arXiv:2305.06510v1 [math.DS] 11 May 2023

随机反应-扩散格点系统的大偏差原理

Bixiang Wang 新墨西哥矿业与技术学院数学系，美国新墨西哥州索科罗 87801电子邮箱：bwang@nmt.edu

摘要

本文研究定义在 N 维整数集上的随机反应扩散格点系统的大偏差原理，其中非线性漂移项局部 Lipschitz 连续，且具有任意阶的多项式增长，而非线性扩散项局部 Lipschitz 连续，且具有线性增长。我们首先证明受控随机格点系统的解的收敛性，然后基于大偏差原理与拉普拉斯原理的等价性，利用弱收敛方法建立大偏差原理。

关键词：大偏差原理；拉普拉斯原理；弱收敛；格点系统。2020 年数学主题分类。主要分类：60F10；37L55；次要分类：34F05、39A50、60H10。

1 引言

本文研究定义在 N 维整数集 $\mathbb{Z}^N$ 上的非自治随机反应-扩散格点系统的大偏差原理。给定 $i \in \mathbb{Z}^N$，考虑如下 It^o 随机系统：

$$du_i^\varepsilon(t) + \nu(Au^\varepsilon(t))_i dt + F_i(t, u_i^\varepsilon(t))dt = \sqrt{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{k,i}(t, u_i^\varepsilon(t))dW_k, \quad t > 0, \tag{1.1}$$ intr1

具有初始数据的

$$u_i^\varepsilon(0) = u_{0,i}, \tag{1.2}$$ intr2

其中，$i = (i_1, \ldots, i_N) \in \mathbb{Z}^N$，$u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N}$是一个未知序列，$\nu > 0$和 $\varepsilon \in (0,1)$是常数，A是在 $\mathbb{Z}^N$上定义的负离散 N维拉普拉斯算子，$(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$是概率空间上的一列相互独立的实值标准维纳过程。

对于每个 $i \in \mathbb{Z}^N$，非线性函数 F_i：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个局部 Lipschitz 函数，且关于第二个自变量具有任意次数的多项式增长。对于扩散系数，我们假设，对于每个 $i \in \mathbb{Z}^N$ 和 $k \in \mathbb{N}$, $\sigma_{k,\ i}$：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个局部 Lipschitz 函数，且关于第二个自变量具有线性增长。

格点系统可用于描述具有离散结构的物理系统的动力学，包括电路、图案形成以及神经脉冲的传播 [7, 30, 31, 38, 48, 50,51]。此类系统也可通过对定义在无界区域上的偏微分方程进行空间离散化而得到。许多专家研究了确定性和随机格点系统的解。对于确定性格点系统，行波、混沌解和全局吸引子分别在 [1, 2, 3, 27, 36, 37, 38, 69], [26, 28, 29] 和[4, 9, 46, 49, 56, 65], 中得到了研究。对于随机格点系统，文献 [5, 6, 14, 15, 44, 45] 报告了随机吸引子的研究结果。最近，文献 [21, 22, 23, 52, 53, 66, 67, 68] 及其中的参考文献考察了随机格点系统的不变测度和周期测度。本文研究随机格点系统 (1.1)-(1.2) 的大偏差原理。

随机系统的大偏差原理研究的是当 $\varepsilon \to 0$ 时，解的分布在尾事件上的指数衰减，这一问题已在 [33, 41, 62, 63, 64] 及其参考文献中得到研究。处理随机偏微分方程大偏差问题有两种基本方法：经典方法和弱收敛方法。经典方法基于离散化和逼近论证，并结合一致的指数概率估计，参见例如 [10, 16, 17, 24, 25, 39, 40, 42, 47, 55, 61]。弱收敛方法基于大偏差原理与拉普拉斯原理的等价性，以及无穷维布朗运动的正函数的变分表示，参见例如
[8, 11, 12, 13, 19, 20, 32, 34, 35, 54, 57, 59, 60]。

由随机常微分方程生成的有限维动力系统，以及由随机偏微分方程生成的无限维动力系统，其大偏差原理已得到了充分研究。然而，据作者所知，文献中似乎尚无关于无穷维格点系统大偏差的结果。本文旨在研究这一问题，并采用 [12, 13, 35] 中介绍的弱收敛方法，建立无穷维格点系统 (1.1)-(1.2) 的大偏差原理。弱收敛方法的优点之一在于，它不要求解满足一致指数概率估计。

请注意，la　　格点系统 (1.1) 在 $\mathbb{Z}^N$ 上可以被视为相关方程的空间离散化　　-

关于 $\mathbb{R}^n$ 上相应的反应扩散偏微分方程。当非线性漂移项满足局部 Lipschitz 连续性和多项式增长条件，且扩散项满足全局 Lipschitz 连续性时，有界区域内反应扩散方程的大偏差已在 [17, 19, 43] 中得到研究。本文将研究具有多项式漂移项和局部 Lipschitz 连续扩散项的无限维格点系统 (1.1)。关于具有全局 Lipschitz 漂移项的有界区域内反应扩散方程的大偏差，读者可参阅 [18, 24, 40, 58, 61] 。

我们将在下一节回顾大偏差原理和拉普拉斯原理的基本概念，并在第 3 节讨论系统 (1.1)-(1.2) 的适定性。最后，我们将在第 4 节证明 (1.1)-(1.2) 的大偏差原理。

2 大偏差理论

本节将基于 [12, 35] 中介绍的弱收敛方法，回顾一族随机变量的大偏差原理和拉普拉斯原理。

设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是满足通常条件的完备滤过概率空间。假设 $\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是可分希尔伯特空间 H 上的柱状维纳过程，其协方差算子为恒等算子，并且相对于 $(\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$，这意味着存在另一个可分希尔伯特空间 U，使得嵌入 $H \hookrightarrow U$ 是希尔伯特-施密特的，且 $W(t)$ 取值于 U。

设 $\mathcal{E}$ 为一个波兰空间，对于每个 $\varepsilon > 0, \mathcal{G}^\varepsilon\colon C([0,T],U) \to \mathcal{E}$，令其为一个可测映射。记为

$$X^\varepsilon = \mathcal{G}^\varepsilon(W), \quad \forall\ \varepsilon > 0. \tag{2.3}$$ pre0

我们将研究当 $\varepsilon \to 0$ 时 X^ε 的大偏差原理。为此，我们首先回顾 [12] 中的一些记号。

给定 $N > 0$，记作

$$S_N = \{v \in L^2(0,T;H) : \int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt \leqslant N\}. \tag{2.4}$$ pre0a

那么， S_N 是一个赋有弱拓扑的 Polish 空间。除非另有说明，本文始终假设 S_N 配备弱拓扑。令 $\mathcal{A}$ 表示所有H值随机过程 v 构成的空间，这些过程关于$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$ 和$\int_0^T \|v(t)\|^2 dt < \infty$ P-几乎处处都是渐进可测的。记为

$$\mathcal{A}_N = \{v \in \mathcal{A} : v(\omega) \in S_N \text{ for almost all } \omega \in \Omega\}. \tag{2.5}$$ pre0b

族 $\{X^\varepsilon\}$ 的大偏差原理关注的是当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\{X^\varepsilon\}$ 的分布在尾事件上的指数衰减。这种指数衰减由速率函数 $I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$ 表征。

定义 2.1. 若函数 $I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$ 在 $\mathcal{E}$ 上下半连续，则称其为 $\mathcal{E}$上的速率函数。若速率函数 I 定义在 $\mathcal{E}$ 上，且对每个$0 \leqslant C < \infty$，水平集 $\{x \in \mathcal{E}: I(x) \leqslant C\}$ 都是 $\mathcal{E}$的紧子集，则称其为 $\mathcal{E}$ 上的良好速率函数。

定义 2.2. 若族 $\{X^\varepsilon\}$满足 $\mathcal{E}$ 中的大偏差原理，且速率函数为 $I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$，则称其满足大偏差原理。对 $\mathcal{E}$中的任意 Borel 子集 B，

$$-\inf_{x\in B^\circ} I(x) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(X^\varepsilon \in B) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(X^\varepsilon \in B) \leqslant -\inf_{x\in \overline{B}} I(x).$$

其中， B° 和 $\overline{B}$ 分别是 B 在 $\mathcal{E}$中的内部和闭包。

由于 $\mathcal{E}$ 是一个 Polish 空间，众所周知，族 $\{X^\varepsilon\}$ 在 $\mathcal{E}$ 上满足大偏差原理，且速率函数为 $I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$，当且仅当 $\{X^\varepsilon\}$ 在 $\mathcal{E}$ 上满足具有相同速率函数的拉普拉斯原理。下文给出 $\{X^\varepsilon\}$ 的拉普拉斯原理概念。

定义 2.3. 若对所有有界连续函数 $H: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$,，族 $\{X^\varepsilon\}$在 $\mathcal{E}$ 中以速率函数$I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$ 满足拉普拉斯原理。

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}H(X^\varepsilon)}\right) = -\inf_{x\in\mathcal{E}} \{H(x)+I(x)\}.$$

为了证明 X^ε 的大偏差原理，我们将假设族 $\{\mathcal{G}^\varepsilon\}$ 满足以下条件：存在一个可测映射 $\mathcal{G}^0$: $C([0,T],U) \to \mathcal{E}$，使得

(H1) 如果 $N < \infty$ 和 $\{v^\varepsilon\} \subseteq \mathcal{A}_N$ 满足 $\{v^\varepsilon\}$ 作为 S_N 值随机变量依分布收敛于 v，那么 $\mathcal{G}^\varepsilon\left(W + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v^\varepsilon(t)dt\right)$ 依分布收敛于 $\mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v(t)dt\right)$。

(H2) 对于每个 $N < \infty$，集合 $\mathcal{G}^0(\int_0^\cdot v(t)dt): v \in S_N\}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个紧子集 .

定义 $I: \mathcal{E} \to [0,\infty]$，使得对于每个 $x \in \mathcal{E}$,

$$I(x) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt: \ v \in L^2(0,T;H) \text{ such that } \mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v(t)dt\right) = x\right\}, \qquad (2.6)$$ pre1

约定空集上的下确界取为 8。根据假设 (H2)，我们发现，由 (2.6) 定义的映射 I 的每个水平集都是 $\mathcal{E}$ 的紧子集，这进一步说明 I 的下半连续性。根据定义，映射 I 是 $\mathcal{E}$ 上的良好速率函数。此外，在 (H1) 和 (H2) 的条件下，族 $\{X^\varepsilon\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中满足拉普拉斯原理，其速率函数为 I，如下所述（参见 [12, 定理 4.4]）。

LP1 命题 2.4. 如果 $\{\mathcal{G}^\varepsilon\}$ 满足 (H1)-(H2)，则由 (2.3) 给出的族 $\{X^\varepsilon\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中满足拉普拉斯原理，其速率函数为由 (2.6) 定义的 I。

3 随机格点系统的适定性

本节讨论系统（1.1）-（1.2）解的存在唯一性，这是建立解的大偏差原理所必需的。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}},P)$ 为满足通常条件的完备滤过概率空间，且 $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $(\Omega\ \mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}},P)$ 上的一列相互独立的实值标准维纳过程。记为

$$\ell^2=\left\{u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N}\ :\ \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}|u_i|^2<\infty\right\}$$

范数为 $\|\cdot\|$，内积分别为 $(\cdot、\ \cdot)$。回顾负离散 N 维拉普拉斯算子 A：$\ell^2\to\ell^2$ 对于每个 $u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N}\in\ell^2$ 和 $i=(i_1、\ i_2、\ .....、\ i_N)\in\mathbb{Z}^N$，其定义为:

$$(Au)_i=-u_{(i_1-1,i_2,\dots,i_N)}-u_{(i_1,i_2-1,\dots,i_N)}-\cdots-u_{(i_1,i_2,\dots,i_N-1)}$$

$$+2Nu_{(i_1,i_2,\dots,i_N)}-u_{(i_1+1,i_2,\dots,i_N)}-u_{(i_1,i_2+1,\dots,i_N)}-\cdots-u_{(i_1,i_2,\dots,i_N+1)}\big).$$

为方便起见，对于每个 $j=1,\dots,N$，定义 A_j,B_j,B_j^*：$\ell^2\to\ell^2$，使得对于 $u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N}\in\ell^2$ 和 $i=(i_1,\ i_2,\dots,i_N)\in\mathbb{Z}^N$,

$$(A_ju)_i=-u_{(i_1,\dots,i_j+1,\dots,i_N)}+2u_{(i_1,\dots,i_j,\dots,i_N)}-u_{(i_1,\dots,i_j-1,\dots,i_N)},$$

$$(B_ju)_i=u_{(i_1,\dots,i_j+1,\dots,i_N)}-u_{(i_1,\dots,i_j,\dots,i_N)},$$

and

$$(B_j^*u)_i=u_{(i_1,\dots,i_j-1,\dots,i_N)}-u_{(i_1,\dots,i_j,\dots,i_N)}.$$

那么，我们有:

$$A=\sum_{j=1}^N A_j,\quad A_j=B_jB_j^*=B_j^*B_j.$$

给定 $u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N}\in\ell^2$，记为

$$Bu=(B_1u,\dots,B_Nu)\quad\text{and}\quad\|Bu\|=\left(\sum_{j=1}^N\|B_ju\|^2\right)^{\frac12}.$$

在下文中，我们假设对于每个 $i\in\mathbb{Z}^N$，非线性函数 F_i：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足，

$$F_i(t,s)=F_0(s)-g_i(t),\quad\forall\ t\in\mathbb{R}^+,\ s\in\mathbb{R},\tag{3.1}$$ F0

其中，F_0：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的，并且存在 $\gamma\leqslant 0$，使得

$$F_0(0)=0\quad\text{and}\quad F_0'(s)\geqslant\gamma\ \text{ for all }\ s\in\mathbb{R}.\tag{3.2}$$ F1

注意，对于每一个 $k \in \mathbb{N}$，反应扩散方程的经典非线性项 $F_0(s) = s^{2k+1} - s$ 确实满足条件 (3.2)。

为方便起见，我们记作

$$f(s) = F_0(s) - \gamma s \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}.$$

由 (3.2) 可知,

$$f(0) = 0 \quad \text{and} \quad f'(s) \geqslant 0 \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$ f1

给定 $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N} \in \ell^2$，记为 $f(u) = (f(u_i))_{i\in\mathbb{Z}^N}$。由 (3.3) 可知，对于每个 $R > 0$，都存在一个常数 $L_R > 0$，使得对于所有满足 $\|u\| \leqslant R$ 和 $\|v\| \leqslant R$ 的 u、$v \in \ell^2$，都有,

$$\|f(u) - f(v)\| \leqslant L_R\|u - v\|. \tag{3.4}$$ f1a1

此外,

$$(f(u) - f(v), u - v) \geqslant 0 \quad \text{for all } u,\ v \in \ell. \tag{3.5}$$ f2

对于非线性扩散项，我们假设对于任意 $i \in \mathbb{Z}^N$ 和 $k \in \mathbb{N}$，$\sigma_{k,\,i}\colon\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\sigma_{k,i}(t, s) = h_{k,i}(t) + \delta_{k,i}\sigma_k^0(s), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}^+,\ s \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$ sigma0

其中，$\sigma_k^0\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续的，即对于任意有界区间 I，存在一个常数 $L_I > 0$，使得

$$|\sigma_k^0(s_1) - \sigma_k^0(s_2)| \leqslant L_I|s_1 - s_2|, \quad \text{for all } s_1, s_2 \in I,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$ sigma1

我们进一步假设存在 $\alpha > 0$ 使得

$$|\sigma_k^0(s)| \leqslant \alpha(1 + |s|), \quad \text{for all } s \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$ sigma2

对于 (3.6) 中的序列 $\delta = (\delta_{k,i})_{k\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}^N}$，我们假设

$$\|\delta\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{Z}^N} |\delta_{k,i}|^2 < \infty. \tag{3.9}$$ delta1

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，定义算子 $\sigma_k\colon \ell^2 \to \ell^2$，使得

$$\sigma_k(u) = (\delta_{k,i}\sigma_k^0(u_i))_{i\in\mathbb{Z}^N}, \quad \text{for all } u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}^N} \in \ell^2. \tag{3.10}$$ defsigma

然后由 (3.8)、(3.9) 和 (3.10) 可知,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_k(u)\|^2 \leqslant 2\alpha^2\|\delta\|^2(1 + \|u\|^2), \quad \text{for all } u \in \ell^2. \tag{3.11}$$ sigrow1

此外，由 (3.7) 可知，对于每个 $R>0$，都存在 $L_R>0$，使得对于所有满足 $\|u\|\leqslant R$ 和 $\|v\|\leqslant R$ 的 u、$v\in\ell^2$，

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\|\sigma_k(u)-\sigma_k(v)\|^2\leqslant L_R\|\delta\|^2\|u-v\|^2. \tag{3.12}$$ sigrow2

对于式 (3.1) 中的序列 $g(t)=(g_i(t))_{i\in\mathbb{Z}^N}$ 以及式 (3.6) 中的 $h_k(t)=(h_{k,i}(t))_{i\in\mathbb{Z}^N}$，我们假设对每个 $T>0$,

$$\int_0^T\|g(t)\|^2dt<\infty\quad\text{and}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}<\infty. \tag{3.13}$$ gh

注意，系统... m (1.1)-(1.2) 等价于关于 $u^\varepsilon=(u_i^\varepsilon)_{i\in\mathbb{Z}^N}$ 在 ℓ^2 中的 Itô 随机方程。 :

$$du^\varepsilon(t)+\nu Au^\varepsilon(t)dt+f(u^\varepsilon(t))dt+\gamma u^\varepsilon(t)dt=g(t)dt+\sqrt{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(h_k(t)+\sigma_k(u^\varepsilon(t))\right)dW_k(t), \tag{3.14}$$ intr3

具有初始数据

$$u^\varepsilon(0)=u_0\in\ell^2. \tag{3.15}$$ intr4

在条件（3.2）、（3.7）-（3.9）和（3.13）下，可以证明系统（3.14）-（3.15）在 ℓ^2 中对于每个 $\varepsilon\in(0、1)$ 都是适定的（参见例如 [66, 定理 2.5]）；更确切地说，对于每个 $u_0\in L^2(\Omega\ \mathcal{F}_0;\ell^2)$，存在唯一的连续 ℓ^2 值 $\mathcal{F}_t$ 适应随机过程 u^ε，使得 $u^\varepsilon\in L^2(\Omega\ C([0,T],\ell^2))$ 对所有 $T>0$ 均成立，并且对于几乎所有的 $\omega\in\Omega$,

$$u^\varepsilon(t)=u_0+\int_0^t\left(-\nu Au^\varepsilon(s)-f(u^\varepsilon(s))-\gamma u^\varepsilon(s)+g(s)\right)ds+\sqrt{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\left(h_k(s)+\sigma_k(u^\varepsilon(s))\right)dW_k$$

对于所有 $t\geqslant 0$，在 ℓ^2 中成立。此外，对于每个 $T>0$，存在一个正常数 $C=C(T)$，该常数与 u_0 、 $\varepsilon\in(0$ 和 $1)$ 无关，使得

$$\mathbb{E}\left(\|u^\varepsilon\|^2_{C([0,T],\ell^2)}\right)\leqslant C\left(\mathbb{E}(\|u_0\|^2)+1+\int_0^T(\|g(s)\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(s)\|^2)ds\right). \tag{3.16}$$ uniest1

为方便起见，我们设定

$$H=\{u=(u_j)_{j=1}^{\infty}:\sum_{j=1}^{\infty}|u_j|^2<\infty\}.$$

对于每个 $k\in\mathbb{N}$，令 $e_k=(\delta_{k,\ j})_{j=1}^{\infty}$，其中 $\delta_{k,\ j}=1$，当 $j=k$ 时成立，且当 $\delta_{k,\ j}=0$ 时成立。则 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 的一组正交归一基。令 I 为 H 上的恒等算子， W 为 H 中具有协方差算子 I 的柱状维纳过程，其定义如下:

$$W(t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k(t)e_k,\quad t\in\mathbb{R}^+,$$

其中级数在 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}$ 中收敛；对于每个 $T>0$， $C([0,T],U))$，其中 U 是一个可分希尔伯特空间，且嵌入 $H\hookrightarrow U$ 是希尔伯特-施密特算子。

给定 $u\in\ell^2$ 和 $t\geqslant 0$，定义 $\sigma(t,u)\colon H\to\ell^2$ 为

$$\sigma(t,u)(v)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(h_k(t)+\sigma_k(u)\right)v_k,\quad \forall\ v=(v_k)_{k=1}^{\infty}\in H. \tag{3.17}$$ defsigma2

注意，由（3.17）中的级数根据（3.11）和（3.13）在 ℓ^2 中收敛。此外，算子$\sigma(t,u)\colon H\to\ell^2$是希尔伯特–施密特算子，并且

$$\|\sigma(t,u)\|_{L(H,\ell^2)}\leqslant\|\sigma(t,u)\|_{L_2(H,\ell^2)}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(t)+\sigma_k(u)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty. \tag{3.18}$$ defsigma3

此后，我们用 $L(H,\ell^2)$ 表示从 H 到 ℓ^2 的有界线性算子空间，其范数为$\|\cdot\|_{L(H,\ \ell^2)}$；用 $L_2(H,\ \ell^2)$ 表示从 H 到 ℓ^2 的希尔伯特–施密特算子空间，其范数为$\|\cdot\|_{L_2(H,\ \ell^2)}$。

采用上述记号，系统（3.14）-（3.15）可改写为

$$du^{\varepsilon}(t)+\nu Au^{\varepsilon}(t)dt+f(u^{\varepsilon}(t))dt+\gamma u^{\varepsilon}(t)dt=g(t)dt+\sqrt{\varepsilon}\sigma(t,u^{\varepsilon}(t))dW(t), \tag{3.19}$$ intr5

具有初始数据

$$u^{\varepsilon}(0)=u_0\in\ell^2. \tag{3.20}$$ intr6

在下一节中，我们将考察 (3.19)-(3.20) 的大偏差原理。 .

4 格点系统的大偏差原理

在本节中，我们证明了方程 (3.19)-(3.20) 的解族 $\{u^{\varepsilon}\}$ 在 $\varepsilon\to 0$ 条件下满足大偏差原理，具体表述如下。

main_resu **定理 4.1.** 假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立，且 u^{ε} 是方程 (3.19)-(3.20) 的解。那么，族 $\{u^{\varepsilon}\}$，作为 $\varepsilon\to 0$，在 $C([0,T],\ell^2)$ 中满足大偏差原理，其良好速率函数由 (4.73) 给出。

本文其余部分将致力于证明定理 4.1。注意，对于任意的 $\varepsilon\in(0、\ 1)$ 和 $T>0$，根据 (3.19)-(3.20) 在 $C([0、\ T]、\ \ell^2)$ 中解的存在唯一性，存在一个 Borel 可测映射 $\mathcal{G}^{\varepsilon}\colon\ C([0、\ T]、\ U)\to C([0、\ T]、\ \ell^2)$，使得

$$u^{\varepsilon}=\mathcal{G}^{\varepsilon}(W),\quad \text{P-almost surely.}$$

为研究 $\{u^\varepsilon\}$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时的大偏差原理，我们引入与 (3.19) 相对应的确定性控制系统。给定一个控制 $v \in L^2(0,T;\ H)$，根据受控方程求解 u_v：

$$\frac{du_v(t)}{dt} = -\nu A u_v(t) - f(u_v(t)) - \gamma u_v(t) + g(t) + \sigma(t, u_v(t))v(t), \tag{4.21}$$ contr1

具有初始数据的

$$u_v(0) = u_0 \in \ell^2. \tag{4.22}$$ contr2

通常，我们将 $[0,T]$ 上满足以下条件的 (4.21)-(4.22) 的解 u_v 定义为 $u_v \in C([0,T],\ell^2)$，使得对于所有 $t \in [0,T]$,

$$u_v(t) = u_0 + \int_0^t \left(-\nu A u_v(s) - f(u_v(s)) - \gamma u_v(s) + g(s) + \sigma(s, u_v(s))v(s)\right) ds. \tag{4.23}$$ contr3

我们首先证明 (4.21)-(4.22) 的解在 (4.23) 意义下的存在唯一性).

exis_sol 引理 4.2. 假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立。那么对于任意 $v \in L^2(0,T;\ H)$，问题 (4.21)-(4.22) 有唯一解 $u_v \in C([0,T],\ell^2)$。

此外，对于每个 $R_1 > 0$ 和 $R_2 > 0$，存在 $C_1 = C_1(R_1、\ R_2、\ T) > 0$，使得对于任意 $u_{0,\ 1}$，$u_{0,\ 2} \in \ell^2$，满足 $\|u_{0,\ 1}\| \leqslant R_1$、$\|u_{0,\ 2}\| \leqslant R_1$，以及任意 v_1、$v_2 \in L^2(0、\ T;\ H)$ 满足 $\|v_1\|_{L^2(0,\ T;\ H)} \leqslant R_2$ 且 $\|v_2\|_{L^2(0,\ T;\ H)} \leqslant R_2$，方程 (4.21)-(4.22) 中以初始数据 $u_{0,\ 1}$ 和 $u_{0,\ 2}$ 分别为初值的解 u_{v_1} 和 u_{v_2} 满足以下条件。

$$\|u_{v_1} - u_{v_2}\|^2_{C([0,T],\ell^2)} \leqslant C_1 \left(\|u_{0,1} - u_{0,2}\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2_{L^2(0,T;H)}\right), \tag{4.24}$$ exis_sol 1

and

$$\|u_{v_1}\|^2_{C([0,T],\ell^2)} \leqslant C_1. \tag{4.25}$$ exis_sol 2

证明。设 $v \in L^2(0、\ T$ 和 $H)$ 已给定。我们首先证明系统 (4.21)-(4.22) 的解的存在唯一性。省略下标 v 后，系统 (4.21)-(4.22) 可写为

$$\frac{du(t)}{dt} = G(t, u(t)), \quad u(0) = u_0, \tag{4.26}$$ exis_solp1

其中

$$G(t,u) = -\nu A u - f(u) - \gamma u + g(t) + \sigma(t,u)v(t). \tag{4.27}$$ exis_solp2

由于 $v \in L^2(0,T;\ H)$，由 (3.3)、(3.4) 和 (3.11)，从 (4.27) 可知，对于任意 $R > 0$，存在一个常数 $c_1 = c_1(R) > 0$，使得对于所有满足 $\|u\| \leqslant R$ 的 $t \in [0、\ T]$ 和 $u \in \ell^2$，

$$\|G(t,u)\|^2 \leqslant c_1\left(1 + \|g(t)\|^2 + \|u\|^2\right) + c_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k(t)\|^2 + \|u\|^2\right)\|v(t)\|^2_H. \tag{4.28}$$ exis_solp3

类似地，由（3.4）和（3.12）可知，存在 $c_2 = c_2(R) > 0$，使得对于所有满足 $\|u_1\| \leqslant R$ 和 $\|u_2\| \leqslant R$ 的 $t \in [0、T]$ 和 $u_1、u_2 \in \ell^2$，

$$\|G(t,u_1) - G(t,u_2)\|^2 \leqslant c_2 \left(1 + \|v(t)\|_H^2\right) \|u_1 - u_2\|^2. \tag{4.29}$$

exis_solp4

由 (4.28)-(4.29) 可知，对于每个 $u_0 \in \ell^2$，方程 (4.26) 存在唯一的局部极大解 $u \in C([0,T_0), \ell^2)$，其中 $0 < T_0 \leqslant T$ 取某个值。接下来，我们通过对解进行一致估计，证明该解实际上定义在整个区间 $[0,T]$ 上。

由 (4.26) 可知，对于所有 $t \in (0,T_0)$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = -\nu\|Bu(t)\|^2 - (f(u(t)),u(t)) - \gamma\|u(t)\|^2$$

$$+(g(t),u(t)) + (\sigma(t,u(t))v(t),u(t)),$$

结合 (3.3) 和 (3.5)，可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leqslant -2\gamma\|u(t)\|^2 + 2(g(t),u(t)) + 2(\sigma(t,u(t))v(t),u(t)). \tag{4.30}$$

exis_solp5

由杨氏不等式可得

$$2|(g(t),u(t))| \leqslant \|u(t)\|^2 + \|g(t)\|^2. \tag{4.31}$$

exis_solp6

对于 (4.30) 右端的最后一项，由 (3.18) 和 (3.11) 可得

$$2|(\sigma(t,u(t))v(t),u(t))| \leqslant \|\sigma(t,u(t))v(t)\|^2 + \|u(t)\|^2$$

$$\leqslant \|\sigma(t,u(t))\|^2_{L(H,\ell^2)}\|v(t)\|_H^2 + \|u(t)\|^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k(t) + \sigma_k(u(t))\|^2\|v(t)\|_H^2 + \|u(t)\|^2$$

$$\leqslant 2\|v(t)\|_H^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k(t)\|^2 + 2\|v(t)\|_H^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma_k(u(t))\|^2 + \|u(t)\|^2$$

$$\leqslant 2\|v(t)\|_H^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k(t)\|^2 + 4\alpha^2\|\delta\|^2(1 + \|u(t)\|^2)\|v(t)\|_H^2 + \|u(t)\|^2. \tag{4.32}$$

exis_solp7

由 (4.30)-(4.32) 可得，对于所有 $t \in (0,T_0)$,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leqslant \left(2 - 2\gamma + 4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(t)\|_H^2\right)\|u(t)\|^2$$

$$+ 4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(t)\|_H^2 + \|g(t)\|^2 + 2\|v(t)\|_H^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k(t)\|^2. \tag{4.33}$$

exis_solp8

由 (4.33) 可知，对于所有 $t\in[0,T_0)$,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &\leqslant e^{\int_0^t(2-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(r)\|_H^2)dr}\|u_0\|^2\\ &+4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^t e^{\int_s^t(2-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(r)\|_H^2)dr}\|v(s)\|_H^2ds\\ &+\int_0^t e^{\int_s^t(2-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(r)\|_H^2)dr}\|g(s)\|^2ds\\ &+2\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}\int_0^t e^{\int_s^t(2-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2\|v(r)\|_H^2)dr}\|v(s)\|_H^2ds\\ &\leqslant e^{(2-2\gamma)T+4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^T\|v(r)\|_H^2dr}\|u_0\|^2\\ &+4\alpha^2\|\delta\|^2e^{(2-2\gamma)T+4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^T\|v(r)\|_H^2dr}\int_0^T\|v(s)\|_H^2ds\\ &+e^{(2-2\gamma)T+4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^T\|v(r)\|_H^2dr}\int_0^T\|g(s)\|^2ds\\ &+2e^{(2-2\gamma)T+4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^T\|v(r)\|_H^2dr}\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}\int_0^T\|v(s)\|_H^2ds.\end{aligned}\tag{4.34}$$

exis_solp9

由 (3.13) 和 (4.34) 可知，对于每个 $R_1>0$ 和 $R_2>0$，存在 $c_3=c_3(R_1、R_2、T)>0$，使得对于任意满足 $\|u_0\|\leqslant R_1$ 的 $u_0\in\ell^2$ 以及任意 $v\in L^2(0、T;H)$，当 $\|v\|_{L^2(0,T;H)}\leqslant R_2$ 时，解 u 满足

$$\|u(t)\|^2\leqslant c_3,\quad\forall\ t\in[0,T_0),\tag{4.35}$$

exis_solp10

这意味着 $T_0=T$，因此方程 (4.26) 的解 u 在整个区间 $[0,T]$ 上都有定义。

接下来，我们证明（4.24）。设 v_1、v_2 给定于 $L^2(0、T;H)$，并记为

$$u_1=u_{v_1}\quad\text{and}\quad u_2=u_{v_2}.$$

设 $\|u_{0,1}\|\leqslant R_1$, $\|u_{0,2}\|\leqslant R_1$, $\|v_1\|_{L^2(0,T;H)}\leqslant R_2$ 且 $\|v_2\|_{L^2(0,T;H)}\leqslant R_2$。则由 (4.35) 可得

$$\|u_1(t)\|+\|u_2(t)\|\leqslant c_4,\quad\forall\ t\in[0,T],\tag{4.36}$$

exis_solp11

其中 $c_4=c_4(R_1,R_2,T)>0$。注意，(4.36) 蕴含 (4.25)。

由（4.26）-（4.27）可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2&=-2\nu\|B(u_1(t)-u_2(t))\|^2\\ &-2(f(u_1(t))-f(u_2(t)),u_1(t)-u_2(t))-2\gamma\|u_1(t)-u_2(t)\|^2\end{aligned}$$

$$+2\left(\sigma(t,u_1(t))v_1(t)-\sigma(t,u_2(t))v_2(t),\ u_1(t)-u_2(t)\right),$$

结合（3.5）可得

$$\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2\leqslant -2\gamma\|u_1(t)-u_2(t)\|^2$$

$$+2\left(\sigma(t,u_1(t))v_1(t)-\sigma(t,u_2(t))v_2(t),\ u_1(t)-u_2(t)\right). \tag{4.37}$$ exis_solp12

对于 (4.36) 中的最后一项，由 (3.17) 可得

$$2\left(\sigma(t,u_1(t))v_1(t)-\sigma(t,u_2(t))v_2(t),\ u_1(t)-u_2(t)\right)$$

$$\leqslant 2\|\sigma(t,u_1(t))v_1(t)-\sigma(t,u_2(t))v_2(t)\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$\leqslant 2\|\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(u_1(t))v_{1,k}(t)-\sigma_k(u_2(t))v_{2,k}(t))\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$+2\|\sum_{k=1}^{\infty}h_k(t)(v_{1,k}(t)-v_{2,k}(t))\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$\leqslant 2\|\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(u_1(t))-\sigma_k(u_2(t)))v_{1,k}(t)\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$+2\|\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(u_2(t))(v_{1,k}(t)-v_{2,k}(t))\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$+2\|\sum_{k=1}^{\infty}h_k(t)(v_{1,k}(t)-v_{2,k}(t))\|\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\sigma_k(u_1(t))-\sigma_k(u_2(t))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1(t)\|_H\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\sigma_k(u_2(t))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1(t)-v_2(t)\|_H\|u_1(t)-u_2(t)\|$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1(t)-v_2(t)\|_H\|u_1(t)-u_2(t)\|. \tag{4.38}$$ exis_solp13

由（3.12）和（4.36）可知，存在 $c_5=c_5(R_1、\ R_2、\ T)>0$，使得对所有 $t\in[0、\ T]$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\sigma_k(u_1(t))-\sigma_k(u_2(t))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c_5\|\delta\|\|u_1(t)-u_2(t)\|. \tag{4.39}$$ exis_solp14

另一方面，由 (3.11) 和 (4.36) 可知，存在 $c_6 = c_6(R_1, R_2, T) > 0$，使得对于所有 $t \in [0, T]$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\sigma_k(u_2(t))\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha \|\delta\| c_6. \tag{4.40}$$ exis_solp15

由 (4.38)-(4.40) 可得，对所有 $t \in [0、 T]$,

$$\begin{aligned}
&2\left(\sigma(t, u_1(t))v_1(t) - \sigma(t, u_2(t))v_2(t),\ u_1(t) - u_2(t)\right) \\
&\leqslant 2c_5\|\delta\|\|v_1(t)\|_H\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + 2c_6\alpha\|\delta\|\|v_1(t) - v_2(t)\|_H\|u_1(t) - u_2(t)\| \\
&\leqslant \left(2 + 2c_5\|\delta\|\|v_1(t)\|_H\right)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \\
&\quad + \left(c_6^2\alpha^2\|\delta\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(t)\|^2\right)\|v_1(t) - v_2(t)\|_H^2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$ exis_solp16

由 (4.37) 和 (4.41)，我们得到对于所有 $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 &\leqslant \left(2 - 2\gamma + 2c_5\|\delta\|\|v_1(t)\|_H\right)\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \\
&\quad + \left(c_6^2\alpha^2\|\delta\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h_k(t)\|^2\right)\|v_1(t) - v_2(t)\|_H^2,
\end{aligned} \tag{4.42}$$ exis_solp17

由此可得，对于所有 $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 &\leqslant e^{\int_0^t (2-2\gamma+2c_5\|\delta\|\|v_1(r)\|_H)dr}\|u_{0,1} - u_{0,2}\|^2 \\
&\quad + \left(c_6^2\alpha^2\|\delta\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}\right)\int_0^t e^{\int_s^t (2-2\gamma+2c_5\|\delta\|\|v_1(r)\|_H)dr}\|v_1(s) - v_2(s)\|_H^2 ds \\
&\leqslant e^{(2-2\gamma)T + 2c_5\sqrt{T}R_2\|\delta\|}\|u_{0,1} - u_{0,2}\|^2 \\
&\quad + \left(c_6^2\alpha^2\|\delta\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}\right)e^{(2-2\gamma)T + 2c_5\sqrt{T}R_2\|\delta\|}\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(0,T;H)}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$ exis_solp18

因此，由（4.43）可立即得到（4.24）。 □

作为引理 4.2 的推论，我们发现，方程 (4.21)-(4.22) 的解 u_v 关于初始数据 u_0（其中 ℓ^2）和控制 v（其中 $L^2(0、 T;\ H)$）在 $C([0、 T]、\ \ell^2)$ 中是连续的。接下来，我们将进一步证明，解 u_v 关于 $v \in L^2(0、 T$ 在 $C([0、 T]、\ \ell^2)$ 中是连续的；即在 $L^2(0、 T$ 的弱拓扑下，$H)$ 中的 $H)$ 连续，这与方程 (3.19)-(3.20) 的解的拉普拉斯原理中的条件 (H2) 有关。作为必要步骤，我们首先证明以下收敛性。

wc_dif

引理 4.3. 假设 (3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立。对于固定的 $\xi \in L^\infty(0,T;\ell^2)$，定义算子 $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 如下：

$$\mathcal{T}(v)(t)=\int_0^t \sigma(s,\xi(s))v(s)ds,\quad \forall\ v\in L^2(0,T;H). \tag{4.44}$$

wc_dif 1

那么我们有：

(i) $\mathcal{T}$ 是连续的（将我们从 $L^2(0,T;H)$ 的弱拓扑转变为 $C([0,T],\ell^2)$ 的强拓扑。）。(ii) $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 关于 $C([0,T],\ell^2$的强拓扑是紧的）.

证明。（i）。注意，算子 $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 定义良好。事实上，由 (3.11) 和 (3.18) 可知，对每个 $v\in L^2(0,T;H)$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\sigma(s,\xi(s))v(s)\|^2ds&\leqslant\int_0^T\|\sigma(s,\xi(s))\|^2_{L(H,\ell^2)}\|v(s)\|^2_Hds\\&\leqslant 2\int_0^T\sum_{k=1}^\infty\left(\|h_k(s)\|^2+\|\sigma_k(\xi(s))\|^2\right)\|v(s)\|^2_Hds\\&\leqslant\int_0^T\left(2\sum_{k=1}^\infty\|h_k(s)\|^2+4\alpha^2\|\delta\|^2(1+\|\xi(s)\|^2)\right)\|v(s)\|^2_Hds\\&\leqslant\left(2\sum_{k=1}^\infty\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}+4\alpha^2\|\delta\|^2(1+\|\xi\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)})\right)\int_0^T\|v(s)\|^2_Hds<\infty,\end{aligned} \tag{4.45}$$

wc_difp1

其中实现了即 $\mathcal{T}(v)$ 由式（4.44）给出，属于 $C([0,T],\ell^2)$，对所有 $v\in L^2(0,T;H)$。

显然，$\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 是线性的。另一方面，由（4.44）可知，对于所有 $v\in L^2(0,T;H)$,

$$\|\mathcal{T}(v)\|^2_{C([0,T],\ell^2)}\leqslant\left(\int_0^T\|\sigma(s,\xi(s))v(s)\|ds\right)^2\leqslant T\int_0^T\|\sigma(s,\xi(s))v(s)\|^2ds,$$

结合 (4.45)，这表明 $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 是有界的。

由于 $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 在强拓扑下是线性且连续的，我们知道 $\mathcal{T}\colon L^2(0,T;H)\to C([0,T],\ell^2)$ 在弱拓扑下也是连续的；也就是说，如果 $v_n\to v$ 在 $L^2(0,T;H)$ 中弱收敛，那么 $\mathcal{T}(v_n)\to\mathcal{T}(v)$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中也弱收敛。接下来，我们证明实际上 $\mathcal{T}(v_n)\to\mathcal{T}(v)$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中强收敛，为此我们需要验证：

(a) 对于每个 $t\in[0,T]$，集合 $\{\mathcal{T}(v_n)(t)\colon n\in\mathbb{N}\}$ 在 ℓ^2 中是预紧的。

(b) 序列 $\{\mathcal{T}(v_n)\}_{n=1}^\infty$ 在 $[0,T]$ 上等度连续。

$\{\mathcal{T}(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的等度连续性由 (4.45) 以及 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0,T$ 中的有界性得出； $H)$ 是因为 $v_n \to v$ 在 $L^2(0,T$ 中弱收敛； $H)$。接下来证明 (a)，为此我们将证明集合 $\{\mathcal{T}(v_n)(t): n \in \mathbb{N}\}$ 在 ℓ^2 中全有界。

对每个 $j \in \mathbb{Z}^N$，令 $e_j = (\delta_{j,\ k})_{k\in\mathbb{Z}^N}$。那么 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}^N}$是 ℓ^2 的正交归一基。给定 $m \in \mathbb{N}$，令 $P_m: \ell^2 \to \mathrm{span}\{e_j: |j| \leqslant m\}$ 为投影算子，且 $Q_m = I - P_m$。给定 $t \in [0、 T]$，由于 $\sigma(t, \xi(t)): H \to \ell^2$ 是希尔伯特-施密特算子，我们得到

$$\lim_{m\to\infty} \|Q_m\sigma(t,\xi(t))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} = 0,$$

结合控制收敛定理可知，对每个 $t \in [0、 T]$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^t \|Q_m\sigma(s,\xi(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds = 0. \tag{4.46}$$ wc_difp1a

另一方面，由 (4.44) 可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(v_n)(t)\| &\leqslant \int_0^t \|\sigma(s,\xi(s))v_n(s)\| ds \leqslant \int_0^t \|\sigma(s,\xi(s))\|_{L_2(H,\ell^2)} \|v_n(s)\|_H ds \\ &\leqslant \left(\int_0^t \|\sigma(s,\xi(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|v_n(s)\|^2_H ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.47}$$ wc_difp3

类似地，对每个 $m \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\|Q_m\mathcal{T}(v_n)(t)\| &\leqslant \int_0^t \|Q_m\sigma(s,\xi(s))v_n(s)\| ds \\ &\leqslant \left(\int_0^t \|Q_m\sigma(s,\xi(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|v_n(s)\|^2_H ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.48}$$ wc_difp3a

由于 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0$ 中有界， T； $H)$，由 (4.47)-(4.48) 可知，存在一个与 n、 $m \in \mathbb{N}$ 无关的正常数 c_1，使得

$$\|\mathcal{T}(v_n)(t)\| \leqslant c_1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \tag{4.49}$$ wc_difp4

and

$$\|Q_m\mathcal{T}(v_n)(t)\| \leqslant c_1 \left(\int_0^t \|Q_m\sigma(s,\xi(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\ n,m \in \mathbb{N}. \tag{4.50}$$ wc_difp4a

由 (4.46) 可知，当 $m \to \infty$ 时，(4.50) 右端趋于零。因此，对每个 $\eta > 0$，都存在 $m_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m \geqslant m_0$,

$$\|Q_m\mathcal{T}(v_n)(t)\| < \frac{1}{4}\eta. \tag{4.51}$$ wc_difp5

由 (4.49) 可知，$\{P_{m_0}(\mathcal{T}(v_n)(t))\}_{n=1}^{\infty}$ 在一个 $(2m_0+1)$ 维空间中有界，因此它是预紧的。于是，$\{P_{m_0}(\mathcal{T}(v_n)(t))\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个半径为 $\frac{1}{4}\eta$ 的有限开覆盖；结合 (4.51) 可知，序列 $\{\mathcal{T}(v_n)(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个半径为 η 的有限开覆盖。换言之，序列 $\{\mathcal{T}(v_n)(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是全有界的，因此在 ℓ^2 中预紧。

于是，由 (a) 和 (b) 可知，存在子序列 $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，它是 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列，且 $\mathcal{T}(v_{n_k})\to\mathcal{T}(v)$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中强收敛。通过反证法，我们得出整个序列 $\mathcal{T}(v_n)\to\mathcal{T}(v)$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中强收敛。

(ii). 设 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2(0,T;\,H)$ 中的有界序列。我们将证明序列 $\{\mathcal{T}(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中预紧。由于 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，存在 $v\in L^2(0,T;\,H)$ 及其子序列 $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $v_{n_k}\to v$ 在 $L^2(0,T;\,H)$ 中弱收敛。由 (i) 可知，$\mathcal{T}(v_{n_k})\to\mathcal{T}(v)$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中强收敛，证毕。

□

wc_解sol

引理 4.4。假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立。令 v、$v_n\in L^2(0,\ T;\ H)$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 u_v、u_{v_n} 分别为对应于 v 和 v_n 的 (4.21)-(4.22) 的解。若 $v_n\to v$ 在 $L^2(0,\ T;\ H)$ 中弱收敛，则 $u_{v_n}\to u_v$ 在 $C([0,\ T],\ \ell^2)$ 中强收敛。

证明。假设 $v_n\to v$ 在 $L^2(0,\ T;\ H)$ 中弱收敛。则 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0,\ T;\ H)$ 中有界。类似于 (4.36)，我们可得存在 $c_1=c_1(T)>0$ 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|u_{v_n}(t)\|+\|u_v(t)\|\right)\leqslant c_1,\quad\forall\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.52}$$ wc_solp0

由 (4.21)-(4.22) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_{v_n}-u_v)=&-\nu A(u_{v_n}-u_v)-(f(u_{v_n})-f(u_v))\\&-\gamma(u_{v_n}-u_v)+\sigma(t,u_{v_n})v_n-\sigma(t,u_v)v.\end{aligned} \tag{4.53}$$ wc_solp1

由 (3.4)、(3.11)、(3.13)、(3.17) 和 (4.52)，我们推得

$$\|\frac{d}{dt}(u_{v_n}(t)-u_v(t))\|\leqslant c_2(1+\|v_n(t)\|_H+\|v(t)\|_H),\quad\forall\ n\in\mathbb{N}, \tag{4.54}$$ wc_solp1a

其中 $c_2=c_2\ (T)>0$ 是一个与 $n\in\mathbb{N}$ 无关的常数。与 (4.37) 类似，由 (4.53) 可得 e

$$\frac{d}{dt}\|u_{v_n}-u_v\|^2\leqslant-2\gamma\|u_{v_n}-u_v\|^2+2\left(\sigma(t,u_{v_n})v_n-\sigma(t,u_v)v,u_{v_n}-u_v\right). \tag{4.55}$$ wc_solp2

对于式 (4.55) 中的最后一项，由式 (3.17) 可得

$$2\left(\sigma(t,u_{v_n})v_n-\sigma(t,u_v)v,u_{v_n}-u_v\right)$$

$$=2\left((\sigma(t,u_{v_n})-\sigma(t,u_v))v_n,u_{v_n}-u_v\right)+2\left(\sigma(t,u_v)(v_n-v),u_{v_n}-u_v\right)$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma_k(u_{v_n})-\sigma_k(u_v)\right)v_{n,k},\ u_{v_n}-u_v\right)$$

$$+ 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(h_k(t)+\sigma_k(u_v)\right)(v_{n,k}-v_k),\ u_{v_n}-u_v\right). \tag{4.56}$$ wc_solp3

对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\in[0,\ T]$, 令

$$\psi_n(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\left(h_k(s)+\sigma_k(u_v(s))\right)(v_{n,k}(s)-v_k(s))ds=\int_0^t\sigma(s,u_v(s))(v_n(s)-v(s))ds. \tag{4.57}$$ wc_solp4

由于 $v_n\to v$ 在 $L^2(0,T;\ H)$ 中弱收敛, 由引理 4.3 可得

$$\psi_n\to 0\ \text{ in }\ C([0,T],\ell^2)\ \text{ as }\ n\to\infty, \tag{4.58}$$ wc_solp4a

注意

$$2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(h_k(t)+\sigma_k(u_v)\right)(v_{n,k}-v_k),\ u_{v_n}-u_v\right)=2\left(\frac{d}{dt}\psi_n,\ u_{v_n}-u_v\right)$$

$$= 2\frac{d}{dt}\left(\psi_n(t),\ u_{v_n}(t)-u_v(t)\right)-2\left(\psi_n(t),\ \frac{d}{dt}(u_{v_n}(t)-u_v(t))\right). \tag{4.59}$$ wc_solp5

由 (4.56) 和 (4.59) 可得

$$2\left(\sigma(t,u_{v_n})v_n-\sigma(t,u_v)v,u_{v_n}-u_v\right)$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma_k(u_{v_n})-\sigma_k(u_v)\right)v_{n,k},\ u_{v_n}-u_v\right)$$

$$+ 2\frac{d}{dt}\left(\psi_n(t),\ u_{v_n}(t)-u_v(t)\right)-2\left(\psi_n(t),\ \frac{d}{dt}(u_{v_n}(t)-u_v(t))\right). \tag{4.60}$$ wc_solp6

由 (4.55) 和 (4.60) 可知

$$\frac{d}{dt}\|u_{v_n}-u_v\|^2\leqslant -2\gamma\|u_{v_n}-u_v\|^2+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma_k(u_{v_n})-\sigma_k(u_v)\right)v_{n,k},\ u_{v_n}-u_v\right)$$

$$+ 2\frac{d}{dt}\left(\psi_n(t),\ u_{v_n}(t)-u_v(t)\right)-2\left(\psi_n(t),\ \frac{d}{dt}(u_{v_n}(t)-u_v(t))\right). \tag{4.61}$$ wc_solp7

现在处理（4.61）的右端。对于（4.61）右端的第二项, 由（3.12）和（4.52）可得

$$2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sigma_k(u_{v_n})-\sigma_k(u_v)\right)v_{n,k},\ u_{v_n}-u_v\right)$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\sigma_k(u_{v_n})-\sigma_k(u_v)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v_n\|_H\|u_{v_n}-u_v\|\leqslant c_3\|\delta\|\|v_n\|_H\|u_{v_n}-u_v\|^2, \tag{4.62}$$ wc_solp7a

其中 $c_3=c_3(T)>0$ 是一个与 $n\in\mathbb{N}$ 无关的常数。

对于右端 (4.61) 中的最后一项，由 (4.54) 可得

$$2\Big|\left(\psi_n(t),\ \frac{d}{dt}(u_{v_n}(t)-u_v(t))\right)\Big|\leqslant 2c_2(1+\|v_n(t)\|_H+\|v(t)\|_H)\|\psi_n(t)\|. \tag{4.63}$$ wc_solp9

由（4.61）–（4.63）可得,

$$\frac{d}{dt}\|u_{v_n}(t)-u_v(t)\|^2\leqslant(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(t)\|_H)\|u_{v_n}(t)-u_v(t)\|^2$$

$$+2\frac{d}{dt}\left(\psi_n(t),\ u_{v_n}(t)-u_v(t)\right)+2c_2(1+\|v_n(t)\|_H+\|v(t)\|_H)\|\psi_n(t)\|. \tag{4.64}$$ wc_solp10

由于 $u_{v_n}(0)=u_v(0)=u_0$，对 $(0,t)$ 上的 (4.64) 进行积分，我们得到

$$\|u_{v_n}(t)-u_v(t)\|^2\leqslant\int_0^t(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)\|u_{v_n}(s)-u_v(s)\|^2ds$$

$$+2\left(\psi_n(t),\ u_{v_n}(t)-u_v(t)\right)+2c_2\int_0^t(1+\|v_n(s)\|_H+\|v(s)\|_H)\|\psi_n(s)\|ds,$$

这表明，对于所有 $t\in[0、T]$,

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2\leqslant\int_0^t(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)\|u_{v_n}(s)-u_v(s)\|^2ds$$

$$+2\sup_{0\leqslant r\leqslant t}(\psi_n(r),\ u_{v_n}(r)-u_v(r))+2c_2\int_0^t(1+\|v_n(s)\|_H+\|v(s)\|_H)\|\psi_n(s)\|ds. \tag{4.65}$$ wc_solp10a

对于（4.65）右端的第一项，我们有

$$\int_0^t(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)\|u_{v_n}(s)-u_v(s)\|^2ds$$

$$\leqslant\int_0^t(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2ds. \tag{4.66}$$ wc_solp10b

对于右端 (4.65) 中的第二项，我们得到

$$2\sup_{0\leqslant r\leqslant t}(\psi_n(r),\ u_{v_n}(r)-u_v(r))\leqslant 2\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2+2\|\psi_n\|^2_{C([0,T],\ell^2)}. \tag{4.67}$$ wc_solp10c

对于 (4.65) 右端的最后一项，我们有，对于 $t\in[0,T]$,

$$2c_2\int_0^t(1+\|v_n(s)\|_H+\|v(s)\|_H)\|\psi_n(s)\|ds$$

$$\leqslant 2c_2T^{\frac{1}{2}}\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\left(T^{\frac{1}{2}}+\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}+\|v\|_{L^2(0,T;H)}\right). \tag{4.68}$$ wc_solp10d

由 (4.65)–(4.68) 可知，对所有 $t\in[0、T]$,

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2\leqslant 2\int_0^t(-2\gamma+c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2ds$$

$$+4\|\psi_n\|^2_{C([0,T],\ell^2)}+4c_2T^{\frac{1}{2}}\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\left(T^{\frac{1}{2}}+\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}+\|v\|_{L^2(0,T;H)}\right). \tag{4.69}$$ wc_solp10e

由 (4.69) 和 Gronwall 引理可得，对所有 $t\in[0、T]$,

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2\leqslant 4\|\psi_n\|^2_{C([0,T],\ell^2)}e^{\int_0^t(-4\gamma+2c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)ds}$$

$$+4c_2T^{\frac{1}{2}}\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\left(T^{\frac{1}{2}}+\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}+\|v\|_{L^2(0,T;H)}\right)e^{\int_0^t(-4\gamma+2c_3\|\delta\|\|v_n(s)\|_H)ds},$$

因此

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant T}\|u_{v_n}(r)-u_v(r)\|^2\leqslant 4\|\psi_n\|^2_{C([0,T],\ell^2)}e^{(-4\gamma T+2c_3T^{\frac{1}{2}}\|\delta\|\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}}$$

$$+4c_2T^{\frac{1}{2}}\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\left(T^{\frac{1}{2}}+\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}+\|v\|_{L^2(0,T;H)}\right)e^{(-4\gamma T+2c_3T^{\frac{1}{2}}\|\delta\|\|v_n\|_{L^2(0,T;H)}}. \tag{4.70}$$ wc_solp11

由于 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(0$ 中有界，T；$H)$，由 (4.70) 可推知，存在一个与 $n\in\mathbb{N}$ 无关的正数 $c_4=c_4(T)$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_{v_n}(t)-u_v(t)\|^2\leqslant c_4\left(\|\psi_n\|^2_{C([0,T],\ell^2)}+\|\psi_n\|_{C([0,T],\ell^2)}\right). \tag{4.71}$$ wc_solp12

由 (4.58) 和 (4.71) 可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_{v_n}(t)-u_v(t)\|^2\to 0\ \text{ as }\ n\to\infty,$$

至此，证明得证。 □

现在定义 $\mathcal{G}^0$：$C([0,T],U)\to C([0,T],\ell^2)$，对于每个 $\xi\in C([0,T],U)$，令其为：

$$\mathcal{G}^0(\xi)=\begin{cases}u_v & \text{if } \xi=\int_0^{\cdot}v(t)dt \ \text{ for some } v\in L^2(0,T;H);\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{4.72}$$ calg0

其中，u_v 是方程（4.21）-（4.22）的解。

给定 $\phi \in C([0,T],\ell^2)$，记为

$$I(\phi) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \|v(s)\|_H^2 ds:\ v \in L^2(0,T;H),\ u_v = \phi\right\}, \tag{4.73}$$ rate_LS

其中 u_v 是 (4.21)-(4.22) 的解。同样，默认空集的下确界取为 8。

我们将证明族 $\{u^\varepsilon\}$ 在 $C([0,T],\ell^2)$ 中满足拉普拉斯原理，其速率函数由 (4.73) 给出。为此，我们需要根据命题 2.4，证明 $\mathcal{G}^\varepsilon$ 和 $\mathcal{G}^0$ 满足条件 (H1) 和 (H2)。下面的引理证实条件 (H2) 得到满足。

prh1 引理 4.5. 假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立。那么，对每个 $N < \infty$，集合

$$K_N = \left\{\mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v(t)dt\right):\ v \in S_N\right\} \tag{4.74}$$ prh1 1

是 $C([0,T],\ell^2)$ 的一个紧子集，其中 S_N 是 (2.4) 中定义的集合。

证明。由 (4.72) 和 (4.74) 可知

$$K_N = \{u_v:\ v \in S_N\} = \left\{u_v:\ v \in L^2(0,T;H),\ \int_0^T \|v(t)\|_H^2 dt \leqslant N\right\},$$

其中，u_v 是方程 (4.21)-(4.22) 的解。

设 $\{u_{v_n}\}_{n=1}^\infty$ 是 K_N 中的一个序列。那么 $v_n \in L^2(0、T;H)$ 和 $\int_0^T \|v_n(t)\|_H^2 dt \leqslant N$，这表明存在 $v \in S_N$ 和一个子序列 $\{v_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，使得 $v_{n_k} \to v$ 在 $L^2(0、T$ 中弱收敛于 $H)$。然后，根据引理 4.4，我们得到 $u_{v_{n_k}} \to u_v$ 在 $C([0、T]、\ell^2)$ 中强收敛，证毕。 □

In 为证明（H1），我们需要可测映射 $\mathcal{G}^\varepsilon$ 具有以下性质 .

gep 引理 4.6. 假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立，并且对于某个 $N < \infty$，$v \in \mathcal{A}_N$。若 $u_v^\varepsilon = \mathcal{G}^\varepsilon\left(W + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v(t)dt\right)$，则 u_v^ε 是.....的唯一解

$$du_v^\varepsilon + (\nu A u_v^\varepsilon + f(u_v^\varepsilon) + \gamma u_v^\varepsilon)\,dt = (g(t) + \sigma(t,u_v^\varepsilon)v)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t,u_v^\varepsilon)dW, \tag{4.75}$$ gep 1

初始条件为 $u_v^\varepsilon(0) = u_0 \in \ell^2$.

此外，对于每个 $R > 0$，都存在 $C_2 = C_2(R、T、N) > 0$，使得对于任意满足$\|u_0\| \leqslant R$的 $u_0 \in \ell^2$ 以及任意 $v \in \mathcal{A}_N$，解 u_v^ε 对所有 $\varepsilon \in (0、1)$ 均满足，

$$\mathbb{E}\left(\|u_v^\varepsilon\|^2_{C([0,T],\ell^2)}\right) \leqslant C_2. \tag{4.76}$$ gep 2

证明。给定 $\varepsilon>0$，由于 $v\in\mathcal{A}_N$，根据吉尔萨诺夫定理，我们知道，在由下式给出的概率 P_v^ε 下，$\widetilde{W}=W+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v(t)dt$ 是一个具有单位协方差算子的柱状维纳过程。

$$\frac{d\widetilde{P}_v^\varepsilon}{dP}=\exp\left\{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T v(t)dW-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\int_0^T\|v(t)\|_H^2dt\right\},$$

这意味着 $u_v^\varepsilon=\mathcal{G}^\varepsilon(\widetilde{W})=\mathcal{G}^\varepsilon\left(W+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v(t)dt\right)$ 是方程 (3.19)-(3.20)$\sim$ 的唯一解，其中 W 被 W 替换。换言之，u_v^ε 是具有初始条件 $u_v^\varepsilon(0)=u_0$ 的方程 (4.75) 的唯一解。接下来只需证明 (4.76)。

由 (4.75) 和 Itô 公式可知，对于所有 $t\in[0,T]$, P，几乎必然有：

$$\begin{aligned}&\|u_v^\varepsilon(t)\|^2+2\nu\int_0^t\|Bu_v^\varepsilon(s)\|^2ds+2\int_0^t(f(u_v^\varepsilon(s)),u_v^\varepsilon(s))ds+2\gamma\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds\\&=\|u_0\|^2+2\int_0^t(g(s),u_v^\varepsilon(s))ds+2\int_0^t(\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))v(s),u_v^\varepsilon(s))ds\\&+\varepsilon\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|_{L_2(H,\ell^2)}^2ds+2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t(u_v^\varepsilon(s),\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))dW).\end{aligned}\tag{4.77}$$

gep p1

由 (3.3) 和 (3.5) 可知

$$2\nu\int_0^t\|Bu_v^\varepsilon(s)\|^2ds+2\int_0^t(f(u_v^\varepsilon(s)),u_v^\varepsilon(s))ds\geqslant 0.\tag{4.78}$$

gep p2

我们还有

$$2\int_0^t|(g(s),u_v^\varepsilon(s))|ds\leqslant\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds+\int_0^t\|g(s)\|^2ds.\tag{4.79}$$

gep p3

由 (3.18) 和 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}2\int_0^t|(\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))v(s),u_v^\varepsilon(s))|ds&\leqslant 2\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|_{L(H,\ell^2)}\|u_v^\varepsilon(s)\|\|v(s)\|_Hds\\&\leqslant 2\left(\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|_{L(H,\ell^2)}^2\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\|v(s)\|_H^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant 2N^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|\left(\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|_{L(H,\ell^2)}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{1}{4}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2+4N\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|_{L(H,\ell^2)}^2ds\\&\leqslant\frac{1}{4}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2+4N\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\|h_k(s)+\sigma_k(u_v^\varepsilon(s))\|^2ds\\&\leqslant\frac{1}{4}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2+8NT\sum_{k=1}^\infty\|h_k\|_{L^\infty(0,T;\ell^2)}^2+8N\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\|\sigma_k(u_v^\varepsilon(s))\|^2ds\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2 + 8NT\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}$$

$$+ 16N\alpha^2\|\delta\|^2T + 16N\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds. \tag{4.80}$$ gep p4

类似地，由 (3.18) 和 (3.11) 可知，对所有 $\varepsilon\in(0,1)$,

$$\varepsilon\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds \leqslant 2T\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)} + 4\alpha^2\|\delta\|^2T + 4\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds. \tag{4.81}$$ gep p5

由（4.77）—（4.81）可知，对几乎所有的 $t\in[0,T]$, P,

$$\|u_v^\varepsilon(t)\|^2 \leqslant \|u_0\|^2 + \left(1-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2(1+4N)\right)\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds$$

$$+\frac{1}{4}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2 + 4\alpha^2\|\delta\|^2T(1+4N) + 2T(1+4N)\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}$$

$$+\int_0^t\|g(s)\|^2ds + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t(u_v^\varepsilon(s),\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))dW),$$

这意味着对所有 $t\in[0,T]$,

$$\frac{3}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\right) \leqslant \|u_0\|^2 + \left(1-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2(1+4N)\right)\mathbb{E}\left(\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds\right)$$

$$+4\alpha^2\|\delta\|^2T(1+4N) + 2T(1+4N)\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}$$

$$+\int_0^t\|g(s)\|^2ds + \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_0^r 2\sqrt{\varepsilon}(u_v^\varepsilon(s),\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))dW(s))\right|\right). \tag{4.82}$$ gep p6

对于（4.82）中的最后一项，由 Burkholder 不等式可得，对 $\varepsilon\in(0,1)$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_0^r 2\sqrt{\varepsilon}(u_v^\varepsilon(s),\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))dW(s))\right|\right)$$

$$\leqslant 6\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\right) + 36\mathbb{E}\left(\int_0^t\|\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds\right),$$

这与 (4.81) 一起表明,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_0^r 2\sqrt{\varepsilon}(u_v^\varepsilon(s),\sigma(s,u_v^\varepsilon(s))dW(s))\right|\right) \leqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\right)$$

$$+ 72T\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)} + 144\alpha^2\|\delta\|^2T + 144\alpha^2\|\delta\|^2\mathbb{E}\left(\int_0^t\|u_v^\varepsilon(s)\|^2ds\right). \tag{4.83}$$ gep p7

由 (4.82) 和 (4.83) 可得，对所有 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\right)\leqslant 2\|u_0\|^2 + 2\left(1-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2(37+4N)\right)\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u_v^\varepsilon(r)\|^2\right)dr$$

$$+ 8\alpha^2\|\delta\|^2T(37+4N) + 4T(37+4N)\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)} + 2\int_0^T\|g(s)\|^2ds. \tag{4.84}$$ gep p8

由（4.84）和 Gronwall 引理可得，对于所有 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|u_v^\varepsilon(s)\|^2\right)\leqslant c_1e^{c_2t}, \tag{4.85}$$ gep p9

其中

$$c_1 = 2\|u_0\|^2 + 8\alpha^2\|\delta\|^2T(37+4N) + 4T(37+4N)\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)} + 2\int_0^T\|g(s)\|^2ds,$$

and

$$c_2 = 2\left(1-2\gamma+4\alpha^2\|\delta\|^2(37+4N)\right).$$

于是，对于 $t=T$，由 (4.85) 可得 (4.76)。 □

现在证明 $\mathcal{G}^\varepsilon$ and $\mathcal{G}^0$ 满足 (H1)。

prh2 引理 4.7. 假设 (3.2)、(3.7)-(3.9) 和 (3.13) 成立，并且对于某个 $N<\infty$， $\{v^\varepsilon\}\subseteq\mathcal{A}_N$。如果 $\{v^\varepsilon\}$ 作为 S_N 值随机变量依分布收敛于 v，那么 $\mathcal{G}^\varepsilon\left(W+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v^\varepsilon(t)dt\right)$ 在 $C([0、T]、\ell^2)$ 中依分布收敛于 $\mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v(t)dt\right)$。

证明。令 $u^\varepsilon_{v^\varepsilon}=\mathcal{G}^\varepsilon\left(W+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot v^\varepsilon(t)dt\right)$。则由引理 4.6 可知， $u^\varepsilon_{v^\varepsilon}$ 是该方程的解:

$$du^\varepsilon_{v^\varepsilon} + \left(\nu Au^\varepsilon_{v^\varepsilon} + f(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}) + \gamma u^\varepsilon_{v^\varepsilon}\right)dt = \left(g(t)+\sigma(t,u^\varepsilon_{v^\varepsilon})v^\varepsilon\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t,u^\varepsilon_{v^\varepsilon})dW, \tag{4.86}$$ prh2 p1

具有初始数据

$$u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(0) = u_0\in\ell^2. \tag{4.87}$$ prh2 p2

令 $u_v=\mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v(t)dt\right)$。则 u_v 是方程 (4.21)-(4.22) 的解。因此，我们只需证明当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u^\varepsilon_{v^\varepsilon}$在分布意义下于 $C([0,T],\ell^2)$ 中收敛到 u_v。为此，我们首先建立 $u^\varepsilon_{v^\varepsilon}-u_{v^\varepsilon}$ 与 $u_{v^\varepsilon}=\mathcal{G}^0\left(\int_0^\cdot v^\varepsilon(t)dt\right)$ 按照 [11] 所述的收敛性。

由 (4.21)-(4.22) 可得

$$\frac{du_{v^\varepsilon}}{dt} = -\nu A u_{v^\varepsilon} - f(u_{v^\varepsilon}) - \gamma u_{v^\varepsilon} + g(t) + \sigma(t, u_{v^\varepsilon})v^\varepsilon, \tag{4.88}$$ prh2 p3

具有初始数据

$$u_{v^\varepsilon}(0) = u_0 \in \ell^2. \tag{4.89}$$ prh2 p4

由 (4.86)–(4.89) 式可得

$$d(u^\varepsilon_{v^\varepsilon} - u_{v^\varepsilon}) + \nu A(u^\varepsilon_{v^\varepsilon} - u_{v^\varepsilon})dt + (f(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}) - f(u_{v^\varepsilon}))dt + \gamma(u^\varepsilon_{v^\varepsilon} - u_{v^\varepsilon})dt$$

$$= (\sigma(t, u^\varepsilon_{v^\varepsilon})v^\varepsilon - \sigma(t, u_{v^\varepsilon})v^\varepsilon)\, dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t, u^\varepsilon_{v^\varepsilon})dW, \tag{4.90}$$ prh2 p5

其中包含 $u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(0) - u_{v^\varepsilon}(0) = 0$。由式 (4.90) 和伊藤公式可得

$$\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t) - u_{v^\varepsilon}(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|B(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s))\|^2 ds + 2\int_0^t (f(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}) - f(u_{v^\varepsilon}),\ u^\varepsilon_{v^\varepsilon} - u_{v^\varepsilon})ds$$

$$+2\gamma \int_0^t \|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s)\|^2 ds = 2\int_0^t (\sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s) - \sigma(s, u_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s),\ u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s))\, dt$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \|\sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t (u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\,. \tag{4.91}$$ prh2 p6

由（3.5）和（4.91）可得

$$\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t) - u_{v^\varepsilon}(t)\|^2 + 2\gamma \int_0^t \|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s)\|^2 ds$$

$$\leqslant 2\int_0^t (\sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s) - \sigma(s, u_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s),\ u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s))\, dt$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \|\sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)} ds + 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t (u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\,. \tag{4.92}$$ prh2 p6a

对于固定的 $M > 0$，定义一个停时

$$\tau^\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0 : \|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t)\| \geqslant M\} \wedge T. \tag{4.93}$$ prh2 p7

通常，空集的下确界规定为 8。由于 $\gamma \leqslant 0$，由 (4.92)–(4.93) 可得，对所有 $t \in [0、\ T]$,

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant t} \|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r \wedge \tau^\varepsilon) - u_{v^\varepsilon}(r \wedge \tau^\varepsilon)\|^2 \leqslant -2\gamma \int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon} \|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s)\|^2 ds$$

$$+2\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon} |\,(\sigma(s, u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s) - \sigma(s, u_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s),\ u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s) - u_{v^\varepsilon}(s))\,|dt$$

$$+\varepsilon\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds+2\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_0^{r\wedge\tau^\varepsilon}(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\right|. \quad (4.94)$$ prh2 p8

对于 (4.94) 右侧的第一项，我们有

$$-2\gamma\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s)\|^2ds\leqslant-2\gamma\int_0^t\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)\|^2ds. \quad (4.95)$$ prh2 p9

为了处理 (4.94) 右端的第二项，由 (4.25) 可知，存在一个正常数 $c_1=c_1(N)$，使得几乎必然（ P）有，

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{t\in[0,T]}\|u_{v^\varepsilon}(t)\|\leqslant c_1. \quad (4.96)$$ prh2 p10

然后根据（3.12），(3.17)、(4.93) 和 (4.96) 推知，存在 $c_2=c_2(N、\ M)>0$，使得 t

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon}|\,(\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s)-\sigma(s,u_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s),\ u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s))\,|ds\\
&\leqslant 2\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s)-\sigma(s,u_{v^\varepsilon}(s))v^\varepsilon(s)\|\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s)\|ds\\
&\leqslant c_2\|\delta\|\int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon}\|v^\varepsilon(s)\|_H\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s)\|^2ds\\
&\leqslant c_2\|\delta\|\int_0^t\|v^\varepsilon(s)\|_H\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)\|^2ds. \quad (4.97)
\end{aligned}$$ prh2 p11

由 (4.94)、(4.95) 和 (4.97) 可知，对于所有 $t\in[0、\ T]$、 P，几乎必然成立，

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)\|^2\\
&\leqslant\int_0^t(c_2\|\delta\|\|v^\varepsilon(s)\|_H-2\gamma)\sup_{0\leqslant r\leqslant s}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)\|^2ds\\
&+\varepsilon\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds+2\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\leqslant r\leqslant T}\left|\int_0^{r\wedge\tau^\varepsilon}(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\right|. \quad (4.98)
\end{aligned}$$ prh2 p11a

由（4.98）和 Gronwall 引理可得，对于所有 $t\in[0,T]$, P，几乎必然有：

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant r\leqslant t}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(r\wedge\tau^\varepsilon)\|^2\\
&\leqslant\varepsilon c_3\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds+2\sqrt{\varepsilon}c_3\sup_{0\leqslant r\leqslant T}\left|\int_0^{r\wedge\tau^\varepsilon}(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\right|, \quad (4.99)
\end{aligned}$$ prh2 p11b

其中 $c_3=e^{c_2\|\delta\|T^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}-2\gamma T}$。

对于 (4.99) 右端的第一项，由 (3.11) 和 (3.18) 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds &\leqslant 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\left(\|h_k(s)\|^2+\|\sigma_k(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2\right)ds\\ &\leqslant 2\varepsilon T\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}+4\varepsilon\alpha^2\|\delta\|^2T+4\varepsilon\alpha^2\|\delta\|^2\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)\|^2ds\\ &\leqslant 2\varepsilon T\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}+4\varepsilon\alpha^2\|\delta\|^2T+4\varepsilon\alpha^2\|\delta\|^2M^2T. \qquad (4.100)\end{aligned}$$

prh2 p12

由 (4.100) 可知

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon c_3\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds=0,\quad \text{P-almost surely.} \qquad (4.101)$$

prh2 p13

对于 (4.99) 右端的最后一项，由 (4.96)、(4.100) 以及 Doob 最大不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant T}\left|\int_0^{r\wedge\tau^\varepsilon}2\sqrt{\varepsilon}\,(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\right|^2\right)\\ &\leqslant 16\varepsilon\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s)\|^2\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds\right)\\ &\leqslant 16\varepsilon(M+c_1)^2\mathbb{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau^\varepsilon}\|\sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))\|^2_{L_2(H,\ell^2)}ds\right)\\ &\leqslant 32\varepsilon(M+c_1)^2\left(T\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|^2_{L^\infty(0,T;\ell^2)}+2\alpha^2\|\delta\|^2T+2\alpha^2\|\delta\|^2M^2T\right),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant T}\left|2\sqrt{\varepsilon}c_3\int_0^{r\wedge\tau^\varepsilon}(u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s)-u_{v^\varepsilon}(s),\ \sigma(s,u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(s))dW)\right|^2\right)=0. \qquad (4.102)$$

prh2 p14

由 (4.99)、(4.101) 和 (4.102) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t\wedge\tau^\varepsilon)-u_{v^\varepsilon}(t\wedge\tau^\varepsilon)\|^2=0\quad\text{in probability.} \qquad (4.103)$$

prh2 p15

另一方面，由 (4.93) 和 (4.76)，对所有 $\varepsilon\in(0、1)$，有

$$P(\tau^\varepsilon<T)=P\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t)\|>M\right)\leqslant\frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t)\|^2\right)\leqslant\frac{C_2}{M^2}, \qquad (4.104)$$

prh2 p16

其中 $C_2=C_2(T、N)>0$。由 (4.104) 可知，对于每个 $\eta>0$,

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon_{v^\varepsilon}(t)-u_{v^\varepsilon}(t)\|>\eta\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^{\varepsilon}_{v^{\varepsilon}}(t)-u_{v^{\varepsilon}}(t)\|>\eta,\ \tau^{\varepsilon}=T\right)+P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^{\varepsilon}_{v^{\varepsilon}}(t)-u_{v^{\varepsilon}}(t)\|>\eta,\ \tau^{\varepsilon}<T\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^{\varepsilon}_{v^{\varepsilon}}(t\wedge\tau^{\varepsilon})-u_{v^{\varepsilon}}(t\wedge\tau^{\varepsilon})\|>\eta\right)+\frac{C_2}{M^2}.$$

首先令 $\varepsilon\to 0$ 趋于极限，然后再令 $M\to\infty$ 趋于极限，由 (4.103) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u^{\varepsilon}_{v^{\varepsilon}}-u_{v^{\varepsilon}})=0\ \text{ in } C([0,T],\ell^2)\ \text{ in probability.} \tag{4.105}$$

prh2 p20

由于 $\{v^{\varepsilon}\}$ 作为 S_N值随机元素依分布收敛于 v，根据斯科罗霍德定理，存在一个概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ 以及定义在该空间上的 S_N值随机变量 $\tilde{v}^{\varepsilon}$和 $\tilde{v}$，使得 $\tilde{v}^{\varepsilon}$ 和 $\tilde{v}$ 分别与 v^{ε} 和 v 具有相同的分布律，并且 $\{\tilde{v}^{\varepsilon}\}$ 几乎必然收敛于$\tilde{v}$，其中 S_N 赋予了弱拓扑。于是，由引理4.4可知，

$$u_{\tilde{v}^{\varepsilon}}\to u_{\tilde{v}}\text{ in }C([0,T],\ell^2)\text{ almost surely,}$$

因此

$$u_{\tilde{v}^{\varepsilon}}\to u_{\tilde{v}}\text{ in }C([0,T],\ell^2)\text{ in distribution.} \tag{4.106}$$

prh2 p21

由 (4.106) 可知

$$u_{v^{\varepsilon}}\to u_{v}\text{ in }C([0,T],\ell^2)\text{ in distribution.} \tag{4.107}$$

prh2 p22

由 (4.105) 和 (4.107) 立即得到

$$u^{\varepsilon}_{v^{\varepsilon}}\to u_v\ \text{ in }C([0,T],\ell^2)\text{ in distribution,}$$

至此，证明得证。 □

作为命题 2.4 以及引理 4.5 和 4.7 的直接推论，我们最终得到本文的主要结果——定理 4.1。

参考文献

[1] V.S. Afraimovich 和 V.I. Nekorkin，《扩散耦合映射离散链中的行波混沌》，《国际分岔与混沌杂志：科学与工程应用》，4（1994），631-637。

[2] P.W. Bates、X. Chen 和 A. Chmaj，格点上双稳态动力学的行波，SIAM J. Math. Anal., 35 (2003), 520-546.

[3] P.W. Bates 和 A. Chmaj，关于相变的离散卷积模型，《理性力学与分析文献》，150（1999），281–305。

[4] P.W. Bates、K. Lu 和 B. Wang，格点动力系统的吸引子，《国际分岔与混沌杂志》，11（2001），143-153。[5] P.W. Bates、H. Lisei 和 K. Lu，随机格点动力系统的吸引子，《随机性与动力学》，6（2006），1-21。[6] P.W. Bates、K. Lu 和 B. Wang，加权空间中非自治随机格点系统的吸引子，《物理学D辑》，289（2014），32-50。[7]J. Bell 和 C. Cosner，受有髓轴突建模启发的非线性微分差分系统的阈值行为与传播，《应用数学季刊》，42（1984），1-14。[8] H. Bessaih 和 A. Millet，大偏差原理与无黏壳模型，《电子概率杂志》，14（2009），2551-2579。[9] W.J. Beyn 和 S.Y. Pilyugin，无限格点上反应扩散系统的吸引子，《动力系统与微分方程杂志》，15（2003），485-515。[10] S. Brassesco，关于无限维动力系统的小随机扰动的一些结果，《随机过程及其应用》，38（1991），33-53。[11] Z. Brzezniak、B. Goldys 和 T. Jegaraj，随机朗道 - 利夫希茨 - 吉尔伯特方程的大偏差与平衡态之间的跃迁，《理性力学与分析文献》，226（2017），497-558。[12] A. Budhiraja 和 P. Dupuis，无限维布朗运动的正泛函的变分表示，《概率与数理统计》，20（2000），39-61。[13] A. Budhiraja、P. Dupuis 和 V. Maroulas，无限维随机动力系统的大偏差，《概率年刊》，36（2008），1390-1420。[14] T. Caraballo 和 K. Lu，具有乘性噪声的随机格点动力系统的吸引子，《中国数学前沿》，3（2008），317-335。[15] T. Caraballo、F. Morillas 和 J. Valero，具有乘性噪声和非利普希茨非线性项的随机格点动力系统的吸引子，《微分方程杂志》，253（2012），667-693。[16] C. Cardon-Weber，伯格斯型随机偏微分方程的大偏差，《随机过程及其应用》，84（1999），53-70。

[17] S. Cerrai 和 M. Rockner，具有乘性噪声和非 Lipschitz 反应项的随机反应扩散系统的大偏差，《概率年刊》，32（2004），1100-1139。[18] S. Cerrai 和 M. Freidlin，带噪声的多维 RDE 的拟势与退出问题的近似，AMS 汇刊，363（2011），3853-3892。[19] S. Cerrai 和 A. Debussche，动力Φ_d^{2n}模型的大偏差，《应用数学与优化》，80（2019），81-102。[20] S. Cerrai 和 A. Debussche，噪声相关性趋于零的二维随机 Navier-Stokes 方程的大偏差，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，55（2019），211-236。[21] Z. Chen、X. Li 和 B. Wang，随机时滞格点系统的不变测度，《离散与连续动力系统 B 辑》，26（2021），3235-3269。[22] Z. Chen 和 B. Wang，随机薛定谔格点系统的极限测度，美国数学会会刊，150（2022），1669-1684。[23]Z. Chen 和 B. Wang，随机薛定谔时滞格点系统的弱均值吸引子与不变测度，《动力学与微分方程杂志》，2021，doi: 10.1007/s10884-021-10085-3[24] F. Chenal 和 A. Millet，抛物型 SPDE 的一致大偏差及其应用，《随机过程及其应用》，72（1997），161-186。[25] P.L. Chow，某些抛物型 Itô 方程的大偏差问题，《纯粹与应用数学通讯》，45（1992），97-120。[26] S.N. Chow 和 J. Mallet-Paret，格点动力系统中的图案形成与空间混沌，I、II，《IEEE 电路与系统汇刊》，42（1995），746-751。[27] S.N. Chow、J. Mallet-Paret 和 W. Shen，格点动力系统中的行波，《微分方程杂志》，49 （ 1998 ），248-291。[28] S.N. Chow、J. Mallet-Paret 和 E.S. Van Vleck，空间离散演化方程中的图案形成与空间混沌，《随机计算动力学》，4（1996），109-178。[29] S.N. Chow 和 W. Shen，离散 Nagumo 方程中的动力学：空间拓扑混沌，《SIAM 应用数学杂志》，55（1995），1764-1781。

[30] L.O. Chua 和 T. Roska，《CNN 范式》，IEEE 电路与系统学报，40（1993），147-156。[31] L.O. Chua 和 Y. Yang，《细胞神经网络：理论》，IEEE 电路与系统学报，35（1988），1257-1272。[32] I. Chueshov 和 A. Millet，《随机二维流体动力学型系统：适定性与大偏差》，《应用数学与优化》，61（2010），379-420。[33] A. Dembo 和 A. Zeitouni，《大偏差技术及其应用》，Springer-Verlag，柏林，1998。[34] J. Duan 和 A. Millet，《随机影响下 Boussinesq 方程的大偏差》，《随机过程及其应用》，119（2009），2052-2081。[35] P. Dupuis 和 R.S. Ellis，《大偏差理论的弱收敛方法》，Wiley-Interscience，纽约，1997。[36] C.E. Elmer 和 E.S. Van Vleck，《双稳态微分-差分方程行波解的分析与计算》，《非线性》，12（1999），771-798。[37] C. E. Elmer 和 E.S. Van Vleck，《具有周期扩散的双稳态微分-差分方程的行波解》，《SIAM 应用数学杂志》，61（2001），1648-1679。[38] T. Erneux 和 G. Nicolis，《离散双稳态反应-扩散系统中的传播波》，《物理学D辑》，67（1993），237-244。[39] W.G. Faris 和 G. Jona-Lasinio，《带噪声非线性热方程的大涨落》，《物理学杂志A辑》，15（1982），3025-3055。[40] M.I. Freidlin，《反应-扩散方程的随机扰动：准确定性近似》，《美国数学学会汇刊》，305（1988），665-697。[41] M. I. Freidlin 和 A. D. Wentzell，《动力系统的随机扰动》，Springer-Verlag，纽约，2012。[42] E. Gautier，《带乘性噪声的非线性薛定谔方程的一致大偏差》，《随机过程及其应用》，115（2005），1904-1927。[43] M. Hairer 和 H. Weber，《二维和三维白噪声驱动非线性随机偏微分方程的大偏差》，《图卢兹数学科学院年刊》，24（2015），55-92。

[44] X. Han，具有乘性白噪声的随机正弦-戈登格点系统的随机吸引子，《数学分析与应用杂志》，376（2011），481-493。[45] X. Han，W. Shen 和 S. Zhou，加权空间中随机格点动力系统的随机吸引子，《微分方程杂志》，250（2011），1235-1266。[46] X. Han，P. Kloden 和 B. Usman，Hopfield 型格点模型吸引子的上半连续收敛，《非线性》，33（2020），1881-1906。[47] G. Kallianpur 和 J. Xiong，一类随机偏微分方程的大偏差，《概率年刊》，24（1996），320-345。[48] R. Kapval，化学反应系统的离散模型，《数学化学杂志》，6（1991），113-163。[49] N.I. Karachalios 和 A.N. Yannacopoulos，离散非线性薛定谔方程的整体存在性与紧吸引子，《微分方程杂志》，217（2005），88-123。[50] J.P. Keener，离散可兴奋细胞耦合系统中的传播及其失效，《SIAM 应用数学杂志》，47（1987），556-572。[51] J.P. Keener，离散缝隙连接耦合对心肌中传播的影响，《理论生物学杂志》，148（1991），49-82。[52] D. Li，B. Wang 和 X. Wang，随机时滞格点系统的周期测度，《微分方程杂志》，272（2021），74-104。[53] D. Li，B. Wang，X. Wang，随机时滞格点系统不变测度的极限行为，《动力系统与微分方程杂志》，34（2022），1453-1487。[54] W. Liu，具有小乘性噪声的随机演化方程的大偏差，《应用数学与优化》，61（2010），27-56。[55] F. Martinelli，E. Olivieri 和 E. Scoppola，有限维和无限维动力系统的小随机扰动：退出时间的不可预测性，《统计物理杂志》，55（1989），477-504。[56] F. Morillas 和 J. Valero，格点动力系统的皮亚诺定理与吸引子，《国际分岔与混沌杂志》，19（2009），557-578。[57] V. Ortiz-Lopez 和 M. Sanz-Sole，空间维数为三的随机波动方程的拉普拉斯原理，《2010年随机分析》，Springer，海德堡，2011，31-49。

[58] S. Peszat, 《随机演化方程的大偏差估计》, 《概率论及相关领域》, 98（1994）, 113-136。[59] M. Rockner、T. Zhang和X. Zhang, 《随机受控三维Navier-Stokes方程的大偏差》, 《应用数学与优化》, 61（2010）, 267-285。[60] M. Salins、A. Budhiraja和P. Dupuis, 《Banach空间值随机演化方程的一致大偏差原理》, 《美国数学会汇刊》, 372（2019）, 8363-8421。[61] R. B. Sowers, 《具有非高斯扰动的反应扩散方程的大偏差》, 《概率年刊》, 20（1992）, 504-537。[62] D.W. Stroock, 《大偏差理论导论》, Spring-Verlag, 纽约, 1984。[63] S.R.S. Varadhan, 《渐近概率与微分方程》, 《纯粹与应用数学通讯》, 19（1966）, 261-286。[64] S.R.S. Varadhan, 《大偏差及其应用》, SIAM, 费城, 1984。[65] B. Wang, 《无限格点上系统的动力学》, 《微分方程杂志》, 221（2006）, 224-245。[66] B. Wang, 《非线性噪声驱动的随机反应扩散格点系统的动力学》, 《数学分析与应用杂志》, 477（2019）, 104-132。[67] R. Wang和B. Wang, 《无限维非线性噪声驱动的p-Laplacian格点系统的随机动力学》, 《随机过程及其应用》, 130（2020）, 7431-7462。[68] X. Wang、P. Kloeden和X. Han, 《具有状态依赖非线性噪声的神经场格点模型的随机动力学》, 《非线性微分方程及其应用》, 28（2021）, 论文编号43。[69] B. Zinner, 《离散Nagumo方程行波前解的存在性》, 《微分方程杂志》, 96（1992）, 1-27。