arXiv:2305.06517v1 [math.AG] 11 May 2023

关于面积极小的 Pfaffian 簇

崔宏斌、焦晓翔和徐晓伟[1]

摘要

实矩阵极小簇有两个重要的族：行列式簇和反对称行列式簇，后者也称为 Pfaffian 簇。1999 年，Kerckhove 和 Lawlor [Duke Math.J. 96(2),401–424,1999]证明，除两个族外，行列式簇都是面积极小的。本文证明，除 Pfaffian 超曲面外，所有 Pfaffian 簇都是面积极小的。

关键词。面积-余面积公式，面积极小锥，切锥，行列式簇，Pfaffian 簇

数学主题分类（2020）。主要：49Q15，53A10，53A07；次要：14M12，14M99

目录

1 引言 2 2 Pfaffian 簇 5 3 Lawlor 定向切片法 9 4 主切片及相关加权函数 11 5 次级切片与复合加权函数 18 6 主定理的证明 19 7 Pfaffian 簇的切锥 21

[1]通讯作者

1 引言

在几何测度论（GMT）中，$\mathbf{R}^n$ 中的面积极小曲面是整流流（参见 [FF60]），它们在给定边界的条件下使面积泛函达到全局最小值，也就是说，它们是广义 Plateau 问题的解（参见 [Fe69], [M16]）。对于一个面积极小曲面S，在每个内部奇点 p 处，都存在一个定向切锥，作为 S 的吹起极限（参见 [Fe69]中的 4.3.16 和 5.4.3(6)）；该切锥本身也是面积极小的（参见 [Fe69]中的 5.4.3(5)）。因此，为了更好地理解面积极小曲面可能出现哪些奇点，了解哪些锥可以是面积极小的至关重要。同时，通过扰动面积极小锥，可以构造出许多新的面积极小曲面例子（参见 [HS85]）。

准确地说，面积极小锥 C 是一种局部可求 rectifiable、具有齐次不变性且面积极小的曲面，它从一个固定点（通常是原点 O）出发，位于$\mathbf{R}^n$ 中。它在所有具有相同边界的积分流中，使其链环 $C \cap \mathbf{S}^{n-1}_O$ (1) 的面积最小，其中$\mathbf{S}^{n-1}_O$ (1) 表示以 O 为中心的$\mathbf{R}^n$ 的单位球面。注意，当 O 不是平面时，它自然成为C 的奇点。对于$\mathbf{S}^{n-1}_O$ (1) 中的子流形 M，以 M 为底的锥 C (M) 是从 O 出发并经过 M 中各点的射线的并集。

1.1 正则锥与非正则锥。具有最简单奇点（原点 O 处孤立奇点）的面积极小锥，可以由单位球面中的紧致光滑极小子流形张成。在这些情况下， C 的奇点集为 $\{O\}$，Hardt 和 Simon（[HS85]）将其称为正则锥 。正则锥的链环（如上所述）是单位球面中的紧致光滑子流形。

面积极小正则锥的研究历史悠久，自著名的*Simons* 锥 ($p = q = 3$)和*Lawson* 锥 $C_{p,\ q} := \{(x_0, \ldots, x_{p+q+1}) \mid q(x_0^2 + \cdots + x_p^2) - p(x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q+1}^2) = 0\}$ 它们在 Bernstein 问题的研究中发挥着重要作用（参见 [Sim68],[BDG69], 等）。它们是球面乘积的锥。已知 $C_{p,q}$ 是面积极小的，当且仅当 $p + q \geq 7$ 或 $p + q = 6, |p - q| \leq 3$（[Sim68], [BDG69], [L72], [Si74], [La91]）。其他证明可参见 [Da04], [DP09]。此外，任意球面乘积上的锥的面积极小性已由 Lawlor 在 [La91] 中进行了完整分类，并提出了一种称为曲率判据的一般方法，用于证明正则锥的面积极小性。利用 Lawlor 曲率判据，人们发现了许多新的面积极小正则锥，参见[La91], [Ke94], [Ka02], [XYZ18], [TZ20], [JC22], [JCX22], 等。关于给定正则极小锥的面积极小性问题的更多历史背景和证明方法，请读者参阅 [La98] 中的第 2 节。

此前，对于非正则面积极小锥，人们知之甚少。目前已有几个经典例子。著名的角度猜想 ([M83])指出，如果两个定向的 k-平面满足关于特征角的某个条件，那么它们的并集就是面积极小的。Nance 和 Lawlor ([Ma87], [La89])证实了这一条件既是充分条件，也是必要条件。这些极小锥在原点处具有类似自相交的奇点。还有大量非正则面积极小锥自然地来源于奇异复射影簇。

代数几何，特别是将其视为环境欧几里得空间中的锥时。根据标定几何理论，环境空间 $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ 中的复代数簇，其任意紧致部分都是面积极小的（[HL82], [M16]）。这些奇异簇通常具有分层的奇异集（参见 [W57], [W65-1], [W65-2]）。

即使一个实代数簇是极小的，要判断它是否具有面积极小性也并非易事。近年来，某些实矩阵簇在环境欧几里得空间中的极小性引起了人们的关注。令 $M(p,q;\mathbf{R})$、$(p \le q)$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的 $p \times q$矩阵空间，并令$Skew(n,\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的 $n \times n$ 斜对称矩阵空间。定义行列式簇 $C(p,q,r)$、$(r < p)$（参见 [BV06], [Ha92]）如下：

$$C(p,q,r) = \{X \in M(p,q;\mathbf{R}) : \mathrm{rank} X \le r\},$$

其反对称类比形式 $\mathbf{C}(n,2r)$, $(2r < n)$，也称为 ***Pfaffian variety***（Pfaffian 簇），定义为

$$\mathbf{C}(n,2r) = \{X \in Skew(n,\mathbf{R}) : \mathrm{rank} X \le 2r\}.$$

通过研究代数超曲面的 Hsiang 极小曲面方程（参见 [Hs67]），$C(p,p,p-1)$ 和 $\mathbf{C}(2n,2n-2)$ 分别被证明在 [T10-1], [HLT17], 中是极小的。对于一般的 $C(p,q,r)$ 和 $\mathbf{C}(n,2r)$，它们的极小性分别通过 [BCH21] [Ko21],[Ko21], 中的各种方法得到了证明。

在 [KL99], Kerckhove 和 Lawlor 证明，这些 $C(p,\ q,\ r)$、$(p+q-2r \ge 4)$ 是分层的面积极小锥。为了克服奇异集较大的障碍[2], , 他们运用了几何测度论（GMT）中的面积-余面积公式和切片技术（[Fe69], [M16]），通过证明每个切片在相应的切片分解中都使加权测度达到最小值。Lawlor 在 [La98] 中将这种方法称为定向切片法 。利用这一方法，Lawlor 为证明 $C(S^3 \times S^3)$ 的面积极小性给出了一种新的简洁证明（见 [La98] 中的 3.4 节）；Lawlor 和 Morgan（[LM96]）证明了三张极小曲面在 120° 处相交时，在局部范围内具有面积极小性；其他相关结果可见 [La98], [LM96]。

1.2 主要结果的陈述。受 [La98] 和 [KL99], 关于 Pfaffian 簇的研究启发，我们证明了

主定理。 除一类超曲面外，***Pfaffian*** 簇均为分层的面积极小锥。

我们的主定理给出了一类新的面积极小非正则锥（代数簇），它们可能具有有趣的几何意义（见下文注释 1.2）。我们还给出了关于 Pfaffian 簇极小性的另一种证明。

我们的主定理的证明依赖于一种对称性约化： $SO(n)$ 在$\mathbf{C}(n,2r)$ 上具有规范的伴随作用。$\mathbf{C}(n,2r) \subset Skew(n,\mathbf{R})$ 在正则点处法空间经旋转后形成的那些不同像，且这些法空间受焦半径限制，正是我们所需的主切片 。这些切片与$\mathbf{C}(n,2r)$ 的交集就是主切片，并且每个比较曲面

[2]秩一情形： $C(p,q,1)$，也称为塞格雷簇，是正则锥，其面积极小化已在 [Pe93] 中通过使用 Lawlor 曲率判据进行了研究。

连同$\mathbf{C}(n, 2r)$ 的截断部分，几乎处处都与主切片相交。我们继续用抛物线对主切片进行切分，这称为次级切片。通过计算主权重函数 w_1 和复合加权函数 $w_1 w_2$，我们证明$\mathbf{C}(n, 2r)$ 的每个切片都在相应的切片集中使加权测度达到最小，因此可由面积-余面积公式得出整体的极小化结果。

注 1.1。在 [KL99], 中，面积极小行列式簇 $C(p,\ q,\ r)$、$(p+q-2r \geq 4)$ 实际上分为两种情况：(1) 当 $p+q$ 为偶数时，$C(p,\ q,\ r)$ 是可定向的，因此 $C(p,\ q,\ r)$ 是面积极小的；(2) 当 $p+q$ 为奇数时，$C(p,\ q,\ r)$ 是不可定向的，因此 $C(p,\ q,\ r)$ 在模 2 的意义下是面积极小的（参见 [KL99] 中的命题 4.6 和定理 8.3）。然而，Pfaffian 簇都是可定向的（参见命题 2.3），因此我们的主要定理中不存在模 2 面积极小的情形。

1.3 Pfaffian 簇的集合论切锥。由于 Lawlor 定向切片法仅适用于那些 $\mathbf{C}(n, 2r)$、($n-2r \geq 3$)（见命题 5.2），我们无法证明 Pfaffian 超曲面 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 的极小性。不过，通过集合论切锥（参见 [Fe69] 中的 3.1.21）分析，我们仍然可以讨论 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 的一些性质。

定义（切锥，参见 [Fe69] 中的 3.1.21）。对于赋范向量空间 X、子集 $S \subset X$ 和点 $a \in X$，S 在 a 处的切锥定义为

$$\mathrm{Tan}(S, a) = \{v \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S \ and \ r \in \mathbf{R}^+, s.t. \ |x-a| < \varepsilon, |r(x-a) - v| < \varepsilon\}$$

这样的向量 v 称为 S 在 a 处的切向量。

在第 7 节中，我们证明

定理。设 k 为满足 $0 \leq k \leq r$ 的整数，M_0 为秩为 $2k$ 的 $n \times n$ 反对称矩阵，则 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 在 M_0 处的切锥与 $\mathbf{C}(n-2k, 2r-2k) \times \boldsymbol{R}^{k(2n-2k-1)}$. 等距。

正则锥 $\mathbf{C}(n,2)$、$(n \geq 4)$ 是定向实格拉斯曼流形上的锥，许多人研究了它们的几何性质和面积极小化（见第 2 节）。特别是，第一个锥 $\mathbf{C}(4,2)$ 就是两个球面的乘积上的锥，它不是面积极小的。利用这一事实，我们得到上述定理的一个推论。

推论。对于 *Pfaffian* 超曲面 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$的“近正则”点，其切锥并非面积极小，其中“近正则”是指那些秩为 $2n-4$ 的点(矩阵)。

在几何测度论中，有一条相关结论指出（参见 [Fe69] 中的定理 5.4.3），面积极小局部可求长流 M 在内点处的每一个定向切锥也都是面积极小的。这里，$interior\ points\ of\ M$ 表示 $points\ in\ the\ support\ of\ M\ but\ not\ in\ the\ support\ of\ \partial M$。因此，如果其内点处存在非极小的定向切锥，则可以得出结论：$\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 不是面积极小的。

然而，切锥和 定向切锥（参见 [M16] 中的 9.7）的具体含义似乎有所不同。一般而言，定向切锥的支集包含于切锥的支集中，但两者不一定相等。图 9.7.2 和习题 9.8 中

[M16] 给出了这样一个例子，其中每条非负坐标轴都是一个定向切锥，但切锥是第一象限。

那么，鉴于目前尚无确凿证据证明这些代数簇的定向切锥具有唯一性，我们倾向于不在上述推论之后断定$\mathbf{C}(2n, 2n-2)$一定不是面积极小的。

备注 1.2。最小行列式簇和 Pfaffian 簇与 [Hs67] 提出的最小三次锥问题 有关（其后续研究见 [PX93], [T10-1], [T10-2], [T19], [HLT17] ）。Hsiang 在那里发现了两个不可约的不变最小三次锥：第一个$SO(4)$-不变三次锥正是行列式超曲面 $C(3,3,2)$（见 [T10-2]）；第二个 $SU(4)$-不变三次锥是 [HLT17] 中所述的 Pfaffian 超曲面$\mathbf{C}(6,4)$。此外，还存在一个 $Sp(4)$-不变三次锥（[Liu89]），研究这些不变锥的几何意义及其面积极小化性质颇有意义。

1.4 论文结构。在第 2 节中，我们讨论 Pfaffian 簇的定义、秩和轨道分层，也讨论正则锥的几何：$\mathbf{C}(n,2)$，然后证明所有 Pfaffian 簇都是可定向的。在第 3 节中，我们简要介绍 Lawlor 的定向切片方法、法空间切片以及权函数的计算公式。在第 4 节中，我们首先描述主切片，证明任意两个主切片要么互不相交，要么彼此重合，并计算主权重函数和第二基本形式。在第 5 节中，我们描述 Kerckhove 和 Lawlor 的次级切片，然后给出复合权函数的下界估计。在第 6 节中，我们证明主定理，该证明受到 [KL99] 给出的原始证明的启发。在第 7 节中，我们研究 Pfaffian 簇的切锥。

2 Pfaffian 簇

行列式簇 $C(p,q,r)$ 是所有 $(r+1)\times(r+1)$ 子矩阵的行列式的公共零点集；它们的斜对称类比 $\mathbf{C}(n,2r)$ 实际上由一族 Pfaffian 定义。为此，我们回顾一下代数几何中关于 Pfaffian 簇的一些研究（参见 [He69], [DP76], [AD80], [R00]）。

设 M 表示一个 n 阶斜对称矩阵，其行列式和 Pfaffian 分别记为 $\det(M)$ 和 $\mathrm{Pf}(M)$。众所周知，当 n 为奇数时，$\det(M)=(\mathrm{Pf}(M))^2, \mathrm{Pf}(M)=0$。一般而言，对称代数 $S(\wedge^2\mathbf{R}^n)$ 可与多项式环 $\mathbf{R}[x_{ij}]$ 等同，其中 x_{ij} 是 M 的元素。给定 $2r$ 个递增指标 $1\le i_1<\ldots<i_{2r}\le n$，令 $[i_1,\ldots,i_{2r}]$ 表示 M 的以行和列指标 $i_1,\ldots,i_{2r}$ 为指标的主子式的 Pfaffian，即

$$[i_1,\ldots,i_{2r}]=\sum_{I_\sigma}\mathrm{sgn}(I_\sigma)M_{j_1k_1}\cdots M_{j_rk_r}$$

其中 $I_\sigma:\ \{i_1,\ldots,i_{2r}\}\to\{j_1,k_1,\ldots,j_r,k_r\}$ 是满足 $j_t\le k_t(1\le t\le r)$ 和 $j_1\le\cdots\le j_r$ 的排列。

De Concini 和 Procesi（[DP76]）证明，$\mathbf{R}[x_{ij}]$ 由这些主子式的 Pfaffian 生成。于是，M 的所有 $(2r+1)$ 阶和 $(2r+2)$ 阶子矩阵的行列式所定义的公共零点集，化归为 M 的主 $(2r+2)$ 阶子式的 Pfaffian 所定义的公共零点集（另见 [He69], [AD80]）。因此，将斜对称行列式簇称为 Pfaffian 簇似乎更为准确。

定义 2.1 对于 $0 \le r \le [\frac{n}{2}] - 1$，Pfaffian 簇 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 定义为 n 中由 n 个秩至多为 $2r$ 的实反对称矩阵构成的子集，$n \times n$ 反对称矩阵空间可以与欧几里得空间等同：$Skew(n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$，度量（或范数）定义为：

$$|M|^2 = \frac{1}{2} tr(MM^T), M \in Skew(n, \mathbf{R}).$$

如果矩阵 N 的秩等于 $2r-2$，我们也称 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 中的点（矩阵）N 为近正则的。

与 [KL99], 中讨论的行列式簇类似，Pfaffian 簇也可以按照其秩进行分层：

$$\{0\} = \mathbf{C}(2n, 0) \subset \mathbf{C}(2n, 2) \subset \cdots \subset \mathbf{C}(2n, 2n-2),$$

最后一个：$\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 是 $Skew(2n, \mathbf{R})$ 中的奇异超曲面，由 $2n$ 阶矩阵的 Pfaffian 的零水平集定义，我们称之为*Pfaffian* 超曲面，并且

$$\{0\} = \mathbf{C}(2n+1, 0) \subset \mathbf{C}(2n+1, 2) \subset \cdots \subset \mathbf{C}(2n+1, 2n-2),$$

最后一个在 $Skew(2n+1, \mathbf{R})$ 中的余维为 3，并且上述两个序列中的每个锥都是下一个锥的奇异集。

注 2.2 在代数几何中，*Pfaffian* 簇的定义存在一些细微差异。*A. Kuznetsov [Ku06]* 将最高秩的斜对称形式（定义在对偶欧几里得空间中）的集合称为 *Pfaffian* 簇，这些形式仅对应于本文中的 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$、$\mathbf{C}(2n+1, 2n-2)$，而他将上述两个序列中的其他元素称为广义 *Pfaffian* 簇。

我们引入一些将在本文中频繁使用的概念。令 $X_{ij}(i < j)$ 表示一个 $n \times n$ 的反对称矩阵，其在 (i, j) 位置上的元素为 1，在 (j, i) 位置上的元素为 -1，其余位置均为零，记为

$$M(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i X_{2i-1, 2i} \in \mathbf{C}(n, 2r),$$

其中，$k \le r$ 和 $x_1 \ge \cdots \ge x_k$ 为非递增的正数。

令 $E \subset \mathbf{C}(n, 2r)$ 表示所有此类 $M(x_1, \ldots, x_r)$ 构成的集合，并令

$$\tilde{E} = \{M(x_1, \ldots, x_r) : x_1 > \cdots > x_r > 0\}.$$

群 $SO(n)$ 在分层曲面 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 上有伴随作用，每个轨道都与 E 相交于某个 $M(x_1, \ldots, x_k)(k \le r)$，其中 $x_1 \ge \cdots \ge x_k$，而 $x_1, x_1, \ldots, x_k, x_k$ 是

˜ ˜非递增的非零奇异值。因此， E： $Clos\ E$ 的闭包是 $\mathbf{C}(n,\ 2r)$ 在伴随作用下的轨道空间，而 $\mathbf{C}(n,\ 2r)$ 是轨道的并集。这里需要指出，轨道分层是秩分层的细化，因为存在经过重复奇异值的轨道。

最奇异的轨道 $\mathbf{C}(n,2)$ 是以其链环为底的正则锥：

$$L = P \cdot diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\} \cdot P^T, P \in SO(n),$$

L 是经过基点 X_{12} 的伴随轨道。通过检查轨道空间的像可以证明其是孤立的： $Clos\ \tilde{E}$（限制在 $x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 1$ 上），因此根据 [HsL71], 中的一个定理，它在$Skew(n,\ \mathbf{R})$ 的单位球面中是极小的。因此，$\mathbf{C}(n,\ 2)$ 在 $Skew(n,\ \mathbf{R})$ 中也是极小的。

此外，$\mathbf{C}(n,2)$ 的面积极小化已得到充分研究，让我们进一步讨论它们。

李群 $SO(n)$ 的伴随作用可以实现为对称空间 $(G, K) = (SO(n)^2, SO(n))$ 的各向同性作用（在李群和对称空间理论中，通常将其分为 B 型和 D 型）。从这一观点来看， L——经过特殊选取的基点的伴随轨道——是一个对称 R-空间（[Ka02]）。Kanno [Ka02] 证明了：除了 $\mathbf{C}(4, 2)$ 之外，所有其他锥 $\mathbf{C}(n,2)(n \geq 5)$ 都是面积极小的，这一结论是基于 Lawlor 曲率判据得到的。

通过验证一个 4×4 反对称矩阵的 Pfaffian 可知，经过正交变换后，$\mathbf{C}(4,2)$ 实际上是两个二维球面乘积之上的圆锥。

$$\mathbf{C}(4, 2) = C(S^2(1) \times S^2(1)),$$

由于它是 $\mathbf{R}^6$ 中具有孤立奇点的余维一奇异曲面，因此不可能是面积极小的（甚至不是稳定的，见 [Sim68] 和 [La91]）。

$\mathbf{C}(n,2)$ 的流形结构也很清楚。$\mathbf{R}^n$ 中定向$_\sim m$维平面的实 Grassmann 流形： $G(m, n;\mathbf{R})$ 是标定几何理论中的基本语言（[HL82],[Ha90]），并且自然嵌入到楔积空间 $\wedge^m \mathbf{R}^n$ 中，作为单位可分解向量（参见 [M85]）。极小性及其相关锥的面积极小化˜已在 [C88],[JC22], 中得到研究，而 $G(2, n;\mathbf{R})$ 到 $\wedge^2\mathbf{R}^n$ 的自然嵌入实际上等价于上述对称空间作用（参见 [JCX22] 中的命题 5.1），即。

$$\mathbf{C}(n, 2) = the\ cone\ over\ \widetilde{G}(2, n; \mathbf{R}).$$

我们通过证明所有 Pfaffian 簇都是可定向的，来结束本章；这一点与行列式簇不同（参见 [KL99] 中的命题 4.6）。

命题 2.3 *Pfaffian* 簇都是可定向的。

证明。 我们只需考察 $\Sigma(n,\ 2r)$——秩为 $2r$ 且所有特征值均不相等的斜对称矩阵集合——在 $\mathbf{C}(n,\ 2r)$ 中的定向；该集合是开且稠密的。

$\Sigma(n,\ 2r)$ 是在群作用 $\mathcal{G} = SO(n)$ 下同一类型的伴随轨道的并集，其轨道空间是欧几里得空间中的开线性锥 E，而 E 的闭包 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 是 $\mathbf{C}(n,\ 2r)$ 的轨道空间。选取一个基点 $M_0 = M(x_1,\ .....,\ x_r) \in E(x_1 > \cdots > x_r > 0)$，经验证， M_0 处在伴随作用下的各向同性子群为

$$\begin{aligned} H &= S(O(2) \times \cdots \times O(2) \times O(n-2r)) \\ &= \{\mathrm{diag}\,\{\varepsilon_1 R_{\theta_1}, \cdots, \varepsilon_r R_{\theta_r}, S\} \,|\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in \pm 1, S \in O(n-2r)\} \end{aligned}$$

其中 $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{sgn}(\varepsilon_i) \cdot \det S = 1$，且对于 $i = 1, \ldots, r$,

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

表示 $SO(2)$ 旋转。

可以通过考察各向同性群 H 在 G/H中单位元处的切空间上的作用，来检验其可定向性，并判断该作用是否保持某个定向。也就是说，检查连续路径 $PXP^T(P \in H, X$一组固定的切向量)是否保持 $\Sigma(n, 2r)$在 M_0 处的定向切基（参见 [KL99]中的命题 4.6）。

定向切空间基底如下给出（参见命题 4.3 及其下文证明）：第一组

$$\{\ldots, e_i, \ldots\} = \{\ldots, X_{2i-1,2i}, \ldots\}, 1 \le i \le r,$$

第二组

$$\{\ldots, f_{ij}, \ldots\} = \{\ldots, X_{2i-1,2j-1}, X_{2i-1,2j}, X_{2i,2j-1}, X_{2i,2j}, \ldots\}, 1 \le i < j \le r,$$

以及第三组

$$\{\ldots, g_i, \ldots\} = \{\ldots, X_{2i-1,2r+1}, \ldots, X_{2i-1,n}, X_{2i,2r+1}, \ldots, X_{2i,n}, \ldots\}, 1 \le i \le r.$$

记 $R = \mathrm{diag}\{\epsilon_1 R_{\theta_1}, \cdots, \epsilon_r R_{\theta_r}\}$，令 $h = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in H$为各向同性子群的一个元素，即

$$h = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \left[cos\theta_i(E_{2i-1,2i-1} + E_{2i,2i}) + sin\theta_i(E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1})\right] + \sum_{2r+1 \le \alpha,\beta \le n} s_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta},$$

其中， E_{ij} 表示在(i, j)位置为 1、其他位置均为 0 的矩阵。

将上述定向切空间基上的伴随作用 $h(*)h^T$ 记为 Φ，具体表示为:

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & S^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RAR^T & RBS^T \\ -SB^TR^T & 0 \end{pmatrix}.$$

然后计算如下:

$$\Phi(\ldots, X_{2i-1,2i}, \ldots) = (\ldots, X_{2i-1,2i}, \ldots)\mathbf{I},$$

它是恒等式;

$$\Phi(X_{2i-1,2j-1}, X_{2i-1,2j}, X_{2i,2j-1}, X_{2i,2j}) = (X_{2i-1,2j-1}, X_{2i-1,2j}, X_{2i,2j-1}, X_{2i,2j})(\varepsilon_i\varepsilon_j R_{\theta_i} \otimes R_{\theta_j}),$$

其中， $R_{\theta_i} \otimes R_{\theta_j}$ 表示两个矩阵的克罗内克积。容易看出，矩阵 $\varepsilon_i\varepsilon_j R_{\theta_i} \otimes R_{\theta_j}$ 的行列式均为 1。

And

$$\Phi(E_{2i-1,\alpha}, E_{2i,\alpha}) = (E_{2i-1,\alpha}, E_{2i,\alpha})(\varepsilon_i R_{\theta_i} \otimes S),$$

其中，$(E_{2i-1,2r+1}, \ldots, E_{2i-1,n}, E_{2i,2r+1}, \ldots, E_{2i,n})$ 简写为 $(E_{2i-1,\alpha}, E_{2i,\alpha})$，且 $\det(\varepsilon_i R_{\theta_i} \otimes S) = (\varepsilon_i)^{2(n-2r)} \cdot (\det R_{\theta_i})^{n-2r} \cdot (\det S)^2 = 1$ 仍为正。这里我们注意到，根据对称性，读者只需检验作用的符号： $RE_{i\alpha}S^T$,$1 \leq i \leq 2r, 2r+1 \leq \alpha \leq n$。

因此，我们得出结论：$\mathbf{C}(n, 2r)$ 均为可定向的。 □

3 Lawlor 的定向切片方法

定向切片方法由 Lawlor 于 [La98] 年提出，随后 Kerckhove 和 Lawlor 利用该方法证明，除两个族之外，行列式簇都是面积极小的（[KL99]）。

定义 3.1（参见 [KL99] 中的定义 2.1）设 M 是 k 维曲面，位于$\mathbf{R}^n$ 中。对于 $0 \leq d < k$， M 的一个 d维切片 是 M 的一族两两不相交的 d 维可求 rectifiable 子集；若这些可求 rectifiable 子集的并覆盖 M，则称该切片为完备。

我们关注 $\mathbf{R}^n$ 的那些 $(n-k+d)$ 维切片，它们与 M 的交由 M 的 d 维切片组成;那么我们将 M 的那些 d 维子集称为切片，将 $\mathbf{R}^n$ 的那些 $(n-k+d)$ 维子集称为切片集 或简称切片。

设 f :$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k-d}$ 为一个 C^1 映射，假设其在 M 上的限制也是 C^1，那么由 $f|_M$ 的水平集给出的M 切片自动是满的。 f 在 p 处的 $(k-d)$ 维雅可比行列式定义为（参见 [Fe69], 中的 3.2.1 节或 [M16]中的 3.6 节）。

$$J_{k-d}f = \max||(Df)_p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-d})||,$$

其中 $v_1, \ldots, v_{k-d}$ 是 p 处 $\mathbf{R}^n$ 中的单位正交向量，且 $p \in M$ 处 $f|_M$ 的（$k-d$）维雅可比行列式为:

$$J_{k-d}(f|_M) = \max||(Df)_p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-d})||,$$

其中 $v_1, \ldots, v_{k-d}$ 是 p 处 M 的单位正交切向量。

可以看出,

$$J_{k-d}(f|_M) \leq (J_{k-d})f|_M,$$

由于这两个雅可比行列式都定义在这些点上 $p \in M \subset \mathbf{R}^n$，但后者的切向量取自 T_p $\mathbf{R}^n$，因此当 M 的每个水平集都与 M 正交相交时，等式成立。

设 g 是定义在 M 上的一个可积函数，其中采用诱导的豪斯多夫测度。面积-余面积公式（参见 [Fe69] 中的 3.2.22 以及 [La98] 中的定理 4.5.1）指出:

$$\int_M g J_{k-d}(f|_M) d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbf{R}^{k-d}} \left(\int_{f^{-1}(y) \bigcap M} g d\mathcal{H}^d \right) d\mathcal{H}^{k-d}. \tag{1}$$

相反， g 通过加权函数 （参见 [La98]中的4.6节）：

$$w(x) = \frac{1}{(J_{k-d}f)|_M},$$

这意味着

$$\text{Area} M \geq \int_M \frac{1}{(J_{k-d}f)|_M} J_{k-d}(f|_M) d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbf{R}^{k-d}} \left(\int_{f^{-1}(y) \bigcap M} \frac{1}{(J_{k-d}f)|_M} d\mathcal{H}^d \right) d\mathcal{H}^{k-d},$$

当每个水平集 $f^{-1}(c)$ 都与 M 正交相交时，该不等式恰好取等号。

内部积分提示了在每个切片集上提出一个新的加权面积极小问题：如果我们将$\mathbf{R}^n$ 切片两次或更多次，那么内部的权函数将是每次迭代切片所产生的权函数的乘积（参见 [La98]中的4.5.3）。

每个复合函数 $h = g \circ f$ 都给出由水平集定义的相同切片，并且它们在每个水平集上仅相差一个常数，这不会影响积分结果（参见命题 4.6.4 及其下文在 [La98] 中的证明）。

对 C^1 维子流形在 $\mathbf{R}^N$（或 $\mathbf{R}^N$ 本身）上的切片，可以通过参数化映射（[La98]）来定义。设 T 是 $\mathbf{R}^N$ 中一个适当嵌入的 n 维 C^1 子流形，$V \subset \mathbf{R}^{n-k+d}$ 为开集， $Z \subset \mathbf{R}^{k-d}$ 为开集。

对于一个微分同胚 F: $V \times Z \to T$，它给出了 T 的一个子集族 $\{T_z\}$,

$$T_z := F(V \times \{z\}), z \in Z,$$

它们是由以下公式定义的 f 的水平集： $f(F(V \times \{z\})) = z,$因此构成 T 的一个完整的、($n - k + d$) 维切片。

这些参数化切片集的加权函数 w 计算如下（参见 [La98]中的 4.6.2 节）：

$$w(F(v, z)) = \frac{J_n F}{J_{n-k+d}(F|_{V \times \{z\}})}. \tag{2}$$

现在，我们可以介绍奇异曲面及其环境空间的一种具体的类子流形切片：
normal space slicings（参见 [KL99]中的第 3 节）。

给定一个奇异曲面 $M \subset \mathbf{R}^n$，在正则点 $p \in M$, $T_p\mathbf{R}^n$ 附近具有正交分解：

$$T_p\mathbf{R}^n = T_pM \oplus N_pM,$$

其中，N_pM 表示 p处 M 的法空间，它通过将属于 M某些切片的正则点处的这些法空间"添加"起来，从而诱导出一个从 M 的切片到$\mathbf{R}^n$ 的切片集的自然扩张，即，

$$S_a := \{p + tv | p \in M_a, v \in N_pM\},$$

其中 p 是一个正则点，$a \in \mathcal{A}$ 是某个指标集的元素，$M_{\mathcal{A}}$ 表示 M 的完整切片，S_a 表示 $\mathbf{R}^n$ 的切片结果，我们称这些为 $S_{\mathcal{A}}$ 法空间切片。

备注 3.2 在 M 的任意正则点处，这些法空间切片集的半径应小于焦距，从而能够保证对于下文中任意选定的单位法向量 v，$det(I - t\boldsymbol{A}_v)$ 的正性；这是一个局部条件。从全局来看，任意两个正规切片集都不应相交（见命题 *4.2*），这与 *[La91]* 中所讨论的"法楔"的不相交性类似。对于 *Pfaffian* 簇及其他奇异锥，沿径向趋近原点时，法空间切片的半径趋于零，即它们呈楔形（事实上，当趋近原点以外的其他奇点时，也可能出现这种情况，参见下文推论 *4.8*），因此我们也称它们为法楔。

给定一个与 M 在正则点 $p \in M$ 附近的局部参数化相容的 M 法空间切片，则 (2) 中法空间切片对应的加权函数 $w(p + tv)$ 和 $w(p)$ 满足以下条件（参见 [KL99] 中的定理 3.2）：

$$w(p + tv) = w(p)\frac{\det(I - t\mathbf{A}_v)}{J_d((I - t\mathbf{A}_v)_d)}, \tag{3}$$

其中，$|t|$ 小于正则点 p 处 M 的焦距，p 属于 M 的某个切片，且 v 是 p 处的单位法向量。另一个附加要求是，$\mathbf{A}_v$ 应当是形算子相对于 T_pM 的某个有序标准正交基的矩阵形式，并满足：前 d 列与经过 p 的 M 的切片相切。

4 初级切片及其关联加权函数

主定理 的证明需要进行两次切片。本章介绍主要（第一次）切片。请记住第 2 节中引入的以下记号：$\sim X_{ij}, M(x_1, \ldots, x_r)$ E, E，并在此引入一些新的记号。

令 K 为由满足 $2r < i < j \leq n$ 的向量 X_{ij} 张成的子空间， K 是 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 在正则点处的法空间。

设 $E, H \in \{K, Nond\ M : M \in \tilde{M}_{2r-1,\ 2r}\}$，其中 $M_{2r-1,\ 2r}$ 表示 M 的最小非零奇异值；可以将其视为在 E 的每一点上“添加”由焦半径界定的法空间。

回顾如下：

$$\tilde{E} = \{M \in Skew(n, \mathbf{R}) : M = \sum_{i=1}^{r} x_i X_{2i-1,2i}, x_1 > \cdots > x_r > 0\}.$$

定义 4.1（与 [KL99]中的定义 6.1 比较）$\mathbf{C}(n,\ 2r)$的主切片定义为 $\tilde{E}$上的伴随作用的不同像： $P\tilde{E}P^T$, $P \in SO(n)$。

$Skew(n,\ \mathbf{R})$的主切片集定义为 H上的伴随作用的不同像： QHQ^T, $Q \in SO(n)$。

读者可以想象主切片集的形状：根据推论 4.8，它们在$\mathbf{C}(n,\ 2r)$的每个奇点附近（包括原点 O）均呈楔形。

初级切片集互不相交，是应用定向切片方法的一项必要全局条件（参见 [KL99] 中的命题 6.3 及本文的注释 3.2），这里我们证明：

命题 4.2 上述任意两个初级切片集要么互不相交，要么重合。

证明。 假设存在两个初级切片集，它们在 $PH_1P^T = QH_2Q^T$, $H_1, H_2 \in H$, $P, Q \in SO(n)$ 处相交。由位置上的对称性，我们只需证明，对于任意 $H_3 \in H$, $Q^T P H_3 P^T Q \in H$。

首先， $PH_1P^T = QH_2Q^T$意味着 H_1和 H_2具有相同的奇异值，特别是相同的 $2r$ 个最大奇异值，因此 H_1 和 H_2 在左上角具有相同的 $2r$ 块，依据 $2r$ 。

记

$$H_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \ and \ H_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{r} x_i X_{2i-1,2i}(x_1 > \cdots > x_r > 0)$，且 B_1, B_2是任意的斜对称矩阵，其中 $|B_1| < x_r, |B_2| < x_r$。

此外，我们记作

$$PH_1P^T = \left[P \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} P^T,$$

其中

$$L = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

and

$$\Sigma = diag\{x_1, x_1, \cdots, x_r, x_r\},$$

$A = L\Sigma$，对 QH_2Q^T 进行类似处理。

于是，根据低秩近似理论（参见 [KL99] 中的命题 6.2）（此处省略 B_1, B_2 的 SVD 过程，这不会影响结果），到 PH_1P^T 的唯一最近秩-$2r$ 矩阵为

$$\left[P\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T = P\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T,$$

唯一性也意味着

$$Q^TP\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^TQ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $Q^TP = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \in SO(n)$，那么由上可得，$S_2 = S_3 = 0$ 且 $S_1AS_1^T = A$。

$2r \times 2r$ 矩阵 A 仅有 r 个对角块。将 S_1 视为一个 $r \times r$ 矩阵，其所有元素都是 2×2 块；根据 $S_1A = AS_1$，注意到 $x_1 > \cdots > x_r > 0$，可知 S_1 也仅有对角块。

现在，S_1 的每个块都属于 $O(2)$，于是，

$$Q^TP = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_4 \end{pmatrix} \in S(O(2) \times \cdots \times O(2) \times O(n-2r))$$

，最后，$Q^TPH_3P^TQ$ 将每个 $H_3 \in H$ 送回 H。 □

接下来，我们计算主（第一）加权函数。由于伴随作用是等距变换，因此只需对属于$\tilde{E}$的点进行计算。

命题 4.3 设 $M(\vec{x}) = M(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^r x_iX_{2i-1,2i} \in \widetilde{E}$是$\mathbf{C}(n, 2r)$的一个正则点，则$\mathbf{C}(n, 2r)$在 $M(\vec{x})$处的(3)中的第一加权函数为

$$w_1(M(\vec{x})) = \prod_{1 \le i < j \le r}(x_i^2 - x_j^2)^2 \prod_{i=1}^r x_i^{2(n-2r)}.$$

证明。将$\mathbf{C}(n, 2r)$视为伴随轨道的集合时，可由李代数得到其一个自然的局部参数化：

设 $M(\vec{x}) = M(x_1, \ldots\ldots, x_r) = \sum_{i=1}^r x_iX_{2i-1,\ 2i}$，固定 $\vec{x}$，令 $\vec{t} = (t_1, \ldots\ldots, t_r)$，则 $M(\vec{x} + \vec{t})$ 给出了 $\tilde{E}$ 的局部参数化。

选取指标 $\overrightarrow{s}=(s_{ij}|1\leq i<i+1<j\leq n,\ i\leq 2r)$，令 $P(\overrightarrow{s})=\mathrm{Exp}(\sum_{i,\ j}s_{ij}X_{ij})$，则 $M(\overrightarrow{x})$ 处的参数化为：

$$F(\overrightarrow{s},\overrightarrow{t})=P(\overrightarrow{s})M(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{t})P(\overrightarrow{s})^T.$$

在 $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{0},\overrightarrow{t}=\overrightarrow{0}$ 处的切映射为：$F_*(\frac{\partial}{\partial s_{ij}})=[X_{ij},M(\overrightarrow{x})]$，$F_*(\frac{\partial}{\partial t_i})=X_{2i-1,2i}$。

直接计算可得，矩阵 DF 的非零项如下：

对于那些 $j\leq 2r$，

(i)：$i=2p<j=2q$，

$$\frac{\partial F_{i-1,j}}{\partial s_{ij}}=-x_{i/2},\frac{\partial F_{i,j-1}}{\partial s_{ij}}=-x_{j/2};$$

(ii)：$i=2p<j=2q-1$，

$$\frac{\partial F_{i-1,j}}{\partial s_{ij}}=-x_{i/2},\frac{\partial F_{i,j+1}}{\partial s_{ij}}=x_{(j+1)/2};$$

(iii)：$i=2p-1<j=2q(p<q)$，

$$\frac{\partial F_{i,j-1}}{\partial s_{ij}}=-x_{j/2},\frac{\partial F_{i+1,j}}{\partial s_{ij}}=x_{(i+1)/2};$$

(iv)：$i=2p<j=2q-1$，

$$\frac{\partial F_{i,j+1}}{\partial s_{ij}}=x_{(j+1)/2},\frac{\partial F_{i+1,j}}{\partial s_{ij}}=x_{(i+1)/2}.$$

对于那些 $j>2r$，当 i 为偶数时，$\frac{\partial F_{i-1,j}}{\partial s_{ij}}=-x_{\frac{i}{2}}$；当 i 为奇数时，$\frac{\partial F_{i+1,j}}{\partial s_{ij}}=x_{\frac{i+1}{2}}$。并且，$\frac{\partial F_{2i-1,2i}}{\partial t_i}=1$。

我们将它们分为以下三类分块矩阵：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_{12}}{\partial t_1} & \frac{\partial F_{34}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial F_{2r-1,2r}}{\partial t_1}\\ \frac{\partial F_{12}}{\partial t_2} & \frac{\partial F_{34}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial F_{2r-1,2r}}{\partial t_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_{12}}{\partial t_r} & \frac{\partial F_{34}}{\partial t_r} & \cdots & \frac{\partial F_{2r-1,2r}}{\partial t_r}\end{pmatrix}=\mathbf{I}.$$

以及矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_{2p-1,2q-1}}{\partial s_{2p-1,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p-1,2q}}{\partial s_{2p-1,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p,2q-1}}{\partial s_{2p-1,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p,2q}}{\partial s_{2p-1,2q-1}}\\ \frac{\partial F_{2p-1,2q-1}}{\partial s_{2p-1,2q}} & \frac{\partial F_{2p-1,2q}}{\partial s_{2p-1,2q}} & \frac{\partial F_{2p,2q-1}}{\partial s_{2p-1,2q}} & \frac{\partial F_{2p,2q}}{\partial s_{2p-1,2q}}\\ \frac{\partial F_{2p-1,2q-1}}{\partial s_{2p,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p-1,2q}}{\partial s_{2p,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p,2q-1}}{\partial s_{2p,2q-1}} & \frac{\partial F_{2p,2q}}{\partial s_{2p,2q-1}}\\ \frac{\partial F_{2p-1,2q-1}}{\partial s_{2p,2q}} & \frac{\partial F_{2p-1,2q}}{\partial s_{2p,2q}} & \frac{\partial F_{2p,2q-1}}{\partial s_{2p,2q}} & \frac{\partial F_{2p,2q}}{\partial s_{2p,2q}}\end{pmatrix}$$

等于

$$\begin{pmatrix} 0 & x_q & x_p & 0 \\ -x_q & 0 & 0 & x_p \\ -x_p & 0 & 0 & x_q \\ 0 & -x_p & -x_q & 0 \end{pmatrix} := G_{pq},$$

其中 $1 \leq p < q \leq r$。

第三族矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{2i-1,2r+1}}{\partial s_{2i-1,2r+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i-1,n}}{\partial s_{2i-1,2r+1}} & \frac{\partial F_{2i,2r+1}}{\partial s_{2i-1,2r+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i,n}}{\partial s_{2i-1,2r+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2i-1,2r+1}}{\partial s_{2i-1,n}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i-1,n}}{\partial s_{2i-1,n}} & \frac{\partial F_{2i,2r+1}}{\partial s_{2i-1,n}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i,n}}{\partial s_{2i-1,n}} \\ \frac{\partial F_{2i-1,2r+1}}{\partial s_{2i,2r+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i-1,n}}{\partial s_{2i,2r+1}} & \frac{\partial F_{2i,2r+1}}{\partial s_{2i,2r+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i,n}}{\partial s_{2i,2r+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{2i-1,2r+1}}{\partial s_{2i,n}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i-1,n}}{\partial s_{2i,n}} & \frac{\partial F_{2i,2r+1}}{\partial s_{2i,n}} & \cdots & \frac{\partial F_{2i,n}}{\partial s_{2i,n}} \end{pmatrix}$$

等于

$$\begin{pmatrix} 0 & x_i\mathbf{I} \\ -x_i\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} := H_i,$$

其中 $1 \leq i \leq r$。

移除无效变量后，由上述排序可得：

$$DF = \operatorname{diag}\left\{\mathbf{I}, \cdots, G_{pq}(p<q), \cdots, H_1, \cdots, H_r\right\}.$$

DF 的行列式是这些块的乘积。将 F 限制在$\mathbf{C}(n, 2r)$的切片上所得的 r 维雅可比行列式，与形式上的 r 列的雅可比行列式相等，后者恰为 1。然后，根据 (2)，$\mathbf{C}(n, 2r)$ 上的主权重函数为：

$$\begin{aligned} w_1 = \det\, DF &= \prod_{1\leq i<j\leq r} \det\, G_{ij} \times \prod_{i=1}^{r} \det\, H_i \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq r} (x_i^2 - x_j^2)^2 \prod_{i=1}^{r} x_i^{2(n-2r)}. \end{aligned} \tag{4}$$

□

回顾公式 (3)，为了获得 w_1 在初级切片集（即那些正规切片集）上的值，我们还需要计算 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 在$Skew(n, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 中的第二基本形式，而 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 的极小性是一个自然的推论，它重新证明了 [Ko21] 中的结果。最后，我们将给出公式 (3) 中第一个加权函数在初级切片集上的下界估计，这已足以供后续使用。

通过等距作用，我们也可以计算那些正则点处的第二基本形式˜。回顾一下，，$_{2i} \in E$处的$\mathbf{C}(n, 2r)$的切向量基由 $X_{ij}(1 \le i < j \le n, i \le 2r)$张成，而 M_0 处锥面的法空间由 $X_{ij}(2r < i < j)$张成。在给定度量下，这些基向量均为单位正交向量。第二基本形式可以通过考察锥面的每一个二维截面来计算（参见 [Simon83], 第44页和 [KL99]第415页）。

令$X_{a,\ h}$ 和 $X_{b,\ l}$ 为 M_0处的两个切向量，不失一般性，假设$a \le b$，则有一个关键观察：

引理 4.4 将 $X_{a,h}$ 和 $X_{b,l}$ 的线性组合加到 M_0 上，当且仅当存在某个 $i = 1$、.. . 、 r 以及 $h > 2r, l > 2r$.时，秩会提高】【。

证明。分别讨论以下所有情形：$a = 2i < b = 2j$、$a = 2i < b = 2j - 1$、$a = 2i - 1 < b = 2j(i < j)$ 和 $a = 2i - 1,\ b = 2i$，即可直接得到结论。□

因此，对于任意一对 $X_{2i-1,\ h}$和 $X_{2i,\ l}$，在 M_0 的一个小邻域内，存在一条曲线 $f(y_1,\ y_2) \in \mathbf{C}(n,\ 2r)$：

$$f(y_1, y_2) = M_0 + y_1 X_{2i-1,h} + y_2 X_{2i,l} + \frac{y_1 y_2}{x_i} X_{h,l},$$

它满足 $\frac{\partial f}{\partial y_1}(0, 0) = X_{2i-1,h}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}(0, 0) = X_{2i,l}$，相关的第二基本形式为：

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(X_{2i-1,h}, X_{2i,l}) = -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(0,0)\right]^{\perp} = -\frac{1}{x_i} X_{h,l},$$

其中 $i = 1$、.....、r 以及 $h,\ l > 2r$，因为 $X_{h,\ l}$是正规的。

对于任何其他的配对 $X_{a,h}$ 和 $X_{b,l}$，这些曲线（小段）都可以直接选取为：$M_0 + y_1 X_{a,h} + y_2 X_{b,l}$，这意味着相应的第二基本形式均为零。

我们按照如下方式给切向量 $X_{ij}(1 \le i < j \le n, i \le 2r)$ 排序。 ：

$$X_{12}, \ldots, X_{2r-1,2r}, X_{13}, \ldots, X_{1,2r}, X_{23}, \ldots, X_{2,2r}, \ldots, X_{2r-2,2r};$$
$$X_{1,2r+1}, \ldots, X_{1,n}, X_{2,2r+1}, \ldots, X_{2,n}, \ldots, X_{2r,2r+1}, \ldots, X_{2r,n}.$$

˜形式向量 r 与主切片 E 相切于$\mathbf{C}(n, 2r)$。在此基底下，˜点处的第二基本形式 E 由下式给出：

命题 4.5 设 $M_0 = \sum_{i=1}^{r} x_i X_{2i-1,2i} \in \tilde{E}$，设 $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 为 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 在 M_0 处的单位法向量，即 $|B| = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr} BB^T} = 1$。~~对于上述有序基~~，形算子 $\boldsymbol{A}_v$ 的相应矩阵具有以下分块形式：$\boldsymbol{A}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$，其中¯

$$C = diag\{L_1, \ldots, L_r\}, L_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_i} B^T \\ \frac{1}{x_i} B & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

对于 $1 \le i \le r$。

形算子 $\mathbf{A}_v$ 的迹为零，因此

推论 4.6（Pfaffian 簇的极小性，另见 [Ko21]）在自然包含$\mathbf{C}(n, 2r)$下，*Pfaffian* 簇是 $Skew(n, \boldsymbol{R})$ 中的极小奇异曲面。

下面的引理对于估计主切片集上的权函数至关重要，证明略去。

引理 4.7 (引理 6.8 的方阵版本，见 [KL99]) 设 S 为迹为2 且具有重复非负特征值 $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n$的半正定对称矩阵。设 λ 为 S的最大特征值，并设 τ 为满足 $0 \le \tau \le \frac{1}{\lambda}$ 的实数。那么，$det(I - \tau S) \ge (1-\tau)^2$, 当且仅当 $t = 0$或 $\lambda = 1$时等号成立；也就是说，无论顺序如何，特征值均为1、1、0、0、$\cdots$、0、0。

现在，（5）意味着

$$\det(I - t\mathbf{A}_v) = \prod_{i=1}^{r} \det\left(I - \frac{t^2}{x_i^2} BB^T\right),$$

注意，B B^T 具有成对的重复特征值。由上述引理可推出 t

$$\det\left(I - \frac{t^2}{x_i^2} BB^T\right) \ge \left(1 - \frac{t^2}{x_i^2}\right)^2,$$

当且仅当 $t = 0$ 时等号成立，或者 BB^T 的特征值为 1，1，0，0，$\cdots$，0，0。~后一个条件等价于秩 $B = 2$，这也意味着 $B \in G(2,\ n-2r; \mathbf{R})$ 按照第 2 节的意义成立，因为 v 是一个单位向量。

于是，我们得到关于焦半径的一个推论：

~**推论 4.8** $\mathbf{C}(n, 2r)$ 在 $M_0 = M(x_1, \ldots, x_r) \in E$ 处的焦半径是最小奇异值 x_r，当接近奇点时，这些奇异值趋于零。因此，切片集呈楔形。

结合式 (4)，我们得到本章的主要结果：

命题 4.9 设为$M_0 = M(n, \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot X_{i,0}, x_r)$ 在 $X_{i,0}$ 处的单位法向量，并令 t 为满足 $|t| < x_r$ 的实数。那么，$\boldsymbol{R}^{\binom{n(n-1)}{2}}$ 的初级切片的加权函数 w_1 满足

$$w_1(M(\overrightarrow{x}) + tv) \ge \prod_{1 \le i < j \le r} (x_i^2 - x_j^2)^2 \prod_{i=1}^{r} x_i^{2(n-2-2r)} \prod_{i=1}^{r} (x_i^2 - t^2)^2, \tag{6}$$

当且仅当 $t = 0$ *or* 时，等号成立。

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, B \in \mathbf{C}(n-2r, 2).$$

满足 $\mathrm{tr}BB^T = 2$。特别地，对于 ***Pfaffian*** 超曲面$\mathbf{C}(2n, 2n-2)$，该等式自然成立。

5 次级切片与复合加权函数

(6) 中的因子 $(x_i^2 - t^2)$ 为定义一维的次级切片提供了动机，它们将把楔形初级切片集分解为互不相交的双曲曲线（参见 [La98] 中的图 2）。

定义 5.1 （参见 [KL99] 中的第 7 章）设 H, K如前所述，设 $M(\overrightarrow{x})$ $M\ x_1\ \dots\ x_r\ = \sum_{i=1}^r x_i X_{2i-1\,2i} \in \tilde{E}$ $v \in K$ $M\ \overrightarrow{x}$ $=$ (,,) ,，令 为 ( ) 处的单位法向量。则对于$|t| < x_r$，定义 $h = (h_1, \dots, h_r) : H \to \mathbf{R}^r$ 如下:

$$h_i(M(\overrightarrow{x}) + tv) = \frac{x_i^2 - t^2}{2}, i = 1, \dots, r,$$

H 的次级切片定义为 h的水平集的不同像，记为 H_c,

$$H_c := h^{-1}(c),$$

其中 $c = (c_1^2/2, \dots, c_r^2/2)$。此外，次级切片集的并集 H_c几乎处处覆盖 $\tilde{H}$，且每个 H_c 都与 E 正交相交于一点。

次级切片的加权函数在 [KL99] 中计算为

$$w_2(M(\overrightarrow{x}) + tv) = \frac{1}{\prod_{i=1}^r x_i \sqrt{1 + t^2(\sum_{i=1}^r \frac{1}{x_i^2})}} \tag{7}$$

现在，我们可以证明

命题 5.2 当 $n - 2r \geq 3$ 时，每个次级切片集内复合加权函数 $w_1 w_2$ 的最小值等于其在 $\mathbf{C}(n, 2r)$. 处的取值。

证明。结合 (6) 和 (7)， $w_1 w_2$ 有下界，且不小于

$$w_1 w_2(M(\overrightarrow{x}) + tv) \geq \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i^2 - x_j^2)^2 \prod_{i=1}^r x_i^{2n-4r-5} \prod_{i=1}^r (x_i^2 - t^2)^2}{\sqrt{1 + t^2(\sum_{i=1}^r \frac{1}{x_i^2})}}, \tag{8}$$

当且仅当 $t=0$ 或 v 是矩阵形式的单位法向量时，等号成立。

$$v=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}, B\in \mathbf{C}(n-2r,2).$$

沿每个固定的次级切片集 $H_c(c=(c_1^2/2,\dots,c_r^2/2))$ 上，因子 $(x_i^2-x_j^2)$ 和 $(x_i^2-t^2)$ 保持不变，因此，只要我们能够证明（注意，不仅仅是当且仅当！）.....，证明便告完成。

$$\frac{\prod_{i=1}^r (c_i^2+t^2)^{\frac{2n-4r-5}{2}}}{\sqrt{1+t^2(\sum_{i=1}^r \frac{1}{c_i^2+t^2})}} \geq \prod_{i=1}^r (c_i^2)^{\frac{2n-4r-5}{2}},$$

且它等价于

$$\prod_{i=1}^r \left(c_i^2+t^2\right)^{2n-4r-4} \geqslant \prod_{i=1}^r \left(c_i^2\right)^{2n-4r-5} \left\{\sum_{j=1}^r t^2 \prod_{k\neq j} \left(c_k^2+t^2\right)+\prod_{j=1}^r \left(c_j^2+t^2\right)\right\}.$$

我们应用引理 8.2 于 [KL99], ，当且仅当整数 $2n-4r-4\geq 2$，即 $n-2r\geq 3$，满足上述公式时成立。 □。

因此，定向切片方法无法应用于超曲面情形：$\mathbf{C}(2n,2n-2)$，我们将在第 7 节讨论它们的切锥行为。

6 主定理的证明

主定理。 除了超曲面的情形外，*Pfaffian* 簇都是分层的面积极小锥。

受 [KL99], 中原始证明的启发，我们在此给出**主定理**的证明。为使论述清晰，我们先提出以下命题。

令 C_0 表示$\mathbf{C}(n,2r)$在 $Skew(n,\mathbf{R})\cong \mathbf{R}^N, N=n(n-1)\ 2$ 的单位球内的截断部分，令 S 为一个与 C_0具有相同边界的可求 rectifiable current。 H的那些不同的旋转像：$QHQ^T, Q\in SO(n)$，即$\mathbf{R}^N$的主切片集，记为 $T_a(a\in \mathcal{A})$；而 C_0 和 S 所对应的主切片记为 C_a 和 S_a：$C_a=T_a\cap C_0, S_a=T_a\cap S$。

命题 6.1 (参见 [KL99] 中的定理 8.3) 若 $n-2r\geq 3$，则每个主切片C_a 都解一个特殊的加权 *Plateau* 问题，其中比较曲面取为 T_a 与任意可求 *rectifiable current* S 的交集，并且 $\partial S=\partial C_0$，加权函数取式 (3) 中的第一个加权函数，即

$$\int_{C_a} w_1 \leq \int_{S_a} w_1,$$

其中 $C_a = T_a \cap C_0$, $S_a = T_a \cap S$。

证明。 由于 $SO(n)$ 在 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 上的伴随作用是等距变换，且 S 是任意选取的，因此我们只需证明

$$\int_{C_0 \cap H} w_1 \leq \int_{S \cap H} w_1.$$

令 U 为满足 H_c 在开单位球内与 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 相交的次级切片集 H_c 的并集。显然，U 在 H 中是开集，并且几乎处处覆盖 $C_0 \cap H$；由面积-余面积公式，注意到每个切片集 $H_c \subset U$ 都与 C_0 正交相交，我们有

$$\int_{C_0 \cap H} w_1 = \int_{C_0 \cap U} w_1 = \int_{c \in \mathbf{R}^r} w_1 w_2 (H_c \cap C_0)$$

切片与边界算子可交换，至多相差一个符号（参见 [Fe69] 中的 4.3 和 [M16] 中的 4.11）。现在 $S - C_0$ 是某个更高维流的边界，记作 R，即 $\partial R = S - C_0$，于是

$$(S - C_0) \cap H_c = (\partial R) \cap H_c = \pm \partial (R \cap H_c),$$

根据维数论证， $R \cap H_c$ 是一条曲线或若干条曲线，其边界至少包含两个点，这意味着 S 与几乎每个切片集 $H_c \subset U$ 都相交。现在结合命题 5.2，可推出

$$\int_{c \in \mathbf{R}^r} w_1 w_2 (H_c \cap C_0) \leq \int_{c \in \mathbf{R}^r} \sum_{x \in H_c \cap S} w_1 w_2 (x) \leq \int_{S \cap H} w_1,$$

第一个不等式由命题 5.2 得出，最后一个不等式再次利用了面积-余面积公式，而求和指标的出现是因为每个 H_c 与 S 至少相交于一点，也可能相交于更多点！

Then

$$\int_{C_0 \cap H} w_1 \leq \int_{S \cap H} w_1.$$

□

图 1 给出了 Lawlor 定向切片法在 $C(S^0 \times S^1) \subset \mathbf{R}^3$ 上的示意图（显然，它不是面积极小的）。在图 1 中， l 与 W_1 共同围成了 C_0 的一个法向楔形区域（在 C_0 的下部还存在另一个法向楔形区域），而这个法向楔形区域又被抛物型次级切片集 H_{c_1}, $H_{c_2}, \ldots$ 进一步切分。我们可以看到，比较曲面 S 与每个 H_c 至少相交于一点，但 S 的一部分并未被 T 覆盖。

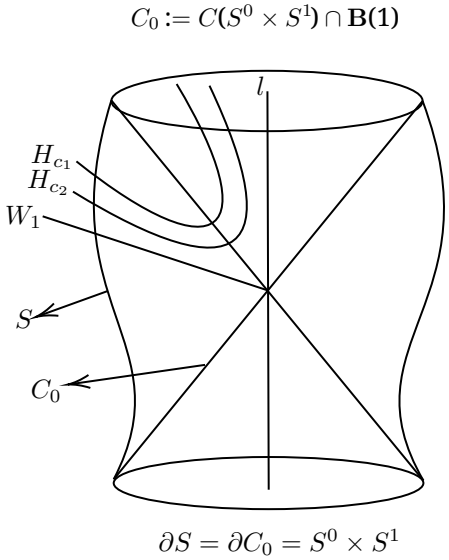


图 1： $C(S^0 \times S^1)$ 的有向切片

主定理的证明 设 S 为一个与 C_0 具有相同边界的可求长流形，根据命题 6.1，注意到 T 几乎处处覆盖 C_0，那么

$$\mathrm{Area}(C_0) = \mathrm{Area}(C_0 \cap T) = \int_{a\in\mathcal{A}} \int_{C_a} w_1 \leq \int_{a\in\mathcal{A}} \int_{S_a} w_1 \leq \mathrm{Area}(S \cap T) \leq \mathrm{Area}(S),$$

第二个等式和第二个不等式均由面积-余面积公式得到。最后一个不等式是基于这样一个事实：一般而言， T 几乎处处不覆盖比较曲面 S，参见上图。由此完成了**主定理**的证明。 □

7 Pfaffian 簇的切锥

定义 7.1（切锥，见 [Fe69] 中的 3.1.21）。对于赋范向量空间 X、子集 $S \subset X$ 和点 $a \in X$，我们定义 S 在 a 处的切锥：

$$\mathrm{Tan}(S,\ a) = \{v \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S\ \&\ r \in \mathbf{R}^+, s.t.\ |x-a| < \varepsilon, |r(x-a) - v| < \varepsilon\},$$

这样的向量 v 称为 a 处的 S 的切向量。

切锥的计算 $\mathbf{C}(n, 2r)$ 主要取决于不同秩的反对称矩阵的距离行为，这通常被称为.....理论。

矩阵分析中的低秩近似。通过研究这些距离函数，我们建立了一个与行列式簇类似的结果（参见[KL99]中的命题 4.2）。

定理 7.2（Pfaffian 簇的切锥）。设 k 为满足 $0 \le k \le r$ 的整数，设 M_0 为一个秩为 $2k$ 的 $n \times n$ 反对称矩阵。利用等距伴随作用，不失一般性，可令 $M_0 = M(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^{k} x_i X_{2i-1,\ 2i}$。设 V 为具有如下分块形式的 $n \times n$ 反对称矩阵

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & D \end{pmatrix},$$

其中分块 A 的大小为 $2k \times 2k$，则

$$V \in \mathrm{Tan}(\mathbf{C}(n, 2r), M_0) \Leftrightarrow \mathrm{rank}\ D \le 2r - 2k. \tag{9}$$

这意味着

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{C}(n, 2r), M_0) \cong \mathbf{C}(n - 2k, 2r - 2k) \times \boldsymbol{R}^{k(2n-2k-1)}. \tag{10}$$

注 7.3 根据（10），$\mathbf{C}(n, 2r)$ 在 M_0 处的切锥是柱状的。若 M_0 是一个准正则点（即其秩为 $2r-2$），则其截面是一个正则锥：

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{C}(n, 2r), M_0) \cong \mathbf{C}(n-2r+2, 2) \times \boldsymbol{R}^{(r-1)(2n-2r+1)} \cong C(\widetilde{G}(2, n-2r+2; \boldsymbol{R})) \times \boldsymbol{R}^{(r-1)(2n-2r+1)},$$

从而得到一个有向实 *Grassmann* 流形切锥的实现 .

条件 $2r - 2k = 2, n - 2k \ge 5$ 属于 (10)，且条件 $n - 2r + 2 \ge 5$ 除平凡情形外（即 $n - 2r \ge 3$ 时）均等价于 $n - 2r \ge 3$。上述切锥是面积极小的，这与**主定理**一致。

定理 7.2 的证明。我们的目标是证明 (9)。该证明是对 [KL99] 中关于行列式簇的原始证明的一种诠释，同时也展示了一些差异。

首先，假设秩为 $D \le 2r - 2k$，我们将证明，对于任意选定的 $\varepsilon > 0$，都存在$X \in \mathbf{C}(n, 2r)$，使得。

$$|X - M_0 - tV| = O(t^2), \tag{11}$$

由此可知，当 $0 < t < t_0$ 时，存在某个 t_0,

$$|X - M_0| \le t|V| + O(t^2) < \varepsilon$$

and

$$\left|\frac{1}{t}(X - M_0) - V\right| = O(t) < \varepsilon,$$

当 $0 < t < t_1$ 时，存在某个 t_1。

如果我们选择 $r = \frac{1}{t}$，如切锥的定义所述，其中 $t \in (0, min\{t_0, t_1\})$。那么很容易看出， V 是 M_0 处的切向量。

将 M_0 的左上角记为 M，并选择 X 作为

$$X = \begin{pmatrix} M + tA & tB \\ -tB^T & tD - t^2 B^T (M + tA)^{-1} B \end{pmatrix},$$

然后，通过分块高斯消元法，我们可以看出（11）式成立。

反过来，假设秩为 $D > 2r - 2k$，我们将证明，对于任意 t，都存在某个 $X_t \notin \mathbf{C}(n,\ 2r)$，使得

$$\begin{cases} |X_t - (M_0 + tV)| & = O(t^2), \\ \mathrm{Dist}(X_t, \mathbf{C}(n, 2r)) & \geq c\ t, \end{cases} \tag{12}$$

对于某个常数 c。

那么，对于任意的 $Y \in \mathbf{C}(n, 2r)$， $|Y - (M_0 + tV)| \geq \widetilde{c}\, t$，其中 $\widetilde{c}$ 是另一个常数，即

$$\left|\frac{1}{t}(Y - M_0) - V\right| \geq \widetilde{c},$$

对于任意 $Y \in \mathbf{C}(n, 2r)$ 以及任意选定的 t。

因此， V 不可能是切向量。

为了证明 (12)，我们还选择 X_t 为 $X_t = \begin{pmatrix} M + tA & tB \\ -tB^T & tD - t^2 B^T \end{pmatrix} (M + tA)^{-1} B \Bigg)$，其中秩为 $D > 2r - 2k$。通过高斯消元法可以看出， $X_t \notin \mathbf{C}(n, 2r)$:

$$X_t \sim N_t = \begin{pmatrix} M + tA & 0 \\ 0 & tD \end{pmatrix}. \tag{13}$$

那么，只需证明

$$N_t \ is\ not\ at\ distance\ o(t)\ from\ \mathbf{C}(n, 2r), \tag{14}$$

由于根据范数不等式，当 t 足够小时， X_t 与$\mathbf{C}(n, 2r)$ 的距离不是 $o(t)$。

(14) 的证明依赖于矩阵分析中的低秩逼近理论和特征值扰动理论，更多信息请参阅 [EY36],[HJ13],[SS90] 。

由（13）式,

$$N_t N_t^T = \begin{pmatrix} MM^T + t(AM^T + MA^T) + t^2 AA^T & 0 \\ 0 & t^2 DD^T \end{pmatrix}.$$

将左上角块的非递增特征值记为: $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{2k}$，将 D 的奇异值记为: $\lambda_1 = \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s = \lambda_s > 0$，其中秩 $D := s > r - k$。此外，将 $AM^T + MA^T + tAA^T$ 的最大奇异值记为 σ。

那么，根据 Weyl 定理（参见 [HJ13] 中的推论 4.3.15），我们可以看出，对于每个 $1 \leq i \leq k$，两者都

$$\mu_{2i-1}, \mu_{2i} \in [x_i^2 - t\sigma, x_i^2 + t\sigma].$$

由此可知，存在某个 t_0，当 $t \in (0, t_0)$ 时，(13) 式中 N_t 的奇异值满足:

$$\sqrt{\mu_1} \geq \cdots \geq \sqrt{\mu_{2k}} > t\lambda_1 = t\lambda_1 \geq \cdots \geq t\lambda_s = t\lambda_s > 0, \tag{15}$$

其中 $s > r - k$。

与[KL99], 中针对行列式簇的低秩近似方法的直接应用不同，我们应当对反对称矩阵给出奇异值分解（SVD），这也可以通过其标准形得到。

任意非零矩阵 $X \in \mathbf{C}(n, 2r)$ 均可写成如下标准形式: $X = AM_0A^T$, $A \in SO\ n$ $_{2i}$ $x_1 \geq \cdots \geq x_k > 0$ $1 \leq k \leq r$ $(), M_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i X_{2i-1,}$其中 $()$。

容易看出，每个对角块 $\begin{pmatrix} 0 & x_i \\ -x_i & 0 \end{pmatrix}$ 都具有如下的 奇异值分解（*SVD*）（左右奇异向量并不唯一！）:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_i \\ -x_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

let

$$P = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0 \right\}$$

其中非零对角块的数量为 k。

然后,

$$X = (AP)\Sigma A^T, \Sigma = \operatorname{diag}\{x_1 \mathbf{I}_2, \ldots, x_k \mathbf{I}_2, 0, \ldots, 0\},$$

给出了奇异值分解（*SVD*）。

现在，我们可以应用低秩近似，并结合 (15)，注意到 $|X|^2 =_2^1 tr(XX^T)$，由此可推得】-【。

$$\operatorname{Dist}(N_t, \mathbf{C}(n, 2r)) \geq t\sqrt{(\lambda_{r-k+1}^2 + \cdots + \lambda_s^2)},$$

由此证明了（14），并完成了所有证明。 □

假设 N 是 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 的近似正则点，则由定理 7.2，

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{C}(2n, 2n-2), N) \cong \mathbf{C}(4, 2) \times \mathbf{R}^{(n-2)(2n+3)}.$$

回顾一下，$\mathbf{C}(4,2)$ 不是面积极小的。此外，一个曲面是面积极小的，当且仅当它与任意欧氏空间的笛卡尔积也是面积极小的。由此可得以下结论。

定理 7.4。对于 ***Pfaffian*** 超曲面 $\mathbf{C}(2n, 2n-2)$ 的近正则点，其切锥不是面积极小的。

致谢。本项目得到国家自然科学基金（编号：11871445、11871450）、中国科学院基础研究领域青年团队稳定支集项目（YSBR-001）及中央高校基本科研业务费专项资金的资助。

参考文献

[AD80] S. Abeasis 和 A. Del Fra. 杨图与 Pfaffian 理想。*Adv. in Math.*, 35(2):158–178, 1980.[BDG69] E. Bombieri、E. De Giorgi 和 E. Giusti. 极小锥与 Bernstein 问题。*Invent. Math.*, 7:243–268, 1969.[BCH21] Martin Bordemann、Jaigyoung Choe 和 Jens Hoppe. 行列式簇的极小性。*J. Reine Angew. Math.*, 773:153–164, 2021.[BV06] Winfried Bruns 和 Udo Vetter. 行列式环。数学讲义。**1327**, 柏林: Springer-Verlag，1988.[C88] Wei Huan Chen. Grassmann 流形作为子流形的微分几何。（中文）。*Acta Math. Sinica*, 31(1):46–53, 1988.[Da04] Andrea Davini. 关于 Lawson 锥的校准。*Rend. Sem. Mat. Univ.Padova*, 111:55–70, 2004.[DP76] C. De Concini 和 C. Procesi. 不变理论的一种特征无关方法。*Adv. in Math.*, 21(3):330–354, 1976.[DP09] G. De Philippis 和 E. Paolini. Simons 锥极小性的一种简短证明。*Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 121:233–241, 2009.[EY36] Carl Eckart 和 Gale Young. 用一个低秩矩阵逼近另一个矩阵。*Psychometrika*, 1(3):211–218, 1936.

[Fe69] Herbert Federer. 几何测度论。Grundlehren Math. Wiss. 153，纽约：Springer-Verlag，1969.[FF60] H. Federer 和 W. H. Fleming. 正则流与积分流。Ann. of Math. (2), 72:458–520, 1960.[Ha92] Joe Harris. 行列式簇，《代数几何：第一课程》。数学研究生教材，133，纽约：Springer-Verlag，1992.[Ha90] F. Reese Harvey. 旋量与校准。数学展望丛书 9。波士顿：Academic Press, Inc.，1990.[HL82] Reese Harvey 和 H. Blaine Lawson, Jr. 校准几何。Acta Math., 148:47–157, 1982.[He69] P. Heymans. Pfaffian 与反对称矩阵。Proc. London Math. Soc. (3), 19:730–768, 1969.[HLT17] Jens Hoppe、Georgios Linardopoulos 和 O. Teoman Turgut. $R^{(k+1)(2k+1)}$ 与 S^{2k^2+3k} 中的新极小超曲面。Mathe. Nachr., 290(17-18):2874–2878, 2017.[HJ13]Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson. 矩阵分析。第二版。xviii +643页。剑桥：剑桥大学出版社，2013.[HS85] Robert Hardt 和 Leon Simon. 具有孤立奇点的面积极小超曲面。J. Reine Angew. Math., 362 (1985), 102–129.[Hs67] Wu-yi Hsiang. 关于标准黎曼 m 球面中的闭极小子流形的注记。J. Differential Geom., 1:257–267, 1967.[HsL71] Wu-yi Hsiang 和 H. Blaine Lawson, Jr. 低余维极小子流形。J. Differential Geom., 5:1–38, 1971.[JC22] Xiaoxiang Jiao 和 Hongbin Cui. Grassmann 流形上的面积极小锥。J. Geom. Anal., 32(8):论文编号 224，2022.[JCX22] Xiaoxiang Jiao、Hongbin Cui 和 Xin Jialin. Grassmann 流形乘积上的面积极小锥。Calc. Var. Partial Differential Equations, 61(6):论文编号 205，2022.[Ka02] Takahiro Kanno. 对称 R-空间标准嵌入上的面积极小锥。Indiana Univ. Math. J, 51(1):89–125, 2002.[Ke94] Michael Kerckhove. 伴随作用的孤立轨道与面积极小锥。Proc. Amer. Math. Soc., 121(2):497–503, 1994.

[KL99] Kerckhove, Michael 和 Lawlor, Gary. 一族分层面积极小锥。Duke Math. J., 96(2):401–424, 1999.[Ko21] Kozhasov, Khazhgali. 行列式簇的极小性。Linear Algebra Appl., 626:56–78, 2021.[Ku06] Kuznetsov A. 直线 Grassmannian 的同调射影对偶。arXiv 预印本，arXiv:math/0610957v1, 2006.[La89] Lawlor, Gary R. 角度判据。Invent. Math., 95(2):437–446, 1989.[La91] Lawlor, Gary R. 锥为面积极小的一个充分判据。Mem. Amer. Math. Soc., 91(446):1–111, 1991.[LM96] Lawlor Gary 和 Morgan Frank. 曲线切片证明三重交点局部极小化面积。J. Differential Geom., 44(3): 514–528, 1996.[La98] Lawlor Gary R. 通过定向切片证明面积极小性。Indiana Univ. Math. J., 47(4): 1547–1592, 1998.[L72] Lawson, H. Blaine, Jr. 等变 Plateau 问题与内部正则性。Trans. Amer. Math. Soc., 173(446):231–249, 1972.[Liu89] Liu Tongyan. 球面中的代数极小子流形（中文）。J. Beijing Teachers College(Nat. Sci. Ed.), 10(1):10–17, 1989.[Ma87]Mackenzie, Dana. 一对 n-平面为面积极小的充分条件。Math. Ann., 279(1):161-–164, 1987.[M83] Morgan, Frank. 三维面积极小曲面的奇异结构。Trans. Amer. Math. Soc., 276(1):137-–143, 1983.[M85] Morgan, Frank. 外代数 $\wedge^k\mathbf{R}^n$ 与面积极小化。Linear Algebra Appl., 66:1-–28, 1985.[M16] Morgan, Frank. 几何测度论：初学者指南。第五版。James F. Bredt 绘图。阿姆斯特丹：Elsevier/Academic press, 2016.[PX93] Peng Chiakuei 和 Xiao Liang. 三次极小锥的分类（中文）。J. Grad. School, Academ. Sinica, 10(1):1–19, 1993.[Pe93] Pedersen, Sharon L. 球面上向量场的体积。Trans. Amer. Math. Soc., 336(1):69–78, 1993.[R00] Rødland, Einar Andreas. Pfaffian Calabi-Yau、其镜像及其与 Grassmannian G(2, 7) 的联系。Compositio Math., 122(2):135–149, 2000.

[Si74] Simoes, Plinio. 关于 $\mathbf{R}^n$ 中一类极小锥。*Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:488–489, 1974.[Simon83] Simon, Leon. 几何测度论讲义。澳大利亚国立大学数学分析中心论文集，第 3 卷，1983.[Sim68]Simons, James. 黎曼流形中的极小簇。*Ann. of Math.*, 88(2):62–105, 1968.[SS90] Stewart, G. W. 和 Sun, Ji Guang. 矩阵扰动理论。计算机科学与科学计算。波士顿：Academic Press, Inc., 1990.[T10-1] Tkachev, Vladimir G. 通过 Clifford 代数构造极小三次锥。*Complex Anal.Oper. Theory*, 4(3):685–700, 2010.[T10-2] Tkachev, Vladimir G. 关于 $\mathbf{R}^n$ 中极小三次锥的分类。***arXiv*** 预印本, arXiv:1009.5409.[T19] Tkachev, Vladimir G. V.M. Miklyukov：从 8 维到非结合代数。预印本，arXiv:1904.08162v1, 2019.[TZ20] Tang, Zizhou 和 Zhang, Yongsheng. 与等距超平面叶状结构相关的极小锥。***J. Differential Geom.***, 115(2):367–393, 2020.[W57] Whitney, Hassler. 实代数簇的初等结构。*Ann. of Math.(2)*, 66:545–556, 1957.[W65-1] Whitney, Hassler. 解析簇的局部性质。《微分与组合拓扑》（纪念 Marston Morse 的研讨会）。普林斯顿大学出版社，1965.[W65-2] Whitney, Hassler. 解析簇的切线。*Ann. of Math. (2)*, 81:496– 549, 1965.[XYZ18] Xu, Xiaowei, Yang, Ling 和 Zhang, Yongsheng. 新的面积极小 Lawson-Osserman 锥。*Adv. Math.*, 330:739–762, 2018.

中国科学技术大学数学科学学院，中国科学院数学与系统科学研究院吴文俊数学重点实验室，中国安徽省合肥市金寨路96号，邮编230026电子邮箱：cuihongbin@ustc.edu.cn

中国科学院大学数学科学学院，焦晓翔，中国北京市玉泉路19A号，邮编：100049。电子邮箱：xxjiao@ucas.ac.cn

徐晓伟中国科学技术大学数学科学学院中国科学院数学与系统科学研究院吴文俊数学重点实验室中国安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026电子邮箱：xwxu09@ustc.edu.cn