- supp η 中的全部八个点位于一条三次曲线上，其中一个是节点，即对于{supp} η的某种枚举选择， $|3L-2p_1-p_2-\ldots-p_8| \neq \emptyset$ $\{p_1, \ldots, p_8\} =$。

我们将与 η 对应的这类依赖集合记为 type(η)。

圆柱 $U \subset$Bl$_\eta \mathbb{P}^2$ 由以下数据描述：

(i) 由 U 的 $\mathbb{A}^1$-纤维化诱导的曲线线性系 P，它是 $|D-\eta'|$ 中的一个一维线性子系，其基概形对应于 η'，并且具有包含 $\mathbb{A}^1$ 的有理不可约一般纤维（位于唯一基点或固定分量之外）；(ii) U 的补集中的 P 的纤维，包括所有可约纤维，这些纤维同样可以用气泡类来描述。

因此，圆柱 U 可以用 $\eta + \eta'$ 的组合类型以及可约纤维各分支的类似数据来表示。我们的目标是以统一且算法化的方式，将圆柱构造推广到各种类型的（弱）德尔佩佐曲面上。

5. Picard group and polyhedral cones

在本文余下部分中，我们使用以下记号。我们将.....记为

- Y一个次数为 d 的德尔佩佐曲面，其中 $d \in \{1, \ldots, 5\}$;
- σ 一个收缩 $Y \to \mathbb{P}^2$;
- E_1，...， E_m 由 σ 分别收缩到 p_1，...， $p_m \in \mathbb{P}^2$ 的(-1)曲线，其中 $m = 9-d$;
- $L_{i,\ j}$ 一条经过 p_i, p_j 的直线，其中 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ 给定，以及它在 Y 中的严格变换;
- L 在 $\mathbb{P}^2$上一条一般直线的严格变换的类;
- $-K$ Y上的反典范除子类;
- $\overline{\text{NE}}(Y)$ Pic(Y) 中数值有效 $\mathbb{R}$-除子的莫里锥 $\otimes \mathbb{R}$；它由 Y 中所有的 (-1)曲线生成;
- Ample(Y) 丰沛锥；它包含所有丰沛除子，并且与 NE(Y) 对偶。

Give对于一个 $\mathbb{Q}$-除子 D，我们用同一个字母表示它的除子类。注意，

- 丰性（Y） $\subset \overline{\text{NE}}$（$Y$），
- $-K \equiv 3L - \sum_{i=1}^m E_i$,
- $L_{i,j} \equiv L - E_i - E_j$,
- 在这些点中 p_1，.....， p_m没有三点共线，没有六点位于同一条圆锥曲线上，也没有八点位于一条以其中一点为节点的三次曲线上，参见[15,定理 IV.2。5]。

定义 5.1。考虑一个严格凸有理多面锥 $C \subset \mathbb{Q}^n$ 和一个向量 $r \in C$。令 $\mathcal{F}(C,r)$ 为 C 的所有真面构成的集合，且由 F 和 r 生成的锥 $\mathrm{Cone}(F,r)$ 不包含于 C 的任何真面中。于是我们称一个开细分

$$\mathrm{Subd}(C,r) = \{\mathrm{Cone}(F,r) \mid F \in \mathcal{F}(C,r)\}$$

这类锥的集合。我们称元素 $\mathrm{Cone}(F,r)$ 细分锥。

命题 5.2. 考虑严格凸有理多面锥 $C \subset \mathbb{Q}^n$ 沿 C 中的一条射线 r 所作的一个开细分 $S = \mathrm{Subd}(C,r)$ 。那么

$$\mathrm{rel.\,int.}(C) = \bigsqcup_{C' \in S} \mathrm{rel.\,int.}(C').$$

证明。对于任意一个不与 r 成比例的 $a \in$ 相对内部(C)，我们考虑由 r、$-r$、a 生成的半平面 H。它与 $C \setminus$ 相对内部(C) 沿某条射线 $\mathbb{Q}_{\geq 0} b$ 相交。因此，存在唯一的面F，使得 $b \in$ 相对内部(F)。

最后，如果 $a = r \in$ rel.int.(C)，则对应的面 F 为零，且 $r \in$相对内部 $\mathrm{Cone}(r)$。□

参见 [18, 命题 4.3] 和 [5, 第 2 节.1] 中的以下已知结论。

命题 5.3. 考虑沿着 $-K$ 对 $\mathrm{NE}(Y)$ 进行的开细分 $S_1 = \mathrm{Subd}(\mathrm{NE}(Y)\overline{\ -K})$。$S_1$ 中的任意元素，在选取 σ 并对 $E_1, \ldots, E_m$ 进行置换后，均等于以下锥之一：$B_0, \ldots, B_m, B_P, C$，其中

- $B_k =$ 锥（$-K$，E_1，…，E_k）对于 $k = 0$，…，m；
- $B_P =$ 锥$(-K, E_1, \ldots, E_{m-2}, L_{m-1,\ m})$；
- $C =$ 锥$(E_1, \ldots, E_{m-1}, L_{1,m}, \ldots, L_{m-1,m})$.

命题 5.4. 考虑沿纤维类 $L - E_m$ 对 C 作开细分 $S_2 = \mathrm{Subd}(C, L - E_m)$。$S_2$ 的任意一个元素，若其包含充足除子类，则在适当选取 σ 并对 $E_1, \ldots, E_m$ 进行置换后，等于以下锥之一：$C_0, \ldots, C_m, C_P$，其中

- $C_k = \mathrm{Cone}(-K, E_1, \ldots, E_k, L - E_m)$ *for* $k = 0, \ldots, m-1$;
- $C_P = \mathrm{Cone}(-K, E_1, \ldots, E_{m-2}, L_{m-1,m}, L - E_m)$.

命题 5.2 保证，任意充足除子类在选取 $E_1, \ldots, E_m$后，都属于以下某个锥的相对内部：$B_0, \ldots, B_m, B_P, C_0, \ldots, C_P$。注意，这里的记号与 [18], 中的记号一致，但 B_P 和 C_P分别记作 B'_5 和C'_5 （见[18]）。

注 5.5。例如，第 [5, 6 节3] 中隐含使用的另一种开细分如下。给定一个锥 C_k 或 B_k，我们沿着 $E_1 + \ldots + E_k$ 对其进行细分；在对 $E_1, \ldots, E_k$进行置换后，只考虑坐标 $E_1, \ldots, E_k$非递增的细分锥。

使柱体集具有 H-极性和 H-完备性的除子 H 所需满足的条件，分别通过极性和禁锥来表达。

定义 5.6 ([18, 定义 6.1])。给定一个开子集 $U \subset Y$，其补集由分支 $D_1, \ldots, D_n$ 组成，我们定义其极性锥 $\mathrm{Pol}(U) = \mathrm{Cone}(D_1, \ldots, D_n)$。那么，对于任意来自 rel. int.(Pol(U)) 的除子 H， U 都是 H-极性的。

给定 Y 的一组开子集 $\mathcal{U}$，我们将极性锥 定义为

$$\mathrm{Pol}(\mathcal{U}) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{Pol}(U).$$

设 $D_1, \ldots, D_n$ 是 $Y \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ 中的不可约曲线。我们将禁锥定义为

$$\mathrm{Forb}(\mathcal{U}) = \mathrm{Cone}(D_1, \ldots, D_n).$$

那么，对于任意 $H \notin$ ， $\mathcal{U}$ 都是 H-完备的。Forb($\mathcal{U}$)。

6. 圆柱构造

这里我们回顾不同次数的曲面上的一些圆柱构造，并按照第4节的思路讨论它们的性质。更多构造及其在 Sagemath 中的实现可参见 [19], 有关使用方法的信息，请参阅附录 A 。对于不同次数和除子类型，已知能够推出一般柔性的覆盖构造以测试的形式列于 [19]。

对于任意曲线 $C \in \mathbb{P}^2$ ，我们用 $\tilde{C}$ 表示其在 Y 中的严格变换。

例 6.1。考虑经过点 p_i 的 $\mathbb{P}^2$ 中的直线束，见 [5,例 4.1.1]。那么补集 $\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup_{j \neq i} L_{ij}$ 是一个圆柱。一般纤维的气泡类为 $(L, -p_i)$，基 locus 为 p_i，且补集中的纤维属于气泡类 $(L, -p_i - p_j)$。其极性与 $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}} Y$ 中的禁锥重合，并由 $E_1, \ldots, E_m$ 和 $L - E_i - E_j$ （ $j \neq i$）生成。

考虑三次德尔佩佐曲面 Y，它是将 $\mathbb{P}^2$ 在点 $p_1, \ldots, p_6$ 处吹起得到的，并选取一点 $p \in \mathbb{P}^2$，使得 $p, p_1, \ldots, p_5$ 位于一条圆锥曲线上。考虑一条圆锥曲线$Q \in |2L - p_1 - \ldots - p_5|$ 和一条与 Q 相切的直线 $T \in |L - p - p_6|$ 。

圆柱 U 是 $\mathbb{P}^2 \setminus T \cup Q$ 的同构原像。纤维化由线性系 $\langle Q, 2T \rangle$ 给出，对应的气泡类为 $(2L, -p)$。

例 6.2. 考虑 $\mathbb{P}^2$ 上的一条圆锥曲线 Q 及其在 $p \in Q$ 处的切线 T 。那么， $Q \cup T$ 的补集是一个圆柱，其一般纤维的气泡类为 $(2L, p)$。它对应于曲线线性系 $P = \langle Q, 2T \rangle$。

这类线性系的模空间是5维的，我们至多可以施加5个独立条件，条件形式为“点 p_i 和 p_j 属于同一纤维”或“点p_i 位于 T上”。例如，设 p_1，……， p_5 位于同一纤维上，记作 Q，且 p_6 位于 T上。

那么， Y 上的圆柱 U 是 $\sigma^*(P)$的可约纤维的补集；这些可约纤维（若存在）分别由 Q对应的气泡类 $Q = |2L - p_1 - \ldots - p_5|$ 、 T对应的气泡类 $|L - p_6|$ 以及$i > 6$对应的气泡类 $|2L - p_i|$ 给出。 U 的极性锥由对应除子类的曲线以及例外曲线 E_1，……， E_m的类生成。

在这种情况下，存在一对这样的圆柱（具有相同的极性锥），并构成一个横截集合。这可以从 T 与 Q上的相切条件看出，其次数为2。事实上，经过 p_6的 T、 T' 与 Q 相切的直线有两条。它的禁锥为$\tilde{}\mathrm{Cone}(Q$， E_1，……， $E_m)$。由于 E_m 在此锥上非正，因此该锥不含丰沛除子。因此，根据定理2.3，对于极性锥相对内部中的任意丰沛除子类，这个集合都蕴含一般传递性。参见[5, 例4.1。2] 以及 [18,例5。2]。

例 6.3. 我们按照 [5, 定理 6.2.2，第 2 种情况。1] 以及 [5, 例 4.1。13]考虑一个次数为 $2 \leq d \leq 5$的德尔佩佐曲面 Y 。选取一个不同于

p_1，……，p_m的点，并考虑一条尖点曲线 C、一条圆锥曲线 Q 以及直线 L_1，……，L_4，如下所示。

$$\begin{aligned} C &\in (3L, -2p - p_1 - \ldots - p_m) = (-K_Y, -2p), \\ Q &\in (2L, -p - p_1 - \ldots - p_4), \\ L_i &\in (L, -p - p_i). \end{aligned}$$

那么，$U = Y \setminus (C \cup Q \cup L_1 \cup \ldots \cup L_4)$ 是一个圆柱，对应于线性系 $\langle 2C, Q + L_1 + \ldots + L_4 \rangle$ 以及 $\mathbb{P}^2$ 上的气泡类 $(6L, -2p - p_1 - \ldots - p_4)$，即 Y 上的 $(6L - 2E_1 - \ldots - 2E_4, -2p)$。

让我们考虑 $\mathrm{Bl}_p Y$，并通过将 Q'、L_1'、……、L_4'、E_5、……、E_m 这些在 Y' 上互不相交的 (-1)曲线的严格变换压缩，将其压缩为 $\mathbb{P}^2$。设 p_0'、……、p_5' 与 p_6、……、p_m 分别为它们的像。换句话说，我们将 $\mathrm{Bl}_p Y \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}^2}$ 同构地映射到某个 $Y' \in \mathcal{B}_{\mathbb{P}^2}$，使得 Q'、L_1'、……、L_4'、E_5、……、E_m 被映射为 $\mathbb{P}^2$ 上的例外曲线。这个同构，记作 ϕ，由一种变换描述，该变换是通过改变到 $\mathbb{P}^2$ 的压缩方式而诱导的曲面类型变换。

那么 $\phi_*(C) \in |L|$，$\phi_*(E_p) \in |2L - p_1' - \ldots - p_5'|$，以及 $(\sigma_{Y'} \circ \phi)_*(C)$ 是与圆锥曲线 $(\sigma_{Y'} \circ \phi)_*(E_p)$相切的直线，因此这个例子是例 6.2 的一个变体。

如果我们从另一个点 $p' \neq p$ 开始这一构造，该点也是反典范尖点曲线 C' 在 Y 上的尖点，那么得到的圆柱 U' 与 U具有相同的数据。

所得的一对圆柱横截，其禁锥 $\mathrm{Cone}(E_5, \ldots, E_m)$不包含丰沛除子，其极性锥为

$$\mathrm{Cone}(-K, 2L - E_1 - \ldots - E_4, L - E_1, \ldots, L - E_4, E_5, \ldots, E_m).$$

注6.4。 设 Y 是一个2次德尔佩佐曲面，则存在一个双覆盖$Y \to \mathbb{P}^2$，其在四次曲线 C 上 $\mathbb{P}^2$分歧，例如参见 [7, 第 6.3 节。3]。已知对于一般的2次德尔佩佐曲面，四次曲线 C 没有超拐点。事实上，根据 [7, 第 6 节，4] 以及 [6],在具有拐点双切线的四次曲线轨迹上，60次萨蒙不变量为零。

特别地，一般的 2 次德尔佩佐曲面以及任意 ≥ 3 次德尔佩佐曲面，其反典范类中都含有一条尖点有理曲线。此外，至少含有这样的一对曲线，例如参见 [11, 引理 3.1]。

7. ≥ 2 次的一般柔性

我们给出一个使用所引入构造的例子。关于不同次数下一般柔性的其他类似结论，例如来自 [17], [4], [18], [11], 的结论，可见于 [19]。

例 7.1。 设 Y是一个次数为 $d \in \{2, \ldots, 5\}$ 的德尔佩佐曲面，且其中含有一条反典范尖点有理曲线。设 C 是以下锥之一 B_{5-d} 或 C_{5-d}。那么例 6.3 给出了一个 H-完备且 H-极横截族，对任意 $H \in \mathrm{rel}_{\text{。}} \mathrm{int}_{\text{。}}(C)$。

对于 $d = 2$ 这对应于 [5, 定理 6.2.3，情形 2。1] 以及 [11, 情形 3.1。2]。

例7.2。 考虑次数为 2 且锥为 B_2的情形。存在性 $\mathbb{G}_a$-作用及一般柔性分别通过参见 [5, 定理 6.2。3]和 [11, 引理 5。1]对锥 B_2 的相应部分进行检验，如图 1所示。

注7.3。 研究所引入的细分锥的部分覆盖的另一种方法，是计算被覆盖部分的体积相对于整个锥的体积。

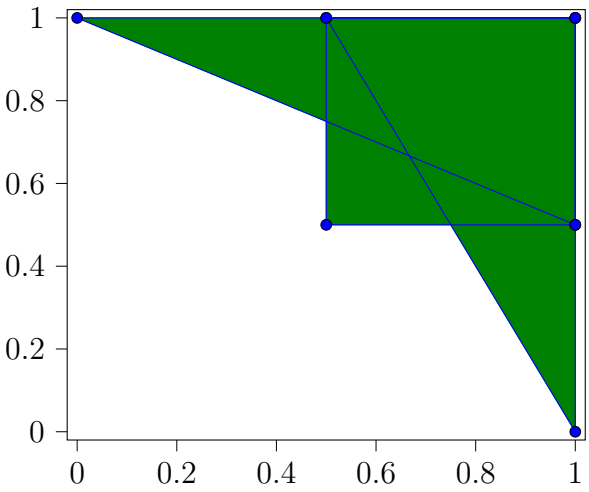

图 1. 由极性锥覆盖的 2 次锥 B_2。点 (a_1, a_2) 对应于除子类 $H = -K + a_1E_1 + a_2E_2$。顶点为 (0, 0)、(1, 0)、(0, 1)、(1, 1) 的所示正方形，是 B_2 的充分类在超平面 $-K + \bigoplus \mathbb{Q}E_i$ 上的截面。填充部分由极性锥覆盖。

这里的锥的体积，是指它与某个超平面的截面的体积，例如 $(-K, \cdot) = 1$。也可以进一步细分所研究的锥。

8. 一般柔性：次数为 1

这里我们给出关于 1 次一般柔性的新结果。在下面的定理中，我们使用 [5, 定理 6.31] 中的构造。

定理 8.1. 设 Y 是一个次数为 1 的德尔佩佐曲面，且 H 是一个非丰除子，使得

(2) $H \in$ 相对内部锥$(2L - E_1, 2L - E_2, L - E_3, 2L - E_4 - \ldots - E_8, E_1, \ldots, E_8)$。

那么，锥 $\mathrm{AffCone}_H(Y)$ 是泛柔性的。

证明。我们只需考虑例 6.2(1) 中给出的构造，其中 $k = 3$. □

备注 8.2。 条件 (2) 也可以用另一种方式表示。(2) 中的锥与 B_k 的交，其中 $k \geq 3$ 且 $k \leq 7$，等于

$$\mathrm{Cone}(-K + E_1 + E_2, -K + E_1 + \frac{E_2}{2} + E_3, -K + \frac{E_1}{2} + E_2 + E_3, E_1, \ldots, E_k)$$

对于 $k = 8$，交集更大。

对于某个 $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ $H \sim -K + \sum_{i=1}^{8} a_iE_i$，其中 $a_i \geq 0$。那么 H 满足 (2) 当且仅当

$$2a_1 + 2a_2 + a_3 > 2, \qquad a_1, a_2, a_3 > 0.$$

这是 [5, 定理 6.31]中的条件。

定理 8.3。 设 $H \in \mathrm{rel.\,int.}\, C$ 为一个非常丰除子，其中

$$C = \mathrm{Cone}(L - E_1, \ldots, L - E_6, L - E_7 - E_8, E_1, \ldots, E_8).$$

于是，仿射锥 $_H(Y)$ 是泛柔性的。

证明。 考虑一对与 $i = 7,8$ 对应的圆柱，它们见例6.1。那么它是横截的， C 是其极性锥，而禁锥等于锥$(L - E_7 - E_8, E_1, \ldots, E_8)$，其中不包含充足除子类。结论由例2.3得出。 □

在次数为 ≥ 2 的情形下，对于某个柱体集，反典范类 $-K$ 位于极性锥的闭包中。目前尚不清楚这一结论在次数为 1 的情形下是否成立。

问题 8.4. 给定一个次数为 *1* 的德尔佩佐曲面 Y， $-K$ 与使 $\mathrm{AffCone}_H(Y)$ 具有泛柔性的除子类子集 H 之间的角距离是多少?

9. Weak del Pezzo surfaces

让我们来看一些弱德尔佩佐曲面上的圆柱的例子。

例 9.1. 设 Y 是一个弱德尔佩佐曲面，其次数为 6，且有一条气泡类为 $(L, -p_1 - p_2 - p_3)$ 的单独 (-2)- 曲线。那么

$$\mathrm{Ample}(Y) = \mathrm{Cone}(L, L - E_1, L - E_2, L - E_3).$$

考虑一个不在直线 $\overline{p_1p_2p_3}$ 上的点 $p \in \mathbb{P}^2$， 以及直线 $L_i = \overline{pp_i} \subset \mathbb{P}^2$。

那么 $\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup L_i$ 是一个圆柱，其在 Y 中的原像也是如此，并具有气泡类纤维（$L, -p$）。这类圆柱在改变 p 时形成横截的，在 $\mathrm{Ample}(Y)$ 上 H-完备，并在 $\mathrm{Ample}^\circ(Y)$ 上 H-极化。

例 9.2. 设 Y 为一个度数为 6、具有一条与依赖关系 $p_2 \succ p_1$ 相对应的单一 (-2) 曲线的弱德尔佩佐曲面。那么

$$\mathrm{Ample}(Y) = \mathrm{Cone}(L, L - E_1, L - E_1 - E_2, L - E_3, 2L - E_1 - E_2 - E_3).$$

考虑直线 $\overline{p_1p_2p_3}$ 上的点 $p \in \mathbb{P}^2$， 以及气泡类（L， $-p$）中的另一条直线 $L' \subset \mathbb{P}^2$。

那么， $\mathbb{P}^2 \setminus \overline{p_1p_2p_3} \cup L$ 是一个圆柱，其在 Y中的原像也是如此，其纤维类为L。随着 p 变化，这类圆柱的集合 C_1 是横截的，并且对于$H \in \mathrm{Ample}^\circ(Y)$而言是 H-极的。

考虑另一个映射 $\sigma'\colon\ Y \to \mathbb{P}^2$， 它收缩了 (-2)曲线和两条 (-1)曲线$L_{12}$ 和 L_{13}，保留 E_2 和 E_3。重复圆柱构造，我们再次得到一个横截的集合 C_2，它对 $H \in \mathrm{Ample}^\circ(Y)$是 H-极化的。那么并集$C_1 \cup C_2$ 对 $H \in \mathrm{Ample}^\circ(Y)$是 H-完备的。事实上，它的补集由曲线E_2、 $E_1 - E_2$和 L_{13} 组成，并非任何 ample 除子的支撑。

定理 9.3. 设 Y 是一个*6*次弱德尔佩佐曲面。那么，对于任意非常丰除子类 H，仿射锥 $\mathrm{AffCone}_H(Y)$ 都是泛柔性的。

证明。存在两个非环面弱德尔佩佐曲面，其次数为 6，参见 [7, 第 8.4 节。2]它们分别在示例 9.1、9.2 中进行了介绍。

如果 Y 是环面的，那么该结论可由[3]得出。 □

附录 A. Sagemath 模块使用工作流程

下面介绍 Sagemath模块 [19] 的使用场景。

要使用所提供的模块，请安装 Sagemath，并将文件 `delPezzo_cylinders.py`from [19] 放入工作目录中。使用以下命令创建德尔佩佐曲面（即其类型）：`S=Surface(d)`，其中 `d` 等于其次数。以下示例代码导入该模块并创建一个 曲面 实例。

<escape>来自delPezzo_圆柱 导入 *S =
曲面(3)</escape>

上述示例的实现如下。

- 示例 6.1通过圆柱实现。创建_类型_直线(S, S.E,S.E[i-1])

- 示例 6.2通过以下方法实现：圆柱.make_类型_相切.
- 示例中的集合 6.2通过以下方式构造圆柱。创建_类型_相切(S, S。E,S。E[k:], [S。E[k-1]], \[[e] 对于 e属于 S。E[:k-1]])

- 示例 6.3通过以下方式实现圆柱。创建_类型_cuspcubic(S, S.E,S.E[-4:])
- 例 7.1（对于 B_{5-d}）对应的代码如下。d = 4S = 曲面(d) 圆柱 = Cylinder.make_type_cuspcubic(S, S.E, S.E[-4:]) 集合 = CylinderList([圆柱]) 锥 =S.cone_representative(f'B({5-d})') 集合.is_generically_flexible_on(锥) # True

- 例 9.1通过 S =曲面(6, 共线_三元组=[[1,2,0]]) 圆柱 = Cylinder.make(S, 补集=S.E, 支撑=S.E + [S.L-e for e in S.E] ,纤维=S.L, 横截的=True)

- 示例 9.2在 测试_弱_deg6.py 中 [19]。

该模块支持爆破模型中的所有可能类型的 (-2) 曲线，即由共线三重点、无穷近点、圆锥曲线上的六点，以及其中一点具有节点的尖点三次曲线上的八点所产生的曲线。因此，它支持所有弱德尔佩佐曲面。

构造的（弱）德尔佩佐曲面的 (-1) 曲线和 (-2)曲线列表可通过以下方法获取 S。minus_one_curves() 和 S。minus_two_curves() 分别获得。前者依据 [7, 引理 8.2。2], 构造，该引理指出，一个除子类D 当且仅当 $D^2 = -1$ 并且对每条 (-2)曲线 $D \cdot F \geq 0$ 均成立时，才表示一条 (-1) 曲线 F。

以下示例代码选择了细分锥 B_3 以及示例 6.3中的一个柱体集。

来自delPezzo_圆柱 导入 *S = 曲面(3)B3 = S.锥_代表元('B(3)') 集合 = 圆柱.创建_类型_cuspcubic(S, S.E,S.E[-4:])

返回 S 的可用细分锥列表的函数是 NE_SubdivisionCone。锥_types(S)

名为集合对象的极性的射线和禁锥c 分别由以下方法返回：c。Pol。rays() 和c。Forb。rays() 。

给定锥的相对内部中的集合（此处为 B_3 ）以及细分锥中集合的性质（其中集合是极性的且完备的），可以通过以下方法进行检查。

collection.is_极性的_on(B3) # False collection.is_完备的_on(B3) # True collection.is_横截的() #True collection.is_一般地_柔性的_on(B3) # False list(collection.compatible_代表元()) # *['B(2)', 'C(2)']* list(collection.compatible_代表元(完备的=True)) \ # *['B(2)', 'C(2)']*

方法 `S.all_cylinders(constructions)` 返回一个集合，其中包含符合特定构造（例如 `constructions = ['直线', '相切']`）的所有选择所对应的所有圆柱。 σ。此类集合与以下方法搭配使用很有用。方法 `collection.make_polar_on(锥)` 会筛除在锥内不具极性的圆柱，而 `collection.reduce()` 会从集合中移除冗余圆柱，同时保持禁锥不变。

参考文献

[1] I. Arzhantsev. 代数簇的自同构与无限传递性。《圣彼得堡数学杂志》，34(2):143–178，2023年3月。URL: https://doi.org/10.1090%2Fspmj%2F1749，doi:10.1090/spmj/1749。[2] I. Arzhantsev、H. Flenner、S. Kaliman、F. Kutzschebauch 和 M. Zaidenberg. 柔性簇与自同构群。Duke 数学杂志，162(4):767–823，2013年。[3] I.V. Arzhantsev、K. Kuyumzhiyan 和 M. Zaidenberg. 旗簇、环面簇与悬置：无限传递性的三个实例。《数学文集》，203(7):923–949，2012年。[4] Ivan Cheltsov、朴志勋和元俊英. 光滑三次曲面上的仿射锥。《欧洲数学学会杂志》，18(7):1537–1564，2016年。doi:10.4171/jems/622。[5] Ivan Cheltsov、朴志勋和元俊英. 德尔佩佐曲面中的圆柱。《国际数学研究通知》，2017(4):1179–1230，2017年。doi:10.1093/imrn/rnw063。[6] Teresa Cohen. 平面四次曲线研究。《美国数学杂志》，41(3):191–211，1919年。URL: http://www.jstor.org/stable/2370332。[7] Igor V. Dolgachev. 《经典代数几何：现代视角》。剑桥大学出版社，2012年。doi:10.1017/CBO9781139084437。[8] Michael Hoff 和 Hoang Le Truong. 属为 $g \geq 7$ 的 Mukai 四维簇上的仿射锥的柔性，2022年。arXiv:2208.09109。[9]S. Kaliman 和 D. Udumyan. 关于柔性簇的自同构。《数学进展》，396:108112，2022年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187082100551X, doi:10.1016/j.aim.2021.108112。[10] Shulim Kaliman. 柔性簇的嵌入定理。《密歇根数学杂志》，第1–14页，2024年。doi:10.1307/mmj/20226268。[11] Jaehyun Kim 和朴志勋. 2次德尔佩佐曲面上的仿射锥的一般柔性。《国际数学杂志》，32(14):2150104，2021年。doi:10.1142/S0129167X21501044。[12]Jaehyun Kim 和元俊英. 2次光滑德尔佩佐曲面中的圆柱。《几何学进展》，25(1):71–91，2025年1月。URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/advgeom-2024-0034/html, doi:10.1515/advgeom-2024-0034。[13] T. Kishimoto、Yu. Prokhorov 和 M. Zaidenberg. 仿射锥上的群作用。载于《仿射代数几何》，CRM 会议论文集与讲义，第54卷，第123–163页，美国罗得岛州普罗维登斯，2011年。美国数学学会。[14] Niels Lubbes. 曲面上的极小曲线族。《符号计算杂志》，65:29–48，2014年。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717114000133, doi:10.1016/j.jsc.2014.01.003。

[15] 尤·伊·马宁。三次型：代数、几何、算术。North–Holland，阿姆斯特丹，1974。[16] 朴志勋和元俊英。四次德尔佩佐曲面上的柔性仿射锥。《欧洲数学杂志》，2(1):304–318，2016年3月。doi:10.1007/s40879-015-0054-4。[17] A. Yu. Perepechko。四次和五次德尔佩佐曲面上的仿射锥的柔性。《泛函分析及其应用》，47(4):284–289，2013年10月。doi:10.1007/s10688-013-0035-7。[18] Alexander Perepechko。三次曲面上的仿射锥在余维一意义下是柔性的。《数学论坛》，33(2):339–348，2021。doi:10.1515/forum-2020-0191。[19]Alexander Perepechko。德尔佩佐 SageMath 模块，2023。网址：https://github.com/aperep/delPezzo，doi:10.5281/zenodo.7915020。[20]尤里·普罗霍罗夫和米哈伊尔·扎伊登贝格。属为10的法诺–穆凯四维簇上的仿射锥是柔性的，第363–383页。施普林格国际出版公司，尚，2023。doi:10.1007/978-3-031-11938-5_16。[21]Masatomo Sawahara。二次德尔佩佐曲面中的极化圆柱，2024。arXiv:2412.09848。[22] Nguyen Thi Anh Hang 和 Hoang Le Truong。属为7的法诺–穆凯四维簇上的仿射锥是柔性的。《国际数学研究通知》，2024(10):8417–8426，2023年11月。arXiv:https://academic.oup.com/imrn/article-pdf/2024/10/8417/57728767/rnad275.pdf，doi:10.1093/imrn/rnad275。[23] 元俊英。四次奇异德尔佩佐曲面上的仿射锥的柔性。《东亚数学杂志》，38(3):321–329，2022年5月。

计算机科学学院，HSE大学，俄罗斯莫斯科波克罗夫斯基大道11号，109028电子邮箱：a@perep.ru