arXiv:2305.06604v1 [math.AT] 11 May 2023

流形构形空间整数上同调维数的算术性

由Muhammad Yameen

摘要

考虑流形的构形空间。我们给出了具有非平凡余维一上同调群的流形的无序配置空间的整系数上同调维数（即最高阶非平凡整系数上同调群的次数）的精确公式，并证明其上同调维数序列具有等差性。这种等差性在 Arnold 的经典例子中并不存在。此外，我们证明了最高阶整系数上同调群是无限群。进一步地，我们给出了最高阶整系数上同调群的秩的一个下界。我们还预测，具有非平凡余维一上同调群的流形的构形空间的最高阶整系数上同调群最终将是有限群。据我们所知，目前尚无关于有序构形空间的上同调维数的严格界限。作为主要结果的一个应用，我们给出了流形的有序构形空间的上同调维数的一个精确下界。证明主要结果的第一步是定义一个约化 Chevalley–Eilenberg 复形。

关键词：构形空间、上同调维数、算术性、Chevalley–Eilenberg 复形

数学主题分类：主要分类 55R80，次要分类 55P62。

1 引言

对于任意流形 M，令

$$F_k(M) := \{(x_1, \ldots, x_k) \in M^k | x_i \neq x_j \, for \, i \neq j\}$$

为 M 中由 k 个互异有序点构成的构形空间，并赋予其诱导拓扑。对称群 S_k 通过置换坐标作用于 $F_k(M)$。商空间

$$C_k(M) := F_k(M)/S_k$$

是带有商拓扑的无序构形空间。多年来，构形空间的几何与拓扑一直备受关注。构形空间是几何与拓扑领域中活跃的研究方向，在代数拓扑、几何拓扑、代数几何、纽结理论、几何群论、微分拓扑或同伦论等多个领域均有重要应用。这些空间是拓扑学中的基石，也是多种关键拓扑数据的来源。例如，当底流形是曲面时，其基本群称为辫群。

这些在几何群论中具有基础性作用。如果 M 是一个维数为 d 的流形，那么空间 $F_k(M)$ 和 $C_k(M)$ 是维数为 $kd.$ 的开流形。当 M 是一个开曲面时， $C_k(M)$ 是一个 Stein 流形。当且仅当 M 是可定向且维数为偶数时，流形 $C_k(M)$ 才是可定向的。

构形空间理论的核心主题是这些空间的（上）同调。Arnold 在研究空间 $F_k(\mathbb{R}^2)$ 和 $C_k(\mathbb{R}^2)$ 时，首次研究了这些空间的上同调（见 [1] 和 [2]）。此后，Cohen 及其合作者重新推动了这一领域的发展，并对其进行了系统研究。对于可定向流形 M，包含映射 $F_k(M) \hookrightarrow M^k$ 的谱序列由 Cohen-Taylor 描述，并由 Totaro 进一步研究 [20]。对于光滑复射影簇 X，Fulton 和 MacPherson[12] 得到了 $F_k(X)$ 的一种紧化。借助 Morgan 的理论，他们描述了 $F_k(X)$ 的有理同伦的一个微分分次代数模型，该模型取决于 $H^*(X;\mathbb{Q})$、点数 k以及 $X.$ 的陈类。此外，Kriz [16] 简化了 Fulton-MacPherson 的模型（另见 [5]）。关于整数（上）同调，除少数情形外，目前所知甚少，我们在此提及其中几项。在论文 [8], 中，Fiechtner 和 Zeigler 描述了通常球面的构形空间的整数上同调代数。Napolitano 在 [19] 中研究了曲面构形空间的整数上同调（另见 [18]）。然而，目前还没有显式方法可用于计算流形构形空间的整数（上）同调。关于流形构形空间的一个重要问题是上同调维数。本文旨在对这些空间的最高非平凡整数上同调展开严格研究。我们描述了随着点数增加，这些空间的上同调维数如何变化。假设所有流形均为有限型（Betti 数均为有限数）。流形 M 的边界记为 $\partial M.$ 在全文中， U 是 M 的闭子集，且满足 $\partial M \cap U = \phi$，并且 $M - U$ 是连通的。我们将 $Chdim(M)$（可定向流形 M的上同调维数）记为满足以下性质的最小整数：

$$H^i(M;\mathbb{Z}) = 0, \quad \forall\ i > Chdim(M).$$

定理 1. 设 M 是一个紧致连通可定向偶维流形。假设$\partial M \cup U \neq \phi$ 和 $rank(H^{d-1}(M-U;\ \mathbb{Z})) \neq 0.$ 那么，对于 $k \geq 1$，我们有

$$Chdim(C_k(M-U)) = (d-1)k.$$

此外， $H^{(d-1)k}(C_k(M-U);\ \mathbb{Z})$ 是无限的。

定理 2. 设 M 是一个闭连通可定向偶维流形。假设$rank(H^{d-1}(M;\ \mathbb{Z})) \neq 0, 1$。那么，对于 $k \geq 3$，我们有

$$Chdim(C_k(M)) = (d-1)k + 1.$$

此外， $H^{(d-1)k+1}(C_k(M);\ \mathbb{Z})$ 是无限的。

注释 1. Arnold 证明了 $H^*(C_k(\mathbb{R}^2);\mathbb{Z})$ 的重复性质：

$$H^i(C_{2k+1}(\mathbb{R}^2);\mathbb{Z}) = H^i(C_{2k}(\mathbb{R}^2);\mathbb{Z}).$$

对于较小的 k 值，Napolitano 计算了低亏格曲面构形空间的上同调维数（参见 *[19]* 中的表 1、2、3 和 4）。构形空间的上同调维数在满足条件$rank(H^{d-1}(M;\ \mathbb{Z})) = 0$ 的流形 M 上的表现似乎并非算术性的。

流形 M 在条件 $rank(H^{d-1}(M;\mathbb{Z})) = 0$ 下的构形空间的上同调维数序列的行为尚不明确，我们提出以下问题。

问题。若 M 是一个可定向偶维流形，且满足条件 $rank(H^{d-1}(M;\mathbb{Z})) = 0$，那么序列 $\{Chdim(C_k(M))\}_{k\geq 1}$ 有什么规律?

定理 3. 设 M 是一个紧致可定向偶数维流形。假设 $k \geq 2$、$\partial M \cup U \neq \phi$ 和 $rank(H^{d-1}(M-U;\mathbb{Z})) = n > 0$. 那么群 $H^{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Z})$ 是无限的。更确切地说， $H^{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Z})$ 的秩至少为

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{2}+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad if\ k\ is\ even\ ,$$

$$n\begin{pmatrix} \frac{k-1}{2}+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad if\ k\ is\ odd.$$

定理 4. 设 M 是一个闭可定向偶维流形。假设 $k \geq 3$，且 $rank(H^{d-1}(M;\mathbb{Z})) = n > 1$. 那么群 $H^{(d-1)k+1}(C_k(M);\mathbb{Z})$ 是无限的。更确切地说， $H^{(d-1)k+1}(C_k(M);\mathbb{Z})$ 的秩至少为

$$n\begin{pmatrix} \frac{k}{2}+n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{k}{2}+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad if\ k\ is\ even\ ,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k-1}{2}+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \qquad if\ k\ is\ odd.$$

注 2. 从 Arnold 的经典例子中，我们可以看到， $i > 1$. 的整系数上同调群 $H^i(C_k(\mathbb{R}^2)\ \mathbb{Z})$ 是有限的。此外，D. B. Fuchs *[11]* 证明，对于任意次数 i，都可以找到一个足够大的 k，使得 $H^{\geq i}(C_k(\mathbb{R}^2);\mathbb{Z}_2)$ 非零。因此，当 k. 足够大时， $C_k(\mathbb{R}^2)$ 的最高次非零整系数上同调群是有限的。

我们针对满足条件 $rank(H^{d-1}(M;\mathbb{Z})) = 0$ 的流形的构形空间的最高阶整系数上同调，提出一个有限性猜想:

猜想 1。（有限性）设 M 是可定向偶维流形。假设 $rank(H^{d-1}(M;\mathbb{Z}))$ 为零。那么存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得上同调群 $H^{top}(C_k(M);\mathbb{Z})$ 对于 $k \geq k_0$. 是有限的。

论文提纲

本文分为五节。第二节简要介绍 Chevalley–Eilenberg 复形。第三节定义约化 Chevalley–Eilenberg 复形。主要结果在第四节中得到证明。第五节给出流形的有序构形空间的上同调维数的精确下界。

通用约定

• 我们始终使用有限维分次向量空间。元素的次数 v 记作 $deg(v)$。

• 对称代数 $Sym(V^*)$ 是多项式代数与外代数的张量积:

$$Sym(V^*) = \bigoplus_{k\geq 0} Sym^k(V^*) = Poly(V^{even}) \bigotimes Ext(V^{odd}),$$

其中， Sym^k 由长度为 k.的单项式生成。

• 分次为 n 的分次向量空间 V 的悬挂是分次向量空间 $V[n]$ ，其满足 $V[n]_i = V_{i-n}$，与 $a \in V$ 对应的 $V[n]$ 中的元素记作 $s^n a$；例如

$$H_*(S^2;\mathbb{Q})[n] = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{if } * \in \{n, n+2\} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

• 我们用 $H_{-*}(M;\ \mathbb{Q})$ 表示一个分次向量空间，其次数为 $-i$ 的部分是 M 的第 i 个同调群；例如

$$H_{-*}(\mathrm{CP}^m;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{if } * \in \{-2m, -2m+2, \ldots, 0.\} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2 Chevalley–Eilenberg 复形

自 Arnold 的研究以来，构形空间的上同调和同调受到了广泛关注。Fulton–Macpherson [12] 描述了一个模型 $F(k)$，用于刻画光滑射影簇 X 的 $F_k(X)$ 的上同调，其中 $F(k)$ 取决于 X 的上同调环、典范定向类以及 X 的 Chern 类。Kriz [16] 得到了 Fulton–MacPherson 模型的一个简化版本。Kriz 的模型不依赖于 Chern 类。Kriz 和 Totaro 的独立研究证明了相同的结果。Totaro 的思路是研究嵌入 $F_k(X) \subset X^k$. 的 Leray 谱序列。对称群在构形空间 $F_k(X)$ 上的自然作用诱导出 Kriz 模型上的一个作用。$C_k(X)$ 的上同调由 Fulton–Macpherson 和 Kriˇz 模型的 S_k–不变部分得到（参见 [12] 的推论 8c 和 [16] 的注记 1.3）：

$$H^i(C_k(X);\mathbb{Q}) \approx H^i(F_k(X);\mathbb{Q})^{S_k}.$$

B¨odigheimer–Cohen–Taylor [4] 研究了奇数维流形的 $C_k(M)$ 的同调。F´elix–Thomas [10] （另见 [9]）构建了闭可定向偶维流形的无序配置空间的有理上同调模型。最近，Knudsen 利用 Ayala–Francis [2]发展起来的因子化同调理论，在 [14] 中全面确立了这一对应关系。我们将把研究范围限定在可定向偶维流形的情形。

先介绍一些记号。考虑两个分次向量空间。

$$V^* = H_c^{-*}(M;\mathbb{Q})[d], \quad W^* = H_c^{-*}(M;\mathbb{Q})[2d-1]:$$

其中

$$V^* = \bigoplus_{i=0}^{d} V^i, \quad W^* = \bigoplus_{j=d-1}^{2d-1} W^j.$$

我们选择 V^i 和 W^j 中的基 as

$$V^i = \mathbb{Q}\langle v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots\rangle, \quad W^j = \mathbb{Q}\langle w_{j,1}, w_{j,2}, \ldots\rangle$$

（元素的次数由第一个下标标记； x_i^l 表示 l个因子的乘积$x_i \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_i$）。我们始终取 $V^0 = \mathbb{Q}\langle v_0\rangle$。现在考虑分次代数

$$\Omega_k^{*,*}(M) = \bigoplus_{i\geq 0}\bigoplus_{\omega=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} \Omega_k^{i,\omega}(M) = \bigoplus_{\omega=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} (Sym^{k-2\omega}(V^*)\otimes Sym^{\omega}(W^*))$$

其中，总次数 i 由 V^* 和 W^*的分级给出。我们称 ω 为权重分级。微分 ∂: Sym^2(V*) $\to W^*$ 通过以下方程定义为一个余导子。

$$\partial(s^d a \wedge s^d b) = (-1)^{(d-1)|b|} s^{2d-1}(a \cup b),$$

其中

$$\cup : H_c^{-*}(M;\mathbb{Q})^{\otimes 2} \to H_c^{-*}(M;\mathbb{Q})$$

（这里， H_c^{-*}表示 M的紧支撑上同调）。 ∂ 的次数为 -1. 。容易看出， $s^d a$、 $s^d b \in V^*$ 和 s^{2d-1}（$a \cup b$） $\in W^*$. 。微分 ∂ 根据余 Leibniz 规则扩展到 $\Omega_k^{*,*}$，（M）上。根据定义， V^* 中的元素长度为 1、权重为 0，而 W^* 中的元素长度为 2、权重为 1。根据微分的定义，我们有

$$\partial : \Omega_k^{*,*}(M) \longrightarrow \Omega_k^{*-1,*+1}(M).$$

定理 5. 若 d为偶数，则 H_*（C_k（M）； $\mathbb{Q}$）与该复形的同调同构 x

$$(\Omega_k^{*,*}(M), \partial).$$

对于闭流形，紧支撑上同调就是通常的上同调。在这种情况下，这两个分次向量空间为

$$V^* = H_{-*}(M;\mathbb{Q})[d], \quad W_* = H_{-*}(M;\mathbb{Q})[2d-1].$$

现在，我们将定义（$\Omega_k^{*,*}$，（M） ∂）的对偶复形。首先，我们在 $\Omega_k^{*,*}$，（M）上定义一个对偶微分 D。对偶微分定义如下

$$D|_{V^*} = 0, \quad D|_{W^*} : W^* \simeq H_*(M;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\Delta} Sym^2(V^*) \simeq Sym^2(H_*(M;\mathbb{Q})),$$

其中 Δ 是与杯积对应的对角余乘法。根据微分的定义，我们有

$$D : \Omega_k^{*,*}(M) \longrightarrow \Omega_k^{*+1,*-1}(M).$$

定理 6. 若 d 为偶数且 M 是闭的，则 $H^*(C_k(M);\mathbb{Q})$ 与以下复形的上同调同构

$$(\Omega_k^{*,*}(M), D).$$

Chevalley–Eilenberg 复形在流形的构形空间研究中自然出现。其重要应用实例包括 B¨odigheimer– Cohen–Taylor [4] 的工作（另见 [7]），以及 F´elix–Thomas [10]，在 McDuff 的奠基性工作 [17] 基础上开展的研究；F´elix–Tanr´e [9] 在 Totaro [20] 的工作基础上开展的研究；以及 Knudsen [14], 在 Ayala–Francis [3] 的工作基础上开展的研究。

3 缩减的 Chevalley–Eilenberg 复形

在本节中，我们定义了 $(\Omega_k^{*,*}(M), D)$ 的一个无圈子复形。

定理 7. 设 M 是一个维数为 $d.$ 的闭可定向流形。子空间

$$\Omega_{k-2}^{*,*}(M).(v_d^2, w_{2d-1}) < \Omega_k^{*,*}(M)$$

对于 $k \geq 2.$ 是无环的

证明。设 M 是闭且可定向的。$\Omega_{k-2}^{*,*}(M).(v_d^2, w_{2d-1})$ 中的一个元素具有唯一展开式 $v_d^2 A + B w_{2d-1}$，其中 A 和 B 不含任何包含 $w_{2d-1}.$ 的单项式。算子

$$h(v_d^2 A + B w_{2d-1}) = B v_d^2$$

给出一个同伦 $id \simeq 0.$

□

我们将约化复形 $(\Omega_k^{*,*}(M)/\Omega_{k-2}^{*,*}(M).(v_d^2, w_{2d-1}), D_{\text{induced}})$ 记为

$$({}^r\Omega_k^{*,*}(M), D).$$

推论 1. 如果 $k \geq 2$ 和 M 是闭的可定向流形，那么我们有一个同构。

$$H^*({}^r\Omega_k^{*,*}(M), D) \cong H^*(C_k(M)).$$

注记 3. 约化复形的特殊情形 $({}^r\Omega_k^{*,*}(\mathbb{CP}^m), D)$ 已由作者在 *[21]* 中得到。

注 4. 如果 M 不是闭的，那么子空间 $\Omega_{k-2}^{*,*}(M).(v_d^2, w_{2d-1})$ 为零。

4 主要定理的证明

在本节中，我们给出定理 1 和定理 2 的证明。若一个空间 X 是 r-连通的，则 $\pi_i(X) = 0$ 对于 $0 \leq i \leq r.$ 。 X的连通度； $conn(X)$ 是具有此性质的最大整数。可缩空间的连通度为无穷大。Kallel [15] 证明了以下结果。

定理 8. 设 M 为紧致可定向偶数维流形，且 $k \geq 2$. 我们有

$$Chdim(C_k(M-U)) \leq \begin{cases} (d-1)k-r+1, & if\ \partial M \cup U = \phi \\ (d-1)k-r, & if\ \partial M \cup U \neq \phi, \end{cases}$$

其中，如果 $\partial M \cup U = \phi$， $r \geq 0$ 是 M 的连通度；如果 $\partial M \cup U \neq \phi$.，则是商空间 $M/M \cup U$ 的连通度

定理 1 和定理 3 的证明。设 $\partial M \cup U \neq \phi$ 和 $k \geq 1$. 。复形 $(\Omega_k^{**}, (M-U)\ \partial)$ 中不存在次数大于 $(d-1)k$ 的元素。现在，我们要证明，对于 $rank(H^{d-1}(C_k(M-U);\mathbb{Z})) \neq 0.$，$H_{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Q})$ 是非平凡的。令

$$rank(H^{d-1}(C_k(M-U);\mathbb{Z})) = n \geq 1.$$

我们有 $dim(V^{d-1}) = n \geq 1$ 和 $dim(W^{2d-2}) = n \geq 1.$。我们在 V^{d-1} 和 W^{2d-2} 中选取基如下

$$V^{d-1} = \langle v_{d-1,1}, \ldots, v_{d-1,n} \rangle, \quad W^{2d-2} = \langle w_{2d-2,1}, \ldots, w_{2d-2,n} \rangle.$$

根据次数的原因，我们有 $\partial(v_{d-1,\ i}) = 0$ 和 $\partial(w_{2d-2,\ i}) = 0.$。在以下计算中，我们使用记号

$$\mathrm{I} = \langle v_{d-1,1}, v_{d-1,2}, \ldots, v_{d-1,n} \rangle, \quad \mathrm{J} = \langle w_{2d-2,1}, w_{2d-2,2} \ldots, w_{2d-2,n} \rangle,$$

and

$$\mathrm{J}^k = \langle w_{2d-2,i_1} w_{2d-2,i_2} \ldots w_{2d-2,i_k} \,|\, 1 \leq i_j \leq n \rangle.$$

显然， $dim(\mathrm{I}) = n$ 和 $dim(\mathrm{J}^k) = \binom{k+n-1}{n-1}$.

情形 1. 设 $k \geq 2$ even。考虑 $\mathrm{J}^{\frac{k}{2}} = \Omega_k^{(d-1)k\ \frac{k}{2}}, (M-U)$，其中

$$dim\left(\Omega_k^{(d-1)k,\frac{k}{2}}(M-U)\right) = \binom{\frac{k}{2}+n-1}{n-1}.$$

显然， $\partial(\mathrm{J}^{\frac{k}{2}}) = 0.$ ∂ 的次数为 -1。此外，不存在次数大于 $(d-1)k.$ 的元素。因此，$\mathrm{J}^{\frac{k}{2}}$ 给出了同调类。因此，对于偶数 $k \geq 2$，我们有

$$dim\left(H_{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Q})\right) \geq \binom{\frac{k}{2}+n-1}{n-1} \neq 0.$$

情形 2。设 $k \geq 1$ 为奇数。考虑 $\mathrm{IJ}^{\frac{k-1}{2}} = \Omega_k^{(d-1)k\ \frac{k-1}{2}}, (M-U)$，其中

$$dim\left(\Omega_k^{(d-1)k,\frac{k-1}{2}}(M-U)\right) = n\binom{\frac{k-1}{2}+n-1}{n-1}.$$

显然， $\partial(\mathrm{IJ}^{\frac{k-1}{2}}) = 0.$ 微分 ∂ 具有双次数 $(-1,1)$。此外，不存在次数大于 $(d-1)k.$ 的元素。因此，$\mathrm{IJ}^{\frac{k-1}{2}}$ 给出了同调类。因此，对于 $k \geq 1$为奇数的情形，我们有

$$dim\left(H_{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Q})\right) \geq n\binom{\frac{k-1}{2}+n-1}{n-1} \neq 0.$$

我们有同构关系

$$H^{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Q}) \cong H_{(d-1)k}(C_k(M-U);\mathbb{Q}).$$

如果 $k \geq 1$和 $M \cup U \neq \phi$，那么由定理 8 可得 $Chdim(C_k(M-U)) \leq (d-1)k-r$.因此，根据前面的计算，我们有

$$Chdim(C_k(M-U)) = (d-1)k.$$

证明至此完成。 □

定理 2 和定理 4 的证明。设 M 是闭的，且 $k \geq 3$. 在约化复形 $({}^r\Omega_k^{*\,*}, (M), D)$ 中，不存在次数大于 $(d-1)k+1$ 的元素。现在，我们要证明对于 $rank(H^{d-1}(C_k(M); \mathbb{Z})) \neq 0$，1，$H^{(d-1)k+1}(C_k(M); \mathbb{Q})$ 非平凡。设

$$rank(H^{d-1}(C_k(M);\mathbb{Z})) = n \geq 2.$$

我们有 $dim(V^{d-1}) = n \geq 2$ 且 $dim(W^{2d-2}) = n \geq 2$. 我们在 V^{d-1} 和W^{2d-2} 中选取基如下

$$V^{d-1} = \langle v_{d-1,1}, v_{d-1,2}, \ldots, v_{d-1,n}\rangle, \quad W^{2d-2} = \langle w_{2d-2,1}, w_{2d-2,2}, \ldots, w_{2d-2,n}\rangle.$$

根据微分的定义，我们有 $D(v_{d-1,\ i}) = 0$ 且 $D(w_{2d-2,\ i}) = 2v_{d-1,\ i}v_d$. 此处及以下计算中，我们使用记号

$$\mathrm{I} = \langle v_{d-1,1}, v_{d-1,2}, \ldots, v_{d-1,n}\rangle, \quad \mathrm{J} = \langle w_{2d-2,1}, w_{2d-2,2} \ldots, w_{2d-2,n}\rangle,$$

and

$$\mathrm{J}^k = \langle w_{2d-2,i_1} w_{2d-2,i_2} \ldots w_{2d-2,i_k} \,|\, 1 \leq i_j \leq n\rangle.$$

显然， $dim(\mathrm{I}) = n$ 且 $dim(\mathrm{J}^k) = \binom{k+n-1}{n-1}$.

情形 1. 设 $k \geq 3$ 为奇数。考虑 $v_d\mathrm{J}^{\frac{k-1}{2}} = {}^r\Omega_k^{(d-1)k+1\ \frac{k-1}{2}}, (M)$，其中

$$dim\left({}^r\Omega_k^{(d-1)k+1,\frac{k-1}{2}}(M)\right) = \binom{\frac{k-1}{2}+n-1}{n-1}.$$

我们在约化复形中有 $D(v_d\mathrm{J}^{\frac{k-1}{2}}) = 0$（注意，在约化复形中 $v_d^{a\geq 2} = 0$ ）。此外， ${}^r\Omega_k^{*\ l\geq\frac{k-1}{2}}, (M) = 0$. 微分 D的双次数为 $(1,-1)$。因此，$\underline{{}_{k-1}v_d}\mathrm{J}^{\ 2}$ 给出了上同调类。因此，对于奇数 $k \geq 3$ ，我们有

$$dim\left(H^{(d-1)k+1}(C_k(M);\mathbb{Q})\right) \geq \binom{\frac{k-1}{2}+n-1}{n-1} \neq 0.$$

情形 2. 设 $k \geq 4$为偶数。考虑 $\mathrm{I}v_d\mathrm{J}^{\frac{k}{2}-1} = {}^r\Omega_k^{(d-1)k+1\ \frac{k}{2}-1}, (M)$ 和 $\mathrm{J}^{\frac{k}{2}} = {}^r\Omega_k^{(d-1)k\ \frac{k}{2}}, (M)$。我们在约化复形中有 $D(\mathrm{I}v_d\mathrm{J}^{\frac{k}{2}-1}) = 0$（注意， $v_d^{a\geq 2} = 0$在约化复形中）。因此，我们有子复形

$$0 \to {}^r\Omega_k^{(d-1)k,\frac{k}{2}}(M) \to {}^r\Omega_k^{(d-1)k+1,\frac{k}{2}-1}(M) \to 0,$$

其中 $dim\left({}^{r}\Omega_k^{(d-1)k\ \frac{k}{2}},\ (M)\right) = \binom{\frac{k}{2}+n-1}{n-1}$ 和 $dim\left({}^{r}\Omega_k^{(d-1)k+1\ \frac{k}{2}-1},\ (M)\right) = n\binom{\frac{k}{2}+n-2}{n-1}$. 显然，对于偶数 $k > 2$ 和 $n > 1$，我们有

$$n\binom{\frac{k}{2}+n-2}{n-1} > \binom{\frac{k}{2}+n-1}{n-1}.$$

这意味着。

$$dim\left(H^{(d-1)k+1}(C_k(M);\mathbb{Q})\right) \geq n\binom{\frac{k}{2}+n-2}{n-1} - \binom{\frac{k}{2}+n-1}{n-1} \neq 0,$$

其中 $k > 2$ 为偶数，且 $n > 1$.

如果 $k \geq 2$ 和 $M \cup U = \phi$，那么根据定理 8，我们有 $Chdim(C_k(M)) \leq (d-1)k-r+1$.因此，根据前面的计算，我们有

$$Chdim(C_k(M)) = (d-1)k+1.$$

至此，证明完成。 □

5 有序构形空间的应用

作为定理1和定理2的应用，我们立即得到有序构形空间上同调维数的精确下界。

推论2. 设 M 是紧致连通可定向偶维流形。假设$\partial M \cup U \neq \phi$ 和 $rank(H^{d-1}(M-U;\ \mathbb{Z})) \neq 0$. 那么，对于 $k \geq 1$，有

$$Chdim(F_k(M-U)) \geq (d-1)k.$$

推论3. 设 M 是闭连通可定向偶维流形。假设$rank(H^{d-1}(M;\ \mathbb{Z})) \neq 0$, 1. 那么，对于 $k \geq 3$, 有

$$Chdim(F_k(M)) \geq (d-1)k+1.$$

推论2和推论3的证明。对称群 S_k 在 $F_k(M)$上的作用诱导出其在上同调群 $H^i(F_k(M))$ 上的作用，而有限覆盖$F_k(M) \to C_k(M)$对应的（传递）映射给出一个同构

$$H^i(C_k(M);\mathbb{Q}) \approx H^i(F_k(M);\mathbb{Q})^{S_k}$$

覆盖空间的上同调中 S_k- 不变部分与商空间的上同调之间。上同调群 $H^i(C_k(M);\ \mathbb{Q})$ 是由 $H^i(F_k(M);\ \mathbb{Q})$ 的平凡表示得到的（更多细节请参见 [6]）。这意味着，如果 $H^i(C_k(M);\ \mathbb{Q}) \neq 0$ 那么 $H^i(F_k(M);\ \mathbb{Q})$ 也不为零。因此，由定理 1 和定理 2，我们得到了所需的下界。 □

注释5. 对于一个与球面不同的闭可定向曲面 S，我们有

$$Chdim(F_k(S)) = k + 1.$$

更多详细信息请参见 *[13]* 的定理2.1。从这个意义上说，推论3中的下界是尖锐的。推论2和推论3中的下界似乎是有序构形空间的上同调维数的精确公式。

致谢。作者衷心感谢 ASSMS 和拉合尔GC大学提供的支持。本研究部分获得巴基斯坦高等教育委员会的资助。

参考文献

[1] V. I. Arnold，染色辫群的上同调环，《数学札记》，第 5 卷（1969 年），227-231 页。[2] V. I. Arnold，关于代数函数的若干拓扑不变量，《莫斯科数学会汇刊》，第 21 卷（1970 年），30-52 页。[3] D. Ayala，J. Francis，拓扑流形的因子化同调，《拓扑学杂志》，第 8 卷（2015 年），1045–1084 页。[4] C. F. B¨odigheimer，F. Cohen，L. Taylor，关于构形空间的同调，《拓扑学》，28（2）（1989 年），111-123 页。[5] B. Berceanu，M. Markl，S. Papadima，代数簇构形空间的乘法模型，《拓扑学》，44（2）（2005 年），415-440 页。[6] T. Church，流形构形空间的同调稳定性，《数学发明》，第 188 卷，第 2 期（2012 年），465-504 页。[7] F. Cohen，关于构形空间、其同调及李代数，《纯粹与应用代数杂志》，第 100 卷（1995 年），19-42 页。[8] M. Feichtner，G. M. Zielgler，球面有序构形空间的整数上同调代数，《数学文献》，第 5 卷（2000 年），115-139 页。[9] Y. F´elix，D. Tanr´e，无序配置空间的上同调代数，《伦敦数学会杂志》，第 72 卷，第 2 期（2005 年），525-544 页。[10] Y. F´elix，J. C. Thomas，构形空间的有理贝蒂数，《拓扑学及其应用》，第 102 卷，第 2 期（2000 年），139-149 页。[11] D. B. Fuchs，辫群模 2 上同调，《泛函分析及其应用》，第 4 卷，第 2 期（1970 年），62-73 页。[12] W. Fulton，R. MacPherson，构形空间的紧化，《数学年刊》，第 139 卷，第 1 期（1994 年），183-225 页。

[13] D. L. Goncalves、J. Guaschi、M. Maldonad, 《曲面辫群与映射类群的嵌入及（虚）上同调维数》, 《Confluentes Mathematici》, 第 10 卷第 1 期（2018）, 41–61。[14] B. Knudsen, 《通过因子化同调研究构形空间的贝蒂数与稳定性》, 《代数几何与拓扑》, 第 17 卷第 5 期（2017）, 3137–3187。[15] S. Kallel, 《对称积、对偶性与构形空间的同调维数》, 《几何与拓扑专论》, 第 13 卷（2008）, 499–527。[16] I. Kriz, 《关于构形空间的有理同伦类型》, 《数学年刊》, 第 139 卷第 2 期（1994）, 227–237。[17] D. McDuff, 《正粒子与负粒子的构形空间》, 《拓扑学》, 第 14 卷第 1 期（1975）, 91–107。[18] F. Napolitano, 《曲面上的构形空间》, 《巴黎科学院报告: 数学系列 I》, 第 327 卷（1998）, 887–892。[19] F. Napolitano, 《曲面上构形空间的上同调》, 《伦敦数学会杂志》第 68 卷第 2 期（2003）, 477–42。[20] B. Totaro, 《代数簇的构形空间》, 《拓扑学》, 第 35 卷（1996）, 1057–1067。[21] M. Yameen, 《关于构形空间极端稳定性的一点注记》, 《纯粹与应用代数杂志》, 第 227 卷（2023）, 107154。

拉合尔GC大学阿卜杜斯·萨拉姆数学科学学院，巴基斯坦。

伊斯兰堡 Al-Wadood 专业研究学院。电子邮箱: yameen99khan@gmail.com