arXiv:2305.06464v1 [math.AG] 10 May 2023

Brauer-Tschirnhaus 域

DANIEL KRASHEN、MAX LIEBLICH 和 MINSEON SHIN

Abstract. 我们证明了布劳尔类的一个局部到整体原理：对于超越次数至少为 3 的域上的一个簇上的任意有限个非平凡布劳尔类，都存在无穷多个特化，使得每个类在这些特化下仍然保持非平凡。这一结论可由某些光滑代数栈的布劳尔群的格罗滕迪克–勒夫谢茨型定理推导得出。此外，这也引出了 Brauertsch 域这一概念。

Contents

1. 引言 1背景与现有文献 2我们的结果 2局部到整体的推论 3开放问题 42. 关于布劳尔群的格罗滕迪克–勒夫谢茨定理 43. 主要定理的证明 84. 在指定点集上消失的布劳尔类 135. 属 1 曲线上的有理点的应用 15参考文献 16

1. Introduction

本文探讨以下基本问题。

问题 1.1. 假设 S 是域 F 上的一个簇，且 $\alpha \in$Br(S) 是一个非零的 Brauer 类。那么，有多少个闭点 $s \in S$ 的特化 $\alpha|_s$ 是非零的?

类比于希尔伯特域，我们可以将布劳尔类特化的非平凡性加以系统化描述。

定义 1.2. 如果对于任意域 F 上的曲线 S 和任意有限集布劳尔类 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in$ Br($F(S)$, 只要对于所有 i，per(α_i) 在 F 中可逆，就存在无穷多个闭点 $s \in S$，使得每个 α_i 在 s 处均为非分歧，且 per($\alpha_i|_s$) =per(α_i)，则称域 F 为 Brauertsch[1] 。

我们的主要定理如下。

定理 1.3. 如果 F 在某个完美域上的超越次数至少为 3，那么 F 就是 Brauertsch。

日期：2023年5月12日。[1]布劳尔-希尔伯特-施midt

背景及现有文献。回顾以下定义 .

定义 1.4. [Lan62, VIII] 如果一个域 F 满足：对于任意不可约多项式$f(t,x) \in F(t)[x]$，都存在无穷多个常数 $a \in F$，使得特化$f(a,x) \in F[x]$有定义，且在 $F[x]$中不可约，则称该域为希尔伯特域。

希尔伯特域类包含所有整体域以及任意域 k 上的函数域 $k(t)$，并且希尔伯特域的每个有限扩张仍然是希尔伯特域（综述参见[FJ08] 和 [Ser08]）。此外，域 F 的希尔伯特性具有一个几何对应，即 F 是希尔伯特域，当且仅当对于 F 上任意曲线的泛有限覆盖 $T \to S$，都存在无穷多个点 $s \in S$，使得它们在 T 中的原像是单点集（选取一个泛有限映射 $S \to \mathbf{P}^1_F$，并将希尔伯特性应用于复合映射 $T \to S \to \mathbf{P}^1_F$）。

在 [FSS92], Fein、Saltman、Schacher 引入了一类满足布劳尔群的希尔伯特性类似性质的域。

定义 1.5（Fein–Saltman–Schacher）。如果对于任意在 F 中可逆的正整数 n，以及任意 n-挠 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(F(t))$，都存在无穷多个常数 $a \in F$，使得特化 $\alpha|_{t=a} \in \mathrm{Br}(F)$ 有定义且其周期等于 α 的周期，即 $\mathrm{per}(\alpha|_{t=a}) = \mathrm{per}(\alpha)$，则称域 F 具有布劳尔-希尔伯特性质。

根据 FSS92, 2.5, 2，如果 F 是一个整体域，或是希尔伯特域 k 的有限生成扩张，且其超越次数 $\mathrm{trdeg}_k(F) \geq 1$，那么 F 具有布劳尔 - 希尔伯特性质（因此，如果 S 是一个定义在 $\mathbf{C}$ 上的 d 重簇，其函数域为 F，那么 F 具有布劳尔-希尔伯特性质当且仅当 $d \geq 2$）。

更一般地，可以通过在 K 上选择一个赋值 v，使得 α 到剩余域κ_{v} 的特化有定义，从而考虑任意扩张K 上的布劳尔类特化。Fein 和 Schacher 在 [FS00], 中证明，若 K 是 $F(t)$ 的有限扩张，且 $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$ 是 $\mathrm{Br}(F(t)) \to \mathrm{Br}(K)$ 的像中的一个布劳尔类，那么（在对 α 和 F 的某些附加假设下），存在无穷多个 $a \in F$，使得 $F(t)$ 上的 a-进赋值 v_a 有一个延拓 w 到 K，并且特化 $\alpha|_{\kappa_{\mathrm{w}}} \in \mathrm{Br}(\kappa_{\mathrm{w}})$ 有定义，其周期等于 α 的周期。

我们的结果。本文采用一种几何方法研究布劳尔-希尔伯特性质。值得注意的是，FSS 和 FS 的原始结果无法直接从我们的结果中推出，反之亦然。

记号 1.6。对于一个概形 S 和一个子群 $G \subset \mathrm{Br}(S)$，令

$$S[G^{-1}] := \{s \in S \ : \ G \to \mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(\kappa(s)) \text{ is injective}\}$$

为 G 的非零值点集（视为 S 底层拓扑空间的子集）；对于 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$，我们记 $S[\alpha^{-1}] := S[\langle\alpha\rangle^{-1}]$。

我们感兴趣的是 $S[G^{-1}]$ 包含其各个点的特化的条件。

问题 1.7. 如果 $s \in S[G^{-1}]$ 和 s 不是一个闭点，是否存在 $s' \in \overline{\{s\}}$，使得$s' \neq s$ 和 $s' \in S[G^{-1}]$?

如果 S 是 $\mathbf{C}$ 上的一个曲面，答案是“否”，因为曲面中每个非泛点的剩余域要么是一个 C_1-域，要么是代数闭域。如果 $S = \overline{\{s\}}$ 且 S 是 $\mathbf{C}$ 上的一个 d-维簇，并且满足 $d \geq 3$，那么 Fein、Saltman、Schacher 的定理意味着，只要 S 与某个 $\mathbf{C}$ 上的 $(d-1)$-维簇 X 的 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \times_{\mathbf{C}} X$ 双有理，问题 1.7 的答案就是“是”。

我们证明如下定理，该定理推出定理 1.3，并特别表明，当 S 在 C 上是有限型且 $\dim\overline{\{s\}} \geq 4$ 时，问题 1.7 有肯定答案。

记号 1.8。对于概形 S 和任意非负整数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们将维数为 d 的点集记为 $S_{(d)}$，将余维数为 d 的点集记为 $S^{(d)}$。如果 S 是不可约概形，我们将其泛点记为 η_S。

定理 1.9. 设 k 是一个完美域，设 F/k 是一个超越次数为 $\mathrm{trdeg}_k(F) \geq 3$ 的有限生成扩张，设 S 是一个维数为 $\dim S \geq 1$ 的有限型 F-概形，设 $G \subseteq \mathrm{Br}(S)$ 是一个有限子群，且 $|G|$ 在 k 中可逆。对于任意 $d \geq 1$ 和任意点 $s \in S[G^{-1}] \cap S_{(d)}$，集合 $S[G^{-1}] \cap S_{(d-1)} \cap \overline{\{s\}}$ 是无限的。

推论 1.10. 设 F 如定理 1.9 所述，并假设 S 是 F 上的一条光滑曲线。如果 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 是一个非平凡的 Brauer 类，则存在无穷多个闭点 $s \in S$，使得 $\alpha|_s \in \mathrm{Br}(\kappa(s))$ 的周期等于 α 的周期。也就是说，限制映射 $\mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(\kappa(s))$ 在由 α 生成的子群上是单射。

为证明定理 1.9，我们构造一个 X 的模型，该模型在 k 上光滑且射影，并且 α 在其上有定义（除其分歧除子 $D \subset X$ 外）。利用 α 在与 D 相关联的根叠 $\mathcal{X} = \sqrt[\ell]{(X, D)}$ 上变为非分歧这一事实，其中 $\ell =$ 按 α 取值，我们将问题归结为：将 $\mathcal{X}$ 的一个光滑充足除子上的 α-扭曲线丛提升为 $\mathcal{X}$ 本身上的线丛。为此，我们证明了一个关于 Deligne-Mumford 叠的 Picard 群和布劳尔群的 Grothendieck–Lefschetz 定理（见命题 2.1）。在第 4 节中，我们研究如何构造布劳尔类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$，使其非零点集 $S[\alpha^{-1}]$ 避开给定的一组点 $T \subseteq S$；我们证明，若 T 是单元素集（命题4.3），或允许进行局部化（命题4.2），则总能做到这一点。

局部-整体推论。作为我们研究结果的一项应用，在第 5 节中，我们证明了两类局部-整体原理。一般而言，给定一个域 L 以及一个由 L 的过域构成的集合 Ω，我们定义

$$Ш_{\Omega}\,\mathrm{Br}(L) := \ker\left[\mathrm{Br}(L) \to \prod_{L' \in \Omega} \mathrm{Br}(L')\right]$$

我们称关于 Ω 的局部-整体原理成立，当且仅当 $Ш_{\Omega}\mathrm{Br}(L) = 0$。在实际应用中，人们尤其关注 Ω 由 L 关于一组几何离散赋值的完备化所构成的情形。为此，若给定一个整的正规 F- 概形 S，我们定义 Ω_S 为函数域 $\kappa(\eta_S)$ 关于对应于 S 的素除子的离散赋值的完备化所构成的集合。

推论 1.11. 设 F 如定理 1.9 所述，设 S 是一个维数为 $\dim S \geq 1$ 的光滑 F-概形，并令 $K := \kappa(\eta_S)$ 为 S 的函数域。那么关于 Ω_S 的局部-整体原理成立，即自然映射

$$\mathrm{Br}(K) \to \prod_{s \in S^{(1)}} \mathrm{Br}(K_s)$$

是单射，其中对于所有 $s \in S^{(1)}$，我们将 $K_s := \mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s})$ 记为。

我们注意到，推论 1.11 是局部-整体原理的一个特别强的版本；在这类结果中，通常要求 α 在某个适当模型上所有余维 1 点处的 K 的完备化中消失（例如，在 C_1-域上关于 $\mathbb{P}^1$ 的情形，或半整体域的情形；后一情形还需要考虑赋值环上适当模型的所有完备化）。

第二个应用是关于四维簇的函数域上属 1 曲线的局部-整体原理，我们将在第 5 节中证明这一点。

推论 1.12。设 F、S、K 如推论 1.11 中所述，并设 $C \to \operatorname{Spec} K$ 是一条亏格 1 曲线。假设对于所有余维 1 点 $s \in S^{(1)}$，基变换 $C \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_s$ 都存在一个 K_s-点。那么 C 存在一个 K-点。

开放问题。人们很容易想到提出以下问题，而目前我们尚不知道答案。

问题 1.13。给定 $n > 1$，若一个域 F 满足以下性质，我们称其为 n-Brauertsch：对于任意定义在 F 上的曲线 S，以及任意有限集 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathrm{H}^n(S, \mathrm{G}_m)$ 中阶在 F 中可逆的类，都存在无穷多个闭点 $s \in S$，使得对所有 i，特化 $\alpha_i|_s \in \mathrm{H}^n(\operatorname{Spec} \kappa(s), \mathrm{G}_m)$ 的阶与 α_i 相同。若上述条件仅要求对开子集 $U \subset \mathrm{P}^1_F$、一个上同调类以及剩余域为 F 的闭点$s \in U$ 成立，则称 F 为 n-希尔伯特性。

(1) 超越次数至少为 $n+1$ 的完美域 n 是否具有希尔伯特性（分别为 n-Brauertsch 性质）？(2) 更一般地，哪些域具有 n-希尔伯特性（分别具有 n-Brauertsch 性质）？(3) n-希尔伯特性和 n-Brauertsch 性质之间有何关系?

注 1.14. 如果我们在问题 1.13 中令 $n = 1$，那么系数层 G_m 并非恰当的选择（根据希尔伯特第 90 定理），因此必须采用有限系数（例如 $\boldsymbol{\mu}_t$），才能使该性质自然地与经典希尔伯特性进行比较。由此可以进一步提出一个问题：在此意义下，希尔伯特性是否等价于 1- 希尔伯特性（分别地，1-Brauertsch 性）？

从 $n = 2$ 开始，嵌入 $\mathrm{Q}/\mathrm{Z} \subset \mathrm{G}_m$ 在上同调上诱导一个同构。此外，映射 $\mathrm{Z}/t\mathrm{Z} = \frac{1}{t}\mathrm{Z}/\mathrm{Z} \to \mathrm{Q}/\mathrm{Z}$ 在 t-挠上同调上诱导一个满射。因此，就该问题而言，系数取自 $\boldsymbol{\mu}_t$、Q/Z 或 G_m 的 t 阶上同调之间并无区别。

注 1.15。本文的结果、[FSS92], 中的结果以及希尔伯特域的经典理论表明，对于 $n \leq 2$, 问题 1.13(1) 的答案是“是”。我们所称的“2-希尔伯特性”是 Fein、Saltman 和 Schacher 在[FSS92]中提出的“布劳尔–希尔伯特性”这一概念。

对于 $n > 2$，整体情况可能会更加复杂。事实上，本文所采用的方法利用了这样一个事实：对于具有有限系数的低次数上同调群，限制到泛点的映射是单射的。然而，这一性质在更高次数时不再成立，因此，基于纯性和根栈的 Lefschetz 超平面定理来研究这一问题的方法会变得相当微妙。也就是说，对于非分歧上同调（按照 Colliot-Th´el`ene 的意义），并不存在合理的 Lefschetz 定理。

1.16（致谢）。我们感谢 Brian Conrad、Giovanni Inchiostro、Julia Hartmann、S´andor Kov´acs 和 Masahiro Nakahara 提供的宝贵讨论。

2. A Grothendieck–Lefschetz theorem for the Brauer group

Grothendieck 对 Picard 群的 Lefschetz 超平面定理的表述（见 [Har70]）依赖于可逆层的基本变形理论，以便将除子上的层提升到沿该除子对环境簇作完备化后所得的空间上，随后

再将描述该提升层的某个形式矩阵代数化。正如我们在此所阐述的，当环境空间是一个驯性、光滑、分离且具有射影粗模空间的德利涅–芒福德叠时，非常相似的论证同样适用。在第3节中，我们将说明这一结果如何应用于布劳尔群中的特化。

命题 2.1（格罗滕迪克–勒夫谢茨）。设 k 为一个域，设 X 是定义在 k 上的一个驯性、光滑、分离的德利涅–芒福德叠，其粗模空间为 $\pi : \mathrm{X} \to X$。设 $Y \subset X$ 是一个光滑充足除子，其理想层为 $I \subset \mathrm{O}_X$。假设 that

(i) X 是一个光滑射影的 k概形，维数为 $\dim X \geq 4$，(ii) π 是平坦的，并且 (iii) 对于 $n \geq 1$ 和 $0 \leq i \leq 3$，$\mathrm{H}^i(X, I^n) = 0$。

令 $Y_n := \mathrm{Spec}_X \mathrm{O}_X / I^{n+1} \subset X$ 为 Y在 X 中的第 n次加厚，并令 $\mathrm{Y}_n := \mathrm{X} \times_X Y_n$ 对所有 $n \in \mathbf{N}$ 成立。

(1) 对于任意有限局部自由的 $\mathrm{O}_{\mathscr{X}}$模 E 以及任意包含 Y 的开子集 $U \subseteq X$，映射

$$\Gamma(\mathscr{X}|_U, \mathscr{E}) \to \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \Gamma(\mathscr{Y}_n, \mathscr{E}|_{\mathscr{Y}_n}) \tag{2.1.1}$$

是一个同构。

(2) 对于任意代数叠 S，令 $\mathrm{Vect}_r(\mathrm{S})$ 表示秩为 r 的有限局部自由 $\mathrm{O}_{\mathscr{S}}$模的范畴。对于任意包含 Y 的开子集 $U \subseteq X$，函子

$$\mathrm{Vect}_r(\mathscr{X}|_U) \to \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(\mathscr{Y}_n) \tag{2.1.2}$$

是全忠实的。该函子

$$\varinjlim_{Y \subset U \subset X} \mathrm{Vect}_r(\mathscr{X}|_U) \to \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(\mathscr{Y}_n) \tag{2.1.3}$$

是一个范畴等价。

(3) 限制

$$\xi_{\mathscr{X},i} : \mathrm{H}^i(\mathscr{X}, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{X}|_Y, \mathbf{G}_m) \tag{2.1.4}$$

是 $i = 0$ 的一个同构，1。

(4) 限制

$$\xi_{\mathscr{X},2}[\ell] : \mathrm{H}^2(\mathscr{X}, \mathbf{G}_m)[\ell] \to \mathrm{H}^2(\mathscr{X}|_Y, \mathbf{G}_m)[\ell]$$

对于任意在 k 中可逆的正整数 ℓ，它都是单射。

证明。根据 Kresch-Vistoli [KV04，定理 1]，，存在一个光滑射影的 k概形 X^0，它具有一个有限平坦满射态射 $X^0 \to \mathrm{X}$。对于 $p \geq 0$，令 $X^p := X^0 \times_{\mathscr{X}} \cdots \times_{\mathscr{X}} X^0$ 表示其（$p+1$）重纤维积。由于 $X^0 \to \mathrm{X}$ 是有限的，因此特别可由概形表示，所以对所有 $p \geq 0$，X^p 都是一个概形。由于 $\pi : \mathrm{X} \to X$ 是平坦的，每个 X^p 都是 X 上有限平坦的，因此根据 [Sta22, 00R5]，它是科恩 - 麦考利的，维数为 $\dim X^p = \dim X$。

让我们构造以下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0^2 & \longrightarrow & Y_1^2 & \longrightarrow & Y_2^2 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X^2 \\ \downarrow\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow\downarrow \\ Y_0^1 & \longrightarrow & Y_1^1 & \longrightarrow & Y_2^1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X^1 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ Y_0^0 & \longrightarrow & Y_1^0 & \longrightarrow & Y_2^0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X^0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{Y}_0 & \longrightarrow & \mathscr{Y}_1 & \longrightarrow & \mathscr{Y}_2 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathscr{X} \end{array} \tag{2.1.5}$$

(1)：设 E 是有限局部自由的 O $_{\mathscr{X}}$-模。对于任意包含 Y 的开子集 $U \subseteq X$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \Gamma(Y_n^1, \mathscr{E}|_{Y_n^1}) & \xleftarrow{\phi^1} & \Gamma(X^1|_U, \mathscr{E}|_{X^1|_U}) \\ \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow \\ \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \Gamma(Y_n^0, \mathscr{E}|_{Y_n^0}) & \xleftarrow{\phi^0} & \Gamma(X^0|_U, \mathscr{E}|_{X^0|_U}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \Gamma(\mathscr{Y}_n, \mathscr{E}|_{\mathscr{Y}_n}) & \xleftarrow{(2.1.1)} & \Gamma(\mathscr{X}|_U, \mathscr{E}|_{\mathscr{X}|_U}) \end{array}$$

其中每一列都是一个等化子图。由于 X^0 和 X^1 的维数为 ≥ 2，且它们都是科恩-麦考利的，由 [Sta22，0EL2] 可知 ϕ^0 和 ϕ^1 是同构，因此 (2.1.1) 是一个同构。

(2)：设 E $_1$、E $_2 \in$ Vect$_r$(X $|_U$) 是秩为 r 的有限局部自由 O $_{\mathscr{X}|_U}$-模。将 (1) 应用于 H o m $_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}|_U}}$(E $_1$, E $_2$)，可得映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}|_U}}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2) \to \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{Y}_n}(\mathscr{E}_1|_{\mathscr{Y}_n}, \mathscr{E}_2|_{\mathscr{Y}_n})$$

是一个同构；因此 (2.1.2) 是全忠实的。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(Y_n^2) & \xleftarrow{\phi^2} & \varinjlim_{Y\subset U\subset X} \mathrm{Vect}_r(X^2|_U) \\ \uparrow\uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow\uparrow \\ \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(Y_n^1) & \xleftarrow{\phi^1} & \varinjlim_{Y\subset U\subset X} \mathrm{Vect}_r(X^1|_U) \\ \uparrow\uparrow & & \uparrow\uparrow \\ \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(Y_n^0) & \xleftarrow{\phi^0} & \varinjlim_{Y\subset U\subset X} \mathrm{Vect}_r(X^0|_U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}_r(\mathscr{Y}_n) & \xleftarrow{(2.1.3)} & \varinjlim_{Y\subset U\subset X} \mathrm{Vect}_r(\mathscr{X}|_U) \end{array}$$

其中，竖直图表诱导出到相应下降数据范畴的范畴等价。由于 X^0, X^1, X^2 是维数为 ≥ 3的科恩-麦考利对象，根据 [Sta22, 0EL7]，我们有 ϕ^0, ϕ^1, ϕ^2 是范畴等价，因此 (2.1.3) 是范畴等价。

(3)：我们有一个正合序列

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_n, (I^n/I^{n+1})|_{\mathscr{Y}_n}) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{Y}_n, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{Y}_{n-1}, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathscr{Y}_n, (I^n/I^{n+1})|_{\mathscr{Y}_n})$$

对所有 $i \geq 0$ 和 $n \geq 0$ 均成立。由于 X 是驯性的，根据 [Alp13, 8.1]，我们知道 π 是一个良模空间态射，因此根据 [Alp13, 4.7(i)]，对于任意 $n \geq 0$，拉回 $\pi|_{Y_n} : \mathrm{Y}_n \to Y_n$ 也是一个良模空间态射。由引理 2.2，拉回态射

$$(\pi|_{Y_n})^* : \mathrm{H}^i(Y_n, I^n/I^{n+1}) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{Y}_n, (I^n/I^{n+1})|_{\mathscr{Y}_n})$$

对于所有 $i \geq 0$，它都是一个同构。根据 (iii)，对于所有 $n \geq 1$ 和 $0 \leq i \leq 2$，我们有 $\mathrm{H}^i(X, I^n/I^{n+1}) = 0$。特别地，这些限制

$$\mathrm{H}^i(\mathscr{Y}_n, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{Y}_{n-1}, \mathbf{G}_m) \tag{2.1.6}$$

对于 $i = 0$、1 和 $n \geq 1$，都是同构。在 (1) 中取 $\mathrm{E} = \mathrm{O}_{\mathscr{X}}$，我们得到 $\xi_{\mathscr{X},0}$ 是同构。

我们取 (2.1.3) 中的 $r = 1$。由于 X 是一个适当的 k-概形，若 $U \subseteq X$ 是包含 Y 的任意开子集，则它包含 X 的所有余维 1 点。因此，由于 X 是正则的，限制 $\mathrm{Vect}_1(\mathrm{X}) \to \varinjlim_{Y \subset U \subset X} \mathrm{Vect}_1(\mathrm{X}|_U)$ 是范畴等价。投影 $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Vect}_1(\mathrm{Y}_n) \to \mathrm{Vect}_1(\mathrm{Y}_0)$ 是本质满的，因为对于 $i = 1$ 和所有 $n \geq 1$，映射 (2.1.6) 都是同构；因此 $\xi_{\mathscr{X},\,1}$ 是满射。

我们证明 $\xi_{\mathscr{X},1}$ 是单射。设 $L \in \mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ 是一个线丛。对于任意 $n \geq 0$，我们有一个谱序列

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(X^p, (I^n|_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} L)|_{X^p}) \implies \mathrm{H}^{p+q}(\mathscr{X}, I^n|_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} L)$$

与覆盖 $X^0 \to \mathrm{X}$ 相关联。对于任意 $p \geq 0$，我们有投影映射$X^p \to X^0$是有限的，因此 $I|_{X^p}$是一个反丰性可逆 O_{X^p}-模。根据 [Har77, III, 7.6]，存在某个 $n_L \gg 0$，使得 $\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$对于 $n \geq n_L$ 和 $0 \leq p+q \leq 2$成立。因此，对于 $n \geq n_L$，我们有

$$\mathrm{H}^q(\mathscr{X}, I^n|_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} L) = 0$$

对所有 $0 \leq q \leq 2$ 均成立，因此

$$\mathrm{H}^q(\mathscr{X}, I^n/I^{n+1}|_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} L) = 0$$

对所有 $0 \leq q \leq 1$ 以及这些限制

$$\Gamma(\mathscr{Y}_{n+1}, L|_{\mathscr{Y}_{n+1}}) \to \Gamma(\mathscr{Y}_n, L|_{\mathscr{Y}_n}) \tag{2.1.7}$$

是同构。若 $L|_{\mathscr{X}|_Y}$ 是平凡的 $\mathrm{O}_{\mathrm{X}|_Y}$-模，则根据 (2.1.6)，对于所有 n，$L|_{\mathscr{Y}_n}$ 和 $L^\vee|_{\mathscr{Y}_n}$ 都是平凡的 $\mathrm{O}_{\mathrm{Y}_n}$-模。取某个 $n' \geq \max(n_L, n_{L^\vee})$，并选取截面 $s_{n'} \in \Gamma(\mathrm{Y}_{n'}, L|_{\mathscr{Y}_{n'}})$ 和 $s_{n'}^\vee \in \Gamma(\mathrm{Y}_{n'}, L^\vee|_{\mathscr{Y}_{n'}})$，使得相应的 $\mathrm{O}_{\mathrm{Y}_{n'}}$-模态射 $\mathrm{O}_{\mathscr{Y}_{n'}} \to L|_{\mathscr{Y}_{n'}}$ 和 $L|_{\mathscr{Y}_{n'}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{Y}_{n'}}$ 互为逆。根据 (2.1.7)，对每个 $n \geq n'$，分别存在 s_n 和 $s_{n+1}^\vee$ 的唯一提升 $s_{n+1} \in \Gamma(\mathrm{Y}_{n+1}, L|_{\mathscr{Y}_{n+1}})$ 和 $s_{n+1}^\vee \in \Gamma(\mathrm{Y}_{n+1}, L^\vee|_{\mathscr{Y}_{n+1}})$。由于 (2.1.2) 是全忠实的，存在唯一的截面 $s \in \Gamma(\mathrm{X}, L)$ 和 $s^\vee \in \Gamma(\mathrm{X}, L^\vee)$，它们分别限制为系统 $\{s_n\}_{n \geq n'}$ 和 $\{s_n^\vee\}_{n \geq n'}$，且相应的 O_{X}-模态射 $\mathrm{O}_{\mathrm{X}} \to L$ 和 $L \to \mathrm{O}_{\mathscr{X}}$ 互为逆，因此 L 本身是平凡的。

(4)：设 ℓ 为一个正整数，使得 $\ell \in k^\times$，并令 $\alpha' \in \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_m)[\ell]$ 为一个 ℓ-挠 Brauer 类，满足 $\alpha'|_{\mathscr{X}|_Y} = 0$属于 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \mathrm{G}_m)$。令 $\mathrm{G}' \to \mathrm{X}$ 为对应于 α'的一个 G_m-gerbe；则 $\mathrm{G}' \times_{\mathscr{X}} \mathrm{X}|_Y \to \mathrm{X}|_Y$是一个平凡的 G_m-gerbe。令 $\mathrm{G} \to \mathrm{X}$ 为一个 $\boldsymbol{\mu}_\ell$-gerbe，其类$[\mathrm{G}] \in \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \boldsymbol{\mu}_\ell)$可提升为 $\alpha' = [\mathrm{G}'] \in \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_m)$。由于 $[\mathrm{G}|_Y] \in \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \boldsymbol{\mu}_\ell)$在 $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \mathrm{G}_m)$中的像是平凡的，因此存在某个线丛 $L_Y \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \mathrm{G}_m)$，它在 Kummer 正合列的余边界映射 $\partial : \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \mathrm{G}_m) \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathrm{X}|_Y, \boldsymbol{\mu}_\ell)$下映射为 $[\mathrm{G}|_Y]$。由此。

(3) 应用于 X，存在某个线丛 $L_X \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}_m)$，其限制为 L_Y；将 $[\mathrm{G}\,]$ 替换为 $[\mathrm{G}\,] - \partial([L_X])$ 后，我们可以假设 $\mathrm{G}\,|_Y \to \mathrm{X}\,|_Y$ 是一个平凡的 $\boldsymbol{\mu}_\ell$-gerbe。设 L_Y 为一个 1-扭曲可逆 $\mathrm{O}_{\mathscr{Y}_Y}$-模。由于映射 $\mathrm{G} \to \mathrm{X}$ 是一个 $\boldsymbol{\mu}_\ell$-gerbe，故栈 G 是驯性的，且复合 $\mathrm{G} \to \mathrm{X} \to X$ 是一个平坦粗模空间态射（即满足 (ii)）。因此，由 (3) 应用于 G，可得一个 1-扭曲可逆 $\mathrm{O}_{\mathscr{G}}$-模 L_X，使得 $\mathrm{L}_X|_{\mathscr{G}_Y} \simeq \mathrm{L}_Y$。于是 $\mathrm{G} \to \mathrm{X}$ 是一个平凡的 $\boldsymbol{\mu}_\ell$-gerbe，因此 $\mathrm{G}' \to \mathrm{X}$ 也是一个平凡的 G_m-gerbe。□

引理 2.2. 设 $\pi : \mathrm{X} \to X$ 是一个良模空间态射。对于任意拟凝聚 O_X-模 F，其拉回函子

$$\pi^* : \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^i(\mathscr{X}, \mathscr{F}|_{\mathscr{X}})$$

对于所有 $i \geq 0$，都是一个同构。

证明。这可由 Leray 谱序列推出。

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(X, \mathbf{R}^q\pi_*(\mathscr{F}|_{\mathscr{X}})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathscr{X}, \mathscr{F}|_{\mathscr{X}})$$

其中，根据 Alp13, 3.10(v)，我们有 $\mathrm{R}^i\pi_*(\mathrm{F}\,|_{\mathscr{X}}) = 0$ for $i \geq 1$ []。 □

3. Proofs of the main theorems

在本节中，我们通过一系列约化和纯性，将主要结果归结为命题 2.1，即适用于栈的 Grothendieck–Lefschetz 定理。

3.1. 注意，在定理 1.9 中，我们可以自由地将 S 替换为其约化 S_{red}，或替换为任何与之双有理的概形。

3.2（归约到 $\dim S = 1$）。根据 3.1，我们可以将 S 替换为既约概形 $\overline{\{s\}}$ 的一个仿射开邻域，从而假设 S 是仿射且整的，并且 $\dim S = d$。令 $x_1, \ldots, x_d \in \kappa(\eta_S)$ 为函数域 $\kappa(\eta_S)$ 在 F 上的一组超越基；将 S 替换为一个开子概形后，我们可以假设对所有 i，均有 $x_i \in \Gamma(S, \mathrm{O}_S)$；令 $S \to \mathbb{A}^d_F = \mathrm{Spec}\ F[t_1, \ldots, t_d]$ 为将 $t_i \mapsto x_i$ 映至（对所有 i）的准有限主导 F-态射。设 $F' := F(t_1, \ldots, t_{d-1})$，并令 $S' := S \times_{\mathbb{A}^d_F} \mathbb{A}^1_{F'}$，其中 $\mathbb{A}^1_{F'} \to \mathbb{A}^d_F$ 对应于自然映射 $F[t_1, \ldots, t_d] \to F'[t_d]$。令 $f\colon S' \to S$ 为投影。

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1_{F'} & \longrightarrow & \mathbb{A}^d_F \end{array}$$

我们注意到 $f((S')^{(0)}) \subseteq S_{(d-1)}$，并且 $f\colon S' \to S$ 诱导了函数域 $\kappa(\eta_S) \to \kappa(\eta_{S'})$ 的同构；此外，$\mathrm{trdeg}_k(F') = \mathrm{trdeg}_k(F) + d - 1 \geq 3$。因此，通过将 F, S, α 替换为 $F', S', \alpha|_{S'}$，我们可以假设 $\dim\ S = 1$。

3.3（约化到 k 上的一个模型）。根据 3.2，我们可以假设 S 是仿射的、整的、有限型的 F 代数，且维数为 $S = 1$。通过极限论证，我们可以选取一个 k- 子代数 $A \subseteq F$，使得

(i) A 是 k 上的有限型，(ii) 存在一个有限型 A-概形 U 以及一个 F-同构 $U \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\ F \simeq S$，并且(iii) α 属于 $\mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(S)$ 的像。

在可能将 U 替换为一个开子概形之后，我们可以假设 U 是正则的；由于 k 是完美的，因此 U 在 k 上是光滑的。经过进一步的局部化之后，我们可以假设存在一个维数为 $\dim X = \operatorname{trdeg}_k(\kappa(S))$ 的射影 k-概形 X，使得存在一个开浸入 $U \to X$。

令 $\overline{S}$ 为 S 的射影闭包；我们可以将 $\overline{S}$ 替换为其正规化，从而假设 $\overline{S}$ 正则。将 [Sta22, 0BX7] 应用于复合 $S \to U \to X$，我们得到一个非恒定的 k-态射 $g : \overline{S} \to X$。若 $s \in S_{(0)}$ 是一个闭点，则 $g(s)$ 是 X 的余维 1 点；由引理 3.4，对于除有限多个之外的所有充足除子 $Y \subset X$，都有 $\eta_Y \in g(S_{(0)})$。因此，我们将证明归结为下面的定理 3.5。

引理 3.4。设 F 为一个域，S 为维数 1 的适当 F-概形，X 为一个概形，L 为 X 上的线丛，$f : S \to X$ 为一个非恒定态射。对于任意截面 $s \in \Gamma(X, \mathrm{L})$，若 X_s 为仿射概形，则拉回 $f^*s \in \Gamma(S, f^*\mathrm{L})$ 在 S 的某个闭点处消失。

证明。我们可以假设 S 是连通的。我们有 $f^{-1}(X_s) = S_{f^*s}$。由于 X_s 是仿射的，且 S 在 F 上是适当的，并且 $\dim S \geq 1$，我们有 $f(S) \not\subseteq X_s$，因此 $S_{f^*s} = f^{-1}(X_s) \neq S$。□

定理 3.5. 设 k 是一个完美域，设 U 是一个维数为 $\dim U \geq 4$ 的光滑 k-概形，且 $G \in \mathrm{Br}(U)$ 是一个有限子群。假设 $\ell := |G|$ 在 k 中可逆。那么存在无穷多个点 $u \in U_{(1)}$，使得复合映射 $G \to \mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(\kappa(u))$ 是单射。

证明。设 X 是一个适当的 k-概形，使得 U 存在一个开嵌入 $U \subseteq X$；令 $D := X \setminus U$ 为其补集。根据 Temkin 对 Gabber 定理 [Ill09, 1.3], 的改进 [Tem17, 4.3.1(iii)]，存在一个光滑射影 k-概形 X' 和一个素数到 ℓ 的改变映射 $f : X' \to X$，使得 $D' := f^{-1}(D)$ 是 X' 中的严格正规交叉除子。由于 $\gcd(\ell, [\kappa(\eta_{X'}) : \kappa(\eta_X)]) = 1$，如果 $\alpha \in G$ 是一个 ℓ-挠 Brauer 类，且 $f^*\alpha = 0$ 属于 $\mathrm{Br}(X')$，那么 $\alpha = 0$ 本身也成立。因此，我们可以用 X', f^*G 替换 X, G，从而假设 X 在 k 上是光滑射影的，并且 $D \subset X$ 是一个严格正规交叉除子。

设 $D_1, \ldots, D_r$ 为 D 的不可约分支，并且让

$$\mathscr{X} := \sqrt[\ell]{(X, D_1)} \times_X \cdots \times_X \sqrt[\ell]{(X, D_r)}$$

为 ℓ 次根叠的乘积。由于 D 在 X中是严格正则交叉，因此 X 是正则的。根据 [Lie11, 3.2.1], 的论证，存在一个开子叠 $\mathrm{U}' \subset \mathrm{X}$，包含 $U \times_X \mathrm{X} \simeq U$ 以及 X 的所有余维 1 点，并且 G 包含于子群 $\mathrm{Br}(\mathrm{U}') \subseteq \mathrm{Br}(U)$ 中。根据布劳尔群的纯性 [Fuj02],，限制 $\mathrm{Br}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Br}(\mathrm{U}')$ 是一个同构，因此我们可以将 G 视为 $\mathrm{Br}(\mathrm{X})$ 的子群。

设 $\mathrm{O}_X(1)$ 为 X 上的一个充足线丛。根据 [Har77, III, 7.6],，我们可以选取 $N \gg 0$，使得对于所有 $0 \leq i \leq 3$ 和 $n \geq 1$，均有 $\mathrm{H}^i(X, \mathrm{O}_X(-nN)) = 0$。根据 Bertini 定理，我们可以选取无穷多个光滑充足除子 $Y \in |\mathrm{O}_X(N)|$，使得 $D|_Y \subset Y$ 是一个严格正规交叉除子；于是限制

$$\mathscr{X}|_Y \simeq \sqrt[\ell]{(Y, D_1|_Y)} \times_Y \cdots \times_Y \sqrt[\ell]{(Y, D_r|_Y)}$$

是正则的。根据命题 2.1(4)，限制映射 $\mathrm{Br}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Br}(\mathrm{X}|_Y)$ 是单射。由于 $\mathrm{X}|_Y$是正则的，限制映射 $\mathrm{Br}(\mathrm{X}|_Y) \to \mathrm{Br}(\kappa(\eta_Y))$ 是单射。□

推论 3.6. 设 k 为一个完美域，设 S 为一个光滑的 k-概形，其维数为 $\dim S \geq 4$，设 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 为一个 Brauer 类，且 $\mathrm{per}(\alpha)$ 在 k 中可逆。若对于所有余维 1 点 $s \in S^{(1)}$，$\alpha|_s = 0$，则 $\alpha = 0$。

证明。这由定理 3.5 可得。 □

注记 3.7. 在定理 3.5 中，假设子群 G 是非分歧的（即 $D = \emptyset$，因此 $G \subseteq \mathrm{Br}(X)$）。利用 SGA 2 中的经典结果，我们可以给出一个简短的证明：对于一个维数为 $\dim X \geq 4$ 的光滑射影 k-概形 X，以及任意一个光滑充足除子 $Y \subset X$，$\ker(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y))$ 的 ℓ-主分量是 ℓ-可除的。令 $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ 为一个 Brauer 类，并设 $\ell := \mathrm{per}(\alpha)$。将 k 替换为一个次数与 ℓ 互素的扩张后，我们可以假设 k 包含一个本原 ℓ 次单位根；在这种情况下，我们可以选择 $\mathrm{Spec}\, k$ 的大 fppf 位形上的层的一个同构 $\mathbb{Z}/(\ell) \simeq \boldsymbol{\mu}_\ell$。Kummer 正合列诱导出一个交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\times \ell} & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_\ell) \\ \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_3} \\ \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(Y, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow[\times \ell]{} & \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(Y, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(Y, \boldsymbol{\mu}_\ell) \end{array} \tag{3.7.1}$$

其中各行均为正合序列，竖直箭头为限制映射。由于 $\dim X \geq 4$，根据 [Gro05, Exp. XIV, 5.7] 中的 $i = 3, n = \dim X, c = 0$，可知 f_2 是双射，且 f_3 是单射。随后，通过对 (3.7.1) 进行图追逐，即可得到所要证明的结论。

备注 3.8。我们注意到，在定理 3.5 中，使得 $G \to \mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(\kappa(u))$ 非单射的点集 $u \in U$ 不一定是有限集。构造在无穷多个闭点处消失的 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 的一种方法，是安排存在一个满的 k-态射 $f\colon S' \to S$，其中 $S'(k)$ 是无限集，且 $f^*\alpha = 0$；若如此，则由引理 3.9 得 $f(S'(k)) \cap S[\alpha^{-1}] = \emptyset$。例如，设 k 是一个特征为 $\mathrm{char}\ k \neq 2$ 的无限域，令 $S := \mathbf{P}^1_k \setminus \{0, \infty\}$，令 $a \in k^\times \setminus (k^\times)^2$ 是一个非平方常数，令 $A := (a, t)$ 为 S 上的四元数代数。则 $\alpha := [A\ ] \in \mathrm{Br}(S)$ 非平凡[GS06, 1.3.8], ，但经平方映射 $f : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ 拉回后，A 变为平凡，因此 $f(S(k)) \cap S[\alpha^{-1}] = \emptyset$，即对于任意平方常数 $b \in (k^\times)^2$, ，特化 $[A\ |_b] \in \mathrm{Br}(k)$ 都是平凡的。

一般来说，根据 Yanchevskii [Yan85] 和 Mestre [Mes94b], [Mes94a], [Mes96b]，[Mes96a], 的结果，已知 $\mathbf{P}^1_k$ 的开子概形上的某些 Brauer 类在经有限态射 $\mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ 拉回后会变为平凡。更确切地说，设 $S \subseteq \mathbf{P}^1_k$ 为一个开子概形，且设 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 为一个 Brauer 类，使得 $S(k) \setminus S[\alpha^{-1}] \neq \emptyset$。如果满足以下任一条件，

(i) k 是 Henselian 的，或 (ii) α 是 2-挠的，且 $\sum_{x \in \mathbf{P}^1_k \setminus S} [\kappa(x) : k] \leq 4$,

那么存在一个有限态射 $f : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$，使得 $f^*\alpha = 0$ （另见 [Ser02, II.Appendix]）。

引理 3.9. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个概形态射，设 $\alpha \in \mathrm{Br}(Y)$ 是一个 Brauer 类，满足 $f^*\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ 是平凡的。设 $y \in Y$ 是一个点，使得纤维 $X_y := X \times_Y \mathrm{Spec}\ \kappa(y)$ 存在一个 $\kappa(y)$-点。那么 $y \notin Y[\alpha^{-1}]$。

证明。由于 $(f^*\alpha)|_{X_y} = 0$，我们有 $\alpha|_y = 0$。 □

3.10（推论 1.11 的证明）。设 $U \subseteq S$ 是一个开子集，并设 $\alpha \in \mathrm{Br}(U)$ 是一个 Brauer 类，使得限制 $\alpha|_K$ 包含于 $X^{\Omega_S} \mathrm{Br}(K)$ 中。对于每个余维 1 点 $s \in U$，我们有 $\alpha|_{K_s} = 0$，因此 $\alpha|_{\mathcal{O}^\wedge_{S,\,s}} = 0$ 因为 $\mathcal{O}^\wedge_{S,\,s}$ 是正则的；因此 $\alpha|_{\kappa(s)} = 0$，因为 $\mathcal{O}^\wedge_{S,\,s}$ 是 Henselian 的。由定理 1.9，我们有 $\alpha = 0$。

问题 3.11. 定理 1.9 对满足 $\mathrm{trdeg}_k(F) = 2$ 的域是否仍然成立?

3.11.1. 为此，我们需要将诺特-莱夫谢茨定理 [GH85] 推广到满足命题 2.1 条件的、维数为 3 的分离 Deligne-Mumford 叠。关于肯定答案的明确证据，请参见 3.13.3 中的例子。

3.11.2. 正如引言中所观察到的，假设 $\mathrm{trdeg}_k(F) = 1$ 是不够的，原因如下。设 k 是一个代数闭域，F/k 是一个有限生成的域扩张，满足 $\mathrm{trdeg}_k(F) = 1$。设 S 是一个有限型 F-概形，且 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 是一个 Brauer 类。对于任意闭点 $s \in S$，我们有 $\kappa(s)$ 是一个 C_1-域，因此 $\alpha|_s = 0$ 属于 $\mathrm{Br}(\kappa(s))$。

这些 在 3.12 中，定理 3.5 是否对特征为 p 的 p-挠类成立?

3.12.1 . 设 F 是特征为 p 的完美域，设 S 是有限类型 F-概形，设 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ 是一个 p-挠布劳尔类。对于任意闭点 $s \in S$，特化 $\alpha|_s \in \mathrm{Br}(\kappa(s))$ 是特征为 p 的完美域上的 p-挠布劳尔类，因此实际上 $\alpha|_s = 0$。这提供了一种构造在簇的所有闭点处都消失的布劳尔类的方法。然而，这并未给出定理 1.9 的反例，因为正超越次数的有限生成域并非完美域。

问题 3.13. 设 k 是完美域，设 F/k 是一个超越次数为 $\mathrm{trdeg}_k(F) \geq 3$ 的有限生成扩张，设 S 是有限型 F-概形。设 $G \subset \mathrm{Br}(S)$ 是一个有限子群，且 $|G|$ 在 k 中可逆，并假设 $s \in S$ 是一个点，使得复合映射 $G \to \mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(\kappa(s))$ 是单射。给定一个子群 $G' \subseteq G$，是否存在一个无限闭点集 $s' \in \overline{\{s\}}$，使得复合映射的核

$$G \to \mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(\kappa(s'))$$

是 G' 吗?

3.13.1。如果 $G' = 0$，根据定理 1.9，答案为“是”。

3.13.2 . 若 $G' = G$，则根据下面的定理 3.14，答案是“是”。Frei、Hassett、Varilly-Alvarado 在 [FHVA21] 中考虑了一个相关问题。也就是说，给定一个数域 k、一个光滑射影 k-概形 X 和一个 Brauer 类 α，他们将 $S(X, \alpha)$ 定义为满足以下条件的 k 的有限处 $\mathfrak{p}$ 的集合：X 在 $\mathfrak{p}$ 处有良约化，α 在 $\mathfrak{p}$ 处非分歧，且 $\alpha|_{X_{\mathfrak{p}}} = 0$ 属于 $\mathrm{Br}(X_{\mathfrak{p}})$。他们证明，若 X 是一个 K3 曲面，且其超越上同调 $T(X)$ 满足某个条件，则集合 $S(X, \alpha)$ 具有正的自然密度。

3.13.3. 下面给出一个例子，其中对于任意除子 d of$n$，$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 且 $G' \simeq d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。令 $F := \mathbb{C}(t_1, t_2)$ 为两个不定元上的函数域，令 $A := \mathrm{Spec}\ F[t_3^{\pm}]$ and$S := \mathrm{Spec}\, A$，并且

$$\xi := t_1 t_2 \in F$$

并令 $F(\xi^{1/n})/F$ 为通过添加 n次根 ξ 得到的循环扩张。令$\chi \in \mathrm{Aut}(F(\xi^{1/n})/F)$ 为一个生成元，并令

$$\alpha := (S(\xi^{1/n})/S, \chi, t_3) \in \mathrm{Br}(S)$$

分母 e 是 n 阶、定义在 S 上的循环代数；我们令 $G := \langle \alpha \rangle$ 和 $G' := \langle \alpha^{n/d} \rangle$.

设 K/F 为一个扩张。对于任意 K-点 $s : \mathrm{Spec}\, K \to S$ 以及 n 的任意除子 d， d 次张量幂的限制

$$s^* \alpha^{\otimes d} \simeq (K(\xi^{d/n})/K, \chi^{n/d}, s^* t_3) \in \mathrm{Br}(K)$$

当且仅当范数映射娱乐主管

$$\mathrm{Nm}_{K(\xi^{d/n})/K} : K(\xi^{d/n})^\times \to K^\times$$

包含 $s^*t_3 \in K^\times$ 于其像中 [Pie82, §15.1, 引理]。因此，问题 3.13 可以改述如下：是否存在无穷多个闭点 $s \in S$，使得如果我们将 s 的剩余域记为 $K := \kappa(s)$，那么限制 $t_3|_s \in K^\times$ 属于 $\mathrm{Nm}_{K(\xi^{d/n})/K}$ 的像中，但不属于 $\mathrm{Nm}_{K(\xi^{1/n})/K}$ 的像中?

以 $\{1, \xi^{1/m}, \xi^{2/m}, \dots, \xi^{(m-1)/m}\}$ 作为 $K(\xi^{1/m})$ 的 K-基底，我们有

$$\mathrm{Nm}_{K(\xi^{1/m})/K}(x_0 1 + x_1\xi^{1/m} + \cdots + x_{m-1}\xi^{(m-1)/m}) = \det M_{\xi,m}$$

where $M_{\xi,m} \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(F[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}])$ 是一个矩阵，其第 (i,j) 个元素 is

$$(M_{\xi,m})_{i,j} = \begin{cases} x_{i-j} & \text{if } i \geq j \\ \xi x_{i-j+m} & \text{if } i < j \end{cases}$$

对于所有 $1 \leq i, j \leq m$。例如，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Nm}_{K(\xi^{1/4})/K}(x_0 1 + x_1\xi^{1/4} + x_2\xi^{2/4} + x_3\xi^{3/4}) \\ &= \det \begin{bmatrix} x_0 & \xi x_3 & \xi x_2 & \xi x_1 \\ x_1 & x_0 & \xi x_3 & \xi x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \xi x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \\ &= (x_0^2 - \xi x_2^2)^2 - \xi(x_1^2 - \xi x_3^2)^2 + 4\xi(x_0x_1 - x_2x_3\xi)(x_1x_2 + x_0x_3) \end{aligned}$$

类似地

$$\mathrm{Nm}_{K(\xi^{1/2})/K}(y_0 1 + y_1\xi^{1/2}) = \det \begin{bmatrix} y_0 & \xi y_1 \\ y_1 & y_0 \end{bmatrix} = y_0^2 - \xi y_1^2$$

分别在 $m = 4$ 和 $m = 2$ 的情形下。

取一个多项式 $f \in \mathbf{C}[t_1, t_2]$，使得 $f|_{t_1=0} \in \mathbf{C}[t_2]$ 不是一个完全 d次幂，并令 $s \in S(F)$ 为与 $t_3 - f^{n/d}$对应的 F-有理点。于是取 $(y_0, y_1) = (f, 0)$，可知 $t_3|_s$属于 $\mathrm{Nm}_{F(\xi^{d/n})/F}$ 的像。若 $t_3|_s$属于 $\mathrm{Nm}_{F(\xi^{1/n})/F}$ 的像，则通过清除分母，我们得到多项式 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}[t_1, t_2]$，使得

$$\det M_{\xi,n}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = f^{n/d}a_n^n$$

在 $\mathbf{C}[t_1, t_2]$ 中。由于 $M_{\xi,\ n}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})|_{t_1=0}$ 是一个下三角矩阵，上式可简化为

$$(a_0|_{t_1=0})^n = (f|_{t_1=0})^{n/d}(a_n|_{t_1=0})^n$$

在 $\mathbf{C}[t_2]$ 中，这与 $(f|_{t_1=0})^{n/d}$ 不是 $\mathbf{C}(t_2)$ 中的 n 次幂相矛盾。

定理 3.14. 设 F 是一个无限域，设 S 是一个维数为 $S \geq 1$ 的有限型 F-概形，设 $G \subseteq \mathrm{Br}(S)$ 是一个有限子群。那么存在无穷多个余维 1 点$s \in S^{(1)}$，使得对于所有 $\alpha \in G$，$\alpha|_s = 0$ 都属于 $\mathrm{Br}(\kappa(s))$。

证明。设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 G 的元素，并且对所有 $1 \leq i \leq n$，令 $Y_i \to S$ 为对应于 α_i 的 Brauer-Severi 概形。令

$$Y := Y_1 \times_S \cdots \times_S Y_n$$

并令 $f: Y \to S$ 为结构态射。根据引理 3.16，存在无穷多个 $s \in S^{(1)}$，使得纤维

$$f^{-1}(s) = Y \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \to \operatorname{Spec} \kappa(s)$$

存在一个截面；对于这样的 s，对于所有 $1 \le i \le n$，我们都有 $\alpha_i|_s = 0$，如所要求。 □

引理 3.15。设 k 为一个域，设 X、Y 为有限型 k-概形，设 $\pi_X\colon X \times_k Y \to X$ 和 $\pi_Y\colon X \times_k Y \to Y$ 为两个投影。对于满足 $\pi_Y(z)$ 是 Y 的一个 k-点的任意点 $z \in X \times_k Y$，剩余域扩张 $\kappa(\pi_X(z)) \to \kappa(z)$ 是一个同构。

证明。 $\pi_Y(z) : \operatorname{Spec} k \to Y$ 这一 k-点诱导出一个截面 $\sigma\colon X \to X \times_k Y$，它属于 π_X，并将 $\pi_X(z)$ 发送到 $\mapsto z$。□

引理 3.16。设 k 为一个无限域，设 X、Y 为不可约的有限型 k-概形，且 $\dim X \ge \dim Y \ge 1$，并设 $f\colon X \to Y$ 为一个一般光滑的 k-态射。则存在无穷多个余维 1 的点 $y \in Y$，使得纤维

$$f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

存在一个截面。

证明。令 $\eta_X \in X$ 和 $\eta_Y \in Y$ 表示泛点。若 $\dim X > \dim Y$，根据 [Sta22, 056U]，我们可以选取一个闭点 $x \in f^{-1}(\eta_Y)$，使得 $\kappa(x)/\kappa(\eta_Y)$ 是有限可分扩张。将 X 替换为既约概形 $\overline{\{x\}}$ 后，我们可以假设 $\dim X = \dim Y$，且函数域扩张 $\kappa(\eta_X)/\kappa(\eta_Y)$ 是有限可分扩张。

我们可以用开子概形替换 X 和 Y，使得 X 和 Y 是仿射的。令 $A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$，且 $B := \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$；进一步局部化后，我们可以假设（由本原元定理） $A = B[a]$，其中某个 $a \in A$ 在 B 上整。令 $\phi \in B[t]$ 为 a 在 B 上的最小多项式。若 $\deg \phi = 1$，则 f 的每个纤维都是平凡的，因此我们可以假设 $\deg \phi \ge 2$。令 $k' \subseteq A$ 为 k 在 A 中的整闭包；根据 [HS06, 3.3.2]， k'/k 是有限扩张。由于 $\dim(B) \ge 1$，我们有 $\dim_k(B) = \infty$，因此可以选取某个 $b \in B$ 使得 $a + b \notin k'$。将 a 替换为 $a + b$ 后，我们可以假设 $a \notin k'$，即 ϕ 有一个不在 k 上整的根，因此 ϕ 不整除 $k[t]$ 的任何非零元素。这蕴含复合

$$k[t] \to B[t] \to B[t]/(\phi) \simeq A$$

是单射；因此，相应的态射

$$g : X \to \mathbb{A}^1_k \times_k Y \to \mathbb{A}^1_k$$

是平坦的。因此，集合论像 $U := g(X) \subseteq \mathbb{A}^1_k$ 是 $\mathbb{A}^1_k$ 的一个开子集。由于 k 是无限的，开子集 U 包含无限多个 k-点。对于任意满足 $g(x)$ 是 U 的一个 k-点的 $x \in X$，剩余域扩张 $\kappa(f(x)) \to \kappa(x)$ 根据引理 3.15 是一个同构。□

4. 布劳尔类在指定点集上消失

定理 1.9 和定理 3.5 表明，布劳尔类的过多消失特化会使其归零。在本节中，我们考虑构造在给定有限点集上消失的非零布劳尔类的问题（即是否总是存在 $\alpha \in \operatorname{Br}(S)$，使得 $S[\alpha^{-1}]$ 避开任意给定的点集）。

问题 4.1. 设 k 为一个域，设 S 为 k 上的一条曲线。设 T_1、$T_2 \subseteq S$ 是 S 的不相交子集。是否存在一个 Brauer 类 $\alpha \in \operatorname{Br}(S)$，使得 $T_1 \subseteq S[\alpha^{-1}]$ 和 $T_2 \cap S[\alpha^{-1}] = \emptyset$?

4.1.1. 在第2节中，我们主要关注 $S[\alpha^{-1}]$ 是否在特化下稳定。我们也可以询问 $S[\alpha^{-1}]$ 是否在泛化下稳定。如果 $s \in S$ 是一个点，且约化子概形 $\overline{\{s\}} \subset S$ 是正则的，那么 $\alpha|_s = 0$ 蕴含对于所有 $s' \in \overline{\{s\}}$，都有 $\alpha|_{s'} = 0$。另一方面，如果 $\overline{\{s\}}$ 不是正则的，则可能出现 $\alpha|_s = 0$ 成立，但对于某个 $s' \in \overline{\{s\}}$，$\alpha|_{s'} \neq 0$ 不成立的情况：

令 $A := (\mathbf{Q}[x,y]/(x^2 - y^3 + 2y^2))_{\langle x,y\rangle}$；则 A 是一个维数1的局部诺特整环，其正规化由映射 $A \to \mathbf{Q}[t]_{\langle t\rangle}$ 给出，该映射将 $x \mapsto t$ 映为 (t^2+2)，并且 $y \mapsto t^2+2$。令 $S := \operatorname{Spec} A$，其泛点为 s，闭点为 s'，并考虑四元数代数$\alpha := (y-1, y-1) \in \mathrm{Br}(S)$。我们有 $\alpha|_{s'} \neq 0$，因为圆锥曲线 $-X_0^2 - X_1^2 = X_2^2$ 在 $\kappa(s') \simeq \mathbf{Q}$ 上没有非平凡解；然而 $\alpha|_s = 0$，因为圆锥曲线 $(t^2+1)X_0^2 + (t^2+1)X_1^2 = X_2^2$ 有解 (X_0, X_1, X_2)，即 $\kappa(s) \simeq \mathbf{Q}(t)$ 上的 $(t, 1, t^2+1)$。

4.1.2 . 在命题4.2中，我们对问题 4.1 的一个较弱版本给出肯定回答，其中允许 α 在 S 上分歧。在命题4.3中，我们证明了 $|T| = 1$情形下非分歧布劳尔类的存在性。

命题4.2. 设 k 是一个希尔伯特域，S 是定义在 k上的光滑完备曲线。对于任意有限闭点集 $T \subseteq S_{(0)}$ 以及任意正整数 n，存在 S 的一个开子概形 S'，使得 $T \subseteq S'$，并且存在一个 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S')$，使得 $\eta_{S'} \in S'[\alpha^{-1}]$且 $T \cap S'[\alpha^{-1}] = \emptyset$，并且 $\gcd(\operatorname{per} \alpha, n) = 1$。

证明. 设 S_1, S_2 是定义在 k上的光滑完备曲线，设 $f\colon S_1 \to S_2$ 是一个有限 k-态射，设 $T_1 \subseteq (S_1)^{(0)}$ 是一个闭点集，并令 $T_2 := f(T_1)$。假设 $S_2' \subseteq S_2$ 是包含 T_2的一个开子集，且 $\alpha_2 \in \mathrm{Br}(S_2')$是一个 Brauer 类，满足 $\eta_{S_2'} \in S_2'[\alpha_2^{-1}]$ 且 $T_2 \cap S_2'[\alpha_2^{-1}] = \emptyset$。那么对于 $S_1' := f^{-1}(S_2')$ 和 $\alpha_1 := f^*\alpha_2 \in \mathrm{Br}(S_1')$，有 $T_1 \cap S_1'[\alpha_1^{-1}] = \emptyset$。在此设定下，我们有

$$\operatorname{per}\alpha_1 \mid \operatorname{per}\alpha_2 \mid (\deg f)\operatorname{per}\alpha_1$$

因此，\(\gcd(\operatorname{per}(\{v1\}),\{v2\}\deg(\{v3\}))\) 蕴含 \(\operatorname{per}(\{v5\})\operatorname{per}(\{v6\})\)。

根据上述内容，我们可以通过选择一个有限的 k-态射 $f\colon S \to \mathbf{P}^1_k$，并分别将 S、T、n 替换为 $\mathbf{P}^1_k$、$f(T)$ $n\deg f$，将问题归约到 $S = \mathbf{P}^1_k$ 的情形。

通过对 $\mathbf{P}^1_k$作平移，我们可以假设 $0, \infty \notin T$。对于任意 $s \in T$，令 $\xi_s \in k[t]$为定义闭子概形 $\operatorname{Spec}\kappa(s) \to \mathbf{P}^1_k$ 的首一不可约多项式，并设$\xi := \prod_{s\in T} \xi_s$。取一个正整数 $m \geq 2$，使得 $\gcd(m, n) = 1$。由于 K 具有希尔伯特性，根据 [FJ08, 16.3.6]，存在一个次数为 $[k' : k] = m$ 的循环伽罗瓦扩张 k'/k。取一个正整数 $i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$，使得 $m \nmid i + \deg \xi$，令 $\chi \in \mathrm{Aut}(k'/k)$ 为一个生成元。我们证明，与循环代数对应的 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(k(t))$】【。

$$\mathscr{A} := (k'(t)/k(t), \chi, t^i\xi + 1)$$

具有所需的性质。要证明 A 非平凡，根据 [Pie82, §15.1, Lemma]，只需证明单位元 $t^i\xi + 1 \in (k(t))^\times$ 不是 $(k'(t))^\times$ 中任何元素的范数。为此，我们注意到，对于任意 $\frac{a}{b} \in (k'(t))^\times$，范数 $N_{k'(t)/k(t)}(\frac{a}{b}) = \prod_{\sigma\in \mathrm{Aut}(k'/k)} \sigma(\frac{a}{b})$ 的次数为 $m(\deg(a) - \deg(b))$，但 $\deg(t^i\xi + 1)$ 不是 m 的倍数（根据 i 的选取）。对于任意闭点 $s \in T$，A 在 s 处非分歧（因为 $\gcd(\xi_s, t^i\xi + 1) = 1$），且限制

$$\mathscr{A}|_s = (k' \otimes_k \kappa(s)/\kappa(s), \chi, (t^i\xi + 1)|_{\kappa(s)}) \simeq (k' \otimes_k \kappa(s)/\kappa(s), \chi, 1)$$

是一个平凡的中心单代数 $\kappa(s)$-代数。 □

命题4.3. 设 k 是一个在全局域上有限生成的域，设 S 是定义在 k 上、亏格为 $g \geq 1$ 的光滑适当几何整曲线。对于任意闭点$x \in S_{(0)}$，存在一个 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$，使得 $\eta_S \in S[\alpha^{-1}]$ 和 $x \notin S[\alpha^{-1}]$。

证明。如果 x 是一个 k-点，则 Leray 谱序列给出一个分裂正合序列

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(S) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\, k, \mathrm{Jac}_S) \to 0$$

其中，Jac_S 是 S的雅可比簇。由于 k 具有希尔伯特性，根据 [CL19，定理 1.6]，群 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\, k, \mathrm{Jac}_S)$ 对任意正整数 n都包含阶为 n 的元素；给定任意这样的元素，我们便可得到 $\mathrm{Br}(S)$ 中的一个非平凡元素，该元素在 x处消失。

如果 x不是 k-点，那么扩张 $\kappa(x)/k$ 是非平凡的；根据 Fein、Schacher [FS82] 的一个定理，相对布劳尔群 $\mathrm{Br}(\kappa(x)/k)$ 是无限的。对于任意非平凡类$\alpha \in \mathrm{Br}(\kappa(x)/k)$，常值类 $\alpha|_S \in \mathrm{Br}(S)$ 是一个在 x处消失的布劳尔类。□

注记4.4。在命题4.3中，条件 $S \not\simeq \mathrm{P}^1_k$ 是必要的，因为拉回映射 $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(\mathrm{P}^1_k)$是一个同构（因此，如果 $x \in \mathrm{P}^1_k(k)$是一个 k-点，那么就不存在任何在 x处消失的非平凡 $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathrm{P}^1_k)$）。

5. Applications to rational points on genus 1 curves

作为我们在第2节中所得结果的一个应用，我们证明推论 1.12，该推论可以视为关于 k 上四维簇的函数域上的亏格 1 曲线的局部-整体原理。我们首先证明 [CK12 中引理 3.2] 针对相对椭圆曲线的一个版本。

引理 5.1. 设 S 是一个容许丰沛线丛的拟紧概形，设 $\pi : \mathrm{E} \to S$ 是一条相对椭圆曲线，并设 $\sigma : S \to \mathrm{E}$ 表示 π 的单位截面。存在一个自然的同构。

$$\ker(\sigma^* : \mathrm{Br}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Br}(S)) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, \mathscr{E})_{\mathrm{tors}}$$

其在 S 上具有函子性。

证明。我们考虑 π 的 Leray 谱序列。由于 π 是相对曲线，根据 [Gab78, II, 引理 $2'$]，我们有 $\mathrm{R}^2\pi_*\mathrm{G}_m = 0$。由于 π 存在一个截面，拉回映射 $\pi^* : \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(S, \mathrm{G}_m) \to \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(\mathrm{E}, \mathrm{G}_m)$ 是单射，因此微分 $d^{1,1}_2 : \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, \mathrm{R}^1\pi_*\mathrm{G}_m) \to \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(S, \mathrm{G}_m)$ 是零映射。由此我们得到一个正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(S, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathscr{E}, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, \mathbf{R}^1\pi_*\mathbf{G}_m) \to 0 \tag{5.1.1}$$

其具有由 σ^* 诱导的典范分裂。我们有同构

$$\mathbf{R}^1\pi_*\mathbf{G}_m \simeq \mathrm{Pic}_{\mathscr{E}/S} \simeq \mathrm{Pic}^0_{\mathscr{E}/S} \times \underline{\mathbf{Z}} \simeq \mathscr{E} \times \underline{\mathbf{Z}}$$

S 上的 étale 层之间的同构。由于 $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\underline{S}, \mathrm{Z})$ 是无挠的（例如参见 [Shi21, A.3]），我们有一个分裂正合列

$$0 \to \mathrm{Br}(S) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(\mathscr{E}) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, \mathscr{E})_{\mathrm{tors}} \to 0$$

这是通过将 (5.1.1) 限制到挠子群而得到的。 □

5.2（推论 1.12 的证明）。通过将 S 替换为一个开子概形，我们可以假设 S 是仿射且正则的；此外，我们可以假设 C 在 S 上具有良约化，即存在一个概形 C 和一个光滑射影态射 $\pi : \mathrm{C} \to S$，其几何纤维是亏格 1 的连通曲线，并且存在一个 K-同构 $\pi^{-1}(\eta_S) \simeq C$，其中 $\eta_S \in S$ 表示泛点。令 $\mathrm{E} := \mathrm{Pic}^0{}_{\mathscr{C}/S}$ 为 C 的雅可比簇。我们有

C 是一个 E-主齐性空间（E-torsor），即存在一个类 $[\mathsf{C}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, \mathsf{E})$，它是 π 的截面存在性的障碍。令

$$\alpha \in \mathrm{Br}(\mathscr{E})$$

be th 在引理 5.1 的同构下，与 $[\mathsf{C}]$ 对应的 Brauer 类 .

我们将证明，对于所有闭点 $x \in \pi^{-1}(\eta_S)$，$\alpha|_x = 0$；若如此，则将定理 1.9 应用于 $\pi^{-1}(\eta_S)$，即可得到 $\alpha|_{\pi^{-1}(\eta_S)} = 0$~。令 $S := \overline{\{x\}}$ 为 x 在 E 中的闭包，并赋予其既约概形结构 ~。由于复合映射 $S \to \mathsf{E} \to S$ 是泛有限且~ ~主导的，因此可知 S 本身是一个维数为 dim $S \geq 1$ 的整有限型 F-概形。~通过再次将 S 限制到一个更小的 Zariski 开集，我们可以假设 $S \to S$ 是有限且平坦的，并且 S 在 F 上是光滑的。为了证明 $\alpha|_x = 0$，根据应用于 S 的定理 1.9，只需证明 $\alpha|_{\widetilde{s}} = 0$ 对每个余维 1 点 $\widetilde{s} \in S$ 都成立。取这样一个点 ~ ~$\widetilde{s} \in S$，并考虑其像 $s \in S$；由于 $S \to S$ 是有限平坦的，该像也具有余维 1。根据假设，限制映射 $[\mathsf{C} \times_S \mathrm{Spec}\ K_s] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\ K_s, \mathsf{E} \times_S \mathrm{Spec}\ K_s)$ 是平凡的，因此根据引理 5.1，有 $\alpha|_{\mathscr{E} \times_S \mathrm{Spec}\ K_s} = 0$。由于 $\mathsf{E} \times_S \mathrm{Spec}\ \mathrm{O}_{\hat{S},s}$ 是正则的，因此我们有 $\alpha|_{\mathscr{E} \times_S \mathrm{Spec}\ \mathrm{O}_{\hat{S},s}} = 0$，从而得到 $\alpha|_{\mathscr{E} \times_S \mathrm{Spec}\ \kappa(s)} = 0$，特别地，$\alpha|_{\widetilde{s}} = 0$。

References

[Alp13] Jarod Alper。《Artin 叠群的良好模空间》。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，63(6):2349–2402，2013 年。[CK12] Mirela Ciperiani 和 Daniel Krashen。《属 1 曲线的相对布劳尔群》。《以色列数学杂志》，192(2):921–949，2012 年。[CL19] Pete L Clark 和 Allan Lacy。《每个无限有限生成域上都存在具有任意指标的属 1 曲线》。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志），2019(749):65–86，2019 年。[FHVA21] Sarah Frei、Brendan Hassett 和 Anthony V´arilly-Alvarado。《K3 曲面上布劳尔类的约化、有理性与导出等价》。《arXiv 预印本》，arXiv:2111.08668，2021 年。[FJ08] M. Fried 和 M. Jarden。《域算术》，《数学及其交叉领域成果》第 11 卷。第三辑 /《数学及相关领域成果》。第三辑。/《现代数学综述丛书》。Springer-Verlag，2008 年。[FS82] Burton Fein 和 Murray Schacher。《相对布劳尔群。III》。《纯粹与应用数学杂志》，335:37–86，1982 年。[FS00] Burton Fein 和 Murray Schacher。《代数函数域上布劳尔类的特化》。《美国数学会会刊》，352(9):4355–4369，2000 年。[FSS92] Burton Fein、David J Saltman 和 Murray Schacher。《具有布劳尔-希尔伯特性质的域》。《美国数学会会刊》，334(2):915–928，1992 年。[Fuj02] Kazuhiro Fujiwara。《绝对纯性猜想的一个证明（根据 Gabber）》。《纯数学高级研究》，36:153–183，2002 年。[Gab78] Ofer Gabber。《关于 Azumaya 代数的一些定理》。博士论文，哈佛大学，1978 年。发表于《布劳尔群》，《数学讲义》第 844 卷，Springer-Verlag，柏林和纽约，1981 年，第 129–209 页。[GH85] Phillip Griffiths 和 Joe Harris。《关于诺特-莱夫谢茨定理及关于余维二循环的一些评述》。《数学年刊》，271(1):31–51，1985 年。[Gro05] Alexander Grothendieck。《凝聚层的局部上同调以及局部与整体 Lefschetz 定理（SGA 2）》，《数学文献》（巴黎）第 4 卷。法国数学学会，巴黎，2005 年。Bois Marie 代数几何研讨班，1962 年；增补了 Mich`ele Raynaud 的一篇报告。 [附有 Mich`ele Raynaud 的报告；Yves Laszlo 撰写序言并负责编辑；1968 年法文原版的修订重印版。[GS06] Phillipe Gille 和 Tam´as Szamuely。《中心单代数与伽罗瓦上同调》，《剑桥高等数学研究》第 101 卷。剑桥大学出版社，2006 年。

[Har70] Robin Hartshorne.《代数簇的丰子簇》，《数学讲义》第156卷。Springer，1970年。[Har77] Robin Hartshorne.《代数几何》，《数学研究生教材》第52卷。Springer，1977年。[HS06] Craig Huneke 和 Irena Swanson。《理想、环和模的整闭包》，第13卷。剑桥大学出版社，2006年。[Ill09] Luc Illusie。《关于 Gabber 精细一致化》，2009年。东京大学讲座，https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~illusie/refined_uniformization3.pdf。[KV04] Andrew Kresch 和 Angelo Vistoli。《关于 Deligne–Mumford 叠的覆盖及布劳尔映射的满射性》。《伦敦数学会通报》，36(02):188–192，2004年。[Lan62] Serge Lang。《丢番图几何》。Interscience Publishers，纽约，1962年。[Lie11] Max Lieblich。《算术曲面上布劳尔群的周期与指标》。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志），2011(659):1–41，2011年。[Mes94a] J-F Mestre。《通过变量替换消去具有八个极点且留数为常数的 $\mathrm{Br}_2(k(x))$ 元素》。《法国科学院报告·数学系列》，319(11):1147–1149，1994年。[Mes94b] J-F Mestre。《通过变量替换消去具有四个极点的 $\mathrm{Br}_2(k(x))$ 元素》。《法国科学院报告·数学系列》，319(6):529–532，1994年。[Mes96a] J-F Mestre。《通过变量替换消去具有五个极点的 $\mathrm{Br}_2(k(x))$ 元素》。《法国科学院报告·数学系列》，322(6):503–505，1996年。[Mes96b] J-F Mestre。《通过变量替换消去 $\mathrm{Br}_2(k(x))$ 的元素，其中 k 是有限域》。《法国科学院报告·数学系列》，322(5):423–426，1996年。[Pie82] Richard S. Pierce。《结合代数》，《数学研究生教材》第88卷。Springer-Verlag，纽约、海德堡、柏林，1982年。[Ser02] J. P. Serre。《伽罗瓦上同调》。《Springer数学专著》。Springer-Verlag，柏林，2002年。由 Patrick Ion 从法语翻译，并经作者修订。[Ser08] J. P. Serre。《伽罗瓦理论专题》，《数学研究札记》第1卷。Springer，第2版，2008年。[Shi21] Minseon Shin。《挠 G_m-gerbe 的上同调布劳尔群》。《国际数学研究通知》，2021(19):14480–14507，2021年。[Sta22] Stacks Project 作者。《Stacks Project》。http://stacks.math.columbia.edu，2022年。[Tem17] Michael Temkin。《通过驯性蒸馏与 p-alterations 进行消奇点》。《数学年刊》，186(1):97–126，2017年。[Yan85] Vyacheslav I. Yanchevskii。《圆锥曲线丛的 K-单有理性与单中心代数的分裂域》。《白俄罗斯科学院学报》，29(12):1061–1064，1985年。