arXiv:2305.06532v1 [math.AC] 11 May 2023

具有较大正则性的素理想与三生成理想

JASON MCCULLOUGH

Abstract. Ananyan 和 Hochster 证明了存在一个函数 $\Phi(m,d)$，使得在标准分次多项式环中，任何由 m 次数至多为 d 的 m 形式 m 生成的分次理想 I 都满足 $\operatorname{reg}(I) \leq \Phi(m,d)$。与此相关，Caviglia 等人证明了存在一个函数 $\Psi(e)$，使得在代数闭域上的标准分次多项式环中，任何次数为 e 的非退化素理想 P 都满足 $\operatorname{reg}(P) \leq \Psi(\deg(P))$。我们给出了一种构造，表明 $\Phi(3,d)$ 和 $\Psi(e)$ 分别至少必须关于 d 和 e 呈双指数增长。此前已知的下界在这两种情形下都仅为超多项式增长。

1. Introduction

设 $\mathbb{K}$ 为一个域，令 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 为一个标准分次多项式环。设 $I = (f_1, \ldots, f_m)$ 为 S 的一个分次理想。I 的（Castelnuovo-Mumford）正则度为

$$\operatorname{reg}_S(I) = \min\{j - i \mid \operatorname{Tor}_i^S(I, \mathbb{K})_j \neq 0\}.$$

Mumford 最初通过上同调消失来定义理想层的正则性，而这一版本则归功于 Eisenbud 和 Goto [10]。由于 I 的最小生成集中元素的最高次数至多为 $\operatorname{reg}(I)$，因此，寻找分次理想正则性的上界一直是一个非常活跃的研究领域。此外，Bayer 和 Stillman 证明，在逆字典序下且采用一般坐标时，理想的正则性与其一般初始理想的正则性相同；因此，正则性可以作为计算复杂度的一个替代指标。

对于任意理想，其正则性相对于生成元的次数和变量的个数而言，可能呈双指数增长。对于光滑射影簇的定义理想，其正则性具有非常良好的性质 [2, 定理 3.12], [4, 推论 4]。对于约化且不可约但可能是奇异的簇，人们曾认为其定义理想也具有良好的正则性，这一预期由 Eisenbud-Goto 猜想所提出。然而，Peeva 和作者在 [14,定理 1.9]中构造了反例。更确切地说，他们证明，在代数闭域上，非退化素理想的正则性无法由其次数（即重数）的任何多项式函数所界定。此后， [7, 定理 3.3], [8, 定理 1.2],以及 [12, 3.3, 3.6, 3.8]中又构造了更多反例。然而，Caviglia 等人 [7, 推论 5.3] 证明，存在一个函数$\Psi(e)$，能够界定所有次数为 e 的非退化素理想的正则性。很容易看出，即使对于准素理想，这样的函数也不存在。因此，确定最优函数 $\Psi(e)$ 的渐近增长率是一个有趣的开放问题。在这篇简短的论文中，我们展示了如何改进关于 $\Psi(e)$ 的已知最佳下界，并证明其相对于 e 至少呈双指数增长。

与此相关，Stillman [17, 问题 3.15] 猜想，对于一个由 m 个次数至多为 d 的齐次多项式生成的齐次理想，其正则性存在一个上界 $\Phi(m,d)$，且无需固定变量的个数。Ananyan 和 Hochster [1, 定理 D] 首次证明了此类上界的存在性，随后 Erman、Sam 和 Snowden [11, 定理 4.12]进一步给出了证明。在三生成元情形下，此前最优的下界】【。

Date：2023年5月12日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13D02，13D05；次要分类：13P20。
Key words and phrases. 正则性，素理想，自由分解，Eisenbud-Goto猜想，Stillman猜想。

对于 $\Phi(3,d)$ 是二次的 [6] 或关于 d [8]呈超多项式增长。我们证明 $\Phi(3,d)$ 关于 d也必定至少呈双指数增长。

2. Main Results

三生成理想几乎涵盖了任意自由分解中出现的所有病态现象，Bruns 定理[5, Korollar 1]对此作了精确说明。已知三生成理想的投射维数相对于生成元次数可以呈指数级增长 [3, Corollary 3.6]。多年来，Caviglia 构造的一个正则度呈二次增长的三生成理想[6, Example 4.2.1] 一直是 $\Phi(3,d)$ 已知的最佳下界。正如 Eisenbud 在[9, p. 62], 所写：“若能有更多正则度高且更强的例子，将会很有意思。”作者曾猜想，某个三生成理想族的正则度相对于三个生成元的次数呈超多项式增长 [15, Conjecture 13.9]。最近，Choe[8, Theorem 1.2] 构造了另一个此类例子。下面我们构造一个三生成理想，其正则度相对于其极小生成元的公共次数呈双指数增长。

以下是对 [8, 命题 5.1], 的一个轻微推广，而该命题本身又是对 [7,命题 7.1]的推广。它展示了如何计算任意分次理想的三生成类比对象的不变量。为完整起见，我们给出证明。

命题 2.1. 设 $I=(g_0,\dots,g_m)$ 是标准分次多项式环 $S=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ 的一个分次理想，其中 $d_i=\deg(g_i)$ 单调非递减且 $d=d_m$。设 $R=S[y,z]$，并选取整数 s、$t\geq m+d-d_0+1$。令

$$J=\left(y^s,z^t,\sum_{i=0}^{m}g_iy^{d-d_i+i}z^{m-i}\right)\subseteq R.$$

那么，J是一个由次数分别为 s、t、$m+d$的元素生成的分次理想。此外，

(1) $\operatorname{reg}_R(J)\geq\operatorname{reg}_S(I)+s+t-2$,
(2) $\operatorname{pd}_R(J)\geq\operatorname{pd}_S(I)+2$, (3) $\deg(J)=tm$.

证明。注意到 R/J 是一个有限生成的 S-模，并且 $y^{s-1}z^{t-1}(R/J)\cong(S/I)(-s-t+2)$，作为 R/J 的一个 S-直和项。因此

$$\operatorname{reg}_R(R/J)\geq\operatorname{reg}_S((S/I)(-s-t+2))=\operatorname{reg}_S(S/I)+s+t-2,$$

或者等价地,

$$\operatorname{reg}_R(J)\geq\operatorname{reg}_S(I)+s+t-2.$$

类似地，假设 $\operatorname{pd}_S(S/I)=p$。对一组线性正则序列取模（必要时扩张底域），我们可以假设 $\operatorname{depth}(S/I)=0$，从而 S/I 具有一个非零的 socle 元素 w。显然，$y^{s-1}z^{t-1}w$ 是 R/J 中的一个非零 socle 元素。由 Auslander-Buchsbaum 定理即可得到所需结论。

对于次数的计算，只需注意，由于 $\sqrt{J}=(y,z)=\mathfrak{p}$，我们有 $\deg(J)=\lambda(S_\mathfrak{p}/J_\mathfrak{p})$，且 $S_\mathfrak{p}/J_\mathfrak{p}$ has $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$-basis y^iz^j for $0\leq i\leq m-1$ and $0\leq j\leq t-1$。□

由此可立即推得，要为斯蒂尔曼猜想找到一个明确的答案，只需考虑由三个元素生成的情形。

推论 2.2. 要找出一个显式函数 $\Phi(m,d)$，以界定由m 个次数至多为 d 的形式生成的理想的正则性，只需在三生成元理想的情形下找出一个显式上界 $\Phi(3,d)$。

我们还得到了 $\Phi(3,d)$ 可能取值的一个更大的下界。回顾一下，若存在常数 c 使得对于 $n \gg 0$，函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足 $f(n) \geq c \cdot g(n)$，则称其为 $\Omega(g(n))$。

定理 2.3. 设 $\mathbb{K}$ 是一个域，并固定整数 $r \geq 2$。那么存在一个以 $\mathbb{K}$ 为底域的标准分次多项式环 R 和一个由三个次数为 $22r-2$ 的 J 生成的分次理想，使得 $\operatorname{reg}(R/J) \geq 2^{2^{r-1}} + 44r - 6$。特别地，$\Phi(3,d) \geq 2^{2^{\Omega(d)}}$。

证明。根据 [13]，存在一个多项式环 S 和一个分次理想 I，它由 $22r-3$ 个二次形式生成，且 $\operatorname{reg}(I) \geq 2^{2^{r-1}}$。应用命题 2.1，取 $m = 22r-4$ 和 $s = t = 22r-2$，可得一个理想 J，它由三个次数为 $22r-2$ 的形式生成，且 $\operatorname{reg}(J) \geq 2^{2^{r-1}} + 44r - 6$。□

现在我们转而构造具有较大正则度的素理想。在[14], Peeva 与本文作者利用类似 Rees 代数构造了 Eisenbud–Goto 猜想的反例。将这类代数的定义理想齐次化后，他们根据任意给定的起始理想，计算了所得新标准分次素理想的不变量。下面记述他们定理的核心部分。

定理 2.4（McCullough-Peeva [14]）。设 $\mathbb{K}$ 为任意一个域。设 $I = (f_1, \dots, f_m)$ 是标准分次多项式环 $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ 中的一个分次理想。则存在标准分次多项式环 $R = S[y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_m, z, v]$ 中的一个非退化分次素理想 P，满足

(1) $\operatorname{reg}_R(P) = \operatorname{reg}_S(I) + 2 + \sum_{i=1}^{m} \deg(f_i)$,
(2) $\deg_R(R/P) = 2\prod_{i=1}^{m}(\deg(f_i) + 1)$.

构造更极端的艾森布德-戈托猜想反例的诀窍，是将梅尔-迈耶理想（例如 Koh 的版本）[13], 代入命题 2.1，并且在构造类似 Rees 的代数之前，连续这样做两次。

定理 2.5. 对任意域 $\mathbb{K}$ 和任意整数 r，存在一个标准分次多项式环 S 以及一个非退化素理想 $P \subseteq S$，使得

$$\deg(P) = 396r \qquad \text{and} \qquad \operatorname{reg}(P) \geq 2^{2^{r-1}} + 66r + 6.$$

特别地，$\Psi(e)$ 是 $2^{2^{\Omega(e)}}$。

证明。先取定理 2.3 中的理想 J，它由三个次数为 $22r-2$ 的元素生成，且 $\operatorname{reg}(J)$ 为 $\geq 2^{2^{r-1}} + 44r - 6$。再次应用命题 2.1，取 $m = 2$ 和 $s = t = 3$，得到由次数为 3、3、$22r$ 的形式生成的理想J'，且 $\operatorname{reg}(J')$ 为 $\geq 2^{2^{r-1}} + 44r - 2$。对$J'$应用定理 2.4，得到一个标准分次素理想 P，满足 $\deg(P)$ 为 $= 396r$，且 $\operatorname{reg}(P)$ 为 $\geq 2^{2^{r-1}} + 66r + 6$。□

特别地，我们得到了关于 $r \geq 5$ 的 Eisenbud-Goto 猜想的反例。

我们回顾一下，存在一个函数 $\Phi(m,d)$，它能够界定由 m 个次数至多为 d 的形式生成的理想的正则性，这等价于存在一个函数 $\Psi(e)$，它能够界定次数为 e的非退化素理想的正则性。给定 $\Phi(m,d)$，由 [7] 可知:

$$\Psi(e) \leq \max\{e^2, \Phi(e, e^2) + 1\}.$$

类似地，给定显式函数 $\Psi(e)$，由[14] 可知,

$$\Phi(m,d) \leq \Psi(2(d+1)^m).$$

Stillman 猜想 [17] 还有一个平行版本，它断言由 m 个次数至多为 d 的形式生成的分次理想的射影维数存在一个上界 $\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d)$。Caviglia 证明了 $\Phi(m,d)$ 的存在性等价于 $\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d)$ 的存在性。事实上，他证明了,

$$\Phi(m,d) \leq (2d)^{2^{\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d)-2}}$$

and

$$\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d) \leq \Phi(m,d) \cdot \sum_{i=0}^{\Phi(m,d)} m^{2i}.$$

参见 [16, 定理 4] 了解详情。另有第四个函数 $\Psi_{\mathrm{pd}}(e)$，它给出了代数闭域上次数为 e 的非退化素理想的投射维数上界。给定$\Phi_{\mathrm{pd}}(m,\ d)$，由 [7, 定理 52] 可得

$$\Psi_{\mathrm{pd}}(e) \leq \max\{e, \Phi_{\mathrm{pd}}(e, e^2) - 1\}.$$

同理，给定 $\Psi_{\mathrm{pd}}(e)$，由 [14, 定理 1.6] 可得

$$\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d) \leq \Psi_{\mathrm{pd}}(2(d+1)^m).$$

因此，为 $\Psi(e)$ $\Psi_{\mathrm{pd}}(e)$ $\Phi(m,d)$ $\Phi_{\mathrm{pd}}(m,d)$ 中任意一个求出显式公式，就能得到其余各项的显式公式。目前 $\Phi_{\mathrm{pd}}(3,d)$ 的最佳下界估计为 $\sqrt{d}^{\sqrt{d}-1}$ [3,推论 3。6]。利用定理 2.1，我们也可以提高这个下界。

定理 2.6。对任意整数 $r \geq 1$，存在一个标准分次理想 I，它有三个次数为 $4r+1$ 的生成元，且 $\mathrm{pd}(I) \geq r^{2r}$。特别地，$\Phi_{\mathrm{pd}}(3,d)$ 是 $(d/5)^{\Omega(d)}$。

证明。由 [3, 推论 3。7], 可知，存在理想 I，它有 $2r+1$ 个次数为 $2r+1$ 的生成元，且 $\mathrm{pd}_{S}(S/I) \geq r^{2r}$。应用命题 2.1，取 $m = 2r$ 和 $s = t = 4r+1$，可得到理想 J，它由三个次数为 $4r+1$ 的形式生成，且 $\mathrm{pd}_{R}(J) \geq r^{2r}+1$。□

Acknowlegements

本项工作是在为芝加哥伊利诺伊大学举办、由 Wenliang Zhang 组织的正则性与 Syzygies 研讨会做准备期间完成的。作者感谢 Paolo Mantero、Matt Mastroeni 和 Lance Edward Miller 对本文早期稿件提出的意见。作者的研究工作得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS–1900792 的支持。

References

[1] Tigran Ananyan 和 Melvin Hochster。多项式环的小子代数与 Stillman 猜想。 *J. Amer.*，(): –。网址: *Math. Soc.* 33 1 291 309, 2020 10 1090 932, 10 1090 932 https://doi.org/ 。/jams/ doi: 。/jams/ 。[2] Dave Bayer 和 David Mumford。代数几何由可以计算什么?载于 *Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991)* 1 48，数学研讨会论文集，XXXIV，页码 –。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[3] Jesse Beder、Jason McCullough、Luis N´u˜nez Betancourt、Alexandra Seceleanu、Bart Snapp 和 Branden Stone。具有较大射影维数和正则度的理想。 *J. Symbolic Comput.*，46(10)：1105–1113，2011。网址：https://doi.org/10.1016/j.jsc.2011.05.011，doi:10.1016/j.jsc.2011.05.011。[4] Aaron Bertram、Lawrence Ein 和 Robert Lazarsfeld。消失定理、Sev- eri 定理及定义射影簇的方程。 *J. Amer. Math. Soc.*，4(3)：587–602，1991。网址：https://doi.org/10.2307/2939270，doi:10.2307/2939270。[5] Winfried Bruns。“每个”有限自由分解都是由三个元素生成的理想的自由分解。 *J. Algebra*，39(2)：429–439，1976。网址：https://doi.org/10.1016/0021-8693(76)90047-8，doi:10.1016/0021-8693(76)90047-8。[6] Giulio Caviglia。 *Koszul algebras Castelnuovo-Mumford regularity and generic initial ideals* 2004 ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，。博士论文（Ph.D.）——堪萨斯大学。网址：http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=x

[7] Giulio Caviglia、Marc Chardin、Jason McCullough、Irena Peeva 和 Matteo Varbaro。素理想的正则性。 *Math. Z.*，291(1-2):421–435，2019年。URL：https://doi.org/10.1007/s00209-018-2089-y，doi:10.1007/s00209-018-2089-y。[8] Junho Choe。非投影的 Castelnuovo-Mumford正则性与 Eisenbud-Goto正则性猜想，2022年。arXiv:2206.06151。

[9] David Eisenbud。《 *The geometry of syzygies*》， *Graduate Texts in Mathematics*第229卷。Springer-Verlag，纽约，2005年。交换代数与代数几何的第二门课程。[10] David Eisenbud和Shiro Goto。线性自由分解与最小重数。《 *J. Algebra*》，88(1)：89–133，1984年。网址：https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90092-9，doi:10.1016/0021-8693(84)90092-9。[11] Daniel Erman、Steven V. Sam和Andrew Snowden。大多项式环与Stillman猜想。《 *Invent. Math.*》，218(2)：413–439，2019年。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-019-00889-y，doi:10.1007/s00222-019-00889-y。[12] Jong In Han和Sijong Kwak。$\mathbb{P}^4$ 中作为Eisenbud-Goto正则性猜想反例的射影曲面，2022年。arXiv:2210.07174。[13] Jee Koh。具有双指数次数的二次式生成理想。《 *J. Algebra*》，200(1)：225–245，1998年。网址：https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7225，doi:10.1006/jabr.1997.7225。[14] Jason McCullough和Irena Peeva。Eisenbud-Goto正则性猜想的反例。《 *J. Amer.*》，():–。网址：*Math. Soc.* 31 2 473 496, 2018 10 1090 891, 10 1090 891 https://doi.org/。/jams/ doi:。/jams/。[15] Jason McCullough和Irena Peeva。多项式环中素理想的正则性猜想。《 *EMS Surv.*》，():–。网址：*Math. Sci.* 7 1 173 206, 2020 10 4171 38, 10 4171 38 https://doi.org/。/emss/ doi:。/emss/。[16] Jason McCullough和Alexandra Seceleanu。射影维数的界定。载于《 *Commutative alge bra* 551 576 2013 10 1007 978 1 4614 5292 8_17 》，第–页。Springer，纽约，。网址：https://doi.org/。/----，doi:10.1007/978-1-4614-5292-8_17。[17] Irena Peeva和Mike Stillman。关于上同调关系与Hilbert函数的开放问题。《 *J. Commut. Algebra*》，1(1)：159–195，2009年。网址：https://doi.org/10.1216/JCA-2009-1-1-159，doi:10.1216/JCA-2009-1-1-159。

Iowa State University, Department of Mathematics, Ames, IA, USA
Email address: jmccullo@iastate.edu