arXiv:2305.06467v1 [math.DS] 10 May 2023

具有伪圆吸引子的环带同胚参数化族

JERNEJ ČINČ 和 PIOTR OPROCHA

摘要。本文构造了一个带有类似 Birkhoff 的旋转吸引子的环带同胚参数族。这些吸引子随参数连续变化，且都与伪圆同胚，具有有趣的边界动力学，并且保留从圆诱导出的勒贝格测度。具体而言，在所构造的吸引子族中，外侧素端旋转数随参数连续地遍历区间 $[0, 1/2]$。这尤其回答了 [《伦敦数学学会杂志》（第二辑）**102**（2020），557–579] 中的一个问题。为证明本文的主要结果，我们首先证明一个具有独立意义的结果：保勒贝格测度的圆映射一般满足曲折性条件，这意味着保勒贝格测度的圆映射的逆极限一般是遗传不可分解的。对于度为一的圆映射，这意味着在此背景下的一般逆极限就是 R. H. Bing 的伪圆。

1. 引言

本文的主要目标是研究一个特殊的参数化族，其中包含具有拓扑唯一旋转吸引子的奇异类 Birkhoff 环带同胚[1]，它们的边界动力学两两不同，并且还保持由圆诱导的勒贝格测度。

为了获得这样一个族，我们首先证明一个具有独立意义的结果：勒贝格测度保持圆映射 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 通常满足曲折性条件，这意味着通常情况下，勒贝格测度保持圆映射的逆极限是伪挠簧。对于一次圆映射，这意味着在此背景下，通常的逆极限是 R.H. Bing 的伪圆。伪圆是连续统理论中备受关注的连续统（紧致连通度量空间）。Bing 在 [5]，中证明，它是遗传不可分解的，这意味着其任何子连续统都不能表示为它的两个真子连续统的并。自从 Handel 的构造 [23]，将伪圆实现为一个 C^∞ 平面微分同胚的极小集以来，它多次出现在动力系统中（有关这一主题的扩展信息，请参见 [14] 的引言），最近，Boroński、Kennedy、Liu 和 Oprocha 证明了伪圆允许一个极小的不可逆自映射 [15]。继 Bobok 和 Troubetzkoy 的论文[6]发表后，一维流形上的勒贝格测度保持端映射的通常性质近年来得到了详细研究。在 [7] 中，Bobok、Činč、Oprocha 和 Troubetzkoy 表明，S-极限跟踪这一跟踪性质的一个非常强的版本，是 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中的一个通常性质。最近，同一组作者在 [8] 中研究了从 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 出发的映射的通常拓扑扩张和测度论扩张性质，并证明了

2020 数学主题分类。主要分类：37E10、37E30、37B45、37C20；次要分类：37A10、37C15、37E45。关键词与短语。勒贝格测度、圆映射、伪圆、Brown-Barge-Martin 嵌入、奇异吸引子。[1]以下，旋转吸引子是指一种拓扑吸引子，其对应的外部素端旋转数非零（模 1）。

局部最终满射（leo）条件在从 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 到 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 的映射所构成的空间的一个开稠密子集上成立，并且测度论弱混合是一种泛性质。关于 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中其他泛性质结果的综述，以及与保持支撑为 $\mathbb{S}^1$ 的任意其他无原子测度的圆映射空间、具有稠密周期性的圆映射空间之间的联系，请参阅近期的综述论文 [9]。正如我们已经预告的那样，本文的第一个主要结果如下。

定理 1.1. 所有从 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 出发的映射 $\mathcal{T}$ 所构成的集合满足：若 $f \in \mathcal{T}$，则对每个 $\delta > 0$，都存在一个正整数 n，使得 f^n 是 δ-曲折的，并且包含 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 的一个稠密 G_δ 子集。

<escape>与定理 1.1 及以下推论 1.2 类似的结果，在具有稠密周期点集的映射闭包这一情形下同样成立，类似于 [20]。</escape>

推论1.2。 以任意 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$-泛映射作为唯一粘合映射的逆极限是遗传不可分解的。特别地，对于次数1 的圆映射子集，以任意 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$-泛映射作为唯一粘合映射的逆极限就是伪圆。

我们通过一种非常有用的技术——BBM（Brown-Barge-Martin）嵌入，获得所需的环带同胚。BBM 嵌入是一种技术，它能够从作用于带边界流形的边界收缩上的一个映射（该映射可能非常复杂）构造出一个奇异吸引子的参数化族。BBM 构造中的基本对象是底层粘合映射的逆极限和自然扩张。最初的思想可以追溯到 Barge 和 Martin 的论文 [4], ，作者在其中从一大类逆极限构造出了奇异吸引子。使这项技术得以实现的关键步骤之一是运用 Brown 逼近定理 [19]。Boyland、de Carvalho 和 Hall 在 [10] 中描述了 BBM 嵌入的一个参数化版本，并在 [12] 中详细研究了帐篷映射逆极限的 BBM 嵌入的边界动力学，随后 Anušić 和 Činč 也对此进行了研究 [2]。这些嵌入的一个测度论方面在 [11]中得到了研究。随后，BBM 技术被用于在 [13] 和 [20]中构造新的奇异吸引子参数化族。在 [13], 中，Boroński、Činč 和 Liu 在问题 2 中提出：是否存在一个球面同胚的参数化族，使得对于任意参数，这些同胚都保持一个与伪圆同胚的共同边界吸引子？请注意，下面陈述的定理1.4 特别地肯定地回答了这一问题。此外，我们所构造的同胚族还具有有趣的拓扑扩张性质和测度论扩张性质。

以下定义将帮助读者理解本文主定理中某些不太标准的测度论部分。

定义 1.3. 设 X 是一个带有勒贝格测度 λ 的欧几里得空间，且 $f\colon X \to X$ 是一个（满射）映射。若自然扩张 $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{X}$ 的不变测度 $\hat{\mu}_f$ 存在一个吸引域 B，使得 $\hat{\lambda}(\pi_0(B)) > 0$，则称其为逆极限物理测度 。

定理1.4。 设 $\mathcal{T}$ 是 G_δ 的一个稠密 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 子集，其中 定理*1.1*。存在一个圆映射参数族 $\{f_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{T} \subset C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，使得每个 f_t相对于 λ 都是弱混合的，并且存在一个环面同胚参数族 $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{H}(\mathbb{A},\mathbb{A})$，其随 t 连续变化，并具有 Φ_t-不变的伪圆共同边界类 ***Birkhoff*** 吸引子 $\Lambda_t \subset \mathbb{A}$，对每个 $t \in [0,1]$ 均成立，使得

(a) $\Phi_t|_{\Lambda_t}$ 与自然扩张 $\hat{f}_t\colon \hat{\mathbb{S}}^1 \to \hat{\mathbb{S}}^1$拓扑共轭。

(b) 由 λ 诱导的逆极限测度 $\hat{}\mu_t$ （在同构意义下）是 $\mathbb{A}$ 上的逆极限物理测度，并且 Φ_t 关于 $\hat{}\mu_t$ 是弱混合的。测度 $\hat{}\mu_t$ 在弱*拓扑下连续变化。(c) 吸引子 $\{\Lambda_t\}_{t\in[0,1]}$ 关于豪斯多夫度量连续变化。(d) 同胚映射 Φ_t 的外部素端旋转数随着 t 在区间 $[0,1/2]$ 内连续变化。对于所有 $t\in(0,1/2]$, Λ_t 都是旋转吸引子。(e) 在族 $\{\Lambda_t\}_{t\in[0,1]}$ 中，伪圆存在不可数多个在动力学上非等价的平面嵌入。

定理中构造的同胚族1.4 定义在环带上，但两个边界分支都是闭的，且在这些同胚作用下保持不变。因此，通过将每个边界分支压缩为一个点，我们可以得到一个具有与定理中类似性质的球面同胚族。

由于参数化族中的吸引子两两同胚，构造的主要难点在于确定这些嵌入是否支持非共轭的动力学。最近，有一项类似的结果[20] 从区间映射出发，构造了一个具有伪弧吸引子的平面同胚族，使得素端旋转数随区间上的参数连续变化，从而获得了相应结果 $[0,1/2]$。然而，文献 [20] 中的构造要简单得多，这是因为 I具有两个端点 0 和 1，参见图 1。在那里，我们附加一些弧，并在逆极限过程中使这些弧始终保持可达，然后要么使它们成为不动弧（素端旋转数为 0），要么对它们进行置换，从而得到吸引子的素端旋转数 $1/2$。如果我们使用圆映射，则无法明确保证在构造某一阶段可达的点在对映射进行扰动后仍然保持可达，参见图 2。

我们处理这一困难的方法如下。为了保持所选点的周期性，我们在扰动之后施加小幅旋转。这一过程十分精细，需要格外谨慎，因为它可能会破坏扰动所实现的（以及所需要的）预期性质。此外，在证明过程中，一个主要步骤是确保相关的“注水映射”不会改变某些点的像，同时原始映射仍然保持足够的曲折性。此外，我们需要同时对整个映射族施加这两种操作（旋转和扰动），这使得这一过程更加精细。为了使某些点变得可达，我们还需要谨慎地定义 BBM 构造中的展开，参见图 8。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们介绍本文基本框架下所需的一般预备知识。在第 3 节中，我们证明定理 1.1。该证明与 [20] 中的定理 1.1 的证明思路相似，但由于需要进行一些细微而关键的修改，因此我们将证明中这些不同的部分完整地写出。最重要的是，与 [20]相比，引理 3.15 的证明需要进行若干修改。本文的其余部分（第 4节）专门用于证明定理 4.10。

2. 预备知识

令 $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}$ 和 $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$，令 $I:=[0,1]\subset\mathbb{R}$ 表示单位区间， $\mathbb{S}^1$ 表示单位圆。对于 $x,y\in\mathbb{S}^1$，令 $d(x,y)$ 表示 $\mathbb{S}^1$ 上 x 与 y 之间的最小归一化弧长距离。

考虑一个连续映射 $f\colon\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$，其次数为 $\deg(f)\in\mathbb{Z}$。设 $\tilde{f}\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 f 的一个提升，即一个满足以下条件的连续映射。

$$\phi\circ\tilde{f}=f\circ\phi \text{ on } \mathbb{R}, \tag{1}$$

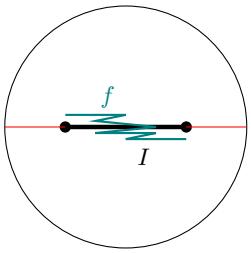

图 1. 在区间情形下，如果我们使用 BBM 构造，就有一种直观上简单的程序，可以使区间的端点保持不变且可达，前提是它们是不动点，或者是作用映射的展开的周期二点 f。例如，这种程序曾被用于 [13] 以及 [20]。由于缺少端点，因此无法将其应用于圆。

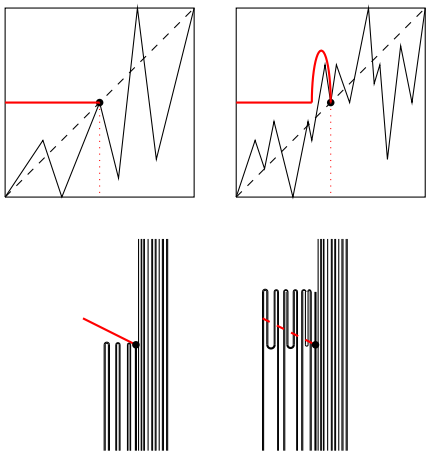

图 2。左上方展示了一个圆映射（在区间上表示），我们标记了一个希望使其可达的局部极值。右上方展示了该映射经过扰动后的情况。下排描绘了这样一个点在逆极限中的可能位置。在左侧的连续统中，它确实可以通过一条红色弧到达，而在右侧的连续统中，它则不再可达。

其中，$\phi\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 由 $\phi(x)=e^{2\pi ix}$ 定义。于是，对每个 $x\in\mathbb{R}$，有 $\tilde{f}(x+1)=\tilde{f}(x)+\deg(f)$。若 $F=f|[0,1)\ (\mathrm{mod}\ 1)$，则称 $F\colon\ [0,1)\to[0,1)$ 是 f 的一个代表元。注意，由于 f 的两个提升相差一个整数常数，F 不依赖于 f 的具体提升选择。注意，当且仅当其代表元 $F=f|[0,1)\ (\mathrm{mod}\ 1)$ 是满射时，f 才是满射。

令 λ 表示 $\mathbb{S}^1$ 上的归一化勒贝格测度，令 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathbb{S}^1$ 中所有博雷尔集构成的族。本文将研究从 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{S}^1$ 的连续映射，这些映射保持 λ，我们将其记为

$$C_\lambda(\mathbb{S}^1):=\{f\colon\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1\colon\ \forall A\in\mathcal{B},\ \lambda(A)=\lambda(f^{-1}(A))\}.$$

我们考虑赋有一致度量 ρ 的集合 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$：

$$\rho(f,g):=\sup_{x\in\mathbb{S}^1}|f(x)-g(x)|.$$

空间 $(C_\lambda(\mathbb{S}^1)\ \rho)$ 是一个完备度量空间，参见 [7, 引理 2。5]。

下一个引理描述了保勒贝格测度的圆映射的代表元，其证明见 [7]。为简化记号，我们也用 λ表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。

引理 2.1。设 F 是 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 的一个代表元。以下条件等价。

(i) $f \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。(ii) $\forall A \subset [0,1)$ 博雷尔 $\lambda(A) = \lambda(F^{-1}(A))$。

临界点 $x \in \mathbb{S}^1$ 是指 f 中的一点：$C(\mathbb{S}^1) \to C(\mathbb{S}^1)$，满足对于任意开弧 $x \in J \subset \mathbb{S}^1$，$f|_J$ 都不是一一映射。弧 $J \subset \mathbb{S}^1$ 称为单调弧，如果 $f|_A$ 是单调的，但 f 在任何严格包含 J的弧上都不是单调的。如果映射 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 具有有限个~临界点，并且在每个单调弧上都是仿射的，我们称其为分段线性 （或分段线性）。如果 f是 f 的一个提升，并且其对应的代表元 F 是分段仿射的，则称 f为分段仿射 的。如果对于每个开弧 $J \subset \mathbb{S}^1$，都存在一个非负整数 n，使得 $f^n(J) = \mathbb{S}^1$，则称圆映射 f 具有局部最终满射（*leo*） 性质。文献中有时也将这一性质称为拓扑满射性。

为了检验我们的扰动是否保留勒贝格测度，我们还将隐含地用到下面这个简单的观察，它可以应用于这些代表元。

引理 2.2. 设 F 是一个圆映射的分段仿射代表元 f，其斜率均非零，且导数仅在有限个点处不存在 E。那么，引理*2.1* 中的性质 *(i)* 和 *(ii)* 等价于性质

$$\forall\, y \in [0,1) \setminus F(E)\colon \quad \sum_{x \in F^{-1}(y)} \frac{1}{|F'(x)|} = 1. \tag{2}$$

对于度量空间 (X,d)，我们用 $B(x,\xi)$ 表示以 $x \in X$ 为中心、半径为 ξ 的开球；对于集合 $U \subset X$，我们记

$$B(U,\xi) := \bigcup_{x \in U} B(x,\xi).$$

在本文其余部分中，我们用字母 d 表示底层欧几里得空间上的欧氏距离 。

3. 定理 1.1 的证明

为了更直观地理解下述定义所描述的概念，请读者参见图 3，其中给出了此类区间映射的示例；另请参见图 4 和 5，其中给出了此类圆映射。

首先，我们给出圆的曲折性的定义。

定义 3.1. 设 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个圆映射，其度量为通常的弧长度量 ρ。对于某个 $\delta > 0$，若映射 $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 满足存在 $s,t \in \mathbb{S}^1$，使得 $0 < s \le t < 1$，且 $\rho(f \circ \omega(s)\ f \circ \omega(1)) \le \delta$ 并且 $\rho(f \circ \omega(t)\ f \circ \omega(0)) \le \delta$，则称其为 (f,δ)-曲折的 。

以下定义是对圆周情形下定义 3.1 以提升的术语进行的改述。

定义 3.2. 设 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为一个圆映射，$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为其提升。设 $a,b \in \mathbb{R}$，并设 $\delta > 0$。如果对于任意两个满足 $f(c) = a$ 和 $f(d) = b$ 的点 $c,d \in \mathbb{R}$，都存在一个位于 c 和 d 之间的点 c'~，以及一个位于 c' 和 d 之间的点 d'，使得 $|b - f(c')| \pmod 1 < \delta$~ 且 $|a - f(d')| \pmod 1 < \delta$，则称映射 f 在点 a 和 ~ ~b 之间是 δ- 曲折的。若映射 f 在每一对点之间都是 δ- 曲折的，则称其为 δ- 曲折的。给定 $\delta > 0$，如果每个映射 ω 都是 (f,δ)-曲折的，则称 f 为 δ-曲折的。

注记 3.3。 显然，定义 δ-曲折映射3.1和 3.2 在 $\mathbb{S}^1$的情况下是等价的。

δ-曲折性的概念与我们现在要引入的逆极限密切相关。对于紧致度量空间f_i上的连续映射集合 $Z_{i+1} \to Z_i$，我们定义

$$\varprojlim(Z_i, f_i) := \{\hat{z} := (z_0, z_1, \dots) \in Z_0 \times Z_1, \dots \big| z_i \in Z_i, z_i = f_i(z_{i+1}), \forall i \geq 0\}. \tag{3}$$

空间 $\varprojlim(Z_i, f_i)$ 配备了由 $Z_0 \times Z_1 \times \dots$ 中的 积度量诱导的子空间度量，其中 f_i 被称为粘合映射。如果对于所有 $i \geq 0$ 都有 $Z_i = Z$ 和 $f_i = f$，则逆极限空间

$$\hat{Z} := \varprojlim(Z, f)$$

还伴随着一个自然同胚，称为 f 的自然扩张（或移位同胚）$\hat{} f \colon \hat{} Z \to \hat{} Z$，其定义如下。对于任意 $\hat{} z = (z_0, z_1, \dots) \in \hat{} Z$,

$$\hat{f}(\hat{z}) := (f(z_0), f(z_1), f(z_2), \dots) = (f(z_0), z_0, z_1, \dots). \tag{4}$$

$\hat{}$ 我们用 π_i 表示从 Z 到其第 i 个坐标的 i-次投影。

注意，伪圆是唯一一种遗传不可分解的、能够分离平面的类圆连续统 [21]。因此，根据 [22, 定理 3.3]（另见 [27] 中的定理 23 及其后续评论），我们得到以下结论。

命题 3.4. 设 $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为一个 *1* 次圆映射，使得对于每个 $\delta > 0$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 f^n 是 δ-曲折的。那么，$\varprojlim(\mathbb{S}^1, f)$ 是伪圆。

以下两个定义以及第三个定义的第一部分最初发表于 [28]，并以类似的方式应用于 [20]。我们将使用下文定义的映射作为构造扰动的基本模块。我们首先研究区间映射，然后将它们提升到 $\mathbb{R}$，以定义圆映射。定理 1.1 证明的第一部分与 [20] 中定理 1.1 的证明类似，因此我们仅简要介绍其中最重要的要点，并经常请读者参阅 [20]。

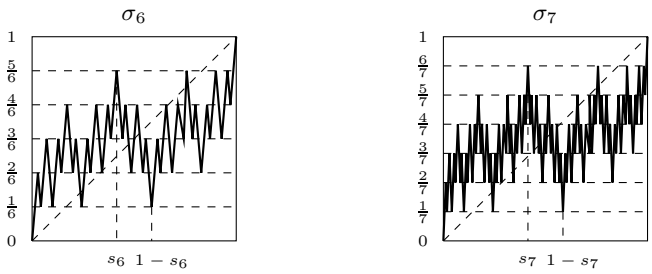

图 3. 简单的 n-曲折映射 s σ_n 适用于 $n = 6$ 和 $n = 7$。注意， σ_6 和 σ_7 分别是 $3/6$ 和 $3/7$-曲折的。

在接下来的内容中，我们定义圆映射 $\lambda_{n,\ k}$ 这些映射将在本节中贯穿使用。对于我们的目的，只需对最终每个奇数 n定义这些映射即可。由于与[20] 相比，我们需要更为特殊的构造，因此需要采用更具体的扰动，并要求 $k \geq 1$ 为偶数。

令 $(\mathrm{cr}[n])_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 为按以下方式定义的序列：$\mathrm{cr}[1] := 1$，$\mathrm{cr}[2] := 2$，并且对每个 $n \geq 3$, $\mathrm{cr}[n] := 2\mathrm{cr}[n-1] + \mathrm{cr}[n-2]$。

在下文中，我们将记作

$$\zeta := \frac{\mathrm{cr}[n-1]}{2(\mathrm{cr}[n] + \mathrm{cr}[n-1])}. \tag{5}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 简单 n-曲折的映射 $\sigma_n\colon [0,1] \to [0,1]$ 按 [28] 或 [20] 中的方式归纳定义（另见图 3 和图 4）。
令 σ_{-n} 表示简单的 n-曲折映射的反射，即对于每个 $t \in I$，有 $\sigma_{-n}(t) := 1 - \sigma_n(t)$。令 $\sigma_n^L := \sigma_n|_{[0,1/2]}$，其中 $\sigma_n|_{[0,1/2]} : [0,1/2] \to [0, \frac{n-1}{n}]$，$\sigma_n^R := \sigma_n|_{[1/2,1]}$，其中 $\sigma_n|_{[1/2,1]}\colon [1/2,1] \to [\frac{1}{n}, 1]$。与上文类似，令 σ_{-n}^L 和 σ_{-n}^R 分别表示 σ_n^L 和 σ_n^R 的反射。

注 3.5。根据 [28]，中的命题 3.5，如果 $\varepsilon > 0$ 且 n 足够大以确保 $2/n < \varepsilon$，则映射 σ_n 是 ε-曲折的。

对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个整数 $k \geq 1$，定义映射

$$\hat{\lambda}_{n,k}\colon [0, n+k-1] \to \left[0, \frac{2n+k-2}{n}\right]$$

通过以下公式

$$\hat{\lambda}_{n,k}(t) := \begin{cases} \frac{n-1}{n}\sigma^R_{-(n-1)}(\frac{t-i}{2\zeta} + \frac{1}{2}) + \frac{i}{n}, & \text{if } t \in [i, i+\zeta], \\ \sigma_n((t-i-\zeta)(\frac{1}{1-2\zeta})) + \frac{i}{n}, & \text{if } t \in [i+\zeta, i+1-\zeta], \\ \frac{n-1}{n}\sigma^L_{-(n-1)}(\frac{t-i-1}{2\zeta} + \frac{1}{2}) + \frac{i+1}{n}, & \text{if } t \in [i+1-\zeta, i+1]. \end{cases} \tag{6}$$

对于某个 $i = \{0, 1, \ldots, n+k-2\}$。参见图 4，其中给出了当$n = 7$时$\hat{}\lambda_{n,k}|_{[i,i+1]}$的图。

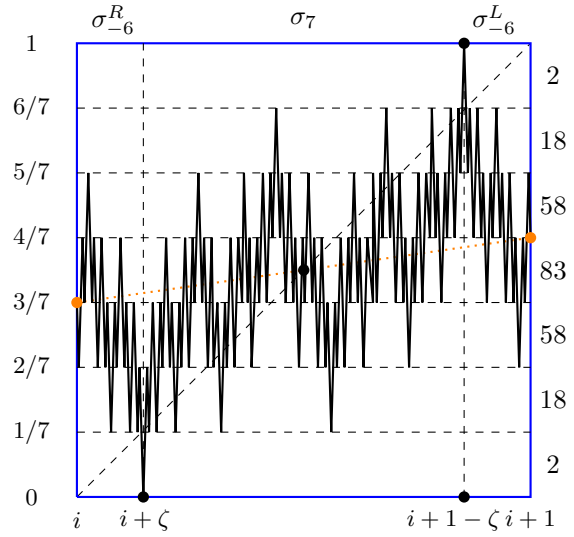

图 4。此图展示了函数 $\hat{}\lambda_{n,k}$ 在 $n = 7$ 时的构造模块。图右侧的数字表示相应水平条带中直径为 $1/n$ 的单调区间数量。通过统计这类区间的数量，我们将论证映射 $\lambda_{n,k}$ 保持勒贝格测度。虚线表示扰动映射 $\lambda_{n,k}$ 的对角线。

$\hat{}$观察 3.6. 对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个 $k \in \mathbb{N}$，映射 $\lambda_{n,k}$ 是
(1) 一个具有一致斜率$\mathrm{cr}[n]+\mathrm{cr}_n{}^{[n-1]}$ 的连续分段线性函数。*(2)* 一个关于点 $\left(\frac{n+k-1}{2}, \frac{2n+k-2}{2n}\right)$呈奇对称的函数。

引理 *3.7.* 对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个整数 $k \geq 1$，若 $t, s \in [0, n+k-1]$ 满足 $|\hat{\lambda}_{n,k}(t) - \hat{\lambda}_{n,k}(s)| < \frac{n-1}{n}$，则 $\hat{\lambda}_{n,k}$ 在 $\lambda_{n,k}(t)$ 与 $\lambda_{n,k}(s)$ 之间是 $\frac{3}{n}$- 曲折的 ^ ^。

在下文中，$[x]$ 表示 $x \in \mathbb{R}$的整数部分，定义为：若 x非负，则取 $\lfloor x \rfloor$；否则取 $\lceil x \rceil$。

定义 3.8。对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个 $k \in \mathbb{N}$，通过提升$\tilde{\lambda}_{n,\,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义映射$\lambda_{n,\,k}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，如下：

$$\tilde{\lambda}_{n,k}(t) := [t] + \frac{n}{n+k-1}\hat{\lambda}_{n,k}((t \,(\mathrm{mod}\ 1))(n+k-1)) - \frac{n-1}{2(n+k-1)} \text{ for } t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

此外，对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们定义$\lambda_{n,\,k,\,\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 如下：$\lambda_{n,\,k,\,\alpha} := r_{-\alpha} \circ \lambda_{n,\,k} \circ r_\alpha$。

参见图 5，其中展示了 $\lambda_{n,\,k}$ 对应 $n = 7$ 的示意图。请注意，经过适当缩放的 $\lambda_{n,\,k}$ 构件与图 4中所示相同。

观察 3.9。对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个整数 $k \geq 1$，映射$\lambda_{n,\,k}$是

(1) 一个斜率为 $\pm(\mathrm{cr}[n] + \mathrm{cr}[n-1])$ 的连续分段线性函数；对于每个 α，这一结论对 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 同样成立；*(2)* 对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，该函数关于点 $(1/2+i, 1/2+i)$ 呈奇函数对称；*(3)* 满足 $\tilde{\lambda}_{n,k}\left(\frac{j}{n+k-1} + i\right) = \frac{j}{n+k-1} + i$，对于所有 $j \in \{0, \ldots, n+k-1\}$ 和所有 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立。

现在我们将转向证明函数 $\lambda_{n,k}$ 对所有奇数 $n \geq 7$ 和所有 $k \geq 1$ 都保持勒贝格测度。我们将基于圆映射代表元的相关论证来完成这一证明。

定义 3.10. 对于每个 $j \in \{1, \ldots, n+k-1\}$ 以及某个固定的整数 $k \geq 1$和一个奇整数 $n \geq 7$，记 $I_j := \frac{1}{n+k-1}[j-1, j) \subset [0,1)$ 并令

$$V_j := I_j \times [0,1)$$

表示 j号垂直条带并令

$$H_j := [0,1) \times I_j$$

表示第 j 个水平条带。

令 $p_1\colon [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ ($p_2\colon [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$) 为到第一个（第二个）坐标的自然投影。此外，将圆映射$\lambda_{n,\,k}$ 在 V_j 中直径恰为 $\frac{1}{n+k-1}$ 的一个代表元 $\Lambda_{n,\,k}\colon [0,1) \to [0,1)$ 的单调区间的最大数量定义为，

$$\#(V_j) \text{ (resp. } \#(H_j)).$$

我们还定义相对于 $\lambda_{n,k}$ 的 $\lambda_{n,k}$的提升所考虑的子区间 $\tilde{I}_j := \frac{1}{n+k-1}[j-1, j) \subset \tilde{\mathbb{R}}$。

观察 3.11。对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和每个整数 $k \geq 1$

(1) 函数 $\lambda_{n,k}|_{\tilde{I}_j}$ 以点 $\left(\frac{2j-1}{2(n+k-1)}, \frac{2j-1}{2(n+k-1)}\right)$为中心是奇函数，对任意 $j \in \mathbb{Z}$均成立。*(2)* $\#(V_j) = \mathrm{cr}[n] + \mathrm{cr}[n-1]$，对任意 $j \in \{1, \ldots, n+k-1\}$ 均成立（这可由 $\lambda_{n,k}$ 的代表元 $\Lambda_{n,k}$ 的定义推出，见图 5 中的红色部分）。

(3) 直径$(\tilde{\lambda}_{n,k}(I_j)) = \frac{n}{n+k-1}$，对任意 $j \in \mathbb{Z}$均成立。

命题 3.12. 对于每个奇整数 $n \geq 7$、每个整数 $k \geq 1$ 以及每个$\alpha \in \mathbb{R}$，映射 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上保持勒贝格测度。

证明. 首先注意，若 $\lambda_{n,k} \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，则 $\lambda_{n,k,\alpha} \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。因此，我们只需说明 $\lambda_{n,k} \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。这里需要考虑区间 $[0,1)$ 上 $\lambda_{n,k}$ 的代表元$\Lambda_{n,k}$，以证明 $\lambda_{n,k}$ 在$\mathbb{S}^1$上保持勒贝格测度。该证明与 [20] 中的命题 2.18. 的证明类似：注意到，[20] 中定义 2.12. 的翻转函数 Fl 对 $\lambda_{n,k}$ 的同长度极大单调单射分支数量所产生的效果，与考虑映射 $\lambda_{n,k}$的代表元相同。为完整起见，我们简要概述证明思路。

由观察 3.11 (2) 可知，对所有 $j \in \{1,\dots,n+k-1\}$，$\#(V_j) = \mathrm{cr}[n] + \mathrm{cr}[n-1]$，并且由于根据观察 3.9 (1)，$\lambda_{n,k}$（因此 $\Lambda_{n,k}$ 也）具有一致斜率（按绝对值计），我们只需证明 $\#(H_j) = \mathrm{cr}[n] + \mathrm{cr}[n-1]$，因为对于任意 $j, j' \in \{1,\dots,n+k-1\}$，$\mathrm{diam}(p_1(V_j)) = \mathrm{diam}(p_2(H_{j'}))$。考虑方框 $B_{j,l} := V_j \cap H_l$，以及对所有 $j,l \in \{1,\dots,n+k-1\}$，$\lambda_{n,k}$ 的 $B_{j,l}$ 的单射分支数，记为 $\#(B_{j,l})$，见图 5。

首先假设 $j \in \{\frac{n+1}{2},\dots,k+\frac{n-1}{2}\}$。注意，由于观察 3.11 (1)，且 n 为奇数，因此 $\#(V_j) = \#(B_{j,j-\frac{n-1}{2}}) + \dots + \#(B_{j,j}) + \dots + \#(B_{j,j+\frac{n-1}{2}}) = \#(B_{j,j}) + 2\#(B_{j+1,j}) + 2\#(B_{j+2,j}) + \dots + 2\#(B_{j+\frac{n-1}{2},j})$。但请注意（见图 5 中间高亮的部分），对于所有 $m \in \{j-\frac{n-1}{2},\dots,j+\frac{n-1}{2}\}$，都有 $\#(B_{j,m}) = \#(B_{m,j})$，因此 $\#(H_j) = \#(B_{j-\frac{n-1}{2},j}) + \dots + \#(B_{j,j}) + \dots + \#(B_{j+\frac{n-1}{2},j}) = \#(B_{j,j-\frac{n-1}{2}}) + \dots + \#(B_{j,j}) + \dots + \#(B_{j,j+\frac{n-1}{2}}) = \#(V_j)$，由此完成证明的这一部分。

现在假设 $j \in \{1,\dots,\frac{n-1}{2}\} \cup \{k+\frac{n+1}{2},\dots,n+k-1\}$。由于映射的对称性，根据观察 3.9 (2)，只需验证 $j \in \{1,\dots,\frac{n+1}{2}\}$ 的情形。根据代表元的定义以及观察 3.9 (2)（映射 $\Lambda_{n,k}$ 的对称性），有 $\#(H_j) = \#(B_{1,j}) + \#(B_{2,j}) \dots + \#(B_{j,j}) + \dots + \#(B_{j+\frac{n-1}{2},j}) = \#(B_{j,j}) + 2\#(B_{j+1,j}) + 2\#(B_{j+2,j}) + \dots + 2\#(B_{j+\frac{n-1}{2},j}) = \#(V_j)$（见图 5 中下方的三个水平条带），由此根据观察 3.11 (2) 完成了这部分证明。

因此，对于每个非退化区间 $J \subset [0,1)$，我们都可以使用公式（2），因此根据引理 2.1 $\lambda_{n,k} \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。□

现在我们将证明 $\lambda_{n,k}$ 符合 [29] 中命题 5 的情形（其中有这样一个扰动映射，记作 g，但它更简单）。

观察 3.13。令 $x_j \in I_j$ 为满足条件的最小数，使得

$$\tilde{\lambda}_{n,k}(x_j) := \max\{\tilde{\lambda}_{n,k}(x); x \in \tilde{I}_j\}$$

对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 均成立。则 $|x_{j-1} - x_j| = \frac{1}{n+k-1}$ 和 $|\tilde{\lambda}_{n,k}(x_{j-1}) - \tilde{\lambda}_{n,k}(x_j)| = \frac{1}{n+k-1}$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 均成立。

观察 3.14。如果 n 是奇数且 k 是偶数，那么对于每个 $t \in \mathbb{S}^1$，$\lambda_{n,k}(t) + 1/2 = \lambda_{n,k}(t+1/2)$。

扰动 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 将在后续证明中使用，届时我们将证明存在一个伪圆吸引子的参数化族，其素端旋转数连续变化。

我们得到以下结果，它是对 [20] 中引理 2.20 的一种修改。由于该命题和证明都需要进行若干处修改，为了完整起见，我们将其全文给出。值得注意的是，与 [20] 中的方法相比，下面这个引理是本节主定理证明中改动最大的一部分。

引理 3.15。设 $\lambda_{n,k,\alpha}: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 如定义 *3.8* 中所定义。令 $\varepsilon := \frac{n-1}{n+k-1}$，$\gamma := \frac{1}{n+k-1}$。则对于每个奇整数 $n \geq 7$ 和$k \geq 1$ 以及 $|\alpha| < \gamma/2$:

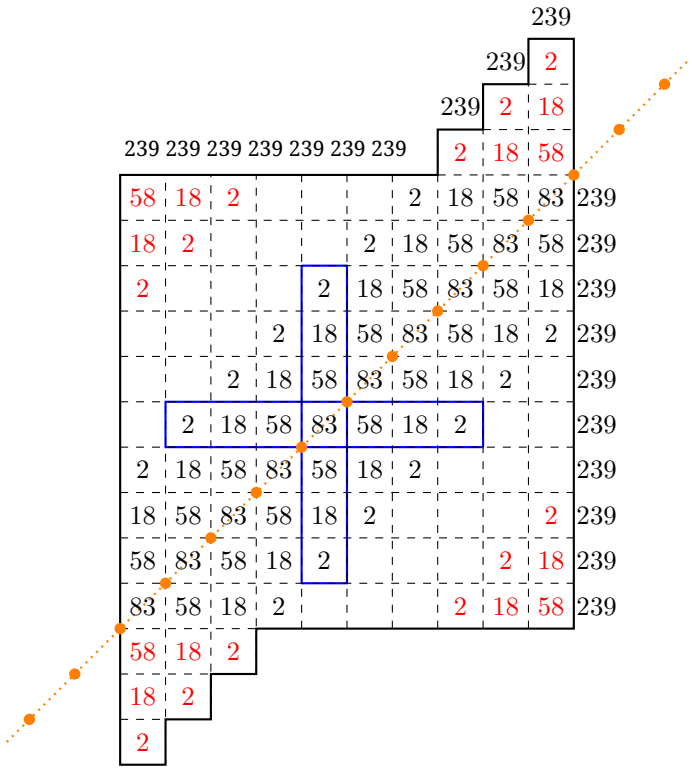

图 5。图中数字表示在每个方框 $B_{j,l}$ 中，$\lambda_{n,k}$ 的直径为 1 $\mathrm{cr}_{[n]+}$ $\mathrm{cr}_{[n-1]}$ 的单射分支的最大数量之和，其中 $n = 7$ 和 $k = 4$（另请注意，方框将区间划分为 $n + k - 1 = 10$ 个部分）（方框中的数字表示 #($B_{j,l}$)）。方框外的数字分别表示 #(V_j) 和 #(H_l)。垂直蓝色ˆ矩形表示图 4 中映射 $\lambda_{7,k}$ 的缩放版本的位置（其副本沿整条对角线排列）。请注意，由于我们处理的是圆映射的提升，因此对于每个水平带状区域和垂直带状区域，单射分支的最大数量之和均为 239。

(i) $\rho(\lambda_{n,k,\alpha}, \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) < \varepsilon/2 + \gamma + \alpha$, *(ii)* 每个映射 $\omega : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ *with* $\lambda(\omega([0,1])) < \varepsilon$ 均为 $(\lambda_{n,k}, 3\gamma)$- 曲折的 , *(iii)* 对于 $\mathbb{S}^1$ 的每个子弧 A ，我们有 $\lambda(\lambda_{n,k,\alpha}(A)) \geq \lambda(A)$，并且如果另外还有$\lambda(A) > \gamma$，则 *(a)* $\lambda(\lambda_{n,k,\alpha}(A)) > \varepsilon/2$, *(b)* $A \subset \lambda_{n,k,\alpha}(A)$，以及 *(c)* $\lambda_{n,k,\alpha}(B) \subset B(\lambda_{n,k,\alpha}(A)\ r + \gamma)$，对于每个非负实数 r 和每个集合 $B \subset B(A, r)$ 均成立。

证明。 (i) 根据映射 $\lambda_{n,\ k}$ 可得（见图 4 和5）：

$$d(t - \lambda_{n,k}(t)) < \frac{n+1}{2}\frac{1}{n+k-1} = \frac{n-1}{2(n+k-1)} + \frac{1}{n+k-1} = \varepsilon/2 + \gamma.$$

因此， $d(\lambda_{n,k}(r_\alpha(x))\ r_\alpha(x)) < \varepsilon/2 + \gamma$因此 $\rho(\lambda_{n,k,\alpha}(x)\ x) < \varepsilon/2 + \gamma + \alpha$ 对于每一个 $x \in \mathbb{S}^1$，这就证明了 (i)。

(ii) 任取 $\omega\colon [0,1]\to\mathbb{S}^1$ 并假设 $\lambda(\omega([0,1]))<\varepsilon$。我们考虑两种情况。令 $c:=\min\{\omega(0)\ \omega(1)\}\subset[0,1)$ 以及 $d:=\max\{\omega(0)\ \omega(1)\}\subset[0,1)$。

第一种情形是 $[c,d]\subset\omega([0,1])$。由于只有端点处的取值对曲折性至关重要，因此不失一般性，我们可以将 ω 视为一个线性映射 $\omega\colon [0,1]\to[c,d]$，并将 $\lambda_{n,\ k,\ \alpha}\circ\omega$ 与 $\lambda_{n,\ k,\ \alpha}\circ\omega$等同。应用适当的重缩放因子，根据引理 3.7 可得，ω 是 $(\lambda_{n,\ k,\ \alpha},3\gamma)$-曲折的。

第二种情况 $[c,d]\not\subset\omega([0,1])$。但是 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 限制在 $[0,1]$ 上实际上

$$\sigma^R_{-(n-1)}\sigma_n\sigma_{-(n-1)}\sigma_n\sigma_{-(n-1)}\sigma_n\dots\sigma_{-(n-1)}\sigma_n\sigma^L_{-(n-1)},$$

因此，$\lambda_{n,\ k,\ \alpha}$（由 $[0,1$ 表示的圆上的映射）也可以与此映射等同起来。但是 $\sigma^L_{-(n-1)}\sigma^R_{-(n-1)}=\sigma_{-(n-1)}$，因此我们也可以将 $\lambda_{n,\ k,\ \alpha}$ 的图看作是 $\sigma_n\sigma_{-(n-1)}$ 的循环重复。因此，第二种情形的论证与第一种情形的论证相同，只需对 $\mathbb{S}^1$ 进行适当的参数化变换即可。这证明了 ω 是 $(\lambda_{n,\ k},\ 3\gamma)$-曲折的。

(iii) 只需对比我们在给出关于 $\lambda_{n,k}$ 的类似结论，这是因为子弧 $A\subset\mathbb{S}^1$ 是连通的。在接下来的两段中，我们还将进一步说明，对于 $|\alpha|<\gamma/2$，从 $\lambda_{n,k}$ 切换到 $\lambda_{n,k,\alpha}$会如何影响我们所给出的论证。

令 $A:=[a,a']\subset\mathbb{R}$ 表示通过对子弧 $A\subset\mathbb{S}^1$ 进行提升而得到的子区间。如果 $\tilde{A}$ 满足 $\operatorname{diam}(\tilde{A})<\frac{1}{2}(\mathrm{cr}[n]+\mathrm{cr}[n-1])(n+k-1)$，那么根据观察 3.9 (1)，有 $\operatorname{diam}(\tilde{\lambda}_{n,k}(\tilde{A}))>(\mathrm{cr}[n]+\mathrm{cr}[n-1])\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}>\operatorname{diam}(\tilde{A})$。如果子区间 $\tilde{A}\subset\mathbb{R}$ 满足 $\gamma>\operatorname{diam}(\tilde{A})\geq\frac{1}{2}(\mathrm{cr}[n]+\mathrm{cr}[n-1])(n+k-1)$，那么可得 $\operatorname{diam}(\lambda_{n,k}(A))\geq\gamma>\operatorname{diam}(A)$，因为 A 至少包含一个关于像的直径的完整单调区间，该像为 γ。注意，本段中的估计与 α 无关，因此对于 λ_{n}、k、α，其结论同样适用于 r_α，因为任意α 都是一个等距变换。

现在假设 $\gamma\leq$ 直径$(A)\leq 2\gamma$。在接下来的两段中，我们将同时论证断言 (iiib) 和 (iii)。根据观察 3.13，存在 x、$y\in A$，使得 λ_{n}、$k(y)=$最大值 λ_{n}、$k(I_j)$，且 λ_{n}、$k(x)=$最小值 λ_{n}、$k(I_{j'})$，其中 $|j-j'|\leq 1$ 且 $A\cap I_j\neq\emptyset$、$A\cap I_{j'}\neq\emptyset$。注意到 A 至多包含在三个不同的相邻区间中，设它们为 $I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}$。由于直径$(A)>\gamma$，因此可得 λ_{n}、$k(A)$ 至少覆盖区间 $I_{i-2}\cup I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}\cup I_{i+2}$。这意味着 $A\subset[\lambda_{n,k}(x)\lambda_{n}$、$k(y)]\subset\lambda_{n}$、$k(A)$，特别地，直径$(\lambda_{n}$、$k(A))\geq$直径$(A)$。

现在让我们研究 $\lambda_{n,\ k,\ \alpha}(\tilde{A})$ 在 $\gamma\leq\operatorname{diam}(A\subset I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}$，其中 i。不失一般性，假设 $0\geq\alpha>-\gamma/2$。记 $[x_i,y_i]:=I_i$。

首先，假设 $d(a,x_i)<\gamma/2$。注意，我们是向左旋转的，并且直径 $I_{i-1}=\gamma$。因此，由于 $\operatorname{diam}(r_\alpha(A))=\operatorname{diam}(A)\leq 2\gamma$，可得 $r_\alpha(A)\subset I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}$。按照上一段中的论证，$\lambda_{n,k}(r_\alpha(A))$ 至少覆盖区间 $I_{i-2}\cup I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}\cup I_{i+2}$。但是，由于 $|\alpha|<\gamma/2<\gamma=$直径$(I_{i-1})$，并注意到从左侧应用 $r_{-\alpha}$ 会使值 $\lambda_{n,k}(r_{\alpha(\tilde{A})})$ 平移至多 $\gamma/2$，再次根据上一段中的论证可得，$\lambda_{n,k,\alpha}(A)=r_{-\alpha}(\lambda_{n,k}(r_\alpha(A)))$ 至少覆盖区间 $I_{i-1}\cup I_i\cup I_{i+1}$，因此 $A\subset[\lambda_{n,k,\alpha}(x)\lambda_{n,k,\alpha}(y)]\subset\lambda_{n,k,\alpha}(A)$。

现在假设 $d(a,x_i)\geq\gamma/2$ 且 $A\cap I_{i-1}\neq\emptyset$。那么我们有 $r_\alpha(A)\subset I_{i-2}\cup I_{i-1}\cup I_i$。按照上述论证，$\lambda_{n,k}(r_\alpha(A))$ 至少覆盖区间 $I_{i-2}\cup I_{i-1}\cup I_i$。不过现在，采用与 (iii) 的证明第二段中类似的论证，我们只能断言 $\lambda_{n,k,\alpha}(A)=r_{-\alpha}(\lambda_{n,k}(r_\alpha(A)))$ 至少覆盖区间 $B(I_{i-1}\cup I_i,\gamma/2)$。然而，由于 $d(a,x_i)\geq\gamma/2$，可得 $A\subset B(I_{i-1}\cup I_i,\gamma/2)$。现在假设 $d(a,x_i)\geq\gamma/2$

且 $A \cap I_{i-1} = \emptyset$。因此，我们有 $r_\alpha(A) \subset I_{i-1} \cup I_i \cup I_{i+1}$。但现在，我们可以使用与证明（iii）中第二段类似的论证。因此，$\operatorname{diam}(\lambda_{n,k,\alpha}(A)) \geq \operatorname{diam}(A)$，在两种情况下都可由关于 $\lambda_{n,k}$ 的相应结论以及 r_α 是等距变换这一事实得出。

当 $\operatorname{diam}(A) > 2\gamma$ 时，存在 $j \leq j'$ 使得 $I_j \cup \ldots \cup I_{j'} \subset A$，且 $\operatorname{diam}(I_j \cup \ldots \cup I_{j'})$ 对区间 $I_j \cup \ldots \cup I_{j'}$ 而言在包含关系下取最大值（也就是说，不能取更小的 j 或更大的 j'）。但显然，$A \subset [\min \lambda_{n,k}(I_j), \max \lambda_{n,k}(I_{j'})]$（见图 5），这就完成了对 $\lambda_{n,k}$ 的证明，进而也完成了对 $\lambda_{n,k}$ 的证明。

根据定义，我们有 $B(I_j \cup \ldots \cup I_{j'}, 3\gamma) \subset \lambda_{n,k}(I_j \cup \ldots \cup I_{j'})$。此外，$\lambda_{n,k}(I_j \cup \ldots \cup I_{j'}) \subset B(\lambda_{n,k}(r_\alpha(A)), \gamma)$，因此 $B(I_j \cup \ldots \cup I_{j'}, 2\gamma) \subset \lambda_{n,k}(r_\alpha(A))$。最后，我们有

$$\tilde{A} \subset B(r_{-\alpha}(\tilde{I}_j \cup \ldots \cup \tilde{I}_{j'}), 2\gamma) \subset r_{-\alpha}(\tilde{\lambda}_{n,k}(r_\alpha(\tilde{A}))) = \tilde{\lambda}_{n,k,\alpha}(\tilde{A}).$$

此外，我们再次得到 $\operatorname{diam}(\lambda_{n,k,\alpha}(A)) \geq \operatorname{diam}(A)$，这由关于 $\lambda_{n,k}$ 的类似结论以及 r_α 是等距变换这一事实推出。

(iiia) 如果注意到 $\varepsilon/2 = \frac{1}{2^{n-1}(n+k-1)}$ 以及 r_α 是一个等距变换这一事实，那么本部分便可由上~~一段中的~~论证得出。具体而言，$|\tilde{\lambda}_{n,k,\alpha}(x) - \tilde{\lambda}_{n,k,\alpha}(y)| \geq \frac{n+1}{n+k-1} > \varepsilon/2$ 其中，x 和 y 与上一段中的定义相同。

(iiic) 首先注意，如果该结论对 $\lambda_{n,k}$ 成立，那么对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，它也对 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 成立。具体而言，在区间 I_j 中，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，$\lambda_{n,k}$ 的第一个极大值彼此相距 γ，且它恰好比 $\lambda_{n,k}$ 的极大值大 γ（I_{j-1}）。此外，若记 $\beta := \gamma - \operatorname{cr}_{[n]+\operatorname{cr}_{[n-1]}}$，即 β 是单调性的最小区间的长度，则对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，都有 $\lambda_{n,k}(x_i) = \max \lambda_{n,k}([x_i, x_{i+1} - \beta])$，其中 x_i 与观察 3.13 中的定义相同。因此，对于满足 $\gamma \leq \operatorname{diam}(A) < 2\gamma$ 的部分，结论由观察 3.13 得出。

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为一个满足 $\operatorname{diam}(A) \geq 2\gamma$ 的区间，记 $A := [a, b]$。那么存在一个极大 j，使得 $I_j \subset A$。选取一个 $r \in \mathbb{R}$，并固定任意一个 $x \in [b, b + r]$。然后，根据图 λ_n 的构造块的重复结构，k（见图 5），如果我们取满足 $M\gamma < r + \gamma$ 的最大非负整数 M，则有 $y := x - M\gamma \in [a, b]$ 且 $\lambda_{n,k}(x) \leq \lambda_{n,k}(y) + M\gamma$。但这表明 $\lambda_{n,k}([a, b+r]) \subset B(\lambda_{n,k}([a, b]), r+\gamma)$。因此，我们得到了关于提升所需的结论，通过投影到 $\mathbb{S}^1$，对于 $\lambda_{n,k}$ 也同样成立。□

定义 3.16. 分段线性圆映射 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 称为容许的，如果对于每个使得 $\tilde{f}'(t)$ 存在且 f 为 leo 的 $t \in \mathbb{S}^1$，都有 $|\tilde{f}'(t)| \geq 4$。

以下引理的一个更一般版本已在引理4.3中完整证明。

引理 3.17. 设 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个容许的映射。设 η 和 δ 是两个正实数。那么存在一个容许的映射 $F\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 以及一个正整数 n，使得任意 $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 都是 (F^n, δ)-曲折的，且 $\rho(F, f) < \eta$。此外，如果 $f \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，则也可以将这样的 F 选为属于 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。

以下是对 [24] 中引理 3.2 在 $\mathbb{S}^1$ 情形下的重新表述。

引理 3.18 ([24, 引理 3.2])**.** 对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 *leo* 映射 $f \in C(\mathbb{S}^1)$，都存在 $F \in C(\mathbb{S}^1)$，使得 F 是容许的，并且 $\rho(F, f) < \varepsilon$。

我们需要对引理 3.18稍作调整，以适用于保勒贝格测度的圆映射这一情形。借助以下一条有用的结果即可得到这一调整。

以下引理的证明遵循 [6] 中命题 12 的证明思路，该命题是针对圆映射的一个代表元给出的，同时注意到保勒贝格测度的圆映射是满射。

我们用 PLM$^{\lambda(\mathrm{leo})}$ 表示满足以下附加条件的圆的分段线性 leo 映射集合：马尔可夫性质，即存在一个划分 $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$，使得对于每个 i，映射 $f_{[a_i,a_{i+1}]}$ 都是单调的，并且存在 $s < t$，使得 $f([a_i, a_{i+1}]) = [a_s, a_t]$。

引理 3.19。集合PLM$^{\lambda(\mathrm{leo})}$ 在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中稠密。

在下文中，我们还需要考虑保持勒贝格测度的映射的扰动，这与 [6] 中的情况类似。

对于一条弧 $A \subset \mathbb{S}^1$，设 $\{A_i \subset \mathbb{S}^1$ 是 A 的一个分划，其中 m 为奇数，且该分划由满足 $\cup_{i=1}^m A_i = A$ 且当 $i \neq j$ 时 $\mathrm{int}(A_i) \cap \mathrm{int}(A_j) = \emptyset$ 的有限个弧组成。固定 $f \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，一条弧 $A \in \mathbb{S}^1$ 以及 A 的一个分划。令 A^c 表示 $\mathbb{S}^1$ 中 A 的补集。映射 $h = h_{A,\{A_i\}}$ 是相对于 A 和分划 $\{A_i\}$ 的 f 的一个 m 重窗口扰动，如果

- $h|_{A^c} = f|_{A^c}$
- 对于每个 $1 \leq i \leq m$，映射 $h|_{A_i}$ 是 $f|_A$ 的线性缩放副本，且每隔一个索引 i 的方向相反，而 $h|_{A_1}$ 的方向与 $f|_A$ 相同。

Th图示直观地说明了这个定义的要点。 ure 6.
如果所有 A_i 的长度都相同，我们就称 m-重 f 正则窗口扰动。

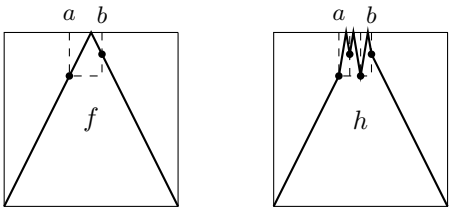

图 6. 对于左图中所示的 $f \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 和 $a, b \in I$，我们在右图中展示了 f 的常规三重窗口扰动。

<escape>有关窗口扰动的更多细节，请参阅 [6]。</escape>

引理 3.20. 对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 *leo* 映射 $f \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，都存在 $F \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，使得 F 是容许的，并且 $\rho(F, f) < \varepsilon$。

证明。根据引理 3.19，分段线性映射和 Markov leo 映射在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中稠密，因此我们从这样一个映射 g 开始，其中 $\rho(g, f) < \varepsilon/2$。我们选择一个 Markov 划分 $\mathcal{M}$：
$= \{a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} \subset \mathbb{S}^1$，其中 $0 = \bar{a}_{n+1} = \bar{a}_0 < \bar{a}_1 < \ldots < \bar{a}_n$ 对应于点 $\{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}\} \subset [0, 1)$，这些点与来自 $\mathcal{M}$ 的点相关联，并选择一个代表元 G：$[0, 1) \to [0, 1)$，它与 g 相关联。对于 leo 圆映射，周期点是稠密的，因此将周期轨道中的点也作为划分中的点，我们还可以要求，对于任意固定的 $\delta > 0$，都有 $|a_{i+1} - a_i| < \delta$。特别地，我们有 g 在每条弧 $A \subset \mathbb{S}^1$ 上都是单调的，其端点为 a_i 和 a_{i+1}，且 $\mathrm{diam}(g(A)) < \varepsilon/2$，并且 $g(A) = A'$，其中 A' 的端点为 a_k 和 $a_{k'}$，这里的指标为某些 $k < k'$。现在，按照 [6] 的引理 5 中的构造，我们通过将每个 $g|_A$ 替换为其正则的 m 重窗口扰动，构造一个新的映射 F，其中 m 为奇数且充分大。通过这种方式，F 是容许的，且满足 $\rho(F, g) \leq \mathrm{diam}(g(A)) < \varepsilon/2$。窗口扰动在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 下是不变的，因此 $F \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$。显然，还有 $g(A) = F(A) = B$。因此，

对于每个 i，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $F^n(A) = \mathbb{S}^1$。但是，如果我们固定任意一个开集$U \subset \mathbb{S}^1$，由于 F 的单调区间上的斜率至少为 4，因此存在$M \in \mathbb{N}$，使得 $F^M($ U) 包含三个连续的单调区间，从而 $F^{M+1}(U) \supset A$。□

以下引理是 [24] 中引理 2.4 在 $\mathbb{S}^1$ 特殊情形下的重述。

引理 3.21 ([29, 命题 2])。设 $f, F \in C(\mathbb{S}^1)$ 为两个映射，使得 $\rho(f, F) < \varepsilon$。如果 f 是 δ-曲折的，那么 F 是 $(\delta + 2\varepsilon)$-曲折的。

现在我们可以证明本节的主定理了。

定理 1.1 的证明。对于任意 $k \geq 1$，令集合 $A_k \subset C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 包含于映射集合 $\mathcal{A}$ 中，使得对于每个 $f \in \mathcal{A}$，都有 f^n 对某个 n 以及某个充分小的 $\delta > 0$ 是（$1/k - \delta$）-曲折的。首先注意到，A_k 在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中是稠密的。具体而言，根据引理 3.19，分段线性 leo Markov 映射在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中是稠密的。如果我们从这样一个映射 g 出发，那么首先应用引理 3.20，接着应用引理 3.17，通过任意小的扰动，将 g 修改为映射 $f \in A_k$。但是，如果 $f \in A_k$ 和 n、δ 是 A_k 定义中的常数，那么根据引理 3.21，我们有 $B(f, \delta/4) \subset A_k$。这表明 A_k 包含一个开稠密集。但是集合 云鼎

$$\mathcal{S} := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

是稠密的 G_δ，并且显然每个元素 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$，因此 $\mathcal{T}$ 满足定理的结论。□

4. 素端旋转数连续变化的伪圆族

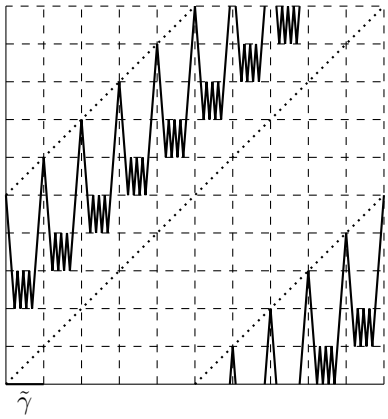

图 7. 圆映射 f 的一个代表元，该映射在第 4 节开头定义。此映射是构造伪圆吸引子参数化族的起点。

首先，我们证明一个辅助引理，稍后将在本节中用到。

引理 4.1。固定一个 $\varepsilon > 0$。每个满足 直径$(\omega([0,1])) < \varepsilon$ 的 $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 都是(f, γ)-曲折的，其中 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 当且仅当对每个 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$，每个 ω 都是$(r_\alpha \circ f \circ r_{\alpha'}, \gamma)$-曲折的。

证明。注意到 $\mathrm{diam}(\omega([0,1])) = \mathrm{diam}(r_{\alpha'}(\omega([0,1])))$，因此，只要 ω 是 (f,γ)-曲折的，就可以推出 ω 也是 $(f\circ r_{\alpha'},\gamma)$-曲折的，进而也是 $(r_\alpha\circ f\circ r_{\alpha'},\gamma)$-曲折的，因为 r_α 是一个等距变换。反向结论可通过用 $r_\alpha\circ f\circ r_{\alpha'}$ 替换 f，并使用逆旋转 $r_{-\alpha}$、$r_{-\alpha'}$ 得到。□

令 $f\colon \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是一个度为一的圆映射，如图 7 所示（我们用 $[0,1)$）来参数化圆），并令 $\{f_\beta \colon = r_\beta\circ f\}_{\beta\in\mathbb{R}}$。令 $\tilde{\gamma}\colon = 1/5$；它是函数 f 的图像中“一个区块”的直径。令 $\tilde{s}\colon = 13$ 表示 f（在其有定义处）的常斜率的绝对值；它与 f_β 的斜率相同。

引理 4.2。映射 f_β 对每个 $\beta\in\mathbb{R}$ 都是 *leo*。此外，对每个 $\beta\in\mathbb{R}$，f_β 都是容许的。

证明。设 $J\subset\mathbb{S}^1$ 是一条开弧，满足 $\mathrm{diam}(J) < \tilde{\gamma}$。由于 $\tilde{s}=13$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $\mathrm{diam}(f_\beta^N(J))$ 覆盖 f_β 的三个临界点。但这样一来，$\mathrm{diam}(f_\beta^{N+1}(J)) \geq \tilde{\gamma}$，且 $\mathrm{diam}(f_\beta^{N+2}(J)) \geq 3\tilde{\gamma}$。归纳下去，对每个$i\geq 2$，$\mathrm{diam}(f_\beta^{N+i}(J)) \geq \min\{1,(i+2)\tilde{\gamma}\}$。由于 $\tilde{\gamma}=1/10$，因此可知，在最坏情况下 $\mathrm{diam}(f_\beta^{N+8}(J)) = 1$（我们得到 8，因为 $f_\beta^{N+1}(J)$ 至少覆盖 $3\tilde{\gamma}$（见图 7），因此归纳地还需要至少 7 次迭代才能覆盖整个 $\mathbb{S}^1$）。由此便证明了，对所有 $\beta\in\mathbb{R}$，f_β 都是 leo。此外，另一个结论由以下附加事实推出：对所有 β，$\tilde{s}>4$。□

以下引理的证明采用了[29] 中引理证明的策略，但在若干方面采用了更一般的设定。首先，我们使用的是若干映射的复合 F_β，而不是 f；其次，我们使用的也是若干扰动的复合$\lambda_{n_1,\,k_1,\,\alpha_1}\circ\ldots\circ\lambda_{n_m,\,k_m,\,\alpha_m}$，而不是单个扰动 g。此外，我们证明的是适用于 $\mathbb{S}^1$ 而非单位区间 $[0,1]$的以下引理。证明以下引理的另一种方法是采用[24], 中的一般策略；然而，他们的构造要求根据构造中的映射使用不同的常数，正如我们在后续设定中所需的那样，因此我们的扰动$\lambda_{n,\,k}$不符合他们的要求。

引理 *4.3.* 固定奇正整数序列 $n_1,\ldots,n_m\geq 1$、正整数 $k_1,\ldots,k_m\geq 1$ 以及 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in(-1/2,1/2)$，使得对所有 $i\in\{1,\ldots,m\}$ 均有 $|\alpha_i| < 2^{-1}(k_i+n_i-1)^{-1}$；并令 η 和 δ 为两个正实数，它们对整个保持勒贝格测度的映射参数化族 $\{F_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 均固定，其中$F_\beta := f_\beta\circ\lambda_{n_1,k_1,\alpha_1}\circ\ldots\circ\lambda_{n_m,k_m,\alpha_m}$。那么存在偶数 $k_{m+1}\geq 1$、奇数 $n_{m+1}\geq 1$和 $N\geq 1$，使得对每个$|\alpha| \leq 2^{-1}(k_{m+1}+n_{m+1}-1)^{-1}$及每个 $\beta\in\mathbb{R}$，若记$G_{\beta,\alpha,m+1} := F_\beta\circ\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}$，则每个 $\omega\colon [0,1]\to\mathbb{S}^1$ 都是$(G_{\beta,\alpha,m+1}^N,\delta)$-曲折的，且 $\rho(G_{\beta,\alpha,m+1},F_\beta) < \eta$。此外，每个$G_{\beta,\alpha,m+1}\in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$都是容许的。

证明。如我们已经熟悉的，令 $f\colon\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 为一个容许的映射，且$\tilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为其提升。首先注意，对于每个 β，$\lambda_{n_1,k_1,\alpha_1}\circ\ldots\circ\lambda_{n_m,k_m,\alpha_m}$ 在 F_β 的公式中保持不变。

由于 f_β 以及所有映射 $\lambda_{n,k,\alpha}$ 都是分段仿射且保持勒贝格测度的，因此映射 F_β 也是分段仿射且保持勒贝格测度的。此外，由于对于每个 β，f_β 的临界点与 f 的临界点相同，因此存在一个正实数 ι，使得如果 $a<b\in\mathbb{R}$ 满足 $b-a<\iota$，那么˜存在一点 $c\in(a,b)$，使得 F_β 在两个区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$上都是线性的。由于对于 $t\in(a,c)$，$\lrcorner F'_\beta(t)\,|\geq 4$，因此成立。

$$\lambda(\tilde{F}_\beta([a,b])) \geq 2(b-a)\ \forall a<b\in\mathbb{R}\ \text{such that}\ b-a<\iota. \tag{8}$$

此外，同样由于 F_β 是分段仿射的，且 r_β 在与 f 复合时不会改变斜率˜，因此存在 $s\in\mathbb{R}$，使得 $|F'_\beta(t)|<s$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 都成立，其中

$|F_\beta(t)|$ 存在（实际上，由于 F_β 的复合中的所有函数的斜率均为常数，因此 $|F'_\beta(t)|$ 就是该复合中相应函数的斜率之积）。因此

$$\lambda(F_\beta(C)) \leq s\lambda(C) \text{ for every arc } C \subset \mathbb{S}^1. \tag{9}$$

现在让我们证明以下命题，特别地，该命题表明，对于每个 β， F_β 都是 leo。

断言 4.4。设 $\xi > 0$。存在一个整数 $N \geq 0$，使得对于每条满足 $\lambda(J) > \xi$ 的弧 $J \subset \mathbb{S}^1$ 以及所有 $\beta \in \mathbb{R}$，都有 $F^N_\beta(J) = \mathbb{S}^1$。

断言 4.4 的证明。取任意 M 使得 $4^M\xi > 1$。由于包含少于 2 个 f_β 临界点的弧的直径至少扩大 4 倍，并且根据引理 3.15 (iii)，$\lambda_{n,k,\alpha}$不会缩小区间，因此存在 $j < M$，使得 $F^j_\beta(J)$包含 f_β的两个临界点。根据 f_β 的定义，并应用引理 4.2 的证明中的论证，我们有 $F^{j+8}_\beta(J) = \mathbb{S}^1$；因此，我们可以设定$N = M + 8$。□

为了应用引理 3.15，固定 $\varepsilon_i = \frac{n_i-1}{n_i+k_i-1}$ 和 $\gamma_i = \frac{1}{n_i+k_i-1}$，使其对每个 $i \geq 1$都成立。我们选取足够大的奇数 $n_{m+1} \geq 7$ 和偶数 $k_{m+1} \geq 1$，使得 $\varepsilon_{m+1} < \eta/s$。由断言 4.4 可知存在 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $\lambda(A) > \varepsilon_{m+1}/4$ 对某个弧 $A \subset \mathbb{S}^1$成立，则$F^N_\beta(A) = \mathbb{S}^1$ 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$ 都成立。注意，若 k_{m+1} 选得足够大，则有

$$0 < \gamma_{m+1} < \min(\iota, s^{-N}, \varepsilon_{m+1}/4, \delta s^{-N}/8).$$

由（8）可得：

$$\lambda(F_\beta(A)) \geq 2\min\{\lambda(A), \gamma_{m+1}\} \text{ for any subarc } A \subset \mathbb{S}^1. \tag{10}$$

我们定义 $G_{\beta,\alpha,m+1} = F_\beta \circ \lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，并令 $\tilde{G}_{\beta,\alpha,m+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 的一个提升。再次注意，$G_{\beta,\alpha,m+1}$ 是一个分段仿射映射。由于对于除有限个自变量以外的所有自变量，$|f'_\beta(t)| \geq 4$ 均成立，且它与保持勒贝格测度的分段线性映射复合，因此可得，对于每个使 $G'_{\beta,\alpha,m+1}(t)$ 存在的 $t \in \mathbb{R}$，均有 $|G'_{\beta,\alpha,m+1}(t)| \geq 4$。由于 $\gamma_{m+1} < \eta$ 且 $|\alpha| < \gamma_{m+1}/2$，由引理 3.15(iiib) 可知，若对于某个弧 $A \subset \mathbb{S}^1$，有 $\lambda(A) \geq \eta$，则 $A \subset \lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(A)$，从而 $F_\beta(A) \subset G_{\beta,\alpha,m+1}(A)$。

此外，由于 $|\tilde{G}_{\beta,\alpha,m+1}(t) - t| < \tilde{\varepsilon}_{m+1}/2 + \gamma_{m+1} + \alpha < \varepsilon_{m+1}/2 + 2\gamma_{m+1} < \varepsilon_{m+1} < \eta/s$ 和 $|F_\beta(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(t)) - F_\beta(t)| \leq s|\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(t) - t|$，我们得到$|G_{\beta,\alpha,m+1}(t) - F_\beta(t)| < \eta$对每个 $t \in \mathbb{R}$均成立。这意味着 $\rho(F_\beta, G_{\beta,\alpha,m+1}) < \eta$。

为了证明 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 是 leo，我们首先证明，对于每个满足 $\lambda(C) > \varepsilon_{m+1}/4$ 的子弧 $C \subset \mathbb{S}^1$，都有

$$G^{N-1}_{\beta,\alpha,m+1}(f_\beta(C)) = \mathbb{S}^1 \tag{11}$$

其中，N 由命题4.4 给出，且 $\xi = \varepsilon_{m+1}/4$。

根据断言 4.4，由于 $f^N_\beta(C) = \mathbb{S}^1$和 $\gamma_{m+1} \leq s^{-N}$，由 (9) 可知，对于每个 $j \in \mathbb{N}$ $\lambda(f^j_\beta(C)) \geq \gamma_{m+1}$。利用引理 3.15 (iiib) 进行归纳，我们得到$f^j_\beta(C) \subset G^{j-1}_{\beta,\alpha,m+1}(f_\beta(C))$，其中 $j \in \{1, \ldots, N\}$，这就证明了条件 (11)。

设 $A \subset \mathbb{S}^1$ 为一条弧，且满足 $\lambda(A) > \gamma_{m+1}$。由引理3.15 (iia)可知，存在 $c \in \text{int}(A)$ 以及弧 A_1、$A_2 \subset A$，使得 $A = A_1 \cup A_2$ 且 $A_1 \cap A_2 = \{c\}$，其中 $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(A_1)) > \varepsilon_{m+1}/4$，并且 $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(A_2)) > \varepsilon_{m+1}/4$。实际上，引理3.15 (iia)给出的结论是 $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(A)) > \varepsilon_{m+1}/2$，由达布性质可进一步得到所需条件。但随后我们有这样的结论：

以下:
(12)

if $\lambda(A) > \gamma_{m+1}$ then there exists $c \in \mathrm{int}(A)$ and arcs $A_1, A_2 \subset A$ such that $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \{c\}$ for which $G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A_1) = \mathbb{S}^1$ and $G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A_2) = \mathbb{S}^1$.

特别是 $G^N_{\beta,\ \alpha,\ m+1}(A) = \mathbb{S}^1$。

为完成证明 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 是 leo，我们需要证明任意弧 $A \subset \mathbb{S}^1$ 经过 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 的某次迭代映射后都会到达 $\mathbb{S}^1$。不过，由 (8)、引理 3.15(iii) 以及 F_β 保持勒贝格测度这一事实可知，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\lambda(G^m_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \geq \gamma_{m+1}$。利用 (12)，我们确实得到 $G^{m+N}_{\beta\ \alpha}$，$_{,m+1}(A) = \mathbb{S}^1$。此外，由于复合映射 $\tilde{}$ 中 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 的所有函数的斜率都是常数，因此 $G'_{\beta,\alpha,m+1}$ 在其有定义处的绝对值就是复合中相应函数的斜率（在其有定义处）之积；f_β 的斜率绝对值为 13，而对于 $n \geq 7$ 和 $k \geq 1$，$\lambda_{n,k,\alpha}\tilde{}$ 的斜率绝对值也严格大于 1，因此对于 $\tilde{}$，所有满足 $G'_{\beta,\alpha,m+1}$ 有定义的 $t \in \mathbb{R}$，都有 $|G'_{\beta,\alpha,m+1}(t)| > 4$。这表明，对于每个 $\beta \in \mathbb{R}$，映射 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 都是容许的。显然，每个 $G_{\beta,\alpha,m+1}$ 也是保持勒贝格测度的次数为一的圆映射，因为它们是保持勒贝格测度的次数为一的圆映射的复合。

剩下需要证明的是关于 δ-曲折性的陈述。首先，我们有一个将在证明 δ-曲折性时发挥重要作用的断言。

断言 4.5. 设 $A \subset \mathbb{S}^1$ 为一条子弧，使得 $\lambda(A) \geq \gamma_{m+1}$, $B \subset \mathbb{S}^1$，并设 $r \in \mathbb{R}$满足 $B \subset B(A, r)$。对每个 $j \in \mathbb{N}$, $G^j_{\beta,\alpha,m+1}(B) \subset B(G^j_{\beta,\alpha,m+1}(A)\ q)$，其中 $q = s^j(r + 2\gamma_{m+1})$。

断言 4.5 的证明。利用 (10) 和引理 3.15 (iii)，我们得到 $\lambda(G^i_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \geq \gamma_{m+1}$，对每个 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。现在令 $q_0 = r$, $q_{i+1} = s(q_i + \gamma_{m+1})$，其中 $i \in \mathbb{N}_0$。反复利用引理 3.15 (iiic) 和 (9)，可得 $G^j_{\beta,\alpha,m+1}(B) \subset B(G^j_{\beta,\alpha,m+1}(A)\ q_j)$。注意到 $q_j = s^j r + \gamma_{m+1}\frac{s^{j+1}-1}{s-1} < s^j(r + \frac{s}{s-1}\gamma_{m+1}) < s^j(r + 2\gamma_{m+1})$，断言即得证。□

取 $\omega\colon\ [0,1] \to \mathbb{S}^1$；我们将证明它是 $(G^N_{\beta,\alpha,m+1}, \delta)$-曲折的。令 $A = \omega([0,1])$ 并

$$[a,b] := [G^N_{\beta,\alpha,m+1}(0), G^N_{\beta,\alpha,m+1}(1)] \subset G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A).$$

首先，显然可以假设 $b - a > 2\delta$。为了证明 ω 是 $(G^N_{\beta,\alpha,m+1}, \delta)$-曲折的，只需证明:

(13)
$\exists$ 两个不相交的子弧 $A_1, A_2 \subset \mathbb{S}^1$ 使得 $[a+\delta, b-\delta] \subset G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A_1) \cap G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A_2)$。

对于 $\lambda(A)$，(12) 的表述直接蕴含 (13)；因此我们可以假设 $\lambda(A) < \gamma_{m+1}$。首先注意到 $\lambda(G^N_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \geq 2\delta > \gamma_{m+1}$。令 $M \in \mathbb{N}$ 为满足 $\lambda(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A)) < \gamma_{m+1}$ 的最大自然数。令 $[c,d] := \lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A))$。由于这条弧不覆盖整个圆，我们可以假设在 $[c,d]$ 上 $\mathbb{S}^1$ 的自然序满足 $c < d$。

情形 I. $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A))) > 4\gamma_{m+1}$.

由于 $\lambda(G^M_{\beta,\ \alpha,\ m+1}(A)) < \gamma_{m+1}$，引理 3.15 (i) 得出

$$\begin{aligned} d - c &< \lambda(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A) + 2\rho(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}, \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) \\ &< \varepsilon_{m+1} + 3\gamma_{m+1} + 2\alpha \leq \varepsilon_{m+1} + 4\gamma_{m+1}. \end{aligned}$$

存在点 $c_1 < d_1 \in [c,d]$，使得 $4\gamma_{m+1} < d_1 - c_1 < \varepsilon_{m+1}$ 且 $[c,d] \subset B([c_1,d_1], 4\gamma_{m+1})$。

令 $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ 为任意一个满足 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}([a_1,b_1]) = [c_1,d_1]$ 的区间。由引理 3.15 (ii) 可知，任意映射 $\omega\colon [0,1] \to [a_1,b_1]$ 都是 $(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}, 3\gamma_{m+1})$-曲折的，因此存在两个不相交的子弧 $M_1, M_2 \subset G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A)$，使得 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_1) = [c_1, d_1 - 3\gamma_{m+1}]$ 且 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_2) = [c_1 + 3\gamma_{m+1}, d_1]$。

存在两个不相交的子弧 $A_1, A_2 \subset A$，使得 $G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A_1) = M_1$ 且 $G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A_2) = M_2$。注意到

$$\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_1), 7\gamma_{m+1})$$

以及

$$\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_2)), 7\gamma_{m+1})$$

由（9）可得 $G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A) \subset B(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_1)\ 7s\gamma_{m+1})$，以及 $G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A) \subset B(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_2)\ 7s\gamma_{m+1})$。

方程（10）表明 $\lambda(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_1)) > \gamma_{m+1}$, $\lambda(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_2)) > \gamma_{m+1}$ 根据断言 4.5 可得

$$G^{M+N}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A) = G^{N-1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A)) \subset B(G^{N-1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(M_1)\ s^{N-1}(7s\gamma_{m+1}+2\gamma_{m+1}))$$

以及

$$G^{M+N}_{\beta,\alpha,m+1}(A) = G^{N-1}_{\beta,\alpha,m+1}(G^{M+1}_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \subset B(G^{N-1}_{\beta,\alpha,m+1}(M_2), s^{N-1}(7s\gamma_{m+1}+2\gamma_{m+1})).$$

因为 $s^{N-1}(7s\gamma_{m+1} + 2\gamma_{m+1}) < 8\gamma_{m+1}s^N < \delta$，所以可得。

$$[a+\delta, b-\delta] \subset G^{N-1}_{\beta,\alpha,m+1}(M_1) \cap G^{N-1}_{\beta,\alpha,m+1}(M_2) = G^{N+M}_{\beta,\alpha,m+1}(A_1) \cap G^{N+M}_{\beta,\alpha,m+1}(A_2).$$

情形 II. $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A))) \le 4\gamma_{m+1}$。

利用 (9) 和 M 的选取，我们有 $\gamma_{m+1} \le \lambda(G^M_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \le 4s\gamma_{m+1}$。由引理 3.15 (i) 和 (iiia)，我们得到 $\varepsilon_{m+1}/2 < d - c < \varepsilon_{m+1} + \gamma_{m+1}(4s+3)$。存在点 $c_1 < d_1 \in [c,d]$，使得 $4\gamma_{m+1} < d_1 - c_1 < \varepsilon_{m+1}$ 且 $[c,d] \subset B([c_1,d_1], \gamma_{m+1}(4s+3))$。引理 3.15 (ii) 表明，映射 $\omega\colon [0,1] \to [c_1,d_1]$ 是 $(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}, 3\gamma_{m+1})$-曲折的。因此，存在两个不相交的子弧 $M_1, M_2 \subset G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A)$，使得 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_1) = [c_1, d_1 - 3\gamma_{m+1}]$ 且 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_2) = [c_1 + 3\gamma_{m+1}, d_1]$。存在两个不相交的子弧 $A_1, A_2 \subset A$，使得 $G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A_1) = M_1$ 且 $G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A_2) = M_2$。

由于 $s \ge 4$，我们得到 $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A)) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_1)\ \gamma_{m+1}(4s+3)+3\gamma_{m+1}) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_1)\ 5s\gamma_{m+1})$，以及 $\lambda(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(G^{M+1}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A)) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_2)\ \gamma_{m+1}(4s+3) + 3\gamma_{m+1}) \subset B(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(M_2)\ 5s\gamma_{m+1})$，并且由 (9) 可知 $G^{M+2}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A) \subset B(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_1)\ 5s^2\gamma_{m+1})$，以及 $G^{M+2}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A) \subset B(G_{\beta,\alpha,m+1}(M_2)\ 5s^2\gamma_{m+1})$。由方程 (10) 得 $\lambda(G_{\beta,\ \alpha,\ m+1}(M_1))\ \lambda(G_{\beta,\ \alpha,\ m+1}(M_2)) > \gamma_{m+1}$。由断言 4.5 可知

$$G^{N+M}_{\beta,\alpha,m+1}(A) = G^{N-2}_{\beta,\alpha,m+1}(G^{M+2}_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \subset B(G^{N-2}_{\beta,\alpha,m+1}(M_1), s^{N-2}(5s^2\gamma_{m+1}+2\gamma_{m+1})),$$

and

$$G^{N+M}_{\beta,\alpha,m+1}(A) = G^{N-2}_{\beta,\alpha,m+1}(G^{M+2}_{\beta,\alpha,m+1}(A)) \subset B(G^{N-2}_{\beta,\alpha,m+1}(M_2), s^{N-2}(5s^2\gamma_{m+1}+2\gamma_{m+1})).$$

Because $s^{N-2}(5s^2\gamma_{m+1} + 2\gamma_{m+1}) < 6\gamma_{m+1}s^N < \delta$ it follows that

<escape>$[a+\delta, b-\delta] \subset G^{N-2}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(M_1) \cap G^{N-2}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(M_2) = G^{N+M}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A_1) \cap G^{N+M}_{\beta\,\alpha\,,,m+1}(A_2).$</escape>

□

引理 4.6。对于每个 α，$\beta \in \mathbb{R}$，可得 $G_{\beta,\,\alpha,\,m+1}(t) + 1/2 = G_{\beta,\,\alpha,\,m+1}(t+1/2)$对每个 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。

证明。首先注意，由于 f_β 的重复结构，对每个 $t \in \mathbb{S}^1$ 和每个 $\beta \in \mathbb{R}$，都有 $f_\beta(t) + 1/2 = f_\beta(t+1/2)$。此外，由于映射 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}$ 的重复块结构，若 n_{m+1} 为奇数且 k_{m+1} 为偶数，则根据观察 3.14，对每个 $t \in \mathbb{S}^1$ 也有 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(t) + 1/2 = \lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha}(t+1/2)$。因此，首先可得，对每个 $t \in \mathbb{S}^1$ 和每个 $\beta \in \mathbb{R}$，都有 $F_\beta(t) + 1/2 = F_\beta(t+1/2)$，进而对每个 $t \in \mathbb{S}^1$、每个 $\beta \in \mathbb{R}$ 以及每个 $|\alpha| < \frac{1}{2(n_{m+1}+k_{m+1}-1)}$，也有 $G_{\beta,\alpha,m+1}(t) + 1/2 = G_{\beta,\alpha,m+1}(t+1/2)$。但随后，对 $\tilde{}$ 提升也可得相同结论，即对每个 $t \in \mathbb{R}$ 和每个 $|\alpha| < \frac{1}{2(n_{m+1}+k_{m+1}-1)}$，都有 $G_{\beta,\alpha,m+1}(t) + 1/2 = G_{\beta,\alpha,m+1}(t+1/2)$。□

引理 *4.7.* 对于所有 $i \in \{1,\dots,m\}$ 和任意的 $\beta \in \mathbb{R}$，固定整数 n_i、k_i 和 $\tilde{}$，实数 α_i 以及映射 F_β。设 $x \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $y < x$，均有 $F_\beta(x) > F_\beta(y)$。设 n_{m+1} 和 k_{m+1} 由引理 *4.3* 针对某个 η 和 δ 给出。则存在 $|\alpha_{m+1}| \le \frac{1}{2(n_{m+1}+k_{m+1}-1)}$ 和 $p_{m+1} \in \mathbb{R}$，使得 $\tilde{G}_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(p_{m+1}) > G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(q)$ 对所有 $q < p_{m+1}$ 和 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}(p_{m+1}) = x$ 均成立。特别地，$|p_{m+1} - x| \le \frac{n_{m+1}}{n_{m+1}+k_{m+1}-1}$。

证明。根据观察 3.13，存在 $x_j, x_{j+1} \in \mathbb{R}$ 使得 $|\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},0}(x_j) - \tilde{\lambda}_{n_{m+1},k_{m+1},0}(x_{j+1})| = \frac{1}{n_{m+1}+k_{m+1}-1}$ 且 $\tilde{\lambda}_{n_{m+1},k_{m+1},0}(x_j) \le x \le \tilde{\lambda}_{n_{m+1},k_{m+1},0}(x_{j+1})$。于是存在 $|\alpha_{m+1}| \le \frac{1}{2(n_{m+1}+k_{m+1}-1)} = \gamma_{m+1}/2$ 使得 $\tilde{\lambda}_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}(r_{-\alpha_{m+1}}(x_j)) = x$ 或 $\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}(r_{-\alpha_{m+1}}(x_{j+1})) = x$。根据具体情形，令 $p_{m+1} = r_{-\alpha_{m+1}}(x_j)$ 或 $p_{m+1} = r_{-\alpha_{m+1}}(x_{j+1})$。根据 x_j（分别地，x_{j+1}）的定义，我们有 $\tilde{}$：对于每个 $q < p_{m+1}$，$\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}(q) < \lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}(p_{m+1}) = x$，因此与 F_β 复合可得，对于所有 $q < p_{m+1}$，$G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(p_{m+1}) > G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(q)$。

根据引理 3.15(i)，证明得以完成，因为

$$|p_{m+1} - x| \le \rho(\tilde{\lambda}_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) < \varepsilon_{m+1}/2 + \gamma_{m+1} + \alpha_{m+1} \le \frac{n_{m+1}}{n_{m+1}+k_{m+1}-1}.$$

□

定义 $G_\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 通过 $G_\beta := \lim_{m\to\infty} G_{\beta,\,\alpha_{m+1},\,m+1}$，其中 α_{m+1} 由引理 4.7 递归给出，并取点 p_m 使得 $\lambda_{n_{m+1},\,k_{m+1},\,\alpha_{m+1}}(p_{m+1}) = p_m$，且 $f_\beta(p_0)$ 满足：对每个 $x < p_0$，$f_\beta(x) < f_\beta(p_0)$。

注意，在引理 4.7 中，我们可以自由指定 η 和 δ。特别地，我们可以令 η 足够小，使得对所有 $q < p_m - \frac{1}{2(m+1)}$，都有 $|F_\beta(p_m) - F_\beta(q)| > 4\eta$。由于我们还可以要求 $\rho(\lambda_{n_{m+1},k_{m+1},\alpha_{m+1}}, \mathrm{id}) < \frac{1}{4(m+1)}$，因此对所有 $q < p_{m+1} - \frac{1}{m+1}$，均有$|G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(p_{m+1}) - G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}(q)| > 3\eta$。将与$G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}$的构造相关联的常数记为$\eta_{m+1}$。

引理 4.8. 极限映射 G_β 定义良好，并且对每个 $\beta \in \mathbb{R}$，$\lim\leftarrow(\mathbb{S}^1, G_\beta)$ 都是伪圆。此外，以下结论成立：

(1) $\tilde{G}_\beta(t+1/2) = G_\beta(t) + 1/2$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。

(2) 存在 $p \in \mathbb{R}$，使得对所有 $q < p$ 及所有 $\beta \in \mathbb{R}$，$G_\beta(p) \ge G_\beta(q)$ 均成立。此外，如果序列 η_m 足够快地收敛到零，那么对所有 $q < p$ 及所有 $\beta \in \mathbb{R}$，$G_\beta(p) > G_\beta(q)$ 均成立。

证明。首先注意，我们可以取映射序列 $G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}$，使得对每个正整数 i，都有 $\rho(G_{\beta,\alpha_i,i}, G_{\beta,\alpha_{i+1},i+1}) < 2^{-i}$。因此可知，映射序列 $G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}$ 一致收敛，故 G_β 存在。此外，我们可以假设映射 $G_{\beta,\alpha_{m+1},m+1}$ 和序列 $n(1)\ n(2)\dots$ 是

使得 $G_{\beta}^{n(k)}{}_{\alpha_i}, ,_i$ 对每个正整数 $k \leq i$ 都是（$2^{-k}-2^{-k-i}$）-曲折的，并且进一步满足每个$G_{\beta,\alpha_i,i}$ 都是容许的（这已经可以从构造中得到）。注意，如果（f_i）$_{i\geq 1}$ 是一列圆映射，并且一致收敛于 f，且它们全都至多是 δ-曲折的，那么 f 也是 δ-曲折的。现在应用命题 3.4、引理 3.21 和最后一个结论，我们得到，对于每个正整数 k， $G_{\beta}^{n(k)}$ 都是 2^{-k}-曲折的，这表明对于每个$\beta \in \mathbb{R}$，$\varprojlim(\mathbb{S}^1, G_\beta)$ 都是伪圆。结论（1）直接由引理 4.6 得出。

根据引理 4.7，序列 p_m 收敛，且 $p := \lim_{m\to\infty} p_m$ 存在。任取 $q < p$，并取 $M \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $m > M$ 都有 $p_m > q$。那么，根据 p_m 的定义$\tilde{}$ $\tilde{}$，我们有$G_{\beta,\alpha_m,m}($ $q) < G_{\beta,\alpha_m,m}(p_m)$，因此取极限可得

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $G_\beta(q) \leq G_\beta(p)$。为导出矛盾，假设 $G_\beta(q) = G_\beta(p)$。不失一般性，设 $|q-p| > 4/M$。那么，对于每个 $m > M$ 都有 $p_m - 1/m > q$，并且如果$\sum_{m\geq M} \eta_m < 2\eta_M$，那么

$$|G_{\beta,\alpha_M,M}(p_M) - G_{\beta,\alpha_M,M}(q)| \geq |G_{\beta,\alpha_m,m}(p_m) - G_{\beta,\alpha_M,M}(q)| > 3\eta_M$$

通过望远镜求和可得

$$|G_{\beta,\alpha_M,M}(q) - G_{\beta,\alpha_m,m}(q)| \leq \sum_{m\geq M} \eta_m < 2\eta_M.$$

最后我们得到$|G_{\beta,\ \alpha_m,\ m}(p_m) - G_{\beta,\ \alpha_m,\ m}(q)| > \eta_M$。这就完成了证明。□

引理 4.9。如果 $\beta = p + 1/2 - G_0(p)$ 那么 $G_\beta(p) = p + 1/2$。

证明。根据 f_β 的定义，我们得到 $G_\beta = r_\beta \circ G_0$。但这立即给出

$$G_\beta(p) = G_0(p) + \beta = p + 1/2$$

完成证明。□

定理 4.10。存在一个映射的参数化族 $\{G_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{T} \subset C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，其随 β 连续变化，使得：

(1) 对于每个 β，逆极限 $\varprojlim(\mathbb{S}^1, G_\beta)$ 都是伪圆。$\tilde{}$ $\tilde{}$ *(2)* G_β $(t + 1/2) = G_\beta(t) + 1/2$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。$\tilde{}$ $\tilde{}$ *(3)* 存在 $p \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $q < p$ 以及所有 β，$G_\beta(p) > G_\beta(q)$。*(4)* G_β 是 *leo*。

证明。由于映射族 $\{f_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 连续变化，且我们将它们全部与同一个扰动族复合，因此映射族 $\{G_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 关于参数 β 的连续性显而易见。结合引理 4.8 和定理 1.1 的证明即可得到结论；也就是说，为了在每一步都获得曲折性和可容许性，我们反复使用引理 4.3。回顾一下，对于任意 $k \geq 0$，集合 $A_k \subset C_\lambda(I)$ 包含于映射集 f 中，其中 f^s 对某个 s 和某个充分小的 $\delta > 0$ 是 $(1/k-\delta)$-曲折的。从 $\{f_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 出发，我们直接使用引理 4.3 得到映射 $\{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in\mathbb{R}} \subset A_1$。但是，如果 $\{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in\mathbb{R}} \subset A_1$ 和 m、δ 是 A_1 定义中的常数，那么根据引理 3.21，我们有 $B(\{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in\mathbb{R}}, \delta/4) \subset A_1$。第二步中，我们取映射族 $\{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in\mathbb{R}}$。按照定理 1.1 证明的其余部分进行，并确保收敛速度足够快，我们便得到集合 A_k 的交集中的映射族 $\{G_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{T}$，它由随 t 变化的连续映射组成。为了得到 (4)，首先注意到，只需证明 G_β 是传递的，因为在[27, 推论 21] 中已经证明，任何在逆极限中产生伪圆的传递圆映射（作为单个粘合映射）实际上都是 leo。

固定 m，并注意，根据引理 4.3，每个映射 $\{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 对于任意$\beta \in \mathbb{R}$都是 leo。对于固定的 β 以及任意长度至少为 J 的区间 $1/m$，存在 k 使得$G^k_{\beta,\ \alpha_m,\ m}(J) = \mathbb{S}^1$。事实上，如果我们检查引理 4.3 的证明（见断言 4.4 和

此后通过这些论证），我们可以看出，这个 k 仅取决于G_β、α_m、m的斜率以及单调区间的数量，而不取决于 β。也就是说，我们可以找到一个适用于所有映射G_β、α_m、m 以及所有区间 J的统一k 。但是，如果 g 是任意一个G_β、α_m、m 的充分小扰动，那么 $d_H(g^k(J), G^k_{\beta,\alpha_m,m}(J)) < 1/m$，这意味着$g^k$ 覆盖整个 $\mathbb{S}^1$，至多可能留下一个长度不超过 $1/m$的区间。因此，通过控制G_β、α_m、m 向 G_β的收敛速度足够快，即可确保传递性；而这一点可以在从G_β、α_m、m构造G_β、α_{m+1}、$m+1$ 的过程中加以控制。□

现在简要介绍一下针对圆映射族$\{G_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$的 BBM 构造。考虑环带 $\mathbb{A} = [0,1) \times [-k-3, k+3]$，其中 $k > \sup_{t\in[0,1)} G_\beta(t)$ 且 $-k > \inf_{t\in[0,1)} G_\beta(t)$（见图8）。我们将描述一种特定的方式，将 $[0,1) \times [-k-1, k+1]$ 分解为一族连续变化的弧，以及映射 G_β 如何扩展为定义在$[0,1) \times [-k-1, k+1]$上的同胚 G_β 。我们将 $\mathbb{A}$ 划分为斜率为1的直线； G_β将保持这些直线不变。对于每一条这样的直线，我们将在有限多个点上定义 G_β，并在每条直线上这些点之间进行线性延拓。首先，我们令 $G_\beta(x, k+1) = (x, k+1)^-$，且 $G_\beta(x, -k-1) = (x, -k-1)$，也就是说，最初我们在边界上保持映射为恒等映射。在构造的后续过程中，我们将把边界上的映射改为旋转。我们按照以下方式映射中间圆上的点：

$$(x,0) \mapsto (G_\beta(x) \pmod 1, G_\beta(x) - x), \forall x \in [0,1),$$

并且也在竖直线上定义它

$$(p,t) \mapsto \begin{cases} (G_\beta(p) \pmod 1, G_\beta(p) - p + t); t \in [0, k - G_\beta(p) + p], \\ (G_\beta(p) - s(G_\beta(p) - p) \pmod 1, k + s); t \in [k - G_\beta(p) + p, 1], \end{cases}$$

其中 $s = \frac{t-k+G_\beta(1+G_\beta\ p\ -p}{p\ -p}$)()和

$$\left(p + \frac{1}{2}, t\right) \mapsto \left(p_1(\bar{G}_\beta(p,t)) + \frac{1}{2} \pmod 1, p_2(\bar{G}_\beta(p,t))\right),$$

其中 p_1和 p_2分别是到 $[0,1)$和 $[-k-1, k+1]$的自然坐标投影。注意，划分中的每条直线与集合¯的交集都是有限的，其中 G_β 目前已定义，参见图 8。现在，以线性方式将映射扩展到 $[0,1) \times [-k-1, k+1]$的其余部分。

首先注意，根据上述定义，第二个坐标上的像¯始终小于 k，并且 $G_\beta(p) - p + t = k + s$ 对于 $t = k - G_\beta(p) + p$ 成立，因此，对于每个 $\beta \in \mathbb{R}$， G_β都是良定义且连续的。现在，我们对 G_β 下各点的取值进行最后一次修改¯ ¯。取 G_β值域中的(x, t)。如果 $t < k$，则保持其值不变；如果对于某个 $s \in [0,1]$，有 $t = k + s$，则将x 旋转 $s(G_\beta(p) - p)$。经过这次修改，图8中的红线变成了笔直的¯竖直线。同时， $[0,1)$在 G_β 下的像 $\times \{0\}$ 不受影响。¯ ¯现在，我们需要将 G_β 扩展到整个 $\mathbb{A}$。对于 $t > k+1$，我们定义 $G_\beta(x,t) = (x + G_\beta(p) - p)^-$(模1) $t)$；对于 $t < -k-1$，则定义 $G_\beta(x,t) = (x,t)$。

这样，对于与给定分解相对应的每个 $x \in \partial\mathbb{A}$，我们都可以关联一个收缩映射。该映射将是一个边界收缩，但我们需要保留环带，因此我们只将“中间环带”压缩到其中的“内圆”上（见下文对 R 的定义）。此外请注意，在两个紧致度量空间之间的连续映射，如果它是同胚映射的一致极限，则称为近同胚。

击碎 R： $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 是一个近同胚，因此：

$$R((x,t)) = \begin{cases} (x,0); & |t| \le k+2, \\ (x, (k+3)(t-k-2)); & t > k+2, \\ (x, (k+3)(t+k+2)); & t < -k-2. \end{cases}$$

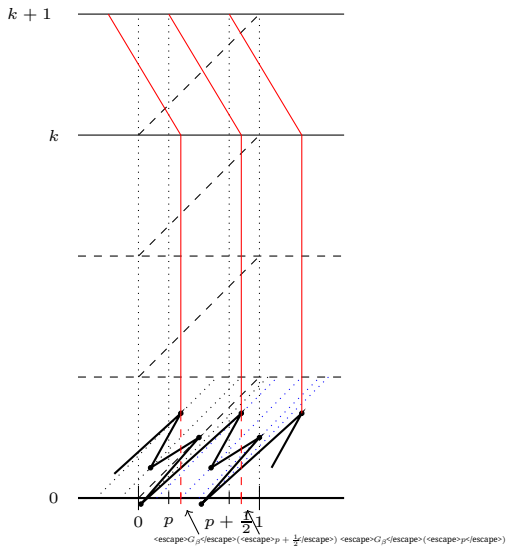

图8. 构造第一步中 G_β 的图的示意图。

我们将 $\{G_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{T}$ 的展开定义为一个连续变化的族 $G_\beta\colon\ \mathbb{A}\to\mathbb{A}$，其中各映射均为保向同胚，并且对所有 $\beta\in\mathbb{R}$：

(i) 如果我们将 $R\circ G_\beta(x,t) = (y,s)$ 记作某个 $|t| < k+3$，那么 $|t| > |s|$。(ii) $R\circ G_\beta|_{[0,1)\times\{0\}} = G_\beta$。

(i) 部分实际上更强。根据我们的构造，如果 $t = k+2+r$，那么 $s = r(k+2)+r$，因此，在 $R\circ G_\beta$ 的迭代作用下，带状区域 $[0,1)\times(k+2,k+3)$ 中的每个点都必须进入 $[0,1)\times[-k-2,k+2]$，并且在下一次迭代中被映射到 $[0,1)\times\{0\}$。同样的论证也适用于带状区域 $[0,1)\times(-k-3,-k-2)$。

我们稍后将证明，如果 p 是 G_β 的不动点，那么从 p 发出的径向线在 G_β 作用下保持不变；如果 p 是二周期的（即 $G_\beta(p) = p+1/2$），那么 G_β 会交换分别从 p 和 $p+1/2$ 发出的径向线。

设 $H_\beta := R\circ G_\beta$，它是一个近同胚。根据布朗定理[18]，$\hat{\mathbb{A}}_\beta := \varprojlim(\mathbb{A}, H_\beta)$ 也是一个环带，因此存在一个同胚 $h_\beta\colon \hat{\mathbb{A}}_\beta\to\mathbb{A}$。令 $\Phi_\beta := h_\beta\circ\hat{H}_\beta\circ h_\beta^{-1}\colon \mathbb{A}\to\mathbb{A}$，其中 $\hat{H}_\beta$ 是 H_β 在 $\hat{\mathbb{A}}_\beta$ 上的自然扩张，并令 $\Lambda_\beta := h_\beta(\hat{S}_\beta)$，其中定义 $\hat{S}_\beta := \varprojlim(\mathbb{S}^1, H_\beta)$。由 [4] 可知，对于每个 $\beta\in\mathbb{R}$，$\Phi_\beta|_{\Lambda_\beta}$ 都与 $\hat{G}_\beta\colon \varprojlim(\mathbb{S}^1, G_\beta)\to\varprojlim(\mathbb{S}^1, G_\beta)$ 拓扑共轭。此外，根据展开的选取，来自 $\mathbb{A}_\beta$ 内部的每个点都会被吸引到 S_β，因此，S_β 是 H_β 的全局吸引子，从而 Λ_β 也是 Φ_β 的全局吸引子。根据定理 3.1，[10] $\{\Phi_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 随 $\beta\in\mathbb{R}$ 连续变化，且吸引子 $\{\Lambda_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ 在豪斯多夫度量下连续变化。

现在考虑嵌入于拓扑圆盘 $D\subset\mathbb{R}^2$ 中的 $\mathbb{A}$，使得 $\partial D\subset\partial\mathbb{A}$。对于非退化且不分离的连续统 $K\subset D\setminus\partial D$，我们可以将素端圆 $\mathbb{P}$ 作为 $D\setminus K$ 的紧化与之关联。如果 $h\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 保持方向，且 $h(K) = K$，$h(D) = D$，那么 h 便诱导出一个保向同胚 $\Omega\colon\ \mathbb{P}\to\mathbb{P}$，因此它给出了一个自然的素端旋转数。在下文中，我们还将需要 Barge [3] 的以下结果，其中 K 表示共同边界 $\Lambda_\beta\subset\mathbb{R}^2$ 及其有界分支。这将使 K 成为一个平面中的不分离连续统。我们可以自然地扩展

同胚 Φ_β 到平面的连续同胚族，并保持 $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ 边界上的旋转。

引理 4.11 ([3]中的命题 2.2)。 设 $\{\Psi_t\}_{t\in[0,1]}$ 是拓扑圆盘 $D \subset \mathbb{R}^2$上的一族随 t 连续变化的保向同胚。对于每个 $t \in [0,1]$，令 $K_t \subset \operatorname{int} D$ 为一个非退化球面非分离连续统，且在 Ψ_t下不变，并假设 $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$随 t在豪斯多夫度量下连续变化。那么素端旋转数随 $t \in [0,1]$连续变化。

最后，让我们定义如何从动力学视角区分这些嵌入。接下来，我们将推广 [12] 中嵌入等价的定义。

定义 4.12. 设 X 和 Y 为度量空间。假设 $F\colon X \to X$ 和 $G\colon Y \to Y$ 是同胚，且 $E\colon X \to Y$ 是一个嵌入。如果 $E\circ F = G\circ E$，我们称嵌入 E 是将 (X,F) 动力嵌入到 (Y,G) 中的动力嵌入。如果 E（分别为 E'）是将 (X,F)（分别为 (X',F')）动力嵌入到 (Y,G)（分别为 (Y',G')）中的动力嵌入，并且存在一个同胚 $H\colon Y \to Y'$，使得 $H(E(X)) = E'(X')$，该同胚将 $G|_{E(X)}$ 与 $G'|_{E'(X')}$ 共轭，则称嵌入 E 和 E' 是动力等价的。

注记 4.13. 在我们的情形中 $Y = Y' = \mathbb{R}^2$ 和 X, X' 是伪圆。因此，定义 4.12 中的动力等价在（“外侧”）素端圆上诱导出一个共轭，而无需要求 H 将 G 与 G' 在所有 $\mathbb{R}^2$上共轭。

我们还将使用以下定义以及关于旋转数和旋转集的后续基本事实。

定义 4.14。 如果存在一条弧 $A \subset \mathbb{R}^2$，使得 $A \cap K = \{x\}$ 和 $A \setminus \{x\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$，则称点 $x \in K \subset \mathbb{R}^2$ 是 可达的。

如果 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个次数为 1 的映射，而 $\tilde{f}$ 是它的提升，那么我们定义

$$\overline{\operatorname{Rot}}_{\tilde{f}(x)} = \limsup_{m\to\infty} \frac{\tilde{f}^m(x) - x}{m}.$$

˜众所周知，如果 f 是非递减的，则可以用极限替代上极限，而且结果与 x的选择无关。定义与˜提升 f相关的两个单调映射:

$$\tilde{f}_l(x) = \inf\{\tilde{f}(y) : y \geq x\}, \quad \tilde{f}_u(x) = \inf\{\tilde{f}(y) : y \leq x\}.$$

˜我们定义 旋转集为

$$\operatorname{Rot}(\tilde{f}) := \{\overline{\operatorname{Rot}}_{\tilde{f}}(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

众所周知，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，都有:

$$\operatorname{Rot}(\tilde{f}) = [\overline{\operatorname{Rot}}_{\tilde{f}_l}(x), \overline{\operatorname{Rot}}_{\tilde{f}_u}(x)].$$

上述定义可以很容易地扩展到环带中的不变集。关于旋转数和旋转集的更深入讨论，请参阅 [1] 。

现在让我们证明本节的主定理。

定理的证明 *1.4*。 （a）和（c）项直接由 [10] 的定理 3.1 得出。我们的情形中略有不同之处在于，我们在 D 的边界上没有恒等映射，而是圆周旋转。不过，这不会造成任何问题，因为 Brown 逼近定理并未要求这一点 [18], ; 类似的构造另见 [20] 。

现在我们将证明，每个 Λ_β 都是一个类 Birkhoff 吸引子。设 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 为图 7 所示的次数为一的圆映射， f 为其提升。显然，存在 $n>0$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，使得 $\tilde{f}^n([0,1])\supset[k,k+2]$，并且递归地有 $\tilde{f}^{jn}([0,1])\supset[jk,j(k+1)+1]$。但是，由此可得，存在 x、$y\in[0,1]$，使得对于每个正整数 j，都有 $\tilde{f}^{jn}(x)\in[jk,jk+1]$ 且 $\tilde{f}^{jn}(y)\in[j(k+1)\ j(k+1)+1]$。这意味着 k/n 且 $(k+1)/n$ 属于 Rot(f)。特别地，Rot(f) 是一个非退化区间。但对于任意 β，每个 G_β 也具有相同的性质。沿用 [10], 中第 4.2 节的论证，我们得到 $\mathrm{Rot}(H_\beta)=\mathrm{Rot}(G_\beta)\cup\{r_\beta\}^{\sim}$，其中 r_β 是 ∂D 上的旋转，且 $\mathrm{Rot}(H_\beta|_{\Lambda_\beta})=\mathrm{Rot}(G_\beta)$，特别地，它是一个非退化区间。因此，我们得出结论：每个 Λ_β 确实都是一个类 Birkhoff 吸引子。

现在我们来证明 (d)。利用定理 4.10 (2) 和引理 4.9，我们可以找到参数 β_0，使得 $G_{\beta_0}(p)=p$，以及参数 $\beta_{\frac{1}{2}}$，使得 $G^2_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p)=p$ 且 $G_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p)\neq p$。注意，对每个 $t\in[0,k+2]$，都有 $H_{\beta_0}(p,0)=(p,0)$，$H_{\beta_0}(p,k+2)=(p,k+2)$，且 $2H_{\beta_0}(p,t)\in\{(p,s)\ s\in[0,k+2]\}$。记 $A_0:=\{p\}\times[0,k+2]$。因此，$H_{\beta_0}|_{A_0}$ 是 A_0 上良定义的单调满射，所以 $J_0:=h_{\beta_0}(\varprojlim(A_0,H_{\beta_0}|_{A_0}))$ 定义了一条弧，它连接 $P_0:=h_\beta(((p,0),(p,0),(p,0)\ldots)))$ 与 D 边界上的一个点，并且只在端点 P_0 处与 Λ_{β_0} 相交。因此，P_0 是 Λ_{β_0} 的一个可达点。令 Λ'_β 表示由 Λ_β 填入 $D\setminus\Lambda_\beta$ 的内部分支后得到的平面非分离连续统。因此，[17] 中的定理 5.1 表明，$\mathcal{P}_0$（对应于可达点 P_0）是诱导同胚 $\Omega_{\beta_0}:\mathbb{P}_{\beta_0}\to\mathbb{P}_{\beta_0}$ 在素端的“外侧”圆 $\mathbb{P}_{\beta_0}$ 上的不动点。因此，它在 $\mathbb{P}_{\beta_0}$ 中确定了一个在 Ω_{β_0} 作用下不动的素端。由此，Ω_{β_0} 的素端旋转数为 0。

现在我们来说明 $\beta_{\frac{1}{2}}$。注意，对于每个 $t\in[0,k+2]$，$H_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p,0)=(p+1/2,0)$，$H_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p,k+2)=(p+1/2,k+2)$，且 $H_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p,t)\in\{(p+1/2,s)\ s\in[0,k+2]\}$。2 类似地，对于每个 $t\in[0,k+2]$，$H_{\beta_{\frac{1}{2}}}(p+1/2,t)\in\{(p,s)\ s\in[0,k+2]\}$。记 $2A_1:=\{p\}\times[0,k+2]$。因此，$H^2_{\beta_{\frac{1}{2}}}|_{A_1}$ 是 $2A_1$ 上良定义的单调满射，所以经过望远镜化，$J_1:=h_{\beta_{\frac{1}{2}}}(\varprojlim(A_1,H^2_{\beta_{\frac{1}{2}}}|_{A_1}))$ 定义了一条弧，它将 $P_1:=h_{\beta_{\frac{1}{2}}}(((p,0),(p+1/2,0),(p,0),(p+1/2,0)\ldots))$ 与 D^2 的边界上的一个点连接起来，并且只在端点处与 $\Lambda_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 相交。因此，P_1 是 $\Lambda_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 的一个可达的点。2 2 通过对称论证，$P'_1:=h_{\beta_{\frac{1}{2}}}(((p+1/2,0),(p,0),(p+1/2,0),(p,0)\ldots))$ 也是 $\Lambda_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 的一个可达的点^2。2

现在证明，与 $\Phi_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 对应的诱导素端同胚 $\Omega_{\beta_{\frac{1}{2}}}:\mathbb{P}_{\beta_{\frac{1}{2}}}\to\mathbb{P}_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 的旋转数为 $1/2$。与上文类似，我们论证在相应的“外侧”素端圆 $\mathbb{P}_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 上存在素端 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}'_1$。根据 [17], 中的定理 3.2，如果一个不可分解连续统中的点是可达的，那么它对应唯一的素端；因此，$\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}'_1$ 分别是对应可达点 P_1 和 P'_1 的唯一素端。此外，[17] 中的定理 5.1 推出 $\Omega^2_{\beta_{\frac{1}{2}}}(\mathcal{P}_1)=\mathcal{P}_1$，且 $\Omega^2_{\beta_{\frac{1}{2}}}(\mathcal{P}'_1)=\mathcal{P}'_1$。我们只需排除 $\Omega_{\beta_{\frac{1}{2}}}(\mathcal{P}_1)=\mathcal{P}_1$（分别地，$\Omega_{\beta_{\frac{1}{2}}}(\mathcal{P}'_1)=\mathcal{P}'_1$）的情形。但若 $\Omega^{\beta_{\frac{1}{2}}}(\mathcal{P}_1)=\mathcal{P}_1$（分别地，$\Omega$ 1 2 $(\mathcal{P}'_1)=\mathcal{P}'_1$），根据映射 $\Omega^{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 的定义，P_1（分别地，P'_1）与 $\Phi_{\beta_{\frac{1}{2}}}(P_1)$（分别地，$\Phi_{\beta_{\frac{1}{2}}}(P'_1)$）会具有相同的横截弧序列等价类，从而导致矛盾。这意味着，与同胚 $\Omega_{\beta_{\frac{1}{2}}}$ 相关的素端旋转数为 $1/2$。应用引理 4.11，得到结论 (d)。

要证明结论 (e)，只需利用 (d)，并注意到：若 Λ_t 和 $\Lambda_{t'}$ 关于 $t \neq t'$ 嵌入且动力等价，则与 Λ_t 和 $\Lambda_{t'}$ 相关的素端同胚 Ω_t 和 $\Omega_{t'}$ 也共轭（因为共轭同胚会交换相关的横截弧序列等价类），由此可得相关素端旋转数相等。

最后，我们来证明 (b)。固定 β，取关于 λ 的 G_β 的一组泛点 $Z_\beta \subset [0,1)$。令 Z'_β 为将 Z_β 旋转角度 $p - G_\beta(p)$ 后所得的像。现在，若取集合 $Y_\beta = Z'_t \times (k+1, k+2) \subset D$，则它具有正的二维勒贝格测度。但 $H_\beta(Y_\beta) = Z_\beta \times \{0\}$，因此它是关于 λ 的 H_β 在 $\mathbb{A}$ 的中间圆上限制所得的一组泛点。所以 Y_β 属于 $\mathbb{S}^1$ 上 λ 的吸引域。

现在我们将引用 [12, 推论5。6], 这是 Kennedy、Raines 和 Stockman 的结果的直接推论 [25]。

定理 4.15。设 X 是一个带有勒贝格测度 λ 的紧致空间，$f: X \to X$ 是连续满射映射，且 ν 是一个 f-不变的博雷尔概率测度。˙那么，ν 是物理测度，当且仅当诱导的 f-不变测度 $\hat{}\nu$ 是 $\varprojlim(X, f)$ 上的逆极限物理测度。

根据定理4.15，λ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的吸引域投影到一个物理的 Oxtoby-Ulam 背景测度上。由于所有映射 G_β 都保持勒贝格测度λ，吸引子上相应的诱导测度弱连续变化，这是 [11]中的更一般定理 3.6 和 4.1 的推论。

最后，我们来证明对于所有 β，G_β 都是测度论弱混合的。根据 [8] 的定理 4（这是 Bowen [16] 的结果的推论），来自 $C_\lambda(I)$ 的分段 C^2 leo 映射相对于 λ 都是测度论精确的，因此，在构造的中间步骤中，映射 $G_{\beta,\alpha_m,m}$ 对每个 $\beta \in \mathbb{R}$ 都相对于 λ 是测度论精确的（因而也相对于λ是强混合和弱混合的）。我们的目标是证明，如果映射 $G_{\beta,\alpha_m,m}$ 收敛得足够快（即 η_m 充分快地收敛到零），那么极限映射 G_β 对每个 $\beta \in [0,1]$ 都相对于 λ 是弱混合的。证明思路受到 [8] 中定理 2 证明的启发。

令 $\{h_j\}_{j\geq 1}$ 为 $L^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ 中的一个可数稠密连续函数集。固定任意 $f \in \{G_{\beta,\alpha_m,m}\}_{\beta\in[0,1]}$，并引入以下伯克霍夫和记号

$$S_\ell^f h_j(x,y) := \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell-1} h_j\big((f\times f)^k(x,y)\big).$$

此映射是弱混合的，因此我们有

$$\lim_{\ell\to\infty} S_\ell^f h_j(x,y) = \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))$$

对所有 $j \geq 1$ 均成立。

对于每个 $n \geq 1$，存在一个集合 $E_{n,f} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 和一个正整数 $\ell_{n,f} \geq n$，使得 $\lambda(E_{n,f}) > 1 - \frac{1}{n}$，并且

$$\left| S_\ell^f h_j(x,y) - \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t)) \right| < \frac{1}{3n} \tag{14}$$

对于所有 $(x,y) \in E_{n,f}$, $1 \leq j \leq n$ 和 $\ell \geq \ell_{n,f}$。

对于任意 $g \in C_\lambda(\mathbb{S}^1)$，根据三角不等式，我们有：

$$\left|S^g_{\ell_{m,f}} h_j(x,y) - \textstyle\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))\right| \leq$$
$$\left|S^g_{\ell_{m,f}} h_j(x,y) - S^f_{\ell_{m,f}} h_j(x,y)\right| + \left|S^f_{\ell_{m,f}} h_j(x,y) - \textstyle\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))\right|,$$

因此，我们可以在 $C_\lambda(\mathbb{S}^1)$ 中选取一个较小的邻域 $B(f,\varepsilon_{m,f})$，使得如果 $g \in B(f,\varepsilon_{m,f})$，那么

$$\left|S^g_{\ell_{m,f}} h_j(x,y) - \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))\right| < \frac{1}{n} \tag{15}$$

对于 $1 \le j \le m$ 以及所有所有 $(x,y) \in E_{m,\ f}$。

由于对于某个 $\beta \in [0,1]$，$f = G_{\beta,\alpha_m,m}$，存在某个开集 $\beta \ni U_f \subset [0,1]$，使得 $\{G_{\alpha,\alpha_m,m}\colon\ \alpha \in U_f\} \subset B(f,\varepsilon_m,f/2)$。我们可以找到 $[0,1]$ 的一个有限覆盖，由集合 $U_{f_1},\ldots,U_{f_{j_n}}$ 组成。选择 $\varepsilon_m := \min\{\varepsilon_{m,f_i}\colon\ 1 \le i \le j_m\}$。那么对于任意 β 和任意映射 $g \in B(G_{\beta,\alpha_m,m},\varepsilon_n)$，条件 (15) 均以 $\ell_{m,f}$ 成立，其中 $f = f_i$ 对某个 $1 \le i \le j_n$ 成立。记 $\ell_{m,\beta} := \ell_{m,f}$，以及 $E_{m,\beta} := E_{m,f}$，其中 f 如上（不一定唯一）。

现在假设序列 η_m 收敛到零的速度足够快，使得对于每个 β，$G_\beta \in B(G_{\beta,\ \alpha_m,\ m},\varepsilon_m)$。

考虑

$$\mathcal{E}(\beta) := \bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{m=M}^{\infty} E_{m,\beta}.$$

由于 $\lambda(E_{m,\ \beta}) > 1 - \frac{1}{m}$，因此可得 $\lambda(\mathcal{E}(\beta)) = 1$。

我们已经证明，

$$\left|S^{G_\beta}_{\ell_{m,\beta}} h_j(x,y) - \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))\right| < \frac{1}{m} \tag{16}$$

对于所有 $(x,y) \in E_{m,\ \beta}$ 以及所有 $1 \le j \le m$。

根据伯克霍夫遍历定理，对于几乎所有的 (x,y)，$\lim_{\ell\to\infty} S^{G_\beta}_\ell h_j(x,y)$ 都存在。对于 $\mathcal{E}(\beta)$ 中的每个点，等式 (16) 都成立无穷多次，因此我们得出，这个极限必定等于 $\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} h_j(s,t)\, d(\lambda(s)\times\lambda(t))$，从而 $G_\beta \times G_\beta$ 是遍历的，或者等价地说，G_β 是弱混合的。

□

注4.16。与[20], 定理1.4 中的嵌入在动力学上有所不同类似，我们不能轻易断言它们在拓扑意义上也有所不同。另一方面，定理1.4 的结论 (d) 表明，参数空间 $[0,1]$ 确实不是退化的。若能精确了解这一族映射 $\{\Lambda_t\}_{t\in[0,1]}$ 的边界动力学（即理解可达点集和素端结构），将会很有趣；不过，我们仍将这一研究问题留作开放问题。

5. 致谢

本研究得到AGH大学IDUB项目的支持。P. Oprocha的研究部分得到波兰国家科学中心（NCN）项目资助，项目编号为2019/35/B/ST1/02239。J. Činč获得了斯洛文尼亚研究机构ARRS项目J1-4632的部分资助。

参考文献

[1] L. Alsedà、J. Llibre、M. Misiurewicz，《一维组合动力学与熵》。第二版。非线性动力学高级丛书，第5卷。World Scientific Publishing Co., Inc.，美国新泽西州里弗埃奇，2000年。[2] A. Anušić、J. Činč，帐篷映射逆极限空间的平面嵌入的可达点，《数学论文集》，**541**，共57页，2019年。[3] M. Barge，与 *Hénon* 映射相关的素端旋转数，载于《连续统理论与动力系统》，纯数学与应用数学讲义，第149卷（Dekker出版社，1993年），第15–33页。

[4] M. Barge, J. Martin，全局吸引子的构造。《美国数学会会刊》110 (1990)，523–525。[5] R. H. Bing，关于遗传不可分解连续统。《太平洋数学杂志》1 (1951)，43–51。[6] J. Bobok, S. Troubetzkoy，保持勒贝格测度的区间映射的典型性质。《非线性》33(12) (2020)，6461–6480。[7] J. Bobok, J. Činč, P. Oprocha, S. Troubetzkoy，S-极限跟踪对于连续勒贝格测度保持圆映射是泛型的。《遍历理论与动力系统》43 (1)，(2023) 78–98。[8] J. Bobok, J. Činč, P. Oprocha, S. Troubetzkoy，泛型动力学性质在与旋转复合后是否保持稳定？arXiv:2207.07186，2022年7月。[9] J. Bobok, J. Činč, P. Oprocha, S. Troubetzkoy，一维流形上的连续勒贝格测度保持映射：综述，arXiv:2303.17873，2023年3月。[10] P. Boyland, A. de Carvalho, T. Hall，参数化族中的逆极限作为吸引子。《伦敦数学学会通报》45，第5期 (2013)，1075–1085。[11] P. Boyland, A. de Carvalho, T. Hall，由帐篷映射导出的 Barge-Martin 吸引子的统计稳定性。《离散与连续动力系统 A》40 (5) (2020)，2903–2915。[12] P. Boyland, A. de Carvalho, T. Hall，单峰映射的自然扩张：平面嵌入的素端及其与球面同胚的半共轭。《几何与拓扑》25 (2021) 111–228。[13] J. P. Boroński, J. Činč, X.-C. Liu，旋转吸引子参数化族中的素端动力学。《伦敦数学学会杂志》(2) 102 (2020) 557–579。[14] J. P. Boroński, J. Činč, P. Oprocha，超越 0 和 ∞：Barge 熵猜想的一种解法，arXiv:2105.11133，2021年5月。[15] J. P. Boroński, J. Kennedy, X.-C. Liu, P. Oprocha，伪圆上的极小非可逆映射。《动力学与微分方程杂志》33 (4) (2021)，1897–1916。[16] R. Bowen，区间上的伯努利映射。《以色列数学杂志》28 (1977)，161–168。[17] B. Brechner，关于伪弧上的稳定同胚与嵌入。《伊利诺伊数学杂志》22 (4) (1978)，630–661。[18] J. R. Brown，离散动力系统的逆极限、熵与弱同构。《美国数学会汇刊》164，(1972) 55–66。[19] M. Brown，逆极限逼近定理的一些应用。《美国数学会会刊》11 (1960) 478–483。[20] J. Činč, P. Oprocha，伪弧吸引子的参数化族：物理测度与素端旋转数。《伦敦数学会会刊》125 (2023)，318–357。[21] L. Fearnley，伪圆的唯一性。《美国数学会汇刊》149，(1) (1970)，45–64。[22] L. Fearnley，所有遗传不可分解圆形可链连续统的分类。《美国数学会汇刊》168 (1972)，387–401。[23] M. Handel，平面的一个病态保面积 C^∞ 微分同胚。《美国数学会会刊》86(1) (1982)，163–168。[24] K. Kawamura, H.M. Tuncali, E.D. Tymchatyn，图的遗传不可分解逆极限。《基础数学》185 (2005)，195–210。[25] J. Kennedy, B. E. Raines, D. R. Stockman，诱导同胚下逆极限空间上的测度吸引域。《遍历理论与动力系统》30 (2010)，1119–1130。[26] A. Koropecki, A. Passeggi，关于平移线的庞加莱–本迪克松定理及其在素端理论中的应用。《瑞士数学评论》94 (2019) 141–183。[27] P. Kościelniak, P. Oprocha, M. Tuncali，图的遗传不可分解逆极限：跟踪、混合与正合性。《美国数学会会刊》142，第2期 (2014)，681–694。[28] W. Lewis, P. Minc，伪弧的绘制。《休斯敦数学杂志》36 (2010)，905–934。[29] P. Minc, W. R. R. Transue，I 上的一个传递映射，其逆极限为伪弧。《美国数学会会刊》111，第4期 (1991)，1165–1170。

(J. Činč) 马里博尔大学，科罗什卡160号，2000 马里博尔，斯洛文尼亚 – 和 – 克拉科夫AGH大学，应用数学学院，密茨凯维奇大道30号，30-059 克拉科夫，波兰 – 和 – IT4Innovations国家超级计算中心，俄斯特拉发大学，IRAFM，四月三十日街22号，70103 俄斯特拉发，捷克共和国

电子邮箱：jernej.cinc@um.si

(P. Oprocha) 克拉科夫AGH大学，应用数学学院，密茨凯维奇大道30号，30-059 克拉科夫，波兰 – 和 – IT4Innovations 国家超级计算中心，俄斯特拉发大学，IRAFM，四月三十日街 22 号，70103 俄斯特拉发，捷克共和国

电子邮箱：oprocha@agh.edu.pl