arXiv:2305.06493v3 [math.AG] 5 Jun 2024

叶层曲面奇点的补、指标定理与最小对数不一致性

Jihao Liu[1*]、Fanjun Meng[2†] 和 Lingyao Xie[3†]1*美国伊利诺伊州埃文斯顿市谢里登路 2033 号西北大学数学系，邮编 60201

.

通讯作者。电子邮箱：jliu@northwestern.edu；其他作者：fmeng3@jhu.edu；lingyao@math.utah.edu；
†这些作者对本研究贡献相同。

摘要

我们将若干关于对偶和簇的结果推广到带叶曲面对偶。我们证明了局部补的有界性、局部指标定理以及最小对数偏差（mld）的统一有界性，并确立了一致有理 lc 多面体的存在性。此外，我们针对 P. Cascini 和 C. Spicer 提出的关于叶状结构的两个问题给出了否定回答。我们还证明，Grauert-Riemenschneider 型消失定理通常不适用于曲面上的对数正则叶层。此外，我们确定了具有特定系数的带叶曲面对偶的最小对数偏差集合，由此重新获得了 Y.-A. Chen 关于带叶曲面最小对数偏差的升链条件猜想的证明。

关键词：叶层、曲面、奇点、最小对数不一致性、补。

1 引言

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。

叶层的研究是双有理几何中的一个重要课题。近年来，维数为 ≤ 3 的叶状簇的极小模型纲领取得了显著进展，参见 [15, 16, 54, 55]。尽管从极小模型纲领的角度来看，维数为 ≤ 3 的叶状结构的整体结构大多已得到解决。

尽管如此，关于叶层的局部结构，即叶层的奇点，仍有许多值得探索的问题。

近年来，叶层奇点研究中的一项重要成果是 Y.- A. Chen 对 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 对数正则带叶曲面奇点的分类 [19, 定理 0。1]。作为应用，Y.-A. Chen 证明了具有 DCC 系数的带叶曲面对的最小对数偏差（mld）满足升链条件（ACC） [19, 定理 0。2]。因此，人们自然会问，双有理几何中的其他标准猜想——例如补的有界性猜想和 Shokurov 的局部指标猜想——是否也适用于叶层。在本文中，我们研究这些猜想在曲面情形下的对应版本。

带叶曲面的局部补。补理论是现代双有理几何中的重要工具。Birkar 著名地证明了任意 Fano 型簇都存在补 [7, 定理 1。8], ，这一结果后来被用于 BAB 猜想的证明 [8]。这一理论同样可以自然地应用于叶层。例如，带叶曲面的 1-补在证明秩为 1 的带叶三维簇存在翻转方面发挥了关键作用 [15]。

自然会有人问，补的有界性是否也适用于叶状结构。本文证明了带叶曲面的局部补具有有界性：

定理 1.1. 设 ϵ 为非负实数， $\Gamma \subset [0,1]$ 为 DCC 集。那么存在一个正整数 N，仅取决于 ϵ 和 Γ，并满足以下条件。

假设 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 是一个满足 $B \in \Gamma$ 的 ϵ-lc 带叶曲面芽。那么 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 存在一个 (ϵ, N)-补 $(X \ni x, \mathcal{F}, B^+)$，即一个满足 $NB^+ \geq N\lfloor B \rfloor + \lfloor (N+1)\{B\} \rfloor$ 且 $N(K_{\mathcal{F}} + B^+)$ 在 x 附近是卡蒂埃的 ϵ-lc 带叶芽 $(X \ni x, \mathcal{F}, B^+)$。

此外，若 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$，则我们可以取 $B^+ \geq B$。

定理1.1 为支持叶状结构补的有界性提供了积极证据。关于曲面的补的形式化定义，请参阅定义 2.9 ；关于叶状结构补有界性猜想的正式表述，请参阅猜想 5.1 。我们计划在未来的工作中证明带叶曲面补有界性的整体情形和相对情形。

在特殊情形下，当 $\Gamma = 0$, [14, 问题 4] 询问（相对）Fano 型叶层是否总是存在一个 1-补。对于带叶曲面的局部情形，我们有如下结果，它对[14, 问题 4]给出了否定答案：

定理 1.2. 设 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 是一个带叶的对数正则曲面芽，且秩 $\mathcal{F} = 1$。则 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 有一个 2-补。此外，存在一些情形使得 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 没有 1-补。

定理 1.2表明，即使对于曲面上的秩为 1 的叶状结构，存在一个 1-补也可能是一种过于乐观的预期，尽管我们预期叶状结构的补具有有界性。我们还注意到，非例外曲面奇点总是具有一个 1-补或一个 2-补。因此，叶状 n -补的有界性中的显式取值可能与相同维数的非例外对的 n-补有界性中的显式取值 n 有关。 n。

Shokurov 的局部指标定理。定理1.1 的一个直接应用是带叶曲面的局部指标定理：

定理 1.3. 设 a 为一个非负有理数， $\Gamma \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 为一个 DCC 集。则存在一个仅依赖于 a 和 Γ 的正整数 I，使其满足以下条件。

假设 \((X \ni x, \mathcal{F}, B)\) 是一个带叶曲面芽，满足 $B \in \Gamma$ 且 $\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) = a$。那么 $I(K_{\mathcal{F}} + B)$ 在 x 附近是卡蒂埃的。

定理 1.3 可被视为朝着解决 Shokurov 关于带叶曲面的局部指标猜想这一方向的一项结果。该猜想提出于 [17, 猜想 6。3]。这一猜想是叶层研究中的一个重要开放问题，近年来备受关注。我们将在下文的猜想 5.2 中正式陈述该猜想并介绍其背景。

极小对数不一致性。本文给出了叶状曲面奇点的极小对数不一致性集合的一个刻画。

定理 1.4. 设 $\Gamma \subset [0,1]$ 为一个集合。则

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) \mid \dim X = 2, \mathrm{rank}\, \mathcal{F} = 1, B \in \Gamma\}\\ =&\left\{0, \frac{1 - \sum c_i \gamma_i}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, c_i \in \mathbb{N}, \gamma_i \in \Gamma\right\} \cap [0,1].\end{aligned}$$

定理 1.4 推出了以下两个关于 [19]的结果。

推论 1.5（=[19,注释 4.9]）。

$$\{\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}) \mid \dim X = 2, \mathrm{rank}\, \mathcal{F} = 1\} = \left\{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

推论 1.6（=[19, 定理 0.2]）。设 $\Gamma \subset [0,1]$ 为一个 DCC 集。则

$$\{\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) \mid \dim X = 2, \mathrm{rank}\, \mathcal{F} = 1, B \in \Gamma\}$$

满足升链条件（ACC）。

除了考察 mld 的可能取值之外，研究计算 mld 的除子的结构也是很自然的。我们有如下结果：

定理 1.7. 设 $\Gamma \subset [0,1]$ 为一个 DCC 集合。则存在一个正实数 l，其仅取决于 Γ，并满足以下条件。

假设 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 是一个满足 $B \in \Gamma$ 的对数正则叶状曲面芽。那么存在一个素除子 E，其位于 $X \ni x$ 之上，使得 $a(E, \mathcal{F}, B) = \mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 且 $a(E, \mathcal{F}, 0) \leq l$。

我们注意到，条件“$K_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃”并非定理 1.7所必需的，因为对于定义 3.12中所定义的数值对数正则叶状结构，最小对数偏差是良定义的。

定理1.7 是关于最小对数偏差一致有界性猜想的带叶曲面情形，该猜想见[29, 猜想 8。2]（较早版本见[44, 猜想 1。1]）。下文的猜想5.8 将进一步介绍该猜想及其背景。

一致有理 lc 多面体。本文的最后一个结果是带叶曲面存在一致有理 lc 多面体。定理陈述如下：定理 1.8。设 v_1^0、...、v_m^0 为正整数，且 $\mathrm{v}_0 := (v_1^0, \ldots, v_m^0)$。那么，有理包络 v_0 中存在一个开集 $U \ni \mathrm{v}_0$，满足以下条件。

设 $(X, \mathcal{F}, B = \sum_{i=1}^m v_i^0 B_i)$ 是任意一个维数为 ≤ 2 的 lc 带叶三元组，其中 $B_i \geq 0$ 是互不相同的魏尔除子。那么对于任意 $(v_1, \ldots, v_m) \in U$，$(X, \mathcal{F}, B = \sum_{i=1}^m v_i B_i)$ 都是 lc 的。

定理 1.8对 [40, 猜想 16] 在维数 2 的情形给出了肯定的回答，并且它将成为我们未来研究带叶三维簇全局 ACC 完整版本（实系数情形）的关键组成部分。此外，定理1.8 也可视为通常的对存在一致有理 lc 多面体这一结果在带叶曲面情形下的对应版本 [28, 定理 56]。

本文结构。第 2 节介绍叶层的预备知识，并定义叶层的补。第 3 节回顾曲面上的叶层相关知识，并介绍和分类数值 lc 带叶曲面奇点。第4 节证明其余主要定理。第 5节正式陈述极小模型纲领中若干标准猜想的带叶版本，并讨论其背景。

2 预备知识

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行研究。关于代数几何的记号和定义，我们遵循标准参考文献 [9, 37]。对于叶状结构，我们采用 [40]，中引入的记号和定义，这些记号和定义以 [4, 15, 16] 中的内容为基础。

2.1 叶状结构

定义 2.1（叶层，参见 [16, 第 2 节1]）。设 X 为一个正规簇。X 上的一个叶层是一个凝聚层 $\mathcal{F} \subset T_X$，使得

1. $\mathcal{F}$在 T_X中是饱和的，即 $T_X/\mathcal{F}$是无挠的；2. $\mathcal{F}$ 对李括号封闭。

叶层 $\mathcal{F}$ 的秩是其作为层的秩，记作 $\operatorname{rank}\mathcal{F}$。$\mathcal{F}$的余秩为 $\dim X - \operatorname{rank}\mathcal{F}$。$\mathcal{F}$的典范除子是一个除子 $K_{\mathcal{F}}$，满足$\mathcal{O}_X(-K_{\mathcal{F}}) \cong \det(\mathcal{F})$。

定义 2.2（奇点集）。设 X 是一个正规簇，且 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个秩为 r 的叶层。我们可以将一个态射与 $\mathcal{F}$ 相关联。

$$\phi : \Omega_X^{[r]} \to \mathcal{O}_X(K_{\mathcal{F}})$$

通过对由包含映射 $\mathcal{F} \to T_X$ 诱导的映射 $\Omega_X^1 \to \mathcal{F}^*$ 取 r-楔积的双对偶来定义。这将得到一个映射。

$$\phi' : (\Omega_X^{[r]} \otimes \mathcal{O}_X(-K_{\mathcal{F}}))^{\vee\vee} \to \mathcal{O}_X$$

并且我们将奇点集定义为 $\mathcal{F}$，记作 $\operatorname{Sing}\ \mathcal{F}$，它是 ϕ' 的像的余支撑。

定义 2.3（拉回与推前，参见 [4, 3.1]）。设 X 为一个正规簇，$\mathcal{F}$ 为 X上的一个叶层，$f\colon Y \dashrightarrow X$ 为一个支配映射，且 $g\colon X \dashrightarrow X'$ 为一个双有理映射。我们将按照 [22, 3.2] 中构造的 $\mathcal{F}$ 在 Y 上的拉回记为 $f^{-1}\mathcal{F}$。我们也称$f^{-1}\mathcal{F}$为 $\mathcal{F}$ 在 Y上诱导的叶层。我们定义 $g_*\mathcal{F} := (g^{-1})^{-1}\mathcal{F}$，并将其记为 $g_*\mathcal{F}$。

定义 2.4（不变子簇，参见 [4, 3.1]）。设 X 为一个正规簇，$\mathcal{F}$ 为 X上的一个叶层，$S \subset X$ 为一个子簇。我们称 S 是 $\mathcal{F}$-不变的，当且仅当对于任意开子集 $U \subset X$ 以及任意截面 $\partial \in H^0(U, \mathcal{F})$，都有

$$\partial(\mathcal{I}_{S\cap U}) \subset \mathcal{I}_{S\cap U}$$

其中，$\mathcal{I}_{S\cap U}$ 是 $S \cap U$ 的理想层。

定义 2.5（非判别奇点，参见 [16, 定义 2.10]）。设 X 为正规簇，$\mathcal{F}$ 为 X上的余秩 1 叶层。若对于任意闭点 $x \in X$ 以及任意双有理态射 $f\colon X' \to X$，只要 $f^{-1}(\overline{\{x\}})$ 是一个除子，$f^{-1}(\overline{\{x\}})$ 的每个分支都是 $f^{-1}\mathcal{F}$-不变的，则称 $\mathcal{F}$ 具有非判别奇点。

定义 2.6（叶层上的特殊除子，参见 [16, 定义 2.2]）。设 X 为一个正规簇，$\mathcal{F}$ 为 X上的一个叶层。对于 X上的任意素除子 C，我们定义$\epsilon_{\mathcal{F}}(C) := 1$，如果 C不是 $\mathcal{F}$-不变的；并定义 $\epsilon_{\mathcal{F}}(C) := 0$，如果 C是 $\mathcal{F}$-不变的。如果 $\mathcal{F}$在上下文中是明确的，那么我们可以使用 $\epsilon(C)$ 来代替 $\epsilon_{\mathcal{F}}(C)$。对于 X上的任意 $\mathbb{R}$-除子 D，我们定义

$$D^{\mathcal{F}} := \sum_{C \text{ is a component of } D} \epsilon_{\mathcal{F}}(C) \cdot C.$$

设 E 是位于 X 之上的素除子，且 $f\colon Y \to X$ 是一个射影双有理态射，使得 E 在 Y 上。我们定义 $\epsilon_{\mathcal{F}}(E) := \epsilon_{f^{-1}\mathcal{F}}(E)$。显然，$\epsilon_{\mathcal{F}}(E)$ 与 f 的选取无关。

定义 2.7. 叶层子三元组 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 由一个正规拟射影簇 X、X 上的一个叶层 $\mathcal{F}$、一个 $\mathbb{R}$- 除子 B（位于 X 上）、一个射影态射 $X \to Z$，以及一个（不一定是闭的）点 $z \in Z$ 组成，并满足 $K_{\mathcal{F}} + B$ 在 z 的某个邻域上是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃。

如果 $\mathcal{F} = T_X$，则可略去 $\mathcal{F}$，并将 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 记为 $(X/Z \ni z, B)$，称 $(X/Z \ni z, B)$ 为子对。如果 $B \geq 0$ 在 z 的某个邻域上成立，则称 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 为叶状三元组。如果 $\mathcal{F} = T_X$ 且 $B \geq 0$ 在 z 的某个邻域上成立，则称 $(X/Z \ni z, B)$ 为一对。

设 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 为一个带叶层结构的（子）三元组。如果 $X \to Z$ 是恒等态射，那么我们可以省略 Z，并将 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 记为 $(X \ni z, \mathcal{F}, B)$，称 $(X \ni z, B)$ 为带叶层结构的（子）芽。如果 $\mathcal{F} = T_X$ 和 $X \to Z$ 是恒等态射，那么我们可以省略 Z，并称 $(X \ni z, B)$ 为一个（子）芽。

如果对于任意 $z \in Z$，$(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$（分别地，$(X \ni z, \mathcal{F}, B)$、$(X/Z \ni z, B)$、$(X \ni z, B)$）是一个叶状（子）三元组（分别地，叶状（子）芽、（子）对、（子）芽），那么我们称 $(X/Z, \mathcal{F}, B)$（分别地，$(X, \mathcal{F}, B)$、$(X/Z, B)$、(X, B)）为叶状（子）三元组（分别地，叶状（子）三元组、（子）对、（子）对）。

定义 2.8. 设 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 为一个带叶的（子）三元组。对于 X 上的任意素除子 E，设 $f\colon Y \to X$ 为双有理态射，使得 E 位于 Y 上，并假设

$$K_{\mathcal{F}_Y} + B_Y = f^*(K_{\mathcal{F}} + B)$$

在 z 的某个邻域上，其中 $\mathcal{F}_Y := f^{-1}\mathcal{F}$。我们将 $a(E,\mathcal{F},B) := -\operatorname{mult}_E B_Y$ 定义为 E 关于 $(X,\mathcal{F},B)$ 的差异数。显然，$a(E,\mathcal{F},B)$ 与 Y 的选取无关。若 $\mathcal{F}=T_X$，则令 $a(E,X,B) := a(E,\mathcal{F},B)$。

设 δ 为一个非负实数，且 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 为一个叶状（子）三元组。我们称 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 为（子）对数正则（简称（子）lc）（分别为（子）Kawamata 对数终端（简称（子）klt）、（子）δ-lc、（子）δ-klt、（子）典范、（子）终端），如果对于任意位于 z 上方的素除子 E，即 E 在 Z 上的像的闭包为 z，均有 $a(E,\mathcal{F},B)\geq -\epsilon_{\mathcal{F}}(E)$（分别有 $>-\epsilon_{\mathcal{F}}(E)$、$\geq -\epsilon_{\mathcal{F}}(E)+\delta$、$>-\epsilon_{\mathcal{F}}(E)+\delta$、$\geq 0$、$>0$）。我们定义

$$\operatorname{mld}(X/Z\ni z,\mathcal{F},B) := \inf\{a(E,\mathcal{F},B)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \text{ is over } z\}$$

称为 $\operatorname{mld}(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 的最小对数偏差（简称 mld）。

设 $(X,\mathcal{F},B)$ 是一个带叶化的（子）三元组。如果对任意点 $x\in X$，$(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 都是（子）对数正则（分别为（子）Kawamata 对数终端、（子）δ-对数正则、（子）δ-Kawamata 对数终端），则称 $(X,\mathcal{F},B)$ 是（子）对数正则（分别为（子）Kawamata 对数终端、（子）δ-对数正则、（子）δ-Kawamata 对数终端）。如果对任意余维 ≥ 2 点 $x\in X$，$(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 都是（子）典范（分别为（子）终端），则称 $(X,\mathcal{F},B)$ 是（子）典范（分别为（子）终端）。

2.2 补】【。

定义 2.9. 设 n 为一个正整数，ϵ 为一个非负实数，$\Gamma_0\subset$ 为$0,1]$的一个有限集，且 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 和 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是两个叶状三元组。如果 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 的一个 $(\epsilon,\mathbb{R})$-补充，则称其为.....

- $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 ϵ-对数正则的,
- $B^+\geq B$，以及
- $K_{\mathcal{F}}+B^+\sim_{\mathbb{R}} 0$ 在 z 的一个邻域上。

我们称 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 的一个 (ϵ,n)-补。

- $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 ϵ-对数正则,
- $nB^+\geq \lfloor (n+1)\{B\}\rfloor + n\lfloor B\rfloor$，并且

在 z 的一个邻域上，• $n(K_{\mathcal{F}}+B^+)\sim 0$。

如果 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 有一个 $(\epsilon,\mathbb{R})$-补，则称 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 是 $(\epsilon,\mathbb{R})$-补相容的。如果 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 的一个 (ϵ,n)-补，且 $B^+\geq B$，则称 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B^+)$ 是 $(X/Z\ni z,\mathcal{F},B)$ 的一个单调 (ϵ,n)-补。

$(0,\mathbb{R})$-补（分别为 $(0,n)$-补、$(0,\mathbb{R})$-补相容、$(0,n)$-补相容）也称为 $\mathbb{R}$-补（分别为 n-补、$\mathbb{R}$-补相容、n-补相容）。

3 曲面上的叶状结构

3.1 带叶曲面的消解

定义 3.1. 设 X 为一个正规曲面，$\mathcal{F}$ 为 X 上的一个叶层，$x\in X$ 为一个闭点，满足 $x\notin \operatorname{Sing}(X)$ 且 $x\in \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$。设 v 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个向量场。

附近 x。根据 [13, 第 2 页，第 17 行−18]， $v(x) = 0$ 和 $(Dv)|_x$ 恰好有两个特征值λ_1 和 λ_2。

我们称 x 是 $\mathcal{F}$ 的一个约化奇点，如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个不为 0（例如， λ_2），并且 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$。我们称 x 是 $\mathcal{F}$ 的一个非退化约化奇点，如果 x 是 $\mathcal{F}$ 的一个约化奇点，且 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \{0, \infty\}$，即 λ_1 和 λ_2 均不等于 0。

我们称 $\mathcal{F}$ 至多具有约化奇点，如果对于任意闭点 $p \in X$， $\mathcal{F}$ 在 p 处或者是非奇异的，或者 p 是 $\mathcal{F}$ 的约化奇点。

一个 $\mathcal{F}$-例外曲线是指一条非奇异有理曲线 E on X，满足

1. X 在 E 和 $E^2 = -1$附近是光滑的，2. 存在一个 E的除子收缩 $f\colon X \to Y$，并且3. $f(E)$是 $f_*\mathcal{F}$的约化奇点。

定义 3.2（极小解消）。设 X 为一个正规曲面， $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个叶层，$f\colon Y \to X$ 为一个射影双有理态射，且 $\mathcal{F}_Y := f^{-1}\mathcal{F}$。

我们称 f 为 $\mathcal{F}$ 的一个解消，如果 Y 是光滑的，且 $\mathcal{F}_Y$ 至多具有约化奇点。我们称 f 为 $\mathcal{F}$ 的极小解消，如果对于 $\mathcal{F}$的任意解消 $g : W \to X$， g 都可以经由 f分解，即存在一个射影双有理态射$h\colon W \to Y$使得 $g = f \circ h$成立。根据定义，如果 $\mathcal{F}$ 的极小解消存在，则它是唯一的。

对于任意闭点 $x \in X$， $\mathcal{F} \ni x$ 的极小解消是 x 的任意充分小邻域上的 $\mathcal{F}$ 的极小解消。

命题 3.3 ([19, 命题 1.17]) 。设 X 是一个正规曲面，且 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个叶层。那么 $\mathcal{F}$ 的极小解消存在。

3.2 带叶曲面上曲线的不变量

定义 3.4. 设 X 是至多具有循环商奇点的正规曲面，$\mathcal{F}$ 是 X 上的一个叶层，且 C 是 X 上的一条约化曲线，其中 C 的任何分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的。对于任意闭点 $x \in X$，我们按以下方式定义 tang$(\mathcal{F}, C, x)$。

- 如果 $x \notin$ Sing(X)，那么我们令 v 为在 x附近生成 $\mathcal{F}$ 的向量场，并令 f 为在 x 附近定义 C 的全纯函数。我们定义

$$\mathrm{tang}(\mathcal{F}, C, x) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\langle f, v(f)\rangle}.$$

- 如果 $x \in$Sing(X)，那么对于某个整数 $r \geq 2$， x 是指标为 r 的循环商奇点。设 $\rho\colon \tilde{X} \to X$ 是 $X \ni x$的一个指标 1 覆盖， $\tilde{x} := \rho^{-1}(x)$， $\widetilde{C} := \rho^* C$，并且 $\tilde{\mathcal{F}}$ 是由层 $\rho^*\mathcal{F}$ 在 $\tilde{x}$ 附近诱导的叶层。那么 $\tilde{x}$ 是 X 的一个光滑点，我们定义

$$\mathrm{tang}(\mathcal{F}, C, x) := \frac{1}{r}\mathrm{tang}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{C}, \tilde{x}).$$

我们定义

$$\mathrm{tang}(\mathcal{F}, C) := \sum_{x \in X} \mathrm{tang}(\mathcal{F}, C, x).$$

根据 [12, 第 2], 截面 $\mathcal{F}$tang(C) 是定义良好的。

定义 3.5. 设 X 为一个光滑曲面， $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个叶层，且 C 为 X 上的一条约化曲线，其中 C 的所有分支均为 $\mathcal{F}$-不变的。对于任意闭点 $x \in X$，我们按以下方式定义 $Z(\mathcal{F}, C, x)$。

设 ω 是一个在 x 附近生成 $\mathcal{F}$ 的1-形式，且 f 是一个在 x 附近生成 C 的全纯函数。那么存在唯一确定的全纯函数 g、h 以及定义在 x 附近 X 上的全纯1-形式 η，使得 $g\omega = hdf + f\eta$，并且 f、h 互素。我们定义

$$Z(\mathcal{F}, C, x) := \text{ the vanishing order of } \frac{h}{g}|_C \text{ at } x.$$

作者 [13, 第 2 章，第 15]， Z（$\mathcal{F}$， C， x）与 ω 的选择无关。

我们定义

$$Z(\mathcal{F}, C) := \sum_{x \in C} Z(\mathcal{F}, C, x).$$

定理 3.6（参见 [13,第 2]章）。设 X 为光滑拟射影曲面， $\mathcal{F}$ 为 X上的叶层，且 C 为 X 上的紧约化曲线。

1. 如果 C 的任何分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的，那么

$$K_{\mathcal{F}} \cdot C + C^2 = \operatorname{tang}(\mathcal{F}, C).$$

2. 如果 C 的所有分支都是 $\mathcal{F}$-不变的，那么

$$K_{\mathcal{F}} \cdot C = Z(\mathcal{F}, C) - \chi(C)$$

其中 $\chi(C) := -K_X \cdot C - C^2$。

<escape>以下引理是定理 3.6(1) 的一种变体。</escape>

引理 3.7（参见 [13, 命题 2.2]）。设 X 为一个光滑曲面， $\mathcal{F}$ 为 X上的一个叶层， C 为 X 上的一条紧约化曲线，且 C 的任何分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的。那么，存在一个定义在 C 上的韦伊除子 $D \geq 0$，使得 $(K_{\mathcal{F}} + C)|_C \sim D$且 deg $D =$ tang$(\mathcal{F}, C)$。

证明。我们选取 X 的一个开覆盖 $\{U_j\}$、在 U_j 上生成 $\mathcal{F}$ 的全纯向量场 v_j，以及在 U_j 上定义 C 的全纯函数 f_j。在交集$U_i \cap U_j$ 上，我们有 $v_i = g_{i,j} v_j$ 和 $f_i = f_{i,j} f_j$，其中 $g_{i,j}$ 是表示$T_{\mathcal{F}}^{\vee} \cong \mathcal{O}_X(K_{\mathcal{F}})$ 的上循环，而 $f_{i,j}$ 是表示 $\mathcal{O}_X(C)$ 的上循环。因此，将函数 $\{v_j(f_j)\}$ 限制在 C 上，便得到 $(T_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C))|_C$ 的一个截面，因为根据莱布尼茨法则，

$$v_i(f_i) = g_{i,j} v_j(f_{i,j} f_j) = g_{i,j} f_{i,j} v_j(f_j) + g_{i,j} f_j v_j(f_{i,j})$$

以及 $g_{i,j} f_j v_j(f_{i,j})$ 在 C 上。我们令 D 为 $(T_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C))|_C$ 的一个截面，则 $(K_{\mathcal{F}} + C)|_C \sim D \geq 0$。此外， D 在 C 中 $\mathcal{F}$ 与 C 不横截的点处消失，其消失阶恰好就是 tang$(\mathcal{F}, C)$。换言之，deg $D =$tang$(\mathcal{F}, C)$。 □

3.3 对偶图

定义 3.8（对偶图）。设 n 为一个非负整数， $C = \cup_{i=1}^{n} C_i$ 为包含在正规曲面X的非奇异处中的一组不可约曲线。我们按如下方式定义 C 的对偶图 $\mathcal{D}(C)$。

1. $\mathcal{D}(C)$ 的顶点 $v_i = v_i(C_i)$ 对应于曲线 C_i。2. 对于 $i \neq j$，顶点 v_i 和 v_j 之间由 $C_i \cdot C_j$ 条边相连。3. 每个顶点 v_i 都标记为 $w(C_i) := -C_i^2$。整数 $w(C_i)$ 称为 C_i的权重。

有时我们会在顶点 v_i附近写上曲线 C_i 的名称。若满足以下条件，我们称 $\mathcal{D}(C)$为圈：

- 要么是 $n = 2$ 和 $C_1 \cdot C_2 = 2$，要么是
- $n \geq 3$，并且在必要时重新排列指标后，我们有
  - $C_i \cdot C_j = 1$ if $|i - j| = 1$ or $\{i, j\} = \{1, n\}$, and
  - $C_i \cdot C_j = 0$ if $|i - j| \geq 2$ and $\{i, j\} \neq \{1, n\}$.

若 $\mathcal{D}(C)$ 中存在一个子对偶图是圈，则称 $\mathcal{D}(C)$包含一个圈。若满足以下条件，我们称 $\mathcal{D}(C)$为树：

- $\mathcal{D}(C)$ 不包含圈，并且
- $C_i \cdot C_j \leq 1$ 对于任意 $i \neq j$。

$\mathcal{D}(C)$的交矩阵定义为矩阵$(C_i \cdot C_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ 如果 $C \neq \emptyset$。 $\mathcal{D}(C)$的行列式定义为

$$\det(\mathcal{D}(C)) := \det(-(C_i \cdot C_j)_{1 \leq i,j \leq n})$$

如果 $C \neq \emptyset$，且 $\det(\mathcal{D}(C)) := 1$ 如果 $C = \emptyset$。

$\mathcal{D}(C)$的分叉是指满足 $C_i \cdot C_j \geq 1$ 的曲线 C_i，其中 $j \neq i$至少有三种不同的取值；我们也称 v_i 为分叉。 $\mathcal{D}(C)$的尾是指满足 $C_i \cdot C_j \geq 1$的曲线 C_i，其中 $j \neq i$至多有一种取值；我们也称 v_i 为尾。链是指不含分叉的树形对偶图。

对于任意 i、j，如果 $i \neq j$ 和 $C_i \cdot C_j \geq 1$，我们称 C_i 和 C_j 相邻。

对于任意一个曲面之间的射影双有理态射 $f: Y \to X$，设 $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$ 是某个非负整数 n 所对应的约化例外除子。假设 E 包含于 Y 的非奇异处。则我们定义 $\mathcal{D}(f) := \mathcal{D}(E)$。

定义 3.9（叶层曲面上的对偶图）。设 n 为正整数， X 为正规曲面， $\mathcal{F}$ 为 X 上的叶层，且 $C = \cup_{i=1}^{n} C_i$ 为一组包含于 X 的非奇异处的不可约曲线。

1. 如果（a）对于任意 i， C_i 是一条光滑有理曲线，且（b）对于任意 i、j，（i）若 $|i - j| = 1$，则 $C_i \cdot C_j = 1$；（ii）若 $|i - j| > 1$，则 $C_i \cdot C_j = 0$，我们称 $C = \cup_{i=1}^{n} C_i$ 为一条链。

2. 我们称 $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 为 Hirzebruch-Jung 链，如果 $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 是一个链，并且对于任意 i，都有$C_i^2\leq -2$。
3. 我们称 $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 为 $\mathcal{F}$-链，如果
(a) $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 是一个 Hirzebruch-Jung 链串，(b) 对任意 i，C_i 均为 $\mathcal{F}$-不变的，(c) 对于任意闭点 $x\in C$，要么 $x\notin \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$，要么 x 是 $\mathcal{F}$的非退化约化奇点，并且 (d) $Z(\mathcal{F},C_1)=1$，且对于任意 $i\geq 2$，$Z(\mathcal{F},C_i)=2$。

3.4 曲面叶状数值三元组

[43, 事实 I.2.4] 已分类所有满足 $\mathcal{F}$ 在 x 处为典范的叶状曲面奇点（$X\ni x$，$\mathcal{F}$），而 [19, 定理 0.1] 已分类所有满足 $\mathcal{F}$ 在 x 处为对数正则的叶状曲面奇点（$X\ni x$，$\mathcal{F}$）。然而在实践中，我们通常只能得到对数正则叶状芽（$X\ni x$，$\mathcal{F}$，B）的结构。若 $B\neq 0$，则我们不知道 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x 附近是否为 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃，因此上述分类结果无法直接应用。为解决这一问题，我们需要引入叶状结构的数值曲面奇点这一概念，并给出数值对数正则叶状结构曲面奇点的分类。

从现在起直到本节结束，我们将详细刻画叶曲面奇点的 lc 性质。我们定义数值 lc（简称 num-lc）叶曲面奇点，其定义与通常曲面奇点的 num-lc 奇点的定义类似。随后，我们对所有 num-lc 叶曲面奇点进行分类。尽管这一结果与 [19, Theorem 0.1], 非常相似，但为了方便读者，我们仍在本节中给出完整而详细的证明。

定义 3.10. 一个曲面叶层数值子三元组（简称曲面叶层数值子三元组）$(X,\mathcal{F},B)$由一个正规曲面 X、X上的秩 1 叶层 $\mathcal{F}$以及 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子 B组成。若$(X,\mathcal{F},B)$是一个曲面叶层数值子三元组且 $B\geq 0$，则称$(X,\mathcal{F},B)$为一个曲面叶层数值三元组（简称曲面叶层数值三元组）。一个曲面叶层数值芽（简称曲面叶层数值芽）$(X\ni x,\mathcal{F},B)$由一个曲面叶层数值三元组$(X,\mathcal{F},B)$和一个闭点$x\in X$组成。

设 \((X,\mathcal{F},B)\) 为一个曲面叶状数值子三元组。设 $f\colon Y\to X$ 是 X 的一个解消，X 具有素 f-例外除子 $E_1,\dots,E_n$，其中 n 为某个非负整数，且中心 $_Y E$ 是一个除子。由于 $\{(E_i\cdot E_j)\}_{n\times n}$ 是负定的，方程

$$\begin{pmatrix}(E_1\cdot E_1)&\cdots&(E_1\cdot E_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ (E_n\cdot E_1)&\cdots&(E_n\cdot E_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(K_{\mathcal{F}_Y}+B_Y)\cdot E_1\\ \vdots\\ -(K_{\mathcal{F}_Y}+B_Y)\cdot E_n\end{pmatrix}$$

存在唯一解（$a_1,\dots,a_n$），其中 $\mathcal{F}_Y:=f^{-1}\mathcal{F}$且 $B_Y:=f_*^{-1}B$。我们定义

$$a_{\mathrm{num},f}(E,\mathcal{F},B):=-\operatorname{mult}_E\left(B_Y+\sum_{i=1}^n a_iE_i\right).$$

与有序对的情形 [37, 第 4], 章$a_{\mathrm{num},\ f}(E,\mathcal{F},B)$ $=a(E,\mathcal{F},B)$ 很容易看出，当 $K_{\mathcal{F}}+B$ 是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃时，$a_{\mathrm{num},\ f}(E,\mathcal{F},B)$ 不依赖于解消 f。这使我们能够在 $K_{\mathcal{F}}+B$ 不一定是$\mathbb{R}$-卡蒂埃时定义 $a(E,\mathcal{F},B)$。

定义 3.11. 设 $(X,\mathcal{F},B)$ 为一个曲面叶状数值子三元组。对于任意一个 X 的解消 f: $Y\to X$，使得 E 是 Y 上的一个除子，我们定义$a(E,\mathcal{F},B):=a_{\mathrm{num},f}(E,\mathcal{F},B)$。

设 $(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 为一个曲面叶状数值芽。若对于任意位于 $X\ni x$ 上方的素除子 E，均有 $a(E,\mathcal{F},B)\geq -\epsilon(E)$（分别有 $>-\epsilon(E)\geq 0,>0$），则称 $(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 为数值对数正则（分别为数值尖锐对数终端、数值典范、数值终端）。若 $K_{\mathcal{F}}+B$ 在 x 处为 $\mathbb{R}$-卡蒂埃，则数值对数正则（分别为数值尖锐对数终端、数值典范、数值终端）等价于对数正则（分别为尖锐对数终端、典范、终端）。

定义 3.12. 设 $(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 为一个曲面叶状数值芽。$(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 的最小对数偏差（简称 mld）定义为

$$\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B):=\inf\{a(E,\mathcal{F},B)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \text{ is a prime divisor over } X\ni x\}.$$

我们定义 $\mathrm{mld}(X\ni x,\ \mathcal{F}):=\mathrm{mld}(X\ni x,\ \mathcal{F},\ 0)$。注意，该定义与定义 2.8 中针对叶状芽的 mld 定义一致。

引理 3.13. 设 $(X\ \ni\ x,\mathcal{F},B)$ 为一个曲面叶层数值芽。则要么 $\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)=-\infty$，要么

$$\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)=\min\{a(E,\mathcal{F},B)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \textit{ is a prime divisor over } X\ni x\}\geq 0.$$

证明。首先假设 $\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)<0$。那么存在一个解消 $f{:}Y\to X$ of $X\ni x$，其具有素 f-例外除子 E_1、.....、E_n，以及 Y上的素除子E，使得中心$_X E=x$ and $\mathrm{mult}_E B_Y>\epsilon_{\mathcal{F}}(E)$，其中 $B_Y:=f_*^{-1}B-\sum_{i=1}^n a(E_i,\mathcal{F},B)\cdot E_i$。于是 $(Y,\mathcal{F}_Y,B_Y)$ 在 E 附近不是次对数典范的，并且根据 [19, 命题 3.4]，$\mathrm{mld}(Y,\mathcal{F}_Y,B_Y)=-\infty$，因此我们也有 $\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)=-\infty$。

现在我们假设 $\mathrm{mld}(X\ \ni\ x,\mathcal{F},B)\ \geq\ 0$。设 $f\colon\ Y\to X$是 $X\ \ni\ x$的一个解消，且其素 f-例外除子为 $E_1,\dots,E_n$，并设 $B_Y:=f_*^{-1}B-\sum_{i=1}^n a(E_i,\mathcal{F},B)\cdot E_i$。由于 $(Y,\mathcal{F}_Y,B_Y)$ 是定义在 x 的一个邻域上的叶状子三元组，由 [19, 推论 3.6] 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)&=\inf\{a(E,\mathcal{F}_Y,B_Y)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \text{ is a prime divisor over } X\ni x\}\\&=\min\{a(E,\mathcal{F}_Y,B_Y)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \text{ is a prime divisor over } X\ni x\}\\&=\min\{a(E,\mathcal{F},B)+\epsilon_{\mathcal{F}}(E)\mid E \text{ is a prime divisor over } X\ni x\}.\end{aligned}$$

□

引理 3.14. 设 $(X\ni x,\mathcal{F},B)$ 是一个曲面数值对数正则叶状数值芽。假设 B 的所有分量都经过 x。那么 $\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)\leq\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},0)$，且当 $B\neq 0$ 时，$\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F},B)<\mathrm{mld}(X\ni x,\mathcal{F})$。特别地，$(X\ni x,\mathcal{F})$ 是数值对数正则的。

证明。由定义 3.10 和 [37, 引理 3.41]，对于任意在 $X \ni x$ 上的素除子 E，有 $a(E,\mathcal{F},B) \leq a(E,\mathcal{F},0)$；若 $B \neq 0$，则对于任意在 $X \ni x$ 上的素除子 E，有 $a(E,\mathcal{F},B) < a(E,\mathcal{F},0)$。 □

定义 3.15. 设 $(X \ni x,\mathcal{F},B)$ 为一个曲面叶状数芽，且 $f\colon Y \to X$ 为 $\mathcal{F} \ni x$ 的极小解消，使得 f 不是恒等态射。$(X \ni x,\mathcal{F},B)$ 的部分对数不一致度（简称 pld）定义为

$$\mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F},B) := \min\{a(E,\mathcal{F},B) + \epsilon_{\mathcal{F}}(E) \mid E \text{ is a } f\text{-exceptional prime divisor}\}.$$

我们定义 $\mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F}) := \mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F},0)$。

最后，我们已经准备好陈述并证明本节的主要定理，该定理是 [43] 和 [19], 中分类定理的推广，但包含了更多细节：定理 3.16。设$(X \ni x,\mathcal{F},B)$是一个数值对数正则的曲面叶状数值芽，满足 B 的所有分支均经过 x 且秩$\mathcal{F} = 1$。设 $f\colon Y \to X$是 $\mathcal{F} \ni x$ 的极小解消（参见定义 3.2），$\mathcal{D}$ 是 f的对偶图，并且$\mathcal{F}_Y := f^{-1}\mathcal{F}$。假设 f 不是恒等态射。那么以下情形之一成立。

（情形 1） $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{m} E_i$ 是一个 $\mathcal{F}_Y$-链。此外，在此情形下，

(a) $X \ni x$ 是一个循环商奇点，并且 $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的。特别地，$X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，并且 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，

(b) 对于任意 $1 \leq i \leq m$,

$$a(E_i,\mathcal{F}) = \frac{\det(\mathcal{D}(\cup_{j=i+1}^{m} E_i))}{\det(\mathcal{D})},$$

(c) $\mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F}) = a(E_m,\mathcal{F}) = \frac{1}{\det(\mathcal{D})} > 0$，且（$X \ni x$，$\mathcal{F}$）是终端的，并且

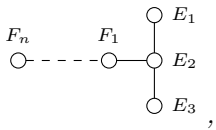
(d) 存在唯一一条经过 x 的 $\mathcal{F}$-不变曲线 C，且 C 在 x 处光滑。（情形 2） $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{3} E_i$ 是一条 Hirzebruch-Jung 链，满足 $Z(\mathcal{F}_Y,E_1) = Z(\mathcal{F}_Y,E_3) = 1, Z(\mathcal{F}_Y,E_2) = 3, E_1^2 = E_3^2 = -2$ 和 $E_2^2 \leq -2$。此外，在这种情形下，

(a) $X \ni x$ 是一个循环商奇点，并且在 x附近是非判别的。在特别地，$X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，且 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，(b) $a(E_1,\mathcal{F}) = a(E_3,\mathcal{F}) = \frac{1}{2}$ 且 $a(E_2,\mathcal{F}) = 0$，(c) $\mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F}) = 0, B = 0$，并且$(X \ni x,\mathcal{F})$是典范的但非终端的，以及(d) $2K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是卡蒂埃的。

（情形 3） $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{n} E_i$ 是一个字符串，使得 E_i 是 $\mathcal{F}_Y$-不变的，并且对于任意 i，$Z(\mathcal{F}_Y,E_i) = 2$。此外，在这种情形下，

(a) $X \ni x$ 要么是一个光滑点，要么是一个循环商奇点，并且 $\mathcal{F}$ 不是在 x 附近是判别的。特别地，$X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，且 $K_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，(b) 对任意 i，$a(E_i,\mathcal{F}) = 0$，(c) $\mathrm{pld}(X \ni x,\mathcal{F}) = 0, B = 0$，并且 $(X \ni x,\mathcal{F})$ 是典范的但非终端的，以及 (d) $K_{\mathcal{F}}$ 在 x 附近是卡蒂埃的。

（情形 4） $\mathcal{D}(f) = \cup_{i=1}^{3} E_i \cup \cup_{j=1}^{n} F_j$ 对于某个正整数 n，如下所示：



,

使得

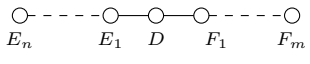
- $\cup_{j=1}^{n} F_j$ 是一个 Hirzebruch-Jung 链，且对于任意 j， $Z(\mathcal{F}_Y, F_j) = 2$，并且
- $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{3} E_i$ 是一个 Hirzebruch-Jung 链，使得 $Z(\mathcal{F}_Y, E_1) = Z(\mathcal{F}_Y, E_3)$ =1, $Z(\mathcal{F}_Y, E_2) = 3$, $E_1^2 = E_3^2 = -2$，以及 $E_2^2 \leq -2$。

此外，在这种情况下，(a) $X \ni x$ 是一个 D型奇点，并且 $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的。特别地，$X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，且 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的；(b) $a(E_1, \mathcal{F}) = a(E_3, \mathcal{F}) = \frac{1}{2}$， $a(E_2, \mathcal{F}) = 0$，并且对于任意 j， $a(F_j, \mathcal{F}) = 0$；(c) pld$(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$, $B = 0$，且$(X \ni x, \mathcal{F})$是典范的，但不是终端的；(d) $2K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是卡蒂埃的。(情形 5)

- 要么是一个圈，其中每个 E_i 都是 $\mathcal{F}_Y$-不变的，并且对于任意 i， $Z(\mathcal{F}_Y, E_i)$ =2；要么

- $\mathcal{D} = E_1$ 是一个 $\mathcal{F}_Y$不变有理曲线，具有唯一的节点奇点 x，使得 x 是 $\mathcal{F}_Y$ 的一个约化奇点，且 $Z(\mathcal{F}_Y, E_1) = 0$。此外，在此情形下，(a) $X \ni x$ 是一个椭圆奇点， $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的，且 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近不是$\mathbb{Q}$-卡蒂埃的。(b) 对任意 i, $a(E_i, \mathcal{F}) = 0$；(c) pld$(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$, $B = 0$，且$(X \ni x, \mathcal{F})$是数值典范的，但不是数值终端的。

(情形 6) 对某些非负整数 m, n， $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{n} E_i \cup D \cup_{j=1}^{m} F_j$ 如下：



使得

- D 不是 $\mathcal{F}_Y$不变的，且 tang$(\mathcal{F}_Y, D) = 0$,
- 要么 $n = 0$ 要么 $\cup_{i=1}^{n} E_i$ 是一个 $\mathcal{F}_Y$-链,
- 要么 $m = 0$，要么 $\cup_{j=1}^{m} F_j$ 是一个 $\mathcal{F}_Y$-链，并且

此外，在这种情况下，

(a) $\mathcal{F}$ 在 x附近是判别的，并且以下条件之一成立：

(情形 6.1) D 是一条有理曲线。 那么 $X \ni x$ 是一个循环商奇点。在特别地， $X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，且 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃。

（情形 6.2） D 是一条椭圆曲线，且 $m = n = 0$。那么 $X \ni x$ 是一个椭圆奇点。特别地， $X \ni x$ 是对数正则的，但不是 Kawamata 对数终端的。

（情形 6.3） D 不是一条有理曲线，且 $m > 0$，或 $n > 0$，或 $p_a(D) \geq 2$。那么 $X \ni x$ 不是对数正则的，

(b) $a(D, \mathcal{F}) = -1$, $a(E_i, \mathcal{F}) = 0$ 对于任意 i，且对于任意 j， $a(F_j, \mathcal{F}) = 0$。

(c) pld$(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$, $B = 0$，且 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 是数值对数正则的，但既非数值典范的。也不是数值尖锐对数终端 , and

(d) 如果 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x 附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，那么 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x 附近是卡蒂埃的。

（情形 7） $\mathcal{D}(f) = D \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{r_i} E_{i,j}$ 对于某个整数 $n \geq 3$ 和正整数 r_1, ..., r_n，使得

- D 不是 $\mathcal{F}_Y$不变的，且 tang$(\mathcal{F}_Y, D) = 0$，并且

- *for any* i, $\cup_{j=1}^{r_i} E_{i,j}$ *is an* $\mathcal{F}_Y$*-chain.*

此外，在这种情况下，

(a) $\mathcal{F}$ 在 x附近是判别的，并且满足以下条件之一：

（情形 7.1）如果 D 是一条有理曲线，那么 $X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端（分别地，对数正则）当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{d_i}) < 2, \ (resp. \leq 2),$$

其中 d_i =det($\mathcal{D}(\cup_{j=1}^{r_i} E_{i,j})$】【。

（情形 7.2）如果 D 不是有理曲线，那么 $X \ni x$ 不是 Kawamata 对数终端，

(b) $a(D,\mathcal{F}) = -1$，且对于任意 i,j， $a(E_{i,j},\mathcal{F}) = 0$；(c) pld$(X \ni x,\mathcal{F}) = 0$，$B = 0$，且$(X \ni x,\mathcal{F})$是数值对数正则的，但既非数值典范的，也非数值尖锐对数终端的；(d) 若 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，则 $K_{\mathcal{F}}$ 在 x附近是卡蒂埃的。

证明。根据引理 3.14，$(X \ni x,\mathcal{F})$ 是数值对数正则的。现在，定理的主要部分可由 [19, 定理 2.4] 立即得到。更准确地说，我们的定理的主要部分与 [19, 定理 2.4] 的唯一区别在于，我们不要求 $K_{\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃邻域内成立。尽管如此，由于 [19, 定理 2.4] 的证明仅依赖于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 的结构，因此， [19, 定理 2.4] 证明中的相同论证同样能够给出我们这一情形下 $\mathcal{D}$ 的分类。我们指出，与 [19, 定理 2.4] 相比，情形 6 存在一个细微差别：尽管 [19, 定理 2.4(6)] 指出，在这种情况下， $\cup_{i=1}^{n} E_{n+1-i}$ 是一条 $\mathcal{F}_Y$-链，但实际上是 $\cup_{i=1}^{n} E_i$ 构成一条 $\mathcal{F}_Y$-链。为说明这一点，我们只需应用 [19, 定理 2.4，(17) 断言]。

下文中，我们仅证明定理中每种情形的附加结论。

（情形 1）由于 $\mathcal{D}$ 中的所有曲线都是 $\mathcal{F}_Y$-不变的， $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的。由于 $\mathcal{D}$ 是有理曲线链， $X \ni x$ 是循环商奇点，这推出 (a)。由定理 3.6(2)，并计算 $K_{\mathcal{F}_Y} + \sum_{i=1}^{m}(-a(E_i,\mathcal{F}))$ $\cdot E_i$与 E_i的交数，可得 (b)。(c)由 (b) 推出。由于 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{F}_Y$-链，存在唯一一条$\mathcal{F}_Y$-不变曲线 $C_Y \not\subset$ Supp $\mathcal{D}$，它位于 Y上并与 $\mathcal{D}$相交，且 C_Y与 E_m相交。令 $y := C_Y \cap E_m$，则 $\mathcal{F}_Y$ 在 y 处有一个约化奇点，因此 $C_Y + E_m$在 y处是简单正规交叉。令 $C = f_* C_Y$，则由 [37, 定理 4.15(3)] 可知 $(X \ni x, C)$ 是纯对数终端的。因此 C 在 $x \in X$处是正规的。

（情形 2）由于 $\mathcal{D}$ 中的所有曲线都是 $\mathcal{F}_Y$-不变的， $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的。由于 $\mathcal{D}$ 是有理曲线链， $X \ni x$ 是循环商奇点，因此可得 (a)。由定理 3.6(2)，并计算 $K_{\mathcal{F}_Y} + \sum_{i=1}^{3}(-a$ $(E_i,\mathcal{F})) \cdot E_i$与 E_i的交数，得到 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14推出。(d) 由 (a) 和 (b) 推出。

（情形 3）由于 $\mathcal{D}$ 中的所有曲线都是 $\mathcal{F}_Y$-不变的， $\mathcal{F}$ 在 x附近是非判别的。由于 $\mathcal{D}$ 是有理曲线链， $X \ni x$ 是循环商奇点，因此可得 (a)。由定理 3.6(2)，对任意 $K_{\mathcal{F}_Y} \cdot E_j$， j都有。因此，对任意 $\sum_{i=1}^{n} a(E_i,\mathcal{F}) \cdot E_i) \cdot E_j = 0$， j。由负性引理可得 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14推出。(d) 由 (a) 和 (b) 推出。

（情形 4）由于 $\mathcal{D}$ 中的所有曲线均为 $\mathcal{F}_Y$ 不变的，因此 $\mathcal{F}$ 在 x 附近是非判别的。由于 $\mathcal{D}$ 的所有分支都是有理曲线， $X \ni x$ 是一个 D 型奇点，这意味着

(a)。令

$$G := 2\sum_{j=1}^{n} a(F_j, \mathcal{F}) \cdot F_j + a(E_2, \mathcal{F}) \cdot (E_1 + 2E_2 + E_3).$$

根据定理 3.6(2) 以及交数的计算，我们知道 $a(E_1, \mathcal{F}) = a(E_3, \mathcal{F}) = {}^{a}{}_{(E_2, \mathcal{F}+1)}$，并且 $G \equiv_X 0$。由~~负性引理~~可得 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14 得出。(d) 由 (a) 和 (b) 得出。

(情形 5) 由于 $\mathcal{D}$ 中的所有曲线均为 $\mathcal{F}_Y$-不变的，因此 $\mathcal{F}$ 在 x 附近是非判别的。根据曲面奇点的分类，$X \ni x$ 是一个椭圆奇点。由 [43, 定理 IV.2.2]，$K_{\mathcal{F}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 附近不是 x-卡蒂埃的。这说明 (a)。由定理 3.6，$K_{\mathcal{F}_Y} \cdot E_i = 0$ 对任意 i 均成立。这说明 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14 得出。

（情形 6（a-c））由于 D 不是 $\mathcal{F}_Y$-不变的，因此 $\mathcal{F}$ 在 x附近是判别的。(a) 由曲面奇点分类得出。令

$$G := \sum_{i=1}^{n} a(E_i, \mathcal{F}) \cdot E_i + (1 + a(D, \mathcal{F})) \cdot D + \sum_{j=1}^{m} a(F_j, \mathcal{F}) \cdot F_j.$$

根据定理 3.6，$G \equiv_X 0$。由负性引理可得 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14 得出。我们

(情形 7 (a-c)) 由于 D 不是 $\mathcal{F}_Y$-不变的，$\mathcal{F}$ 在 x附近是判别的。(a) 由曲面奇点分类得出。令

$$G := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} a(E_{i,j}, \mathcal{F}) \cdot E_{i,j} + (1 + a(D, \mathcal{F})) \cdot D.$$

根据定理 3.6，$G \equiv_X 0$。由负性引理可得 (b)。(c) 由 (b) 和引理 3.14 得出。由引理 3.7，我们有 $(K_{\mathcal{F}_Y} + D)|_D = 0$。
(情形 6(d) 和情形 7(d)) 由引理 3.7，$(K_{\mathcal{F}_Y} + D)|_D \sim 0$。令 C 为约化的f-例外除子。由于 $\mathcal{D}$ 是一棵树，在情形 6 中，E_i、F_j 是光滑有理曲线；在情形 7 中，$E_{i,\ j}$ 是光滑有理曲线。由 [41, 命题 7.5.4],

$$H^1(C, \mathcal{O}_C) = p_a(C) = p_a(D) = H^1(D, \mathcal{O}_D).$$

因此，[41, 定理 7.5。19] 表明典范同态

$$\mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(D)$$

是一个同构。由于 $K_{\mathcal{F}_Y} + D \equiv_X 0$ 和 $(K_{\mathcal{F}_Y} + D)|_D \sim 0$，我们有 $(K_{\mathcal{F}_Y} + D)|_C \sim 0$。

若 $K_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃，则 $f^* K_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}_Y} + D$。接下来，我们可以选取 $x \in X$ 的一个可缩 Stein 邻域 V，使得 $U = f^{-1}(V)$形变收缩到 C，于是由下面的正合列可知，Pic(V)是平凡的

$$\cdots \to H^1(V, \mathcal{O}_V) \to H^1(V, \mathcal{O}_V^*) \simeq \mathrm{Pic}(V) \to H^2(V, \mathbb{Z}) \to \cdots.$$

此外，由包含映射诱导的典范同态 $H^i(U,\mathbb{Z}) \to H^i(C,\mathbb{Z})$是同构。假设 $rK_{\mathcal{F}}$ 是卡蒂埃，则 $rK_{\mathcal{F}}|_V$ 是平凡的，因此 $r(K_{\mathcal{F}_Y}+D)|_U$ 也平凡。这意味着 $(K_{\mathcal{F}_Y}+D)|_U$ 是 Pic(U)中的一个挠元，接着由 [36, 11.3.6 引理] 可知，$(K_{\mathcal{F}_Y}+D)|_U \sim 0$ 是平凡的，因此其推前 $K_{\mathcal{F}}$在 Pic(V)中也平凡。因此 $K_{\mathcal{F}}$ 是卡蒂埃的，两种情形下我们都得到 (d)。 □

推论 3.17. 设 $(X,\mathcal{F},B)$ 为一个除数对数终端（参见 *[16, 定义 3.6]*）叶状三元组，满足 $\dim X = 2$ 且秩 $\mathcal{F} = 1$。那么，对于任意闭点 $x \in X$，
1. 如果 x 是 X的奇点，那么（$X \ni x$， $\mathcal{F}$， B）属于定理 3.16 中的情形 1。特别地，x 是 $\mathcal{F}$的光滑点，$\mathrm{mld}(X \ni x,\mathcal{F},B) > 0$，且 x 是 X的循环商奇点；以及 2. 如果 x 是 X的光滑点，那么以下情形之一成立：(a) x 是 $\mathcal{F}$的光滑点。(b) x 是 $\mathcal{F}$的约化奇点。

证明。这立即由定理3.16得出。 □

3.5 示例

例-注 3.18. 我们指出，对于定理 3.16 中列出的每个奇点，都存在相应的例子。事实上，通过考虑由自然的 $\mathbb{P}^1$-丛结构 $\mathbb{P}(E) \to E$所诱导的叶层，可以非常容易地构造这些例子，其中 E为某条曲线。定理 3.16 的情形 1-4 的例子可以通过沿 $\mathbb{P}(E) \to E$ 的一般纤维构造一系列爆破来得到。定理 3.16 的情形 6 和 7 的例子可以通过沿 $\mathbb{P}(E) \to E$ 或 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的负截面进行爆破，然后继续在约化奇点处进行爆破，并将负截面的严格变换与某些有理曲线链一起压下而得到。情形 5 的例子可以通过考虑一个椭圆曲族 $X \to Z$，其具有一个奇异纤维 X_0，在 X_0上爆破一个点，并压下 X_0的严格变换来构造。我们还指出，情形 1-4 的例子可以在 [43, 事实 I.2.4] 中找到。

特别地，情形 7.1 中的例子对 P. Cascini 和 C. Spicer [14, 关于有理对数典范叶状曲面芽是否为商奇点的 3] 问题给出了否定的回答：当 $\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{d_i}) \geq 2$ 时，$X \ni x$ 不是 Kawamata 对数终端的，因此 $X \ni x$ 不再是商奇点。我们所需要保证的只是 $x \in X$ 同时具有有理奇点。幸运的是，这些例子来源于 [23, 第 3 章的习题 13], ，其中我们有 $\mathcal{D}(f) = D \cup_{i=1}^{4} E_i$ ，并且只要$D^2 \leq -3$， $x \in X$ 就具有有理奇点。

接下来，我们给出一个例子，说明 Grauert-Riemenschneider 型消失定理通常不适用于曲面叶层。这个例子对于专家而言可能早已耳熟能详，但对于叶层理论的初学者来说，也可以作为一道很好的练习题。
例 3.19. 设 C 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的光滑曲线，且 $S := C \times C$。令 $p_i\colon S \to C, i = 1, 2$ 为相应的投影。若 $\Delta\colon E \to S$ 是对角态射，则 E 同构于 C，并且我们有 $E^2 = 2-2g < 0$。令 $\mathcal{F}$ 为该

S 上的叶层决定于

$$0 \to T_{\mathcal{F}} := p_1^* T_C \to T_S \to p_2^* T_C \to 0,$$

<escape>这恰好是由纤维化诱导的叶层 p_2： $S \to C$ 和 $K_{\mathcal{F}} = p_1^* K_C$。根据 [35, 3.0 定理],我们有</escape>

- $p_i^* K_C + E$ 是 nef 且 big 的，但不是半丰沛的，并且
- $K_S + 2E$ 是半丰沛的，并定义了一个双有理态射 f： $S \to Z$ ，该态射仅收缩 E。

令 $\mathcal{F}_Z := f_* \mathcal{F}$ 为 Z 上由 $\mathcal{F}_Z|_{Z\setminus\{z\}} = \mathcal{F}|_{X\setminus E}$确定的推前叶层，其中 $z = f(E)$。则 $K_{\mathcal{F}_Z} = f_* K_{\mathcal{F}}$，且容易看出 $(Z, \mathcal{F}_Z)$ 是一个数值对数正则叶层曲面（定理3.16的情形 6 或 7）。注意， $\mathcal{F}_Z$ 在$z \in Z$ 处是判别的，且 $\mathcal{F}_Z$ 的极小解消为 f： $S \to Z$。

我们断言:

1. $(K_{\mathcal{F}} + E)|_E \sim 0$ 但 $K_{\mathcal{F}_Z} = f_* K_{\mathcal{F}}$ 不是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃。2. $K_{\mathcal{F}} + E$ 在 Z 上不是半丰沛的，且 $R^1 f_* \mathcal{O}_S(K_{\mathcal{F}}) \neq 0$。特别地，对于 f，Grauert-Riemenschneider 型消失定理不成立：$(S, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{F}_Z)$。

对于 (1)，注意到 $(p_i^* K_C)|_E = (p_i \circ \Delta)^* K_C = K_E$。由伴随公式可得

$$K_E = (K_S + E)|_E = (p_1^* K_C + p_2^* K_C + E)|_E = 2K_E + E|_E,$$

因此 $\mathcal{O}_S(E)|_E \sim -K_E$ 且 $(K_{\mathcal{F}} + E)|_E = (p_1^* K_C + E)|_E \sim 0$。

如果 $K_{\mathcal{F}_Z}$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，那么根据前面的¯陈述， $f^* K_{\mathcal{F}_Z} = K_{\mathcal{F}} + aE$ 和 a 必须都为 1。设 C' 为 Z 上任意一条不可约曲线，并设 C 为其在 _ _ _S 上的严格变换。由于 $C \neq E$， $C \cdot E > 0$。因此，我们可以看出 $K_{\mathcal{F}_Z} \cdot C' = (K_{\mathcal{F}} + E) \cdot C > 0$。事实上，要么

- $p_1(C) = C$ 使得 $K_{\mathcal{F}} \cdot C > 0$，或者_
- $p_1(C)$ 是一个单点，使得 $C \cdot E > 0$。

因此，大除子 $K_{\mathcal{F}_Z}$ 实际上是丰沛的，这意味着 $K_{\mathcal{F}} + E = f^* K_{\mathcal{F}_Z}$ 是半丰沛的，从而得出矛盾。

接下来证明 (2)。若 $K_{\mathcal{F}} + E$ 在 Z 上是半丰沛的，则存在一个由 $K_{\mathcal{F}} + E$ 定义的态射 g: $S \to Y$ over Z。由于 $K_{\mathcal{F}} + E$ 在 Z 上并非丰沛， g 不是同构，因此 $Y = Z$。所以， $K_{\mathcal{F}} + E$ 是 Z 上某个 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子的拉回，而该除子必然是推前 $f_*(K_{\mathcal{F}} + E) = K_{\mathcal{F}_Z}$，这与 (1) 矛盾。因此， $K_{\mathcal{F}} + E$ 在 Z 上不是半丰沛的。考虑长正合列

$$0 \to f_* \mathcal{O}_S(K_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\alpha} f_* \mathcal{O}_S(K_{\mathcal{F}} + E) \xrightarrow{\beta} f_* \mathcal{O}_E \xrightarrow{\gamma} R^1 f_* \mathcal{O}_S(K_{\mathcal{F}}) \to \cdots .$$

由于 $f_* \mathcal{O}_E = H^0(E, \mathcal{O}_E) \simeq \mathbb{C}$，我们只需证明 α 是满射，从而 β 为零， γ 为单射，且 $R^1 f_* \mathcal{O}_S(K_{\mathcal{F}}) \neq 0$。

若 α 不是满射，则存在一个有效除子 $D \sim_Z K_{\mathcal{F}} + E$ ，使得E 不在 D的支集内。注意到 $D|_E \sim 0$ ，因此 D 必与 E不相交。这

是不可能的，因为此时 f_*D 是 Z上的卡蒂埃除子，所以 $f_*(K_{\mathcal{F}}+E) \sim_Z D$ 也是 Z上的卡蒂埃除子，这与(1)矛盾。

注释 3.20. 我们注意到，根据 [24,定理 5]，对于典范奇点，带叶曲面的格劳尔特-黎曼施耐德型消失定理已经得到证明。此外，通过 [19, 定义 5.1] 中的 [19, 定理0。3]，该定理已被推广到其所定义的“良好对数典范”奇点。

A. Langer 告知我们，M. Lupinski [48, 49] 通过考察 [43, 示例 I.2.5]中所述的叶层的极小解消，独立发现了另一个反例，该反例针对的是具有对数正则奇点的带叶曲面之间的压缩映射所满足的 Grauert-Riemenschneider 型消失定理。具体而言，在 [48],中，Lupinski 发现了 $\mathcal{F}$的极小解消 $f\colon (Y,\mathcal{F}_Y) \to (X,\mathcal{F})$，而 [49,1.2 Grauert-Riemenschneider 型消失定理] 表明，对于态射 $f\colon (Y,\mathcal{F}_Y) \to (X,\mathcal{F})$，Grauert-Riemenschneider 型消失定理不成立，即 $R^1 f_*\mathcal{O}_Y(K_{\mathcal{F}_Y}) \neq 0$。

然而，对于高维中具有典范奇点的叶状结构，Grauert-Riemenschneider 型消失定理是否成立，仍是一个未决问题（见 [24, 问题 6]）。

4 主要定理的证明

以下定理对证明我们的主要结果至关重要。定理 4.1. 设 $(X \ni x,\ \mathcal{F})$ 是一个曲面叶层芽，并且满足以下条件之一：要么 X 和$\mathcal{F}$ 在 x 附近均光滑，要么 $(X \ni x,\ \mathcal{F})$ 属于定理 *3.16*中的情形 1。那么：

1. 存在唯一一条 $\mathcal{F}$-不变不可约曲线 L，它经过 x .
2. 对于 X 上的任意 $B \geq 0$ 以及 $X \ni x$上的任意素除子 E，

$$a(E,\mathcal{F},B) = a(E,X,B+L)+1.$$

注意，尽管 L 可能不是代数的，但至少在局部解析意义下是良定义的。

证明。令 $f\colon Y \to X$ 为 $\mathcal{F} \ni x$的极小解消，$\mathcal{F}_Y := f^{-1}\mathcal{F}$，且$E_1, \ldots, E_m$ f 为例外素除子，使得 $m = 0$或 $\cup_{i=1}^m E_i$是一个$\mathcal{F}_Y$-链。

(1) 若 X 和 $\mathcal{F}$ 在 x 附近都光滑，那么就没有其他需要证明的了。因此我们可以假设 $(X \ni x,\mathcal{F})$ 如定理 3.16中情形 1 所述。由定理 3.16(情形 1.d) 可知，令 L 为该曲线。

(2) 我们只需证明 $B = 0$的情形。对于 $X \ni x$上的任意素除子 E，存在一列爆破

$$Y_n \xrightarrow{h_n} Y_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \cdots \xrightarrow{h_2} Y_1 \xrightarrow{h_1} Y_0 := Y,$$

使得

- E 在 Y_n 上，但不在 Y_{n-1}上，
- $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_Y$ 且 $\mathcal{F}_i := h_i^{-1}\mathcal{F}_{i-1}$ 对每个 i均成立，
- F_i： 对于每个 i，=Exc(h_i)都是一个素 h_i-例外除子，并且

- h_i 是闭点 $y_{i-1} \in Y_{i-1}$ 的爆破，使得 y_{i-1} 包含于 F_1、……、F_{i-1}、E_1、……、E_m 以及 L的严格变换的并集中。

我们通过对数量 n进行归纳来证明 (2)。当 $n = 0$时，(2) 由定理3.16（情形 1.c）可得。假设 $n > 0$。这里分为两种情形。

情形 1。 y_{n-1} 恰好包含在 F_1、……、F_{i-1}、E_1、……、E_m 和 L 的严格变换中的两条曲线 C_1、C_2 中。根据归纳假设，$a(C_1, \mathcal{F}, 0) = a(C_1, X, L) + 1$，且 $a(C_2, \mathcal{F}, 0) = a(C_2, X, L) + 1$。因此

$$\begin{aligned} a(E, \mathcal{F}, 0) &= a(E, \mathcal{F}_{n-1}, -a(C_1, \mathcal{F}, 0)C_1 - a(C_2, \mathcal{F}, 0)C_2) = a(C_1, \mathcal{F}, 0) + a(C_2, \mathcal{F}, 0) \\ &= a(C_1, X, L) + a(C_2, X, L) + 2 \\ &= a(C_1, X, L)\,\mathrm{mult}_E\, C_1 + a(C_2, X, L)\,\mathrm{mult}_E\, C_2 + a(E, Y_{n-1}, 0) + 1 \\ &= a(E, Y_{n-1}, -a(C_1, X, L)C_1 - a(C_2, X, L)C_2) + 1 = a(E, X, L) + 1 \end{aligned}$$

这样我们就完成了。

情形 2。 y_{n-1} 恰好包含于F_1、……、F_{i-1}、E_1、……、E_m和 L的严格变换中的一条曲线 C 。由归纳假设，$a(C, \mathcal{F}, 0) = a(C, X, L) + 1$。因此

$$\begin{aligned} a(E, \mathcal{F}, 0) &= a(E, \mathcal{F}_{n-1}, -a(C, \mathcal{F}, 0)C) = a(C, \mathcal{F}, 0) + 1 \\ &= a(C, X, L) + 2 = a(E, Y_{n-1}, -a(C, X, L)C) + 1 = a(E, X, L) + 1 \end{aligned}$$

这样就完成了。 □

4.1 补的有界性

对于专家而言，下面的引理或许是众所周知的；在代数情形与解析情形之间处理问题时，这也是一种标准技巧。

引理 4.2. 设 $(X \ni x, B)$ 是一个具有 $\mathbb{Q}$-阶乘奇点的对数正则芽。假设在解析情形下，$(X_{an} \ni x, B_{an})$ 存在一个 N-补 B^+_{an}，那么在代数情形下，$(X \ni x, B)$ 存在一个 N-补 B^+。

证明. 不妨设 $x \in X \sim \mathrm{Spec}(R, \mathfrak{m})$ 且 $x \in X_{an} \sim \mathrm{Spec}(\hat{R}, \hat{\mathfrak{m}})$，其中 R 是某个有限生成 $\mathbb{C}$-代数的局部化。令

$$D := N\lfloor B \rfloor + \lfloor (N+1)\{B\} \rfloor,\ D_{an} := N\lfloor B_{an} \rfloor + \lfloor (N+1)\{B_{an}\} \rfloor,$$

那么 $\mathcal{O}_X(-NK_X - D)$、$\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an})$ 是 X,X_{an} 上秩为一的反身层。此外，我们有如下关系：

$$\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an}) = \mathcal{O}_X(-NK_X - D) \otimes_R \hat{R}.$$

注意，$\mathcal{O}_X(-N_X - D) \cong \{f \in K(R) \mid \mathrm{Div}(f) - NK_X - D \geq 0\}$ 且

$$\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an}) \cong \{f \in K(\hat{R}) \mid \mathrm{Div}(f) - NK_{X_{an}} - D_{an} \geq 0\}$$

因此，根据我们的假设，有效韦伊除子 $NB^+_{an} - D_{an}$ 对应于 $\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an})$ 中的某个非零元素 f，使得

$$\mathrm{Div}(f) - NK_{X_{an}} - D_{an} = NB^+_{an} - D_{an}.$$

特别地， $\mathcal{O}_X(-NK_X - D)$ 不为零，因为 $R \to \hat{R}$ 是忠实平坦的。回忆一下，

$$|-NK_X - D| = \{\mathrm{Div}(f) - NK_X - D \geq 0 \mid f \in K(R)\}.$$

设 $\phi\colon\ X' \to X$ 为一个对数解消，使得

1. $\phi^*|-NK_X - D| = F + |M|$，其中 F 是固定部分， M 是无基点的。2. $\phi_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(\phi) + F$ 是简单正规交叉。

这里我们解释为什么（1）中的拉回是有意义的：由于 $-NK_X - D$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的，我们可以将 $D' := \phi^*(-NK_X - D)$ 定义为 X' 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子，因此我们有

$$\mathrm{Div}(f) - NK_X - D \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Div}(f) + D' \geq 0$$

并且我们可以令 $|D'| := \{\mathrm{Div}(f) + D' \geq 0 \mid f \in K(R)\}$。然后，我们可以将 $|D'|$ 的固定部分 F 定义为一个有效的 $\mathbb{Q}$- 除子。经过可能的更高阶解消后，我们可以假设 $|D'| - F$ 是无基点的。

接下来我们证明 $|D'_{an}|$ 的固定部分是 F_{an}。容易看出 $\mathrm{Fix}|D'_{an}| \leq F_{an}$，因此我们只需验证，对于 F 的任意不可约分量 $\tilde{F}_i$ ，以及 $(F_i)_{an}$ 的任意不可约分量 F_i ，都有 $\mathrm{mult}_{\tilde{F}_i}|D'| = \mathrm{mult}_{F_i}|D'_{an}|$。注意， F_i 对应于 $K(R)$ 的一个 ˜ ˆ 离散赋值 ν_i ，而 F_i 对应于 $K(R)$ 的一个离散赋值 $\tilde{\nu}_i$ ，且该赋值延拓了 ν_i。于是我们得到

$$\mathrm{mult}_{F_i}|D'| = \min\{\mathrm{mult}_{F_i}(\mathrm{Div}(f) + D') \mid f \in \mathcal{O}_X(-NK_X - D) \subset K(R)\}.$$

由于 $\mathcal{O}_X(-NK_X - D)$ 是凝聚的，我们可以找到有限个生成元 f_j，使其成为 R-模的生成元；这些生成元也将是 $\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an}) = \mathcal{O}_X(-NK_X - D) \otimes_R R$ 的 R-模生成元。根据赋值的性质，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{mult}_{\tilde{F}_i}|D'_{an}| &= \min_j\{\mathrm{mult}_{\tilde{F}_i}(\mathrm{Div}(f_j) + D'_{an})\} \\
&= \min_j\{\tilde{\nu}_i(f_j)\} - \tilde{\nu}_i(D'_{an}) \\
&= \min_j\{\nu_i(f_j)\} - \nu_i(D') \\
&= \mathrm{mult}_{F_i}|D'|
\end{aligned}$$

注意到 $\phi_{an}\colon\ X'_{an} \to X_{an}$ 也是一个对数解消。由于 $|M|, |M_an|$ 无基点， $|\mathcal{O}_X(-NK_X - D)|$（分别地， $|\mathcal{O}_{X_{an}}(-NK_{X_{an}} - D_{an})|$）中的一般元素诱导一个 N-补，当且仅当对于所有 i，某个不等式 $\mathrm{mult}_{F_i} F \leq a_i$ （分别地，$\mathrm{mult}_{\tilde{F}_i} F_{an} \leq a_i$）成立。因此，由 B^+_{an} 的存在性可知结论成立。

□

注 4.3。一般原则是，代数线性系 $|D'|$ 在芽 $X \ni x$ 上的表现不逊于其对应的解析线性系 $|D'_{an}|$。这是由 $x \in X$ 处 $\mathcal{O}_X(D')$ 与 $\mathcal{O}_{X_{an}}(D'_{an})$ 之间的关系所致。容易验证，该证明对“(ϵ, N)-补”同样适用，因为唯一的区别在于 F 和 F_{an} 的系数所满足的不等式条件。

定理 1.1 的证明。若 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$，则 $\epsilon = 0$。根据定理 3.16，我们可以取 $N = 2$，从而得证。因此，我们可以假设 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) > 0$。根据定理 3.16，$(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 要么是光滑的，要么属于定理 3.16 的情形 1。特别地，$X \ni x$ 要么是光滑的，要么是一个循环商奇点。根据定理 4.1，存在唯一一条经过 x 的素 $\mathcal{F}$-不变曲线 L，使得 $(X \ni x, B + L)$ 在（解析局部意义下）是 ϵ-对数正则的。

由于 $X \ni x$ 是 Kawamata 对数终端的，根据 [17, 定理 1.1]，，存在一个仅依赖于 Γ 的正整数 N，使得在解析局部情形下，$(X \ni x, B + L)$ 有一个 (ϵ, N)- 补 $(X \ni x, \tilde{B}^+ + L)$；若 $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{Q}$，则可以取 $\tilde{B}^+ \geq B$。这里我们指出，由于 L 可能不是代数的，B^+ 也可能不是代数的。还需指出，尽管[17, 定理 1.1] 只讨论代数对，证明的相同步骤在解析情形下也成立。

根据定理 4.1(2)，$(X \ni x, \mathcal{F})$ 是 ϵ-对数正则。令 $f\colon Y \to X$ 为 $X \ni x$ 的极小解消，且令 E 为约化的 f-例外除子。令 $L_Y := f_*^{-1}L$ 以及 $K_{\mathcal{F}_Y} + \tilde{B}_Y^+ := f^*(K_{\mathcal{F}} + \tilde{B}^+)$。由定理 4.1(2),

$$K_Y + \tilde{B}_Y^+ + L_Y = f^*(K_X + \tilde{B}^+ + L) - E.$$

因此，$N(K_Y + \tilde{B}_Y^+ + L_Y)$ 在 x 的某个邻域上是卡蒂埃的，所以 $N(K_{\mathcal{F}_Y} + \tilde{B}_Y^+)$ 在 x 的某个邻域上是卡蒂埃的。由于 $X \ni x$ 是一个循环商奇点，$N(K_{\mathcal{F}} + \tilde{B}^+)$ 在 x 附近是卡蒂埃的。因此，在解析局部意义下，$(X \ni x, \mathcal{F}, \tilde{B}^+)$ 是 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 的一个 (ϵ, N)-补。

注意，对于任意奇点消解 $\phi\colon X' \to X \in x$，假设对于某个边界 C，$(X \ni x, \mathcal{F}, C)$ 是 ϵ-对数正则的，那么 $(X', \mathcal{F}_{X'}, C' + A)$ 在 $x \in X$ 上也是次-ϵ-对数正则的，其中 $K_{\mathcal{F}_{X'}} + C' = \phi^*(K_{\mathcal{F}} + C)$，且 A 是 $X \ni x$ 上一个无基点线性系 $|M|$ 的一般元素。这是因为在 x 的（一个邻域）上，所有例外曲线都是不变的 $A \cap \phi_*^{-1}C = \emptyset$，并且 A 在 $\mathcal{F}_{X'}$ 的一般光滑点处与例外轨迹横截相交。由于 $K_{\mathcal{F}}$ 是代数的，我们只需用 $K_{\mathcal{F}}$ 替换 K_X，即可完全沿用引理 4.2 的证明。因此，我们证明了 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 存在代数的 (ϵ, N)-补充。

□

定理 4.4. 设 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 是一个满足 秩$\mathcal{F} = 1$ 的叶状对数正则曲面芽。则 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 存在一个 2- 补。进一步地，$(X \ni x, \mathcal{F})$ 存在一个 1- 补，当且仅当 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 不属于定理 *3.16* 中的情形 2 或情形 4。

定理 4.4 的证明。只需考虑 $x \in X$ 不光滑的情形，否则结论显然成立。根据定理 3.16，若 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$，则 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 是自身的一个 2-补集；当且仅当 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 不属于定理 3.16 的情形 2 或情形 4 时，它是自身的一个 1-补集。因此我们可以假设 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) > 0$，且 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 属于定理 3.16 的情形 1。令 $f\colon Y \to X$ 为 $X \ni x$ 的极小解消，并且

设 E_1 为唯一的 $f^{-1}\mathcal{F}$-不变的 f-例外曲线，满足 $Z(f^{-1}\mathcal{F}, E_1) = 1$。我们令 C_Y 为任意一条非奇异的非 $f^{-1}\mathcal{F}$-不变曲线，使得 C_Y 与 E_1 相交，且 $C_Y \cup \mathrm{Exc}(f)$ 是简单正规交叉。通过计算交数，我们知道 $(X \ni x, \mathcal{F}, C := f_*C_Y)$ 是 $(X \ni x, \mathcal{F})$ 的一个 1-补。 □

定理的证明 *1.2*。 由定理4.4可得。 □

4.2 局部指标定理

定理*1.3*的证明。根据定理1.2，存在一个正整数 I，仅依赖于 a 和 Γ，使得 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 具有一个单调的 (a, I)-补 $(X \ni x, \mathcal{F}, B^+)$。于是 $B = B^+$，因此 $I(K_{\mathcal{F}} + B$在 x附近是卡蒂埃的。 □

4.3 最小对数偏差集合

定理 1.4 的证明。首先，我们证明“$\subset$”。设 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 是一个叶状三元组，满足 $\dim X = 2$、秩 $\mathcal{F} = 1$，且 $B \in \Gamma$。如果 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$，那么最小对数偏差$(X \ni x, \mathcal{F}, B) = 0$，结论即得。因此，我们可以假设 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) > 0$。根据定理 3.16（情形 1.d），存在唯一一条经过 x 的素 $\mathcal{F}$-不变曲线 L，使得最小对数偏差$(X \ni x, B + L) =$ 最小对数偏差$(X \ni x, \mathcal{F}, B)$。令 $K_L + B_L := (K_X + B + L)|_L$。于是。

$$B_L \in \left\{ \frac{n - 1 + \sum c_i\gamma_i}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, c_i \in \mathbb{N}, \gamma_i \in \Gamma \right\} \cap [0, 1],$$

因此 $\mathrm{mld}(L \ni x, B_L) \in \{0, \frac{1-\sum c_i\gamma_i}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, c_i \in \mathbb{N}, \gamma_i \in \Gamma\} \cap [0, 1]$. 根据曲面的精确伴随逆定理，

$$\mathrm{mld}(L \ni x, B_L) = \mathrm{mld}(X \ni x, B + L) = \mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B),$$

因此，$\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) \in \left\{0, \frac{1-\sum c_i\gamma_i}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, c_i \in \mathbb{N}, \gamma_i \in \Gamma\right\} \cap [0, 1]$.。我们指出，尽管 L 可能不是代数的，但我们仍然可以对 L 应用伴随公式和伴随逆定理（参见 [36, 16.6 命题]）。

现在我们证明“$\supset$”。根据定理 3.16，存在某个 $(X \ni x, \mathcal{F})$，使得 $0 = \mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F})$，其中 $\dim X = 2$ 且 $\mathrm{rank}\,\mathcal{F} = 1$。令 $\mathcal{F}_0$ 为由 X_0 的自然纤维化结构诱导的叶层: $= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to Z := \mathbb{P}^1$，其中 $x_0 \in X_0$ 是一个闭点， F 是包含 x_0 的 $X_0 \to Z$ 的纤维，而 B_i, $_j$,0 是一般的水平光滑有理曲线。我们对（ F 的双有理变换）与 x_0 n 次的逆像的交点进行爆破，从而得到一个收缩映射 $h_n : X'_n \to X_0$。令 $F_n := (h_n^{-1})_*F_0$, $B'_{i,j,n} := (h_n^{-1})_*B_{i,j}$,0，以及 $\mathcal{F}'_n := h_n^{-1}\mathcal{F}_0$。令 $g_n : X'_n \to X_n$ 为 F_n 的收缩映射，其中 $x_n :=$ 的中心为 $_{X_n} F'_n$, $B_{i,j,n} := (g_n)_*B'_{i,j,n}$，以及 $\mathcal{F}_n := (g_n)_*\mathcal{F}'_n$。令 $B := \sum_i \sum_{i=1}^{c_i} \gamma_i B_{i,j,n}$。那么

$$a(F_n, \mathcal{F}_n, B) = \mathrm{mld}(X_n \ni x_n, \mathcal{F}_n, B) = \frac{1 - \sum c_i\gamma_i}{n}$$

如果 $\sum c_i\gamma_i \le 1$，且 $a(F_n, \mathcal{F}_n, B) =$ 最小对数偏差$(X_n \ni x_n, \mathcal{F}_n, B) = -\infty$，则另当别论。因此，“$\supset$”成立。 □

推论的证明 *1.5* 和 *1.6*。 它们可由定理1.4直接推出。 □

定理 1.7 的证明。如果 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$，那么我们可以取 $l = 0$，从而得证。因此，我们可以假设 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) > 0$。根据定理 3.16，$(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 要么是光滑的，要么属于定理 3.16 中的情形 1。根据定理 3.16（情形 1.d），存在唯一一条经过 x 的素 $\mathcal{F}$-不变曲线 L，使得 $(X \ni x, B + L)$ 是对数正则的。根据 [30, 定理 1.2]，，存在一个仅依赖于 Γ 的正整数 l，以及 $X \ni x$ 上方的一个素除子 E，使得 $a(E, X, B + L) = \mathrm{mld}(X \ni x, B + L)$，并且 $a(E, X, 0) \leq l$。根据定理 4.1(2)，$a(E, \mathcal{F}, B) = \mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B)$，且 $a(E, \mathcal{F}, 0) = a(E, X, L) \leq a(E, X, 0) \leq l$。因此，$l$ 满足我们的要求。 □

4.4 一致有理多面体

定理 1.8 的证明。该问题是局部的，因此我们可以在闭点 $x \in X$ 的一个开邻域上进行讨论。若 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) = 0$，则 $B = 0$ 在 x 附近成立，无需再证。因此我们可以假设 $\mathrm{pld}(X \ni x, \mathcal{F}) > 0$。由定理 3.16，$(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 要么是光滑的，要么属于定理 3.16 的情形 1。由定理 3.16（情形 1.d），存在唯一一条经过 x 的素 $\mathcal{F}$-不变曲线 L，使得 $(X \ni x, B+L)$ 是对数正则的。由 [28, 定理 5.6]，，存在有理多面体 v_0，的一个开集 $U \ni \mathrm{v}_0$，它仅依赖于 v_0，，使得对于任意 $(v_1, \ldots, v_m) \in U$，$(X \ni x, \sum_{i=1}^m v_i B_i + L)$ 都是对数正则的。由定理 4.1，对于任意 $(v_1, \ldots, v_m) \in U$，$(X \ni x, \mathcal{F}, \sum_{i=1}^m v_i B_i)$ 都是对数正则的。定理即得。

□

5 MMP 中若干猜想的叶状版本

本节将正式介绍极小模型纲领的一些标准猜想在叶层情形下的版本，并讨论其背景。由于尚未奠定维数为 ≥ 4 的叶层极小模型纲领的基础，目前便在维数为 ≥ 4 的情形下研究这些猜想或许过于雄心勃勃。尽管如此，这些猜想的特殊情形仍可能在高维中得到研究，例如代数可积叶层，或满足性质（$*$）的叶层（[4, 定义 3.5]）。

5.1 补

猜想 5.1（补边）。设 ϵ 为正实数，d 为正整数，$\Gamma \subset [0, 1]$ 为一个 DCC 集。则存在一个正实数 n，仅依赖于 ϵ、d 和 Γ，并满足以下条件。

假设 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 是一个 $(\epsilon, \mathbb{R})$-补充叶状三元组，满足 $\dim X = d$ 且 $B \in \Gamma$。假设 $\epsilon = 0$ 或 $-K_{\mathcal{F}}$ 在 Z 上是大除子。那么 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 存在一个 (ϵ, n)-补充。此外，如果 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$，那么我们有 $(X/Z \ni z, \mathcal{F}, B)$ 的一个单调 (ϵ, n)-补充。

猜想 5.1 是 Shokurov 的 (ϵ, n)-补猜想有界性的一个类似版本 [17, 猜想 6.1]。当 $\mathcal{F} = T_X$ 时，通常已知猜想 5.1 在 $\epsilon = 0$ 且 X 是 Z ([7, 28, 53]) 上的 Fano 型，并且 $\dim X = 2$ [17] 时成立。我们指出，由于对奇点有约束，当 $Z = \{pt\}$ 时，“$-K_{\mathcal{F}}$ 在 Z 上是大”的条件几乎是空条件（参见 [6, 定理 5.1], [21, 定理 1.1]）。因此，猜想 5.1 的有趣情形应当出现在 $\epsilon = 0$ 或 $\dim Z > 0$ 时。

猜想 5.1 的两个特殊情形是局部指标猜想和整体指标猜想：

猜想 5.2（局部指标猜想）。设 d 为正整数， a 为有理数， $\Gamma \subset [0,1]\cap\mathbb{Q}$ 为 DCC 集。则存在一个正整数 I，仅依赖于 d、a 和 Γ，并满足以下条件。

假设 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 是一个维数为 d 的叶状芽，且 $B \in \Gamma$，并且 $\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) = a$。那么 $I(K_{\mathcal{F}} + B)$ 在 x 附近是卡蒂埃的。

猜想 5.2 是 Shokurov 局部指标猜想的一个类似命题 [33, 问题 5.2]. 定理 1.3 证明了猜想 5.2 当 $\dim X = 2$ 时。当 $\mathcal{F} = T_X$ 时，猜想5.2 对曲面已知 [17]（当 [52] 时 $B = 0$，这是由分类得出的），终端三维簇[29]（这是由分类得出的 [34] 当 $B = 0$ 时），规范三维簇（当 $B = 0$ [33] 时）、对数托里克对 [3], 以及商奇点（当 $B = 0$ [46] 时）。

猜想 5.3（全局指标猜想）。设 d 为一个正整数， $\Gamma \subset [0,1]\cap\mathbb{Q}$ 为一个 DCC 集。则存在一个仅依赖于 d 和 Γ 的正整数 I，使其满足以下条件。

假设 $(X, \mathcal{F}, B)$ 是一个维数为 d 的射影 lc 带叶三元组，满足 $B \in \Gamma$ 和 $K_{\mathcal{F}} + B \equiv 0$。则 $I(K_{\mathcal{F}} + B) \sim 0$。

猜想5.3 是 Shokurov 局部指标猜想 [17, 猜想 6。2]。 [40] 证明了猜想5.3 在 $d = 3$ 且 $B \neq 0$ 或当 $d = 2$时成立。当 $\mathcal{F} = T_X$时，猜想5.2 已在曲面情形下得到证明 [50]（另见 [11, 57, 58]）、三维簇情形下 [56]（另见[32]），以及当 $-K_X$ 是大 [26]（另见 [7]）。

命题 5.4. 猜想*5.1* 维数为 d 、秩为 r 的叶层满足猜想 *5.2* 和 *5.3* 维数为 d、秩为 r。

证明。 在猜想 5.2的设定下，根据猜想 5.1，$(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 存在一个单调的 (a, I)-补充式 $(X \ni x, \mathcal{F}, B^+)$，其中 I仅依赖于 a，d和Γ。于是 $B^+ = B$，因此 $I(K_{\mathcal{F}} + B)$ 在 x附近是卡蒂埃的。

<escape>在猜想 5.3 的设定下，$(X, \mathcal{F}, B)$ 存在一个单调的 I-补充组 $(X, \mathcal{F}, B^+)$，其中 I仅依赖于 d和 Γ。因此 $B^+ = B$，故 $I(K_{\mathcal{F}} + B) \sim 0$。</escape> □

此外，值得一提的是叶状结构的全局 ACC 猜想。

猜想 5.5（全局 ACC）。设 d 为正整数， $\Gamma \subset [0,1]$ 为 DCC 集合。那么存在有限集 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 满足以下条件。

假设 $(X, \mathcal{F}, B)$ 是一个维数为 d 的射影 lc 带叶三元组，满足 $B \in \Gamma$ 和 $K_{\mathcal{F}} + B \equiv 0$。那么 $B \in \Gamma_0$。

猜想 5.5 是通常的对的全局 ACC 的一个类比 [25, 定理 1。5]。[18] 证明了猜想 5.5 当 $d = 2$ 时，而 [40] 证明了猜想 5.5 当 $d = 3$且 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$ 时。我们指出，显然，维数为 d 、秩为 r 的叶状结构的猜想 5.5 蕴含维数为 d 、秩为 r 且满足$\Gamma \subset \mathbb{Q}$的叶状结构的猜想。

最后，我们回顾关于 Fano 叶状结构有界性的以下猜想：猜想 5.6（参见 [5, 第 5 页，问题]）。设 d 是一个正整数。那么，维数为 d 的光滑射影簇上的 Fano 叶状结构构成一个有界族。

由于补的有界性 [7] 是证明 BAB 猜想的关键[8], 我们期望 5.1 有助于解决猜想 5.6。

5.2 最小对数不一致性

我们还有两个与叶状结构的最小对数偏差（mld）相关的猜想。

猜想 5.7（mld 的 ACC）。设 d 为一个正整数，且 $\Gamma \subset [0,1]$ 为一个 DCC 集合。那么

$$\{\mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B) \mid (X \ni x, \mathcal{F}, B) \text{ is } lc, \dim X = d, B \in \Gamma\}$$

满足升链条件（ACC）。

猜想 5.7 是 Shokurov 关于最小对数不一致性的 ACC 猜想的类似命题 [51, 问题 5]。猜想 5.7 在 $d = 2$ ([19, 定理 0。2], 推论 1.6 ）时已知。当 $\mathcal{F} = T_X$ 时，猜想 5.7 对曲面 [1], 对数托里克对[2], 例外奇点 [28], 在 $B = 0$ [47]时的商奇点，以及维数 3 [27, 29, 32–34, 38, 39, 42, 45, 47]中的许多情形下已知。

猜想 5.8（最小对数偏差的统一有界性）。设 d 为一个正整数，$\Gamma \subset [0,1]$ 为一个 DCC 集。则存在一个正实数 l，仅依赖于 d 和 Γ，并满足以下条件。

设 $(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 是一个维数为 d 的对数正则叶状芽，满足 $K_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃且 $B \in \Gamma$。那么存在一个位于 $X \ni x$ 上方的素因子 E，使得 $a(E, \mathcal{F}, B) = \mathrm{mld}(X \ni x, \mathcal{F}, B)$ 且 $a(E, \mathcal{F}, 0) \leq l$。

猜想 5.8 是关于 mld 的一致有界性猜想的一个类比 [29,猜想 8。2]（见 [44, 猜想 1。1] 的雏形）。定理 1.7 证明了猜想 5.8 当 $d = 2$ 时成立。当 $\mathcal{F} = T_X$ 时，猜想 5.8 对曲面已知 [30]（见 [44] 当 Γ 是有限集时的理想赋值情形）、终端三维对 [29],以及对数环面对 [29]。

最后，我们指出，我们预期本节所提及的猜想的广义对版本 [10, 31]（更准确地说，广义叶状四元组版本 [20, 40]）同样成立。为方便读者，我们省略这些猜想的具体细节。

致谢。我们感谢 Paolo Cascini、Guodu Chen、Yen-An Chen、Christopher D. Hacon、Yuchen Liu 和 Yujie Luo 就本文提出的有益讨论和意见。我们谨此感谢 ChatGPT 在润色措辞方面提供的帮助。我们感谢 A. Langer 就本文中的 Grauert-Riemenschneider 型消失定理及叶状对数正则曲面奇点的分类所进行的有益讨论，并为我们提供了参考文献 [24, 48, 49]。

声明

•基金资助：第三位作者部分获得美国国家科学基金会（NSF）研究基金资助，项目编号：DMS-1801851、DMS-1952522，以及西蒙斯基金会的资助；奖项编号：256202。

- 利益冲突/竞争性利益：不存在利益冲突。
- 伦理审批：本文的撰写符合伦理规范。本文是一篇纯数学论文，因此不存在实验方案。
- 参与声明：所有作者均同意参与本文的撰写。

•发表同意：所有作者均同意参与发表，并同意在论文被接收后发表于《欧洲数学杂志》。

- 数据和材料可用性：无数据。
- 代码可用性：无代码。
- 作者贡献：所有作者对本研究的贡献均相同。

参考文献

[1] V. Alexeev，《两个二维终止》，《杜克数学杂志》69 (1993)，第3期，527–545页。[2] F. Ambro，《环面最小对数不一致集》，《中欧数学杂志》4 (2006)，第3期，358–370页。[3] F. Ambro，《关于环面奇点分类》，载于《组合交换代数与计算机代数会议论文集》（曼加利亚，2008），V. Ene 和 E. Miller（编），《当代数学》502 (2009)，1–4页。[4] F. Ambro、P. Cascini、V. V. Shokurov 和 C. Spicer，《模部分的正性》，arXiv:2111.00423。[5]C. Araujo，《Fano 叶状结构短期课程》，https://www.cirm-math.fr/RepOrga/2251/Slides/Araujo 3.pdf[6] C. Araujo 和 S. Druel，《关于 Fano 叶状结构》，《数学进展》238 (2013)，70–118页。[7] C. Birkar，《Fano 簇上的反多重反典范系》，《数学年刊》（第2辑），190 (2019)，345–463页。[8] C. Birkar，《线性系奇点与 Fano 簇的有界性》，《数学年刊》193 (2021)，第2期，347–405页。[9] C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. Mc Kernan，《对数一般型簇的极小模型的存在性》，《美国数学学会杂志》23 (2010)，第2期，405–468页。[10] C. Birkar 和 D.-Q. Zhang，《极化对的饭高纤维化与多重反典范系的有效性》，《法国高等科学研究所数学出版物》123 (2016)，283–331页。[11] R. Blache，《Kodaira 维数为零的对数典范曲面的结构，I》，《代数几何杂志》4 (1995)，第1期，137–179页。[12] M. Brunella，《复射影曲面上的叶状结构》，arXiv:math/0212082。[13]M. Brunella，《叶状结构的双有理几何》，IMPA 专著 1 (2015)，施普林格出版社，Cham。

[14]P. Cascini 和 C. Spicer, 《值得思考的问题》, https://www.cirm-math.fr/RepOrga/2251/Slides/Questions MMP.pdf。[15] P. Cascini 和 C. Spicer, 《三维簇上秩为一的叶层的极小模型纲领》, arXiv:2012.11433。[16] P. Cascini 和 C. Spicer, 《三维簇上余秩为一的叶层的极小模型纲领》, 《数学发明》225 (2021), 603–690。[17] G. Chen 和 J. Han, 《曲面的 (ϵ, n)-补的有界性》, 《数学进展》383 (2021), 107703, 共40页。[18] Y.-A. Chen, 《叶层对数典范阈值的升链条件》, arXiv:2202.11346。[19] Y.-A. Chen, 《曲面上的对数典范叶层奇点》, 《数学新消息》00 (2023), 1–35。[20] G. Chen、J. Han、J. Liu 和 L. Xie, 《代数可积叶层与广义对偶的极小模型纲领》, arXiv:2309.15823。[21] S. Druel, 《反典范丛为 nef 的叶层》, 《美国数学会汇刊》369 (2017), 第11期, 7765–7787。[22] S. Druel, 《奇异空间上典范类数值平凡的余维一叶层》, 《杜克数学杂志》170 (2021), 第1期, 95–203。[23] R. Friedman, 《代数曲面与全纯向量丛》, Universitext, Springer-Verlag, 纽约, 1998。[24] C. D. Hacon 和 A. Langer, 《带叶曲面的双有理有界性》, 《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔数学杂志）770 (2021), 205–229。[25] C. D. Hacon、J. McKernan 和 C. Xu, 《对数典范阈值的升链条件》, 《数学年刊》180 (2014), 第2期, 523–571。[26] C. D. Hacon 和 C. Xu, 《Fano 型对数 Calabi-Yau 对的有界性》, 《数学研究快报》22 (2015), 1699–1716。[27]J. Han 和 J. Liu, 《关于翻转的终止性与例外非典范奇点》, arXiv:2209.13122。[28]J. Han、J. Liu 和 V. V. Shokurov, 《例外奇点的极小对数不一致度的升链条件》, arXiv:1903.04338。[29]J. Han、J. Liu 和 Y. Luo, 《终端三维簇的极小对数不一致度的升链条件》, arXiv:2202.05287。

[30] J. Han 和 Y. Luo, 《计算曲面最小对数不一致性的除子的有界性》, 《Jussieu 数学研究所杂志》（2022）, 1–24。[31] C. D. Hacon 和 J. Liu, 《广义对数正则对的翻转存在性》, 《剑桥数学杂志》11（2023）, 第 4 期, 795–828。[32] C. Jiang, 《三维非典范奇点最小对数不一致性的间隙定理》, 《代数几何杂志》30（2021）, 759–800。[33] M. Kawakita, 《三维典范奇点的指标》, 《美国数学杂志》137（2015）, 第 1 期, 271–280。[34] Y. Kawamata, 《三维终端奇点的最小不一致性系数》, 载于 V. V. Shokurov, 《三维对数变换》, 附录, 《俄罗斯科学院数学系列》56（1992）, 第 1 期, 105–203。[35] S. Keel, 《正特征下 nef 且大线丛的基点自由性》, 《数学年刊》149（1999）, 253–286。[36] J. Koll´ar ´等, 《代数三维簇的翻转与丰沛性》, Ast´erisque 211（1992）。[37]J. Koll´ar 和 S. Mori, 《代数簇的双有理几何》, 剑桥数学丛书 134（1998）, 剑桥大学出版社。[38] J. Liu 和 L. Xiao, 《三维非典范奇点最小对数不一致性的最优间隙》, 《纯粹与应用代数杂志》225（2021）, 第 9 期, 106674, 23 页。[39] J. Liu 和 Y. Luo, 《$_5$ $_6$-对数正则三维簇的最小对数不一致性的 ACC》, arXiv:2207.04610。[40] J. Liu、Y. Luo 和 F. Meng, 《带叶三维簇的全局 ACC》, 《美国数学会汇刊》376（2023）, 第 12 期, 8939–8972。[41] Q. Liu, 《代数几何与算术曲线》, 牛津数学研究生教材 6（2006）, 牛津大学出版社, 平装新版。[42] D. Markushevich, 《终端 cDV 芽的最小不一致性为 1》, 《东京大学数学科学杂志》3（1996）, 第 2 期, 445–456。[43] M. McQuillan, 《叶层的典范模型》, 《纯粹与应用数学季刊》4（2008）, 第 3 期, 专辑: 献给 Fedor Bogomolov（第二部分）, 877–1012。[44] M. Mustaţ˘a 和 Y. Nakamura, 《关于固定芽上最小对数不一致性的有界性猜想》, 载于《代数几何中的局部与整体方法》, 《当代数学》712（2018）, 287–306。

[45] Y. Nakamura，《固定 Gorenstein 指数簇上的最小对数不一致性》，《密歇根数学杂志》65（2016），第 1 期，165–187。[46] Y. Nakamura 和 K. Shibata，《商奇点的 Shokurov 指数猜想》，arXiv:2209.04845。[47] Y. Nakamura 和 K. Shibata，《商奇点的伴随反演》，《代数几何》9（2022），第 2 期，214–251，[48] M. Lupinski，《代数曲面上的叶层奇点》（波兰语），硕士论文（2021）。[49] M. Lupinski，私人通信。[50]Y.G. Prokhorov 和 V.V. Shokurov，《迈向补的第二主定理》，《代数几何杂志》18（2009），第 1 期，151–199。[51] V. V. Shokurov，《关于 Fano 簇的问题》，《代数簇双有理几何：未决问题》，第二十三届国际研讨会，谷口基金会数学部，30–32，1988 年 8 月 22 日至 8 月 27 日。[52] V. V. Shokurov，《三维对数翻转》，附 Y. Kawamata 的英文附录，《俄罗斯科学院数学系列》56（1992），第 1 期，105–203。[53] V. V. Shokurov，《n-补的存在性与有界性》，arXiv:2012.06495。[54] C. Spicer，《高维带叶 Mori 理论》，《组合数学》156（2020），第 1 期，1–38。[55] C. Spicer 和 R. Svaldi，《余秩 1 三维叶状结构的极小模型纲领的局部与整体应用》，《欧洲数学会杂志》24（2022），第 11 期，3969–4025。[56]Y. Xu，《关于对数 Calabi–Yau 对的指标猜想的一些结果》，arXiv:1905.00297。[57] D.-Q. Zhang，《对数 Enriques 曲面》，《京都大学数学杂志》31（1991），第 2 期，419–466。[58] D.-Q. Zhang，《对数 Enriques 曲面 II》，《京都大学数学杂志》33（1993），第 2 期，357–397。