arXiv:2305.06471v1 [math.SP] 10 May 2023

周期图算子的费米簇的代数性质

JAKE FILLMAN、WENCAI LIU 和 RODRIGO MATOS

Abstract. 我们提出一种方法，通过适当的渐近行为估计图上周期薛定谔算子的费米簇中的不可约分支数。我们的主要定理给出了一个抽象界，利用此类渐近行为估计 Laurent 多项式的不可约分支数。随后我们说明，该抽象界如何推出许多重要晶格中的不可约性，其中包括基本胞内顶点多于一个的例子，如 Lieb晶格，以及通过图装饰过程得到的某些模型。

1. Introduction

近几十年来，人们对周期薛定谔算子的布洛赫簇和费米簇的代数与解析性质开展了大量研究。这些性质与许多重要问题相关，包括连续情形 ¨和离散情形 [18]中嵌入特征值的缺失， [19, 23]，局部扰动的周期介质中具有无界支撑的特征函数的存在性，[30]，谱带函数的性质，[23]，逆谱问题， [10, 21, 25, 26]，量子遍历性， [22, 27]，平带[1, 14, 15, 28]，以及弹道运动 [5, 6, 8]。更多信息和背景介绍可参见综述，例如 [16, 17, 24]。

费米簇和布洛赫簇的不可约性研究始于约 30 年前。B¨atting、Gieseker、Kn¨orrer 和 Trubowitz 通过紧化方法 [2, 3, 10]研究了维度为 $d \in \{2, 3\}$ 的周期薛定谔算子中的这一问题。当 $d = 2$ 时，B¨attig [2] 证明了布洛赫簇的不可约性。在 [10]，，Gieseker、Kn¨orrer 和 Trubowitz 证明，除了 λ 的有限多个取值外，费米簇均为不可约。当 $d = 3$ 时，B¨attig 证明，对于每个 λ [3]，费米簇都是不可约的。

对于连续周期薛定谔算子，Kn¨orrer 和 Trubowitz 证明，当 $d = 2$ [13] 时，布洛赫簇是不可约的（模周期性）。当周期势可分离时，B¨attig、Kn¨orrer 和 Trubowitz 证明，对于 $d = 3$ [4]，任意能级上的费米簇都是不可约的（模周期性）。

有关这些主题的进一步研究进展，请参见 [20] （关于平面周期图的研究）以及 [7]（探讨其与离散几何之间联系的研究）。

最近，作者之一提出了一种研究多项式不可约性的新方法，并由此为形如 $-\Delta + V$ on $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ 的周期算子获得了若干新结果。在这种情况下，刘证明了，对于 $d = 2$，费米簇在除可能的平均能级之外的每一个能级 λ 上都是不可约的。他还证明了，当$d \geq 3$时，费米簇在每一个能级 λ [23] 上都是不可约的。特别地，对于这类算子，可以得出结论：布洛赫簇在任意维数 [23] 下都是不可约的。 [23] 中的结果

J. F. 的部分经费由西蒙斯基金会合作项目资助金 #711663 和美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS–2213196 提供。W. L. 的经费由美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-2000345、DMS-2052572 和 DMS-2246031 提供。

为有关离散情形下费米簇和布洛赫簇不可约性的猜想提供完整证明，正如众多文章中所讨论的那样 [3, 4, 10, 13, 16, 18]。

从技术层面来看，[23] 中的方法可以分为几个步骤。

1. 证明与每个不可约因子相关联的簇都包含黎曼球面上的某些奇异点。2. 计算费米簇在这些奇异点处的渐近形式（变量坐标变换后的切锥）。3. 证明渐近形式本身是不可约的。4. 利用次数论证完成证明。

我们先前的工作 [9] 研究了与某些 $\mathbb{Z}^d$-周期图及薛定谔算子相关的布洛赫簇，其中薛定谔算子由一个乘法算子（势）和一个托普利兹算子（控制位点间的相互作用）之和给出。遵循上述方法，我们引入了新的思想，以研究此类算子在单顶点模型上所对应的布洛赫簇，即 $\mathbb{Z}^d$-周期图，其中顶点上的作用是传递的（即，在 $\mathbb{Z}^d$ 作用下只有一个顶点轨道）。与费米簇的不可约性研究相比，我们能够采用一种渐近分析方法，该方法还以特定方式依赖于谱参数 λ。因此，我们证明了一大类周期图算子的布洛赫簇的不可约性[9]。

这两项工作[9, 23] 的核心思想是找到一种方法，将问题化简为势消失的情形。事实上，完整色散关系对势的依赖可能非常微妙，因此这正是渐近项发挥作用之处。两种情况下，所采用的方法都是依据控制格点间相互作用的托普利茨算子的符号展开色散关系。然而，它们的结果也有一些不足。首先，[23] 只关注单顶点模型；许多具有物理研究意义的模型，例如石墨烯、Lieb晶格和 Kagome 晶格等，都不属于单顶点模型。其次，[9] 中的论证只能有效地研究色散关系本身的不可约性（等价地说，即布洛赫簇的不可约性）。然而，最有趣的不可约性结果针对的是固定能量下的色散关系，这对应于费米簇。因此，本文提出了一种研究固定能量下色散关系的方法。特别是，本文的方法甚至能为单顶点情形带来新的结果。

现在，我们将介绍本文的研究背景，并指出多顶点模型这一研究框架中固有的若干难点。为了按照上述步骤1至4所概述的策略开展研究，我们必须克服这些困难。我们还将阐述本文所研究的模型对于周期结构的数学与物理研究的重要性。

本文旨在提出可应用于多顶点模型的不可约性判据，即其基本胞中包含多个顶点的周期性晶格。尽管证明的一般方案遵循[23], 框架，但将其应用于具体实例时，面临的挑战要大得多。引入多顶点背景通常是为了描述包含多个粒子或具有自旋、能级及其他物理参数等内部自由度的物理系统。因此，即使将研究范围限制在$\mathbb{Z}^d$-周期性情形下，本研究所涉及的哈密顿量仍具有广泛的适用范围，并且对应于多种不同的物理现象。

本文所述结果的一个典型示例是 Lieb晶格，它广泛存在于纳米结构中，并呈现出奇异的平带结构。这种晶格与铁磁性、超导性和分数量子霍尔效应相关；参见 [11, 12] 以及

其中的参考文献。图1 如下所示，展示了二维 Lieb晶格的一个有限部分，其中基本胞内有三个顶点。

<escape>多顶点模型也自然地出现在图装饰过程中。尽管这一过程可能对基础邻接算子的谱产生显著影响，例如产生谱隙 [29], 但我们将在下文证明，在许多值得关注的实例中，不可约性不受装饰过程的影响。通过这种方式，我们得以为一类数学物理学中值得关注的实例给出新的不可约性结果。现在，我们将讨论本文所采用方法的一些技术优势。</escape>

本工作的首要贡献是提出了一套统一的不可约性判据。事实上，下面定理 2.4 和 2.6 的主要结果不仅涵盖了上述两类例子，还重新得到了单顶点模型的已知结果，其中 $\mathbb{Z}^d$ 的作用具有单个顶点轨道。简而言之，我们证明，在许多值得关注的情形下，除有限多个能量值外，费米簇均为不可约的。本文所得判据将费米簇的不可约因子计数问题转化为适当渐近表达式的因子计数问题，而这一点由定理 2.4 和2.6.

我们还强调，定理 2.4 和 2.6 中的主要结果具有抽象性，并且可能具有独立的研究价值。此外，这些结果不仅适用于费米簇的不可约性研究，而且在满足相应条件时，还能根据某个多项式的两个渐近形式的分支数，对该多项式的不可约分支数给出上界。在将这些结果应用于周期算子的费米簇的不可约性研究时，本文所考虑的算子是向量值算子，其色散关系不仅可能非平凡地依赖于基本区域内每个格点处的势函数值，而且还可能以比单顶点情形更为微妙的方式依赖于谱参数。特别是，势函数值和谱参数 λ 以高度非平凡的方式出现在切锥渐近形式中，这与 [23]和 [9], 形成鲜明对比，因为后两者的渐近形式均不依赖于势函数和谱参数。事实上，这种依赖关系解释了本研究面临的一项关键技术难题。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍抽象结果的一般框架。随后在第 3 节中给出这些抽象定理的证明。

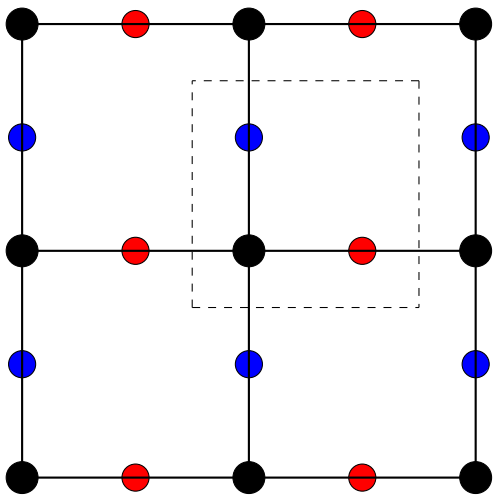

FIGURE 1. 二维 Lieb晶格的有限部分。虚线标示出一个基本胞。

由于我们研究的是多顶点模型，因此需要采用 Floquet 理论的矩阵值版本，我们将在第 4 节对其进行介绍。最后，我们将在第 5 节和第 6 节分别给出其在 Lieb 晶格和装饰晶格中的主要应用。

Acknowledgements

作者衷心感谢西蒙斯几何与物理中心对“遍历算子与量子图”研讨会的支持，以及 ICERM 对“谱理论中的代数几何”热点专题研讨会的支持。本研究的部分工作正是在上述研讨会期间完成的。

2. Setting and Statement of Main Results

设 $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$，对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$（分别为 $\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$）表示关于 m 个变量的多项式（分别为 Laurent 多项式）集合。我们将 $\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$ 的一个典型元素记为

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in (\mathbb{C}^\star)^m, \tag{2.1}$$

其中。

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}, \text{ for } x \in (\mathbb{C}^\star)^m, \ \alpha \in \mathbb{Z}^m.$$

与通常一样，$f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$ 是单位元，当且仅当 $1/f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$，而这又当且仅当 f 是非零单项式：$f(x) = cx^\alpha$ 对于某个 $c \neq 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}^d$。若 $f \neq 0$ 不是单位元，则当它不能被非平凡地因式分解时，它是不可约的。等价地，f 是不可约的，当且仅当 $f = gh$ 意味着 g 和 h 中必有一个是单位元。给定 $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$，令

$$V(f) = \{x \in (\mathbb{C}^\star)^m : f(x) = 0\}$$

表示与 f 相关的簇，并称 f 与 $y \in \mathbb{C}^m$ 相交，若 $V(f)$ 的闭包包含 y（闭包是相对于 $\mathbb{C}^m$ 上的通常乘积拓扑取的）。定义

$$\mathbf{0}_k = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{k \text{ copies}}),$$

并注意到，f 与 $(\mathbf{0}_{m-1},\infty)$ 相交，当且仅当 $f(\hat{x})$ 与 $\mathbf{0}_m$ 相交，其中 $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m^{-1})$。我们还用以下方式表示逐点运算：

$$x \odot y = (x_1y_1,\dots,x_my_m) \quad \text{and} \quad x^{\odot\alpha} = (x_1^{\alpha_1},\dots,x_m^{\alpha_m}). \tag{2.2}$$

给定一个如 (2.1) 所示的 Laurent 多项式，令

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^m : c_\alpha \neq 0\}. \tag{2.3}$$

我们定义 $\alpha_{\min}(j) = \alpha_{\min,f}(j) = \min\{\alpha_j : \alpha \in \mathcal{A}\}$，也就是说，$\alpha_{\min}(j)$ 是 x_j 在 $f(x)$ 中的最低指数。我们还引入

$$\alpha_0(j) = \alpha_{0,f}(j) = \max\{-\alpha_{\min,f}(j), 0\} \tag{2.4}$$

从而

$$\alpha_0 = \alpha_{0,f} := (\alpha_{0,f}(1),\dots,\alpha_{0,f}(m)) \tag{2.5}$$

是 $\mathbb{Z}^m_+$ 中长度最小的向量，使得 $f^+(x) := x^{\alpha_0}f(x)$ 是一个多项式。$f(x)$（作为 Laurent 多项式）的（不可）约性与 $f^+(x)$（作为多项式）的（不可）约性之间的相互作用在本文中起着关键作用。特别地，注意到 f 是

作为 Laurent 多项式不可约，当且仅当 f^+ 只有一个非单项式不可约因子。这促使我们给出以下定义。

定义 2.1。一个非平凡单项式是一个形如 cx^α 的 Laurent 多项式，其中 $c \neq 0$ 且 $\alpha \neq \mathbf{0}_m$。如果 cx^α 是非平凡的，且 $\alpha_j \geq 0$ 对所有 j 都成立，则称 cx^α 为一个正[1] 单项式。f 的次数定义为 $\deg(f) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$。稍微滥用一下记号，对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$，我们也将 $\deg(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ 记作其次数。我们称 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ 为真多项式，如果 f 不含正单项式因子。

定义 2.2. 给定一个 Laurent 多项式

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha,$$

令 $L_- = \min\{\deg(\alpha) : c_\alpha \neq 0\}$。那么，$f$ 的最低次数分量定义为 Laurent 多项式

$$\underline{f}(x) = \sum_{\deg \alpha = L_-} c_\alpha x^\alpha.$$

我们有时将其简称为 f 的最低分量。

更一般地，若 $l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$，则 x^α 和 α 的 l-次数定义为

$$\deg_l(x^\alpha) = \deg_l(\alpha) := \deg(x^{l \odot \alpha}) = \deg(l \odot \alpha) = \sum_{j=1}^m l_j \alpha_j. \tag{2.6}$$

于是可以令 $L_-(l) = \min\{\deg_l(\alpha) : c_\alpha \neq 0\}$，其最低 l-次数分量为

$$\underline{f}_l(x) = \sum_{\deg_l(\alpha) = L_-(l)} c_\alpha x^\alpha. \tag{2.7}$$

最低 l-次数分量具有一个有用的性质，即 $(fg)_l = \underline{f}_l \underline{g}_l$，因此，关于最低次数分量的（不可）约性结果可以为给定多项式的（不可）约性提供有用的信息。

也可以从几何角度理解 Laurent 多项式的最低次数分量。尽管我们的方法并不依赖以下视角，但它有助于补充背景信息。Laurent 多项式 f 的牛顿多面体定义为由式（2.3）给出的集合 $\mathcal{A}(f)$ 的凸包。于是，任意向量 $l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ 都通过下式确定该多面体的一个相应面：

$$F = F_l = \left\{ y \in \mathcal{N}(f) : \langle y, l \rangle = \min_{y' \in \mathcal{N}(f)} \langle y', l \rangle \right\}.$$

与面 F 对应的面多项式是

$$f_F(x) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha x^\alpha.$$

读者随后可以验证，$\underline{f}_l(x)$ 恰好是与面 F_l 相关联的牛顿多面体面多项式。

根据上述基本定义，我们现在可以陈述主要结果。设 $\mathcal{P}, \mathcal{P} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$，并假设存在 $l \in \mathbb{N}^m$，使得

$$\widetilde{\mathcal{P}}(x) = \mathcal{P}(x^{\odot l}). \tag{2.8}$$

[1]显然，正向的 ve 指的是指数向量，而不是单项式取值的范围。

令 h_0 为 $\mathcal{P}^+$ 的最低次数分量，h_∞ 为 $(\mathcal{P}(\hat{x}))^+$ 的最低次数分量，其中 $\hat{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m^{-1})$。注意，$h_0$ 和 h_∞ 都是多项式。

在这些假设下，存在 $h_0,h_\infty\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_m]$ 使得

$$\widetilde{h}_0(x)=h_0(x^{\odot l}),\quad \widetilde{h}_\infty(x)=h_\infty(x^{\odot l})$$

例如，根据[9, 引理 3。1]。我们注意到，h_0 是 l次数最低的分量$\mathcal{P}^+$，而 h_∞ 是 l（$\mathcal{P}(\hat{x})$）$^+$中次数最低的分量。

对于本文的第一个结果，我们将作出以下假设：

(A_1) $\mathcal{P}(x)$ 的每个因子都与 $\mathbf{0}_m$ 或 $(\mathbf{0}_{m-1},\infty)$ 相交。

(A_2) 两者都 $\mathcal{P}^+(x)$ 和 $(\mathcal{P}(\hat{x}))^+$ 是符合定义 2.1所述意义的真多项式。

(A_3) h_0 有 p_1 个不可约因子，而 h_∞ 有 p_2 个不可约因子。

(A_4) $\deg(h_0)+\deg((h_\infty(\hat{x}))^+)>\deg(\mathcal{P}^+)$ 或 $\deg((h_0(\hat{x}))^+)+\deg((h_\infty(x)))>\deg((\mathcal{P}(\hat{x}))^+)$ 正如我们将在若干例子中看到的，假设 (A_1)-(A_4) 在许多值得关注的情况下都可以得到验证。

注 2.3。若 $\mathcal{P}^+(x)$ 和 $(\mathcal{P}(\hat{x}))^+$ 是真多项式，则 $(\mathcal{P}(\hat{x}))^+=(\mathcal{P}^+(\hat{x}))^+$.

定理 2.4。在假设 (A_1)-(A_4)下，Laurent 多项式 $\mathcal{P}(x)$ 至多有p_1+p_2-1 个不可约分支。

定理 2.4将在第 3 节证明。由此可立即得到以下推论。

推论 2.5. 若 $p_1=p_2=1$，假设 (A_1)–(A_4) 蕴含 Laurent 多项式$\mathcal{P}(x)$ 不可约。

接下来我们考虑次数相等的情形，也就是说，假设 (A_4) 被替换为

(A_4') 次数 h_0+次数$((h_\infty(\hat{x}))^+)=$次数 $\mathcal{P}^+$且 次数$((h_0(\hat{x}))^+)+$次数$((h_\infty(x)))=$次数$((\mathcal{P}(\hat{x}))^+)$

定理 2.6. 在假设 (A_1)、(A_2)、(A_3) 和 (A_4') 下，Laurent 多项式$\mathcal{P}(x)$ 的不可约分支至多有 p_1+p_2-1 个，或者 $\mathcal{P}(x)$ 有 p_1+p_2 个不可约分支且 $\mathcal{P}^+(x)=Ch_0(x)(h_\infty(\hat{x}))^+$ 其中 C 是一个常数。

如前所述，定理 2.4 和 2.6以多种方式改进了 [9] 的结果。首先，[9] 的方法必然局限于单顶点模型（即作用于具有自由 $\mathbb{Z}^d$-作用且在顶点上具有传递性的图上的算子），因为该手稿直接研究的是具有某种展开形式的多项式，该展开由一个固定的 Laurent 多项式和若干特征标构成。对于更一般的晶格，尤其是基本域中含有许多点的晶格，这种展开并不成立，因此有必要直接处理 $\mathcal{P}$，而不是 p。本文的抽象结果仅根据多项式本身的渐近性质提出条件，这些条件可以直接检验。

3. Proofs of Theorems 2.4 and 2.6

Be因此，在证明我们的主要定理之前，我们需要汇总一些其他结果。

3.1. 技术引理。

引理 3.1。 设 $\mathcal{P}$ 是一个满足假设 (A_1)、(A_2)和 (A_3)的 Laurent 多项式。那么 $\mathcal{P}$ 至多有 p_1+p_2 个不可约分支。此外，如果 $\mathcal{P}(x)$ 恰有 p_1+p_2个不可约分支，那么 $\mathcal{P}^+$ 可进行如下形式的因式分解

$$\mathcal{P}^+ = fg, \tag{3.1}$$

其中，$f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_m]$ 与 $\mathbf{0}_m$ 相交，但与$(\mathbf{0}_{m-1},\infty)$不相交；$g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_m]$ 与$(\mathbf{0}_{m-1},\infty)$相交，但与 $\mathbf{0}_m$不相交。

证明。 将 $\mathcal{P}^+$ 分解为不可约因子，并应用假设 (A_1)，我们可以写成

$$\mathcal{P}^+ = \prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{a_i} f_{ij}, \tag{3.2}$$

其中，每个 f_{1j} 都是一个满足 $\mathbf{0}_m$ 且不满足（$\mathbf{0}_{m-1}$、∞）的多项式；每个 f_{2j} 都是一个满足（$\mathbf{0}_{m-1}$、∞）且不满足 $\mathbf{0}_m$的多项式；每个 f_{3j} 都是一个同时满足 $\mathbf{0}_m$ 和（$\mathbf{0}_{m-1}$、∞的多项式。注意，由假设 （A_2）可知，没有任何一个 f_{ij} 能是单项式，因此$a_1+a_2+a_3$ 是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}^+$的不可约分支数。

对每个 $i \in \{1,3\}$，令 $\tilde{g}_{ij}$ 表示满足 $\tilde{g}_{ij}(x^{\odot l})$ 的分量 $g_{ij}(x^{\odot l})$。令 t_{ij}、$i \in \{1,3\}$ 表示g_{ij}的不可约因子个数。

由于 f_{1j} 和 f_{3j} 与 $\mathbf{0}_m$ 相交，我们得出 $t_{ij} \geq 1$ 对所有 $1 \leq j \leq a_i$、$i=1$、3 均成立。特别地，

$$\sum_{j=1}^{a_i} t_{ij} \geq a_i, \quad i=1,3. \tag{3.3}$$

我们还注意到，根据定义，$f_{2,j}$ 与 $\mathbf{0}_m$ 不相交，因此 $f_{2,j}(\mathbf{0}_m) \neq 0$。

由于 $\tilde{h}_0(x) = C\prod_{i=1,\ 3}\prod_{j=1}^{a_i}\tilde{g}_{ij}$ 和

$$h_0(x) = C\prod_{i=1,3}\prod_{j=1}^{a_i} g_{ij}, \tag{3.4}$$

这些观察结果以及 (3.3) 给出

$$a_1+a_3 \leq \sum_{i=1,3}\sum_{j=1}^{a_i} t_{ij} = p_1. \tag{3.5}$$

同样地，我们发现，

$$a_2+a_3 \leq p_2. \tag{3.6}$$

结合（3.5）和（3.6），我们得出

$$a_1+a_2+a_3 \leq a_1+a_2+2a_3 \leq p_1+p_2. \tag{3.7}$$

因此，连通分支的总数 $a_1+a_2+a_3$不超过 p_1+p_2，而（3.7）清楚地表明， $a_1+a_2+a_3=p_1+p_2$ 必然导致 $a_3=0$，证毕。□

3.2. 定理的证明。

定理的证明 2.4。 为简单起见，我们假设假设条件的前半部分 (A_4) 成立，即

$$\deg(\widetilde{h}_0) + \deg((\widetilde{h}_\infty(\hat{x}))^+) > \deg(\widetilde{\mathcal{P}}^+). \tag{3.8}$$

由引理 3.1 可知， $\mathcal{P}^+(x)$ 至多有 p_1+p_2 个不可约因子。为导出矛盾，假设 $\mathcal{P}^+(x)$ 恰好有 p_1+p_2 个不可约因子。根据引理 3.1，我们可以写成 $\mathcal{P}^+ = fg$，其中 f 是一个满足 $\mathbf{0}_m$ 但不满足 $(\mathbf{0}_{m-1}, \infty)$ 的多项式，而 g 是一个满足 $(\mathbf{0}_{m-1}, \infty)$ 但不满足 $\mathbf{0}_m$ 的多项式。根据 h_0 和 h_∞ 的定义，以及关于 f 和 g 的假设，我们有：

$$f(x^{\odot l}) = C_1(\widetilde{h}_0(x) + f_1(x)) \tag{3.9}$$

~其中， $f_1(x)$ 中的每一项的次数都高于 $h_0(x)$ 的次数，并且

$$g(x^{\odot l}) = C_2(\widetilde{h}_\infty(\hat{x}) + g_1(\hat{x}))x_m^{\alpha'} \tag{3.10}$$

其中 $g_1(\hat{x})$ 由 $\hat{x}$ 的高阶项组成，而 α' 是一个适当的常数，即。 y,

$$\alpha' = \max\{\alpha_{0,\tilde{h}_\infty(x)}(m), \alpha_{0,g_1}(m)\},$$

其中 α_0 定义如（2.4）所示。简单来说， α' 的定义方式使得 $x_m^{-\alpha'}$ 是~ ~在和式 x_m 中出现的最低 $h_\infty(\hat{x}) + g_1(\hat{x})$。接下来，令 $f(x) = f(x^{\odot l})$

$$\deg \widetilde{\mathcal{P}}^+ \geq \alpha' + \deg(\widetilde{h}_\infty(\hat{x})) + \deg(\widetilde{f}) \geq \deg((\widetilde{h}_\infty(\hat{x}))^+) + \deg(\widetilde{h}_0), \tag{3.11}$$

这与我们的假设（3.8）矛盾。因此， $\mathcal{P}$ 至多有 p_1+p_2-1 个分支，证毕。

~ ~ ~当 $\deg((h_0(\hat{x}))^+) + \deg((h_\infty(x))) > \deg((\mathcal{P}(\hat{x}))^+)$ 时，情形的证明类似。 □

定理 2.6 的证明。假设 $\mathcal{P}(x)$ 有 p_1+p_2 不可约分支。我们可以依照定理 2.4 的证明，得到不等式链 (3.11)。由假设 (A_4') 的前半部分，即 $\deg h_0 + \deg((h_\infty(\hat{x}))^+) = \deg \mathcal{P}^+$，这些不等式必然全都是等式~ ~因此，由 (3.9) 和 (3.10) 可得 $\alpha' = \alpha_{0,\tilde{h}_\infty}$ 以及 $\deg(f) = \deg(h_0)$。由后者，我们推出 $f_1 \equiv 0$。类似地，利用假设 (A_4') 的后半部分，我们得到 $g_1 \equiv 0$，证明完毕。 □

4. Floquet Transform in the Matrix-Valued Case

定理 2.4 和 2.6 中的结果之所以令我们尤为关注，是因为它们可应用于薛¨定格算子，尤其有助于估计色散关系及其在常能量下的限制所包含的连通分支数。前者估计了 布洛赫簇的连通分支数，后者则估计与 费米簇相关的连通分支数。在陈述一般结果的推论之前，我们先介绍离散情形下 Floquet 理论的一些基本术语和结果，沿用 [9]。若想更全面地了解相关内容，我们推荐阅读 Kuchment 的综述 [16]及其中的参考文献。

由于我们关注图上的周期算子，讨论弗洛凯变换的矩阵值版本会很方便。这是众所周知的。为方便读者，我们在此概述相关内容并固定记号。为此，取 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\nu \in \mathbb{N}$；这里它表示矩阵的阶数，后文则表示给定周期图中顶点轨道的数量

。对于集合 S，我们用 $\mathbb{C}^{\nu\times S}$ 表示从 $\{1,2,\ldots,\nu\}\times S$ 到的函数集合

接下来我们考虑基本希尔伯特空间

$$\begin{aligned}\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^\nu) &\cong \ell^2(\nu\times\mathbb{Z}^d)\\ &= \left\{\varphi\in\mathbb{C}^{\nu\times\mathbb{Z}^d}:\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}|\varphi(j,l)|^2<\infty\right\}.\end{aligned}$$

现在，我们来定义这个空间上所关注的算子。给定

$$\{a_n^{ij}:n\in\mathbb{Z}^d,\ 1\le i,j\le\nu\}$$

使得对于每个 $1\le i$、$j\le\nu$，a^{ij} 都具有紧支撑，相应的矩阵值 Toeplitz 算子 A：$\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^\nu)\to\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^\nu)$ 定义为

$$[A\psi](i,l)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{l'\in\mathbb{Z}^d}a_{l-l'}^{ij}\psi(j,l'),\quad 1\le i\le\nu,\ l\in\mathbb{Z}^d. \tag{4.1}$$

将其改写为矩阵形式是很有帮助的，尤其是因为我们稍后还将描述其他一些分块分解。更具体地说，令 $\psi(l)=[\psi(1,l)\ldots,\psi(\nu,l)]^\top\in\mathbb{C}^\nu$ 表示 $\psi\in\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^\nu)$，并记为

$$A(l)=\begin{bmatrix}a_l^{11} & \cdots & a_l^{1\nu}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_l^{\nu1} & \cdots & a_l^{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

并注意到，我们可以将（4.1）改写为

$$[A\psi](l)=\sum_{l'\in\mathbb{Z}^d}A(l-l')\psi(l'),\quad l\in\mathbb{Z}^d. \tag{4.2}$$

为了添加一个势函数，我们考虑 V：$\nu\times\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$ 有界，并定义 $[V\psi](i,l)=(\ ,\ )(\ ,\ )$，其中 和 $\mathbb{Z}$。接下来，我们关注算子 $V\ i\ l\ \psi\ i\ l\quad 1\le i\le\nu\quad l\in\ ^d$

$$H=A+V. \tag{4.3}$$

对于 $q\in\mathbb{N}^d$，如果对于所有 $1\le j\le\nu$ 和 $n,l\in\mathbb{Z}^d$，均有 $V$is q-周期的，则称 V 为 q-周期的。在这种情况下，记为

$$W=\{w\in\mathbb{Z}^d:0\le w_i<q_i\ \forall 1\le i\le d\}$$

其基本域，并将 $\Gamma=\{l\odot q:l\in\mathbb{Z}^d\}$ 记为周期格。记 $q^*=(q_1^{-1},\ldots,q_d^{-1})$，则对偶格定义为 $\Gamma^*=\{l\odot q^*:l\in\mathbb{Z}^d\}=\{(\frac{l_1}{q_1},\ldots,\frac{l_d}{q_d}):l\in\mathbb{Z}^d\}$.

[2]回顾一下 $x\odot y=(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_dy_d)$

现在让我们定义 $\mathbb{L}^d_* \equiv \mathbb{R}^d/\Gamma^*$，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{q,\nu} &= \left\{ f : \nu \times W \times \mathbb{L}^d_* \to \mathbb{C} : \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{w\in W} \int |f(j,w,k)|^2 \frac{dk}{|\mathbb{L}^d_*|} < \infty \right\} \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{\nu} \int_{\mathbb{L}^d_*}^{\oplus} \mathbb{C}^W \frac{dk}{|\mathbb{L}^d_*|} \\ &\cong L^2\left(\mathbb{L}^d_*, \mathbb{C}^{\nu\times W}; \frac{dk}{|\mathbb{L}^d_*|}\right).\end{aligned}$$

Floquet 变换的第一个版本由 $\mathscr{F}_{q,\nu}$ 给出：$\ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu) \to \mathscr{H}_{q,\nu}$, $u \mapsto \widehat{u}$ 其中

$$\widehat{u}(j,w,k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi \mathbf{i}\langle n\odot q, k\rangle} u(j, w+n\odot q),$$

对于 $1 \le j \le \nu$、$w \in W$ 和 $k \in \mathbb{L}^d_*$，这将 H 共轭为一个可分解算子，其在 $\mathscr{H}_{q,\nu}$ 的第 k 个纤维上的作用由 H 在满足边界条件的 $\{1,\dots,\nu\}\times W$ 上的限制给出。

$$u(j, n+m\odot q) = e^{2\pi\mathbf{i}\langle m\odot q,k\rangle} u(j,n),\ n,m\in\mathbb{Z}^d,\ 1\le j\le\nu. \tag{4.4}$$

更准确地说，对于 $k \in \mathbb{L}^d_*$，在 $\mathbb{C}^{\nu\times W}$ 上定义 $\widetilde{H}(k)$ 为

$$\begin{aligned}[\widetilde{H}(k)u](i,w) &= V(i,w)u(i,w) + \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{w'\in W}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi\mathbf{i}\langle l\odot q,k\rangle} a^{ij}_{w-(w'+l\odot q)} u(j,w') \\ &= V(i,w)u(i,w) + \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{w'\in W}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi\mathbf{i}\langle l\odot q,k\rangle} a^{ij}_{w-(w'+l\odot q)} u(j,w')\end{aligned} \tag{4.5}$$

对于 $1 \le i \le \nu$、$w \in W$。我们有如下结论：

命题 4.1。算子 $\mathscr{F}_{q,\nu}$ 是酉的。如果 V 是 q-周期的，则

$$\mathscr{F}_{q,\nu} H \mathscr{F}^*_{q,\nu} = \int_{\mathbb{L}^d_*}^{\oplus} \widetilde{H}(k) \frac{dk}{|\mathbb{L}^d_*|},$$

其中 $H(k)$ 与 (4.5)中相同。

证明。由直接计算即可得出。 □

对于我们的目的而言，H 命题 4.1 中的形式并非最优，因为对 $H(k)$ 的依赖关系可能会因 Floquet 乘子而变得非常复杂。为了计算渐近项，采用 Floquet 变换的另一种形式会很有帮助，这种形式能够将乘子置于一个（分块）对角线上。

为了描述这一点，令 $Q = \#W = q_1 q_2 \cdots q_d$，并考虑由向量 $u : \{1,2,\dots,\nu\}\times W \to \mathbb{C}$ 组成的 νQ 维向量空间 $\mathbb{C}^{\nu\times W}$。对于 $k \in \mathbb{B}^d$，Floquet 变换 $\mathscr{F}(k) : \mathbb{C}^{\nu\times W} \to \mathbb{C}^{\nu\times W}$ 的相应纤维定义为

$$[\mathscr{F}(k)u](j,w) = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{n\in W} e^{-2\pi\mathbf{i}\langle w\odot q^* + k, n\rangle} u(j,n). \tag{4.6}$$

结果证明，$\mathscr{F}(k)H(k)\mathscr{F}(k)^*$ 具有一种简单的形式：一个仅依赖于 A 和 k 的块对角算子，加上一个仅依赖于 V（而不依赖于 k）的块算子。

对于 $1 \le i$、$j \le \nu$，定义

$$p_{ij}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n^{ij} z^{-n} \tag{4.7}$$

并考虑由下式给出的 $p(z) \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$。

$$p(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) & \dots & p_{1\nu}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) & \dots & p_{2\nu}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\nu 1}(z) & p_{\nu 2}(z) & \dots & p_{\nu\nu}(z). \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

给定 $q \in \mathbb{N}^d$ 和 $n \in \mathbb{Z}^d$，向量 $\mu_n = \mu_{n,q} \in (\mathbb{C}^\star)^d$ 定义为

$$\mu_n^j = e^{2\pi \mathbf{i} n_j / q_j}, \quad 1 \le j \le d. \tag{4.9}$$

使用 μ_n 如（4.9）所示，定义

$$\mathcal{D}_z(n, n') = p(\mu_n \odot z)\delta_{n,n'}, \ n, n' \in W, \tag{4.10}$$

其中 $z = (e^{2\pi \mathbf{i} k_1}, \dots, e^{2\pi \mathbf{i} k_d})$，我们将其简写为 $z = \exp(2\pi \mathbf{i} k)$。

线性算子 D_z 在 $\mathbb{C}^{\nu \times W}$ 上的作用因此为（分块对角）算子 $D_z = \operatorname{diag}(\mathcal{D}_z(n, n))$，即，

$$[D_z u](w) = p(\mu_w \odot z)u(w), \quad w \in W, \tag{4.11}$$

其中，与前文类似，我们记 $u(w) = [u(1, w) \dots, u(\nu, w)]^\top \in \mathbb{C}^\nu$。等价地，选取一个枚举 $W = \{w_1, \dots, w_Q\}$，可以将 D_z 写成一个分块对角矩阵。

$$D_z = \begin{bmatrix} p(\mu_{w_1} \odot z) & & & \\ & p(\mu_{w_2} \odot z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\mu_{w_Q} \odot z) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

with $\nu \times \nu$ 个方块位于对角线上，所有未指定的方块均为零。

将 q-周期函数 $g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 在 Γ^* by 上的离散傅里叶变换写为

$$\widehat{g}_l = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{n \in W} e^{-2\pi \mathbf{i} \langle l, n \rangle} g_n, \quad l \in \Gamma^*,$$

我们将 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_V$ 定义为

$$\mathcal{B}(n, n') = \operatorname{diag}\left(\widehat{V}_1 \left(q^* \odot (n - n') \right), \dots, \widehat{V}_\nu \left(q^* \odot (n - n') \right) \right), \ n, n' \in W, \tag{4.13}$$

其中我们回顾 $q^* = (q_1^{-1}, \dots, q_d^{-1})$。

相应的算子 $B = B_V$ 在 $\mathbb{C}^{\nu \times W}$ 上的分块矩阵形式与 D_z类似：

$$[B_V u](w) = \sum_{w' \in W} \mathcal{B}_V(w, w')u(w'). \tag{4.14}$$

像之前一样枚举 $W=\{w_1,\dots,w_Q\}$，可以将 B_V写成如下 $Q\times Q$ 分块矩阵

$$B_V=\begin{bmatrix}\mathcal{B}(w_1,w_1) & \mathcal{B}(w_1,w_2) & \cdots & \mathcal{B}(w_1,w_Q)\\ \mathcal{B}(w_2,w_1) & \mathcal{B}(w_2,w_2) & \cdots & \mathcal{B}(w_2,w_Q)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{B}(w_Q,w_1) & \mathcal{B}(w_Q,w_2) & \cdots & \mathcal{B}(w_Q,w_Q)\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

其中每个块均为 $\nu\times\nu$。

命题 4.2. 假设 V 是 q-周期的。那么

$$\mathscr{F}(k)\widetilde{H}(k)\mathscr{F}(k)^*=D_z+B_V \tag{4.16}$$

对于每个 k，其中 D_z 和 B_V 如上所述。特别地，记 $\mathscr{F}=\int^{\oplus}_{\mathbb{L}^*_d}\mathscr{F}(k)$，则有

$$\mathscr{F}\widetilde{H}\mathscr{F}^*=\int^{\oplus}_{\mathbb{L}^*_d}(D_{\exp 2\pi\mathbf{i}k}+B_V)\,\frac{dk}{|\mathbb{L}^*_d|}. \tag{4.17}$$

证明。这可由一个与以下命题证明中几乎完全相同的计算得出 [9, 命题 5。3]。□

命题 4.3. 假设 V 是 q-周期的，并令

$$\widetilde{\mathcal{P}}(z,\lambda)=\det(D_z-B_V-\lambda I), \tag{4.18}$$

其中，D_z 和 B_V 与前文相同。对于任意的 $w\in W$，

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\mu_w\odot z,\lambda)\equiv\widetilde{\mathcal{P}}(z,\lambda). \tag{4.19}$$

~特别地，对于某个适当的 Laurent 多项式 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}(z,\lambda)=\mathcal{P}(z^{\odot q},\lambda)$。

证明。对于 $w\in W$，令 $T_w:\mathbb{C}^{\nu\times W}\to\mathbb{C}^{\nu\times W}$ 表示算子。

$$[T_wu](j,w')=u(j,\{w'-w\}),\quad 1\le j\le\nu,\ w'\in W,$$

其中，对于 $n\in\mathbb{Z}^d$，$\{n\}$ 表示与 n 模 Γ等价的 W中的唯一元素。通过直接计算，$T_w^*D_zT_w=D_{\mu_w\odot z}$和 $T_w^*B_VT_w=B_V$，因此

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\mu_w\odot z,\lambda)=\det(T_w^*(D_z+B_V-\lambda)T_w)=\widetilde{\mathcal{P}}(z,\lambda),$$

如所愿。第二个结论随即由 [9, Le 得出。引理 3.1]. □

最后，我们指出，上述框架以一种规范的方式涵盖了周期图上所有有限程平移不变算子。

更准确地说，回顾一下，图 $\mathcal{G}$ 由一个非空顶点集 $\mathcal{V}$ 和一个由 $\mathcal{V}$ 中元素构成的无序对集合 $\mathcal{E}$ 组成，这些无序对称为边。一个 $\mathbb{Z}^d$-周期图是一个局部有限图 $\mathcal{G}$，$\mathbb{Z}^d$ 在其上自由且余紧地作用。我们将 $\mathbb{Z}^d$ 的作用记为加法形式，因此，$\mathbb{Z}^d$ 自由作用这一假设可以表示为

$$v+n\neq v,\quad\forall n\neq\mathbf{0}_d.$$

平移 $v\mapsto v+n$ 通过 $[U_nf](v)=f(v+n)$ 诱导出酉算子 $U_n:\ell^2(\mathcal{V})\to\ell^2(\mathcal{V})$。若有界算子 A 在 $\ell^2(\mathcal{V})$ 上满足 $AU_n=U_nA$对所有 $n\in\mathbb{Z}^d$都成立，则称其为平移不变的。

考虑一个平移不变算子 A，并选取一个基本域 $\mathcal{V}_f$，使得$\mathcal{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{V}_f+n)$。令 $\nu=\#\mathcal{V}_f$，并记为 $\mathcal{V}_f=\{v_1,\dots,v_\nu\}$。因此，任意 $v\in\mathcal{V}$都可以写成 v_j+n，其中 $j\in\{1,2,\dots,\nu\}$ 和 $n\in\mathbb{Z}^d$。

我们进一步假设， A 的作用范围有限，即存在 $r > 0$ 使得

$$\langle \delta_{v_i+n}, A\delta_{v_j+m}\rangle = 0 \quad \text{whenever } |n-m| > r. \tag{4.20}$$

由 Φ 给出的映射 $\ell^2(\mathcal{V}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu)$ 彩神

$$[\Phi f](j,n) = f(v_j + n)$$

是酉的，且 $\Phi A \Phi^*$ 是对应于系数 a_n^{ij} 的矩阵 Toeplitz 算子，其定义为

$$a_n^{ij} = \langle \delta_{v_i+n}, A\delta_{v_j}\rangle, \tag{4.21}$$

如上所述。

5. Applications to the Lieb Lattice

维数为 $d = 2$ 的 Lieb 晶格是一个图，其顶点为 $\mathcal{V}$ 由所有 $n \in \mathbb{Z}^2$ 满足 n_1 且 n_2 不同时为奇数的点组成。随后，当 $\|n-m\|_1 = 1$时，将一对顶点 n 和 m 用一条边连接。参见图 1；其中，黑色顶点是属于 2 的那些顶点 $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2$.

我们用 A 表示 Lieb晶格上的邻接算子，以及作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^3)$ 上的相应算子$A+V$，其中 $V\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^3$ 是 q-周期的。让我们利用上一节讨论的联系，将其写成矩阵值周期算子。参见图 1，令 ψ_1、 ψ_2和 ψ_3 分别表示相应黑色、红色或蓝色顶点处的 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^3)$ 值。令 $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ 表示标准基，并在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上定义 $\Delta_{\pm e_j}$ 如下。

$$[\Delta_{\pm e_j}\psi](n) = \psi(n) + \psi(n \pm e_j), \quad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2),$$

读者可以验证，

$$[A\psi](n) = \begin{bmatrix} [\Delta_{-e_1}\psi_2](n) + [\Delta_{-e_2}\psi_3](n) \\ [\Delta_{e_1}\psi_1](n) \\ [\Delta_{e_2}\psi_1](n) \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

以矩阵形式：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{-e_1} & \Delta_{-e_2} \\ \Delta_{e_1} & 0 & 0 \\ \Delta_{e_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

现在利用命题 4.2，将 $A+V$ 的弗洛凯矩阵（其中 A 如（5.1）所示）写成 $3Q \times 3Q$ 矩阵 $D_z + B_V$。

由（4.8）和（5.2）， p（z）可得

$$p(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1+z_1^{-1} & 1+z_2^{-1} \\ 1+z_1 & 0 & 0 \\ 1+z_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

so

$$\det(p(z) - \lambda I) = (-\lambda)(z_1^{-1} + z_1 + z_2^{-1} + z_2 + \lambda^2 + 4) \tag{5.4}$$

注意，因子 λ 表明算子 A 存在一条平带。事实上，可以验证

$$\psi(n)=\begin{cases}+1 & n=(0,1),\ (2,1)\\ -1 & n=(1,0),\ (1,2)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{5.5}$$

定义了一个属于 A、特征值为 0 且具有紧支撑的特征函数。

<escape>回顾一下，矩阵 $B=B_V$是一个 $3Q\times 3Q$矩阵，由（4.13）和（4.15）给出，其分块具有以下形式</escape>

$$\mathcal{B}(n,n')=\begin{bmatrix}\widehat{V}_1(n-n') & 0 & 0\\ 0 & \widehat{V}_2(n-n') & 0\\ 0 & 0 & \widehat{V}_3(n-n')\end{bmatrix}\quad n,n'\in W. \tag{5.6}$$

与 $_2$的邻接算子相比，额外顶点的引入带来了更多相互作用，这显著增加了费米簇研究的复杂性，尤其是在存在周期势的情况下。对于非平凡的~的选择 V而言，由于非对角块的贡献，计算 $\mathcal{P}(z)=\det(D_z+B_V-\lambda I$的不可约分支数量及其相关的 $\mathcal{P}(z)$要困难得多。下文将说明，对于2.6 定理中的所有参数值（除有限多个值外），后者的不可约性均可由该定理推出。 λ。

在证明 Lieb 晶格的主要不可约性结果之前，我们需要一个关于渐近项的适当技术性结果。首先引入一些记号。固定 $\lambda\in$ C。令 $\widetilde{\mathcal{P}}(z)=det(D_z+B_V-\lambda I)$，其中 D_z和 B_V由 (4.11) 和 (4.15) 给出。根据命题 4.3，~ ~ ~存在一个多项式 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}(z)=\mathcal{P}(z^{\odot q})$。按照第 2 节中的定义，定义 h_0 h_0、 h_∞和 h_∞。

由于我们关注的是费米簇，因此希望将 $\mathcal{P}$ 视为关于变量 z 的多项式，其中 λ 固定不变。因此，通常我们写作 $\mathcal{P}(z)$，除非需要明确指出其对 λ的依赖关系，此时则写作 $\mathcal{P}(z;\lambda)$。对于 h_0、 h_∞等，也采用类似的记号。

引理 5.1. 如果 gcd$(q_1,q_2)=1$，那么对于除有限多个 λ之外的所有情况， h_0 和 h_∞ 都是不可约的。

证明。我们只证明 h_0 的不可约性，因为 h_∞ 的结果是类似的。根据~、 D_z 和 B_V 的结构，可以很容易地验证， $\mathcal{P}(z)$ =det$(D_z-B_V-\lambda I)$ 的最低次项具有如下形式

$$r_0(z)=\sum c_\alpha z^\alpha$$

其中求和遍历满足 $\alpha_1+\alpha_2=-Q=-q_1q_2$ 的那些 $\alpha\in[-q_1q_2,0]^2\cap$ ^{2}。此外，由于对于每个 $n\in W$， $r_0(z)=r_0(\mu_n\odot z)$，因此 $r_0(z)$ 中唯一可能具有$c_\alpha\neq 0$ 的项是对于整数 $-q_2\le m_1\le 0$ 和 $-q_1\le m_2\le 0$ 满足 $\alpha_1=m_1q_1$ 和 $\alpha_2=m_2q_2$ 的项。由于 最大公约数$(q_1,q_2)=1$，方程的唯一解是

$$m_1q_1+m_2q_2=-q_1q_2$$

在给定范围内，分别为 $(m_1,m_2)=(-q_2,0)$ 和 $(m_1,m_2)=(0,-q_1)$。特别是，

$$r_0(z)=c_2z_1^{-Q}+c_1z_2^{-Q},$$

其中，对于 $j=1$， $c_j=c_j(\lambda)$。由此可得：

$$\widetilde{h}_0(z)=(z_1z_2)^Qr_0(z)=c_1z_1^Q+c_2z_2^Q.$$

我们将在下文看到， $c_1(\lambda)$ 和 $c_2(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式，且不恒等于零。因此，对于除有限多个 λ 之外的所有 λ， $h_0(z) = c_1 z_1^{q_2} + c_2 z_2^{q_1}$ 都是不可约的；事实上，当且仅当 $c_1(\lambda)$ 和 $c_2(\lambda)$ 均非零时， λ 对应的 $h_0(z)$ 才是不可约的。为了完成证明，我们现在通过使用置换 σ 展开 $\det(D_z + B_V - \lambda I)$，证明 $c_2(\lambda) \not\equiv 0$ （关于 $c_1(\lambda)$ 的论证类似）： $\{1, \dots, 3Q\} \to \{1, \dots, 3Q\}$。注意， $c_2(\lambda)$ 中的最高次数项恰好由置换 τ 给出，其为

$$\tau(j) = \begin{cases} j+1 & \text{if } j \equiv 1 \bmod 3 \\ j-1 & \text{if } j \equiv 2 \bmod 3 \\ j & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{5.7}$$

由此得到 $\det(D_z + B_V - \lambda I)$ 中的一项，形式为 $(-1)^Q(\widehat{V}_3(0) - \lambda)^Q z_1^{-Q}$。因此， $c_2(\lambda)$ 是关于 λ 的次数为 Q 的多项式，从而完成证明。□

引理 5.2. 设 $\mathcal{P}(z) = \det(D_z + B_V - \lambda I)$ 如上，且 $\gcd(q_1, q_2) = 1$。设 $\mathcal{P}(z)$ 满足 $\widetilde{\mathcal{P}}(z) = \mathcal{P}(z^{\odot q})$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均成立。那么，对于除有限多个 λ 值以外的所有取值， $\mathcal{P}(z)$ 的每个因子都与 $(0,0)$ 或 $(0,\infty)$ 相交。

证明. 假设 $z(n) = (z_1(n)\ z_2(n)) \in V(\widetilde{\mathcal{P}})$，其中 $z(n) \to y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ 且 $\overline{y_1} = 0$。对于除有限多个 λ 以外的所有取值，这迫使 $y_2 \in \{0, \infty\}$ 成立。事实上，如果 $y_2 \in \mathbb{C}^\star$，那么我们按照引理 5.1 的证明可得

$$\widetilde{\mathcal{P}}(z(n)) = c_2(\lambda)\frac{1}{z_1(n)^Q} + O(z_1(n)^{-(Q-1)}).$$

每当 c_2 不为零（即 λ 不属于一个有限集），这就给出 $\mathcal{P}(z(n)) \to \infty$，这与 $z(n) \in V(\mathcal{P})$ 矛盾。

由于 $z(n) \to (0,0)$（分别地， $z(n) \to (0,\infty)$）当且仅当 $(z(n))^{\odot q} \to (0,0)$（分别地， $(z(n))^{\odot q} \to (0,\infty)$），因此很容易推出 $\mathcal{P}(z)$ 的每个因子都经过 $(0,0)$ 或 $(0,\infty)$。□

推论 5.3. 如果最大公约数 $(q_1, q_2) = 1$ Lieb晶格上薛定谔算子的费米簇 $A + V$ 由 (5.1) 除有限多个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 外均不可约。

证明。鉴于前面证明中的讨论，当周期 q_1 和 q_2 互素（$z_1 z_2$）时， $Q\det(D_z + B_V - \lambda I)$ 的最低次项具有如下形式

$$\widetilde{h}_0(z) = c_{01}(\lambda, V) z_1^Q + c_{02}(\lambda, V) z_2^Q \tag{5.8}$$

其中，每个 $c_{0j}(\lambda, V)$ 都是关于 λ 的 Q 次多项式，原则上还取决于所有 $l \in W$ 对应的 $V(l)$。特别地，存在一个有限集 $\mathcal{Z}_0$，使得当 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_0$ $h_0(z, \lambda)$ 不含任何单项式因子时。同样地（或者通过对称性考虑），可以验证 $\widetilde{h}_\infty(z) = c_{11}(\lambda, V) z_1^Q + c_{12}(\lambda, V) z_2^Q$，其中每个 $c_{1j}(\lambda, V)$ 都是关于λ的 Q 次多项式，因此 $(\widetilde{h}_\infty(\hat{z}))^+ = c_{12}(\lambda) + c_{11}(\lambda) z_1^Q z_2^Q$。由此可知，对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_0$， $(\widetilde{h}_\infty(\hat{z}))^+$ 也不含任何单项式因子。特别地

$$\deg \widetilde{h}_0(z) + \deg(\widetilde{h}_\infty(\hat{z}))^+ = \deg \widetilde{\mathcal{P}}^+(z) = 3Q.$$

因此，对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_0$，定理 2.6 的假设均成立。由此可知，若 $\mathcal{P}(z)$ 可约，则必有

$$(z_1 z_2)^Q \widetilde{\mathcal{P}}(z) = K[c_{01}(\lambda) z_2^Q + c_{02}(\lambda) z_1^Q] \tag{5.9}$$

$$\times [c_{12}(\lambda) + c_{11}(\lambda) z_1^Q z_2^Q]. \tag{5.10}$$

其中 $K = K(\lambda)$ 是 λ的有理函数。我们将证明，除有限多个 λ外，上述设定都会导致矛盾。事实上，等式（ λ 的左端最高次幂（5.9）为 $3Q$。由于每个多项式 $c_1(\lambda)$ $c_2(\lambda)$ 的次数均为 Q，由此可得 $K(\lambda) \sim \lambda^Q$ ，即

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{K(\lambda)}{\lambda^Q} = C \neq 0.$$

然而，这意味着右侧 z_2^Q 的系数是 λ^{3Q}的量级，而左侧 z_2^Q 的系数是 λ^Q的量级，这与引理 5.1 的证明一致。因此，除非 λ属于某个代数集，否则便会导致矛盾。特别地，对于除有限多个 λ之外的所有取值， $\mathcal{P}(z)$ 都是不可约的。 □

6. Applications to Decorated Lattices

本说明的主要结果的另一项应用涉及通过具有 $\nu \in$ 个顶点的多边形对 $\mathbb{Z}^d$ 进行的某些图装饰。令 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示从 $\mathbb{Z}^d$ 出发，在每个 $n \in \mathbb{Z}^d$处附加一个阶为 ν 的环图所得到的图。更准确地说， $\mathcal{G}$ 的顶点由 $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^\nu$ 给出，其边描述如下：

- 对于任意 $n, n' \in \mathbb{Z}^d$ 且满足 $\|n - n'\|_1 = 1$，从 $(n, 0)$ 到 $(n', 0)$ 有一条边
- 对于任意 $n \in \mathbb{Z}^d$和 $j \in \mathbb{Z}^\nu$，从 (n, j) 到 $(n, j+1)$ 以及到 $(n, j-$ 有边 1).

图 2 展示了 $d = 2$ 和 $\nu = 3$ 的情况。黑色顶点表示 $(n,0)$，其中$n \in \mathbb{Z}^2$；蓝色顶点表示 $(n, \pm 1)$。当 $\nu = 2$ 时，图由线段装饰，这种情况是 Aizenman 和 Schenker 为构造谱隙而研究的图的一个例子，参见 [29, 图 2]。

现在令 A 表示 $\ell^2(\mathcal{V})$ 上的邻接算子。与上一节一样，可以将其写成一个具有矩阵系数的周期算子。对于 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu)$，我们将坐标函数 $\psi(j, n)$ 视为 ψ 在 $(n, j - 1 \bmod \nu)$ 上的取值。根据这些定义，有】【。

$$[A\psi](n) = \begin{bmatrix} [\Delta\psi_1](n) + \psi_2(n) + \psi_\nu(n) \\ \psi_1(n) + \psi_3(n) \\ \vdots \\ \psi_{\nu-2}(n) + \psi_\nu(n) \\ \psi_{\nu-1}(n) + \psi_1(n) \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

其中，顶行的 Δ 表示作用于$\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$上的邻接算子。图 $d = 2$ 和 $\nu = 3$ 的部分示例见图2。

这一次，弗洛凯矩阵的对角块由以下内容生成：

$$p(z) = \begin{bmatrix} b_0(z) & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

其中 $b_0(z) = z_1 + z_1^{-1} + \ldots + z_d + z_d^{-1}$，未指定的所有元素均为 0。现在考虑具有 q-周期势 V 的算子 $H = A + V$：$\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$。

~我们将在下文验证，色散关系 $\mathcal{P}(z) = \det(D_z + B_V - \lambda I)$ of $A+V$，其中 A如式 (6.1) 所示，且为 V q-周期的，在除有限多个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 之外的所有情况下，当 $d > 2$ （分别为 $d = 2$）时，满足定理 2.4 （分别为 2.6）的假设。按照第 节中的定义，定义 $\mathcal{P}$、 h_0、 h_0、
$\widetilde{h}_\infty$ h_∞ 2 和。

注意，根据上述定义

$$\widetilde{h}_0(z;\lambda) = \widetilde{h}_\infty(z;\lambda) = s(\lambda)(z_1 \cdots z_d)^Q \prod_{n\in W} r_0(\mu_n \odot z) \tag{6.3}$$

with $r_0(z) = z_1^{-1} + \ldots + z_d^{-1}$ 且 $s(\lambda)$ 是 λ 中次数为 $(\nu-1)Q$ 的多项式。

因此，

$$(\widetilde{h}_\infty(\hat{z};\lambda))^+ = s(\lambda)(z_1 \cdots z_{d-1})^Q \prod_{n\in W} r_\infty(\mu_n \odot z) \tag{6.4}$$

其中 $r_\infty(z) = r_0(\hat{z}) = z_1^{-1} + \ldots + z_{d-1}^{-1} + z_d$ 和 $s(\lambda)$ 如上所述。特别地，每当
~ ~$s(\lambda) \neq 0$ 时，我们有 $h_0(z)$ 和 $h_\infty(z)$ 均非零。

回顾一下，

$$\widetilde{h}_0(z) = h_0(z^{\odot q}) \text{ and } \widetilde{h}_\infty(z) = h_\infty(z^{\odot q}), \tag{6.5}$$

我们有如下结果。

引理 6.1。 如果 最大公约数$(q_1, \ldots, q_d) = 1$，那么 h_0和 h_∞由 (6.3)、(6.4)、(6.5) 给出的表达式除有限多个 λ外均为不可约的。例外 λ的有限集恰好是满足以下条件的集合：$s(\lambda) = 0$。

证明。 参见 [23,引理 5。1]。 □

~ ~引理 6.2。设 $\mathcal{P}(z) = \det($
$D_z + B_V - \lambda I)$，且设 $\mathcal{P}(z)$ 满足对所有$z \in \mathbb{C}$均有 $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z^{\odot q})$。那么，除有限多个 λ 值外， $\mathcal{P}(z)$ 的每个因子都与 $\mathbf{0}_d$ 或 $(\mathbf{0}_{d-1}, \infty)$ 相交。

~证明。若 $\mathcal{P}(z) = 0$ 且 $(z_1, \ldots, z_{d-1}) \to \mathbf{0}_{d-1}$，那么我们必有 $z_d \to 0$ 或 $z_d \to \infty$，否则便会有 $\widetilde{\mathcal{P}}(z) = s(\lambda)(z_1^{-Q} + \ldots + z_{d-1}^{-Q}) +$低阶项，其中 $s(\lambda)$ 是式 (6.3) 中的多项式~。特别地，每当 $s(\lambda) \neq 0$ 时，这就意味着 $\mathcal{P}(z) \to \infty$，这与矛盾相矛盾。由此，如引理 5.2 的证明所示， $\mathcal{P}(z)$ 的每个因子都与 $\mathbf{0}_d$ 或 $(\mathbf{0}_{d-1}, \infty)$ 相交。□

推论 6.3. 设 $d \geq 2$，并假设 $\gcd(q_1, \ldots, q_d) = 1$。那么，对于除有限多个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 外的所有情形， A 由 （6.1）给出的$A+V$的费米簇都是不可约的。

证明。如果 $d > 2$，那么由定理2.4可得此结果。事实上，在这种情况下，我们有~ ~
$\deg h_0(z) = (d-1)Q$ 且 $\deg((h_\infty(\hat{z}))^+) = Qd$ 由 （6.3） 和 （6.4） 可知。特别地，

$$\deg \widetilde{h}_0(z) + \deg((\widetilde{h}_\infty(\hat{z}))^+) = (2d-1)Q > (d+1)Q = \deg \widetilde{\mathcal{P}}^+(z),$$

这验证了假设(A_4)，因为 $d > 2$。此外，引理6.1 表明 $p_1 = p_2 = 1$。

对于 $d = 2$，我们有 $(2d-1)Q = (d+1)Q$因此，上述讨论意味着假设 (A_4') 成立，所以只需检验因式分解

$$\widetilde{\mathcal{P}}^+(z;\lambda) = K(\lambda)\widetilde{h}_0(z;\lambda)(\widetilde{h}_\infty(\hat{z};\lambda))^+$$

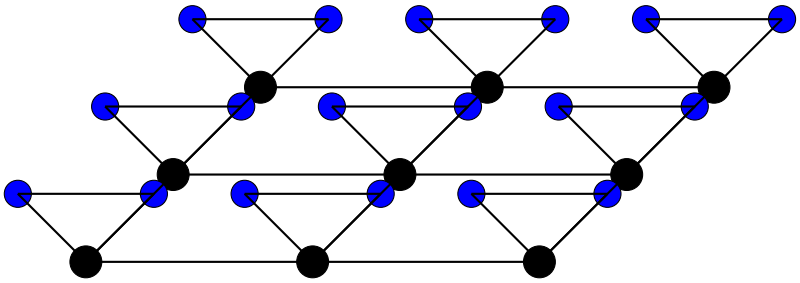

FIGURE 2. 一个 $\mathbb{Z}^2$ 三角形装饰

不可能发生。事实上，这将意味着

$$\begin{aligned}&(z_1z_2)^Q\det(D_z+B_V-\lambda I)\\&=K(\lambda)s^2(\lambda)(z_1z_2)^Qz_1^Q\left(\prod_{n\in W}r_0(\mu_n\odot z)\right)\left(\prod_{n\in W}r_\infty(\mu_n\odot z)\right).\end{aligned}\tag{6.6}$$

让我们说明，这种情况最多只会对有限多个 $\lambda\in\mathbb{C}$ 发生。首先，注意到 $\gcd(q_1,q_2)=0$ 意味着，对于任意 $n\in W\setminus\{\mathbf{0}_d\}$，$r_0(\mu_n\odot(z_1,-z_1))$ 都不恒为零。特别地，令 $z_2=-z_1$ 并展开 $\mathcal{P}(z_1,-z_1;\lambda)$，可见 $\widetilde{\mathcal{P}}(z_1,-z_1;\lambda)$ 中 z_1 的最高次幂具有如下形式：$t(\lambda)z_1^{Q-1}$，其中 $t(\lambda)$ 是关于 λ 的次数为 $\nu+(\nu-1)(Q-1)$ 的多项式。另一方面，若 (6.6) 对某个 λ 成立，则利用 $r_0(z_1,-z_1)=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{-z_1}=0$，得到

$$\widetilde{\mathcal{P}}^+(z_1,-z_1;\lambda)=0,\ \forall z_1\in\mathbb{C}.$$

特别地，(6.6) 仅当 $t(\lambda)=0$ 时才成立，而这又仅对有限多个 λ 成立。因此，$\mathcal{P}(z;\lambda)$ 对除有限多个 λ 之外的所有情形都是不可约的。□

REFERENCES

[1] J. Banks、J. Garza-Vargas 和 S. Mukherjee。通用覆盖树上周期算子的点谱。《国际数学研究通知》，2022年(22)：17713–17744，2022年。[2]D. B¨attig。二维布洛赫流形的环面紧化。博士学位论文，苏黎世联邦理工学院，1988年。[3] D. B¨attig。离散薛定谔算子的费米面的环面紧化。《赫尔维数学评论》，67(1)：1–16，1992年。[4] D. B¨attig、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复费米面的方向紧化。《组合数学》，79(2)：205–229，1991年。[5]D. Damanik、M. Lukic 和 W. Yessen。周期及极限周期雅可比矩阵与分块雅可比矩阵的量子动力学及其在若干量子多体问题中的应用。《数学物理通讯》，337(3)：1535–1561，2015年。[6] A. B. de Monvel 和 M. Sabri。周期与随机介质中的弹道输运，2022年。[7]M. Faust 和 J. Lopez-Garcia。周期图色散关系的不可约性。arXiv 预印本 arXiv:2302.11534，2023年。[8] J. Fillman。 $\mathbb{Z}^d$上的周期雅可比算子的弹道输运。载于《从算子理论到正交多项式、组合学与数论——献给 Lance Littlejohn 70 岁生日的论文集》，《算子理论：进展与应用》第285卷，第57–68页。Birkh¨auser/Springer，施普林格出版社所在地 Cham，[2021]©2021年。

[9] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。《有限程薛定谔算子的布洛赫簇不可约性》。《函数分析杂志》，283(10)：论文编号 109670，共 22 页，2022年。[10] D. Gieseker、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。《代数费米曲线的几何》，《数学展望》第 14 卷。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1993年。[11] W. Jiang、H. Huang 和 F. Liu。共价有机框架中的类 Lieb 晶格及其斯托纳铁磁性。《自然通讯》，10(2207)，2019年。[12] W. Jiang、S. Zhang、Z. Wang、F. Liu 和 T. Low。酞菁基金属有机框架中 Lieb 晶格的拓扑能带工程。《纳米快报》，20(3)：1959–1966，2020年。PMID：32078326。[13]H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复布洛赫簇的方向紧化。《赫尔维数学评论》，65(1)：114–149，1990年。[14] A. J. Koll´ar、M. Fitzpatrick、P. Sarnak 和 A. A. Houck。线图晶格：欧几里得与非欧几里得平带，以及在电路量子电动力学中的实现。《数学物理通讯》，376(3)：1909–1956，2020年。[15] E. Korotyaev 和 N. Saburova。周期离散图上的薛定谔算子。《数学分析及其应用杂志》，420(1)：576–611，2014年。[16] P. Kuchment。周期椭圆算子概述。《美国数学会通报（新系列）》，53(3)：343–414，2016年。[17] P. Kuchment。色散关系（布洛赫簇）和费米面的解析与代数性质：已知与未知，2023年。[18] P. Kuchment 和 B. Vainberg。受扰周期势下薛定谔算子嵌入特征值的不存在性。《偏微分方程通讯》，25(9-10)：1809–1826，2000年。[19]P. Kuchment 和 B. Vainberg。局部受扰周期图算子嵌入特征值对应特征函数的结构。《数学物理通讯》，268(3)：673–686，2006年。[20] W. Li 和 S. P. Shipman。平面周期图算子的费米面不可约性。《数学物理快报》，110(9)：2543–2572，2020年。[21]W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米等谱性。arXiv:2106.03726，2021年。[22] W. Liu。周期图算子的布洛赫簇与量子遍历性。arXiv 预印本 arXiv:2210.10532，2022年。[23] W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米簇不可约性与嵌入特征值。《几何与泛函分析》，32(1)：1–30，2022年。[24] W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米簇专题。《数学物理杂志》，63(2)：论文编号 023503，共 13 页，2022年。[25] W. Liu。¨上具有可分离势的离散周期薛定谔算子的费米等谱性。《数学物理通讯》，399(2)：1139–1149，2023年。[26]W. Liu。周期图算子的弗洛凯等谱性。arXiv 预印本 arXiv:2302.13103，2023年。[27]T. Mckenzie 和 M. Sabri。周期图的量子遍历性。arXiv 预印本 arXiv:2208.12685，2022年。[28] M. Sabri 和 P. Youssef。周期图的平带，2023年。[29] J. H. Schenker 和 M. Aizenman。图装饰产生谱隙。《数学物理快报》，53(3)：253–262，2000年。

[30] S. P. Shipman. 局部受扰周期图算子的嵌入特征值对应的无界支撑特征函数。《数学物理通讯》，332(2):605–626，2014年。电子邮箱：fillman@txstate.edu

Department of Mathematics, Texas State University, San Marcos, TX 78666, USA电子邮箱：liuwencai1226@gmail.com；wencail@tamu.eduDepartment of Mathematics, Texas A&M University, College Station TX,77843, USA.电子邮箱：matosrod@tamu.eduDepartment of Mathematics, Texas A&M University, College Station TX,77843, USA.