arXiv:2305.06642v1 [math.RT] 11 May 2023

具有几乎分离关系的绳结箭图与中山代数

迪德里克·福瑟

Abstract. 具有几乎分离关系的中山代数，是指任意一对关系之间的重叠至多包含一支箭。本文给出了这类中山代数与一种特殊形式的箭图（称为奇普箭图）的路径代数之间的导出等价。此外，我们还说明了如何利用这种导出等价，完整分类具有几乎分离关系的线性中山代数。

作为应用，我们列出了所有长度为 ≤ 8 且具有几乎分离关系的中山代数的导出等价类。

1. 引言

在本文中， k 将表示一个域， A_n 表示 Dynkin 型为 $\mathbb{A}$、具有 n 个顶点且按线性顺序标记为 $1, \ldots, n$的箭图。我们将用 $A^{(l_0,\ldots,l_r)}_{\ n,(n_0,\ldots,n_r)}$ 表示线性中山代数 kA_n/I ，其中 I 是由关系生成的理想，该关系长度为 $l_i \geq 2$ ，且对每个 $0 \leq i \leq r$都从顶点 n_i 开始。我们假设 $n_i < n_{i+1}$ 且对每个$0 \leq i \leq r-1$都有 $n_i + l_i < n_{i+1} + l_{i+1}$ ，并且 $n_r + l_r \leq n$。

我们将重点关注这样一类中山代数：任意一对关系的重叠至多包含一支箭，这意味着对于所有 i， $n_{i+1} \geq n_i + l_i - 1$ ，我们称这类代数具有几乎分离关系。

为了研究这些代数的导出等价类，我们将采用 [3] 中提出的组合箭图变异方法。

我们将证明，具有几乎分离关系的线性中山代数与所谓的奎普代数之间存在导出等价。这些代数是所谓奇普箭图的路径代数，其底层图被称为开奎普。开奎普 （或简称奎普）是一种最大度数为 3 的树，且所有度数为 3 的顶点都位于同一条路径上。Woo 和 Neumaier 在 [6] 中将其作为谱半径较小的图的一个例子引入。这个名称源自它们的形状：一条线上伸出笔直的弦，让人联想到印加人用于记录的结绳。

本文的主要结果是证明绳结代数与具有几乎分离关系的中山代数之间存在导出等价，具体表述如下定理。相关记号将在第 2 节中予以解释。

定理 1.1 (定理 4.5)。 设 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{\ (k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 是一个奎普，并令

$$n_i = k_0 + \sum_{j=1}^{i}(m_{j-1} + k_j + 1) \ for\ 1 \le i \le r+1.$$

如果 D 是一个奎普箭图，那么存在一个导出等价关系。

$$kD \simeq A^{(m_0+2,m_1+2,\ldots,m_r+2)}_{n_{r+1},(k_0,n_1,n_2,\ldots,n_r)}$$

当且仅当 D 是 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{\ (k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 且具有某种定向时。

利用这一推论，我们能够对具有近乎分离关系的线性中山代数在导出等价意义下给出完整的分类。每个等价类均由给定奎普的形状决定，其中，奎普的弦以某种特定方式对应于中山代数的关系。我们将在第 4 节详细讨论这些内容。

长度为 2 的关系不会影响具有几乎分离关系的中山代数的导出等价类，而长度为 ≥ 3 的几乎分离关系的数量是这类代数的一个导出不变量。除沿箭图排列的此类关系中可能存在的第一个和最后一个关系外，每个长度为 ≥ 3 的关系的长度和位置也是导出不变量。

以下定理明确给出了这些导出等价类中各自包含的中山代数的具体集合。值得注意的是，同一等价类中所有具有几乎分离关系的中山代数，都可以通过若干简单操作的组合相互转化。这些操作包括:

- 以特定幅度改变第一个（分别为最后一个）关系的长度和终点（分别为起点）。
- 添加或删除长度为 2 的关系。
- 反转箭图中的所有箭头。

这是因为同一类中的所有中山代数都对应于同一个奎普的定向，而这些运算则对应于改变该定向。

定理 1.2 (推论 4.6)。 若 $A^{(l_0,\ldots,l_r)}_{\ n,(n_0,\ldots,n_r)}$ 是一个具有几乎分离关系的线性中山代数，其中 $l_i \ge 3$ 对所有 i均成立，则下列中山代数导出等价。

$$A^{(l_0,l_1,\ldots,l_{r-1},l_r)}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(l_r,l_{r-1},\ldots,l_1,l_0)}_{n,(n-n_r-l_r+1,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\ldots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(l_0,l_1,\ldots,l_{r-1},n-n_r-l_r+3)}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(n-n_r-l_r+3,l_{r-1},\ldots,l_1,l_0)}_{n,(l_r-2,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\ldots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(n_0+2,l_1,\ldots,l_{r-1},l_r)}_{n,(l_0-2,n_1,\ldots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(l_r,l_{r-1},\ldots,l_1,n_0+l_0)}_{n,(n-n_r-l_r+1,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\ldots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(n_0+2,l_1,\ldots,l_{r-1},n-n_r-l_r+3)}_{n,(l_0-2,n_1,\ldots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(n-n_r-l_r+3,l_{r-1},\ldots,l_1,n_0+l_0)}_{n,(l_r-2,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\ldots,n-n_0-l_0+1)}.$$

此外，在这些代数中的任意可用位置添加一组长度为2 的几乎分离关系，不会改变其导出等价类。

例 1.1. 具有任意定向的奎普 $P^{(2,1,3)}{}_{(1,2,0,1)}$ 的路径代数与以下中山代数（以及其他代数）导出等价。

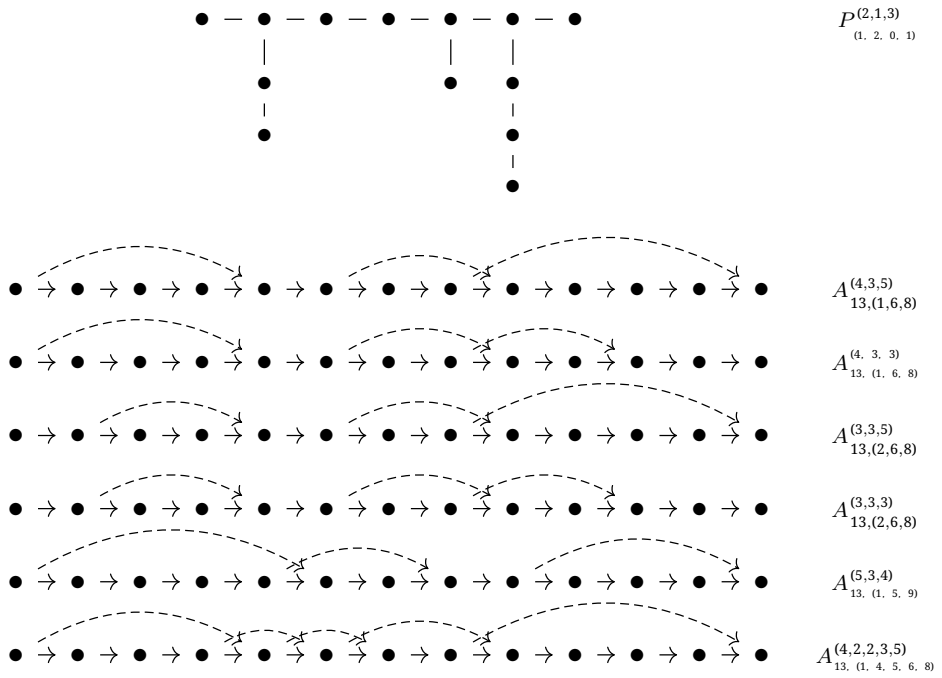


FIGURE 1. 这些中山代数都与奎普 $P^{(2,1,3)}{}_{(1,\ 2,\ 0,\ 1)}$ 的任意定向的路径代数导出等价。

2. QUIPU QUIVERS

（开）奎普是一棵最大度为 3 的树，其中所有度为 3 的顶点都位于一条路径上。这条路径称为奎普的**主串**，而从每个度为 3 的顶点伸出的其余路径称为**弦**。这两个术语均取自 [4]。

在 [5], 的记号中，一个奎普可以写作 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$，其中$r \geq 0$，且所有 $k_i, m_i \geq 0$。我们用 m_i 表示弦 i 的长度，而 k_i 表示主串上位于弦 i 起点与弦 $i+1$ 之间的顶点数量。

请注意，奎普并不能由这种记法唯一确定，而且我们允许存在长度为 $m_i = 0$ 的平凡弦。

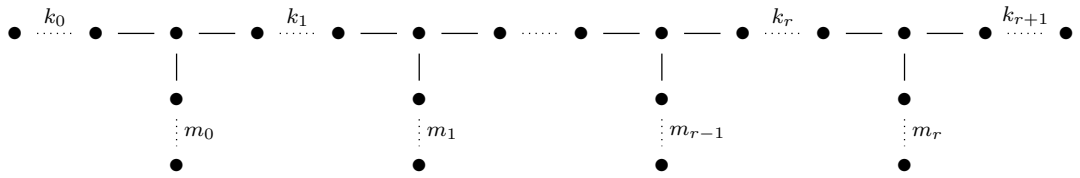


FIGURE 2. 奎普的通常形式 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$

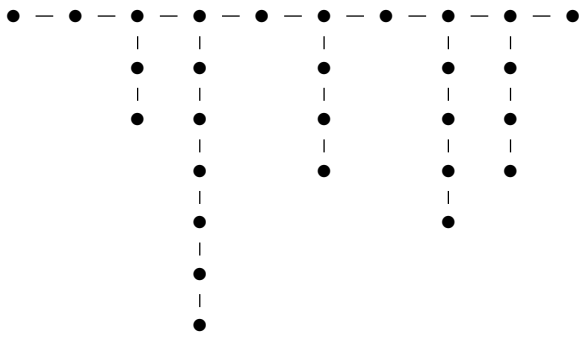


FIGURE 3. 奎普的一个例子，这是 $P^{(2,6,3,4,3)}{}_{(2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)}$。

由于我们希望使用箭图，因此还需要定义奎普的一个有向版本。对于一个奎普 $P^{(m_0,m_1,\ldots m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$，其奎普箭图 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 是同一图的一个有向版本，其中主串从左向右线性定向，而每条弦均沿远离主串的方向线性定向。我们将奎普箭图的路径代数称为奎普代数。

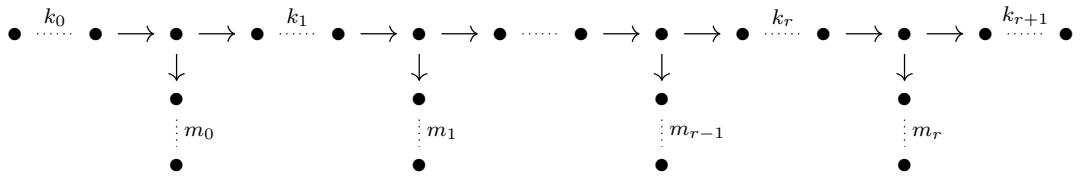


FIGURE 4. 奎普箭图的一般形式 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r,\ k_{r+1})}$

通过查看图 2，我们可以立即得出以下两个观察结果：

观察2.1。奎普 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 的顶点数$r+1$ r等于 $r+1+\sum k_i+\sum m_i$.$i=0$ $i=0$

观察 2.2. 存在图同构关系

$$\begin{aligned} P^{(m_0,m_1,\ldots,m_{r-1},m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_{r-1},k_r,k_{r+1})} &\simeq P^{(k_0,m_1,\ldots,m_{r-1},m_r)}_{(m_0,k_1,\ldots,k_{r-1},k_r,k_{r+1})} \\ &\simeq P^{(m_0,m_1,\ldots,m_{r-1},k_{r+1})}_{(k_0,k_1,\ldots,k_{r-1},k_r,m_r)} \\ &\simeq P^{(m_r,m_{r-1},\ldots,m_1,m_0)}_{(k_{r+1},k_r,k_{r-1}\ldots,k_1,k_0)} \end{aligned}$$

第二个观察基本上说明，用这种记法定义的奎普并不唯一。我们可以把第一条弦看作主串的一部分，从而将主串的第一部分改作一条弦；最后一条弦和主串的最后一部分也同样如此。此外，显然，调换主串和各条弦的顺序不会改变奎普。

通过组合这些操作，同一个奎普总共可以有 8 种表达式；根据奎普两端的形状，其中一些表达式可能重合。注意，即使不同表达式定义的是同一个奎普，它们对应的奇普箭图通常也并不同构。

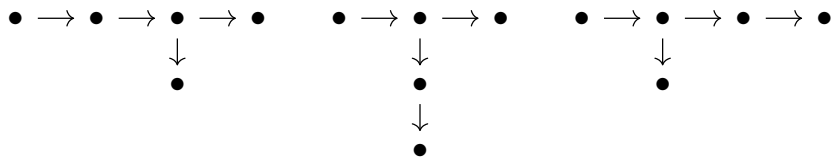


FIGURE 5. 同一奎普的三种不同定向所对应的奇普箭图：$D^{(1)}{}_{(2,\ 1)}$，$D^{(2)}{}_{(1,\ 1)}$ 以及 $D^{(1)}{}_{(1,\ 2)}$。

3. CORD/RELATION-SWAP

本节将引入具有几乎分离关系的奎普箭图的概念，并提出一种在这类箭图之间进行转换的技术，同时保持其路径代数的导出等价类。随后，我们将利用这一技术，寻找无关系的奎普代数与具有几乎分离关系的中山代数之间的导出等价。

定义 3.1（具有几乎分离关系的奎普箭图）。 如果一个奎普箭图附带一组满足以下条件的零关系，我们就称其具有几乎分离关系。

- 所有关系都必须沿着主串。
- 任何弦都不得始于某个关系的内部顶点
- 任意一对关系之间的重叠箭数不得超过一个

现在我们将介绍一种生成具有几乎分离关系且导出等价的奎普的方法。我们通过反复应用 [3], 中定义的箭图变异来实现这一点，该变异以一种保持其路径代数的导出等价类不变的方式修改带关系的箭图。这里不详细介绍变异过程，更多信息请参阅论文。

算法 3.2（弦/关系互换）。设 Q 是一个具有几乎分离关系的奇普箭图，r 是 Q 中一条长度为 $l \geq 2$、起点为 $s(r)$、终点为 $t(r)$ 的关系。令 $m \geq 0$ 表示从 $s(r)$ 开始的（可能是平凡的）弦的长度。我们按照以下步骤由 Q 构造一个新的、具有几乎分离关系的奎普 Q'：

1. 移除关系 r 以及从 $s(r)$ 开始的长度为 m 的弦。2. 将长度为 l 的路径 $s(r) \to \ldots \to t(r)$ 替换为一条长度为$m+2$的路径。如果在 $t(r)$ 之前的顶点处有一个关系，则保留该关系。3. 如果有一支箭以 $s(r)$ 为终点，则添加一个长度为 $m+2$ 的关系，该关系从这支箭的起始顶点指向沿主串位于 $t(r)$ 之前一个位置的顶点。4. 添加一条长度为 $l-2$ 的弦，使其从 $t(r)$ 之前的顶点出发。

命题 3.3. 算法 *3.2* 中构造的带关系的奎普箭图 Q' 的路径代数与带关系的奎普箭图 Q 的路径代数导出等价。

这一操作可以看作是弦与关系的交换顺序及长度交换（± 2），因此我们将其称为弦/关系交换（简称 CR-swap）。

以下是 CR 交换操作过程的可视化表示。

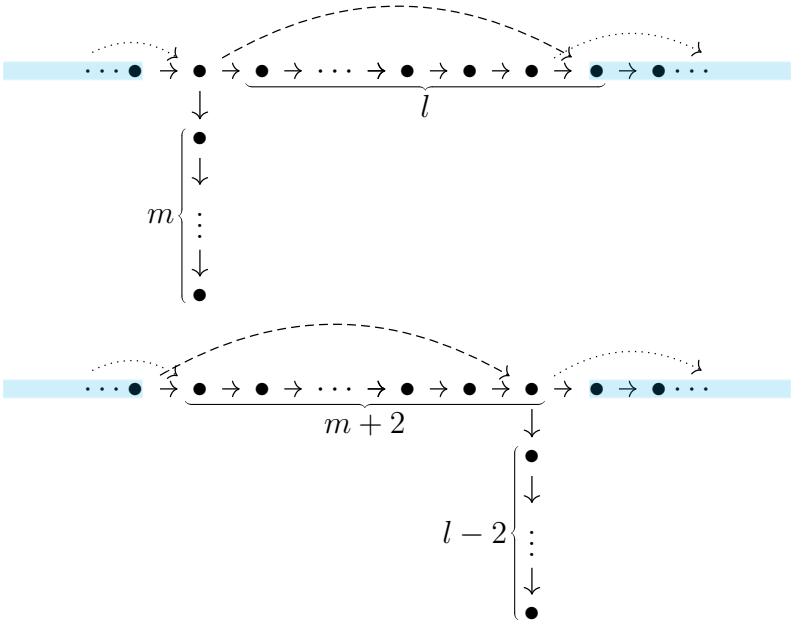
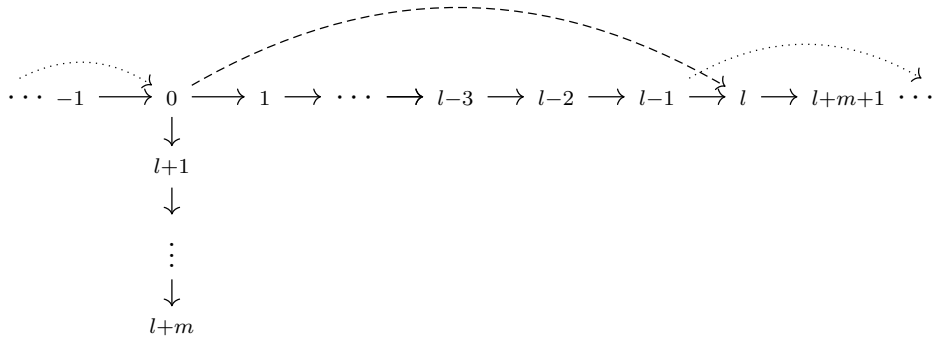


FIGURE 6. CR 交换前后的相关奇普箭图部分。虚线箭表示可选关系，箭图中的阴影部分保持不变。

命题的证明。 从一个具有几乎分离关系的奇普箭图出发，我们将依次对一系列其他箭图进行变异，直到得到另一个具有几乎分离关系的奇普箭图。我们将明确指出需要在哪些顶点处进行变异，以实现箭图中所期望的变化。首先，我们按照如下方式对顶点进行编号。



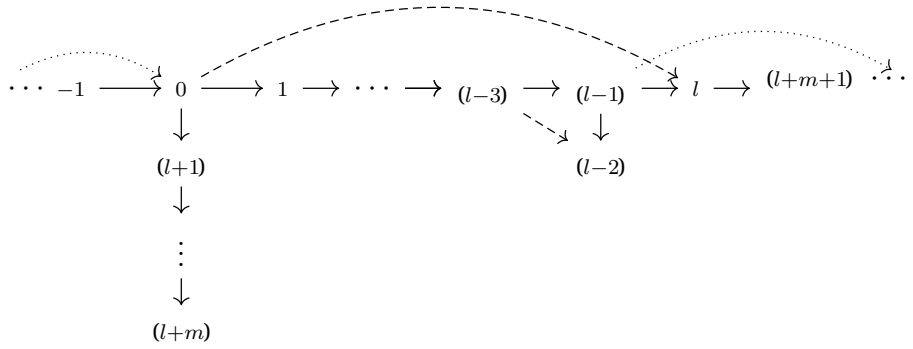
带点的箭表示从箭图其他部分的某些顶点出发或指向这些顶点的可选零关系。我们将这些关系纳入其中，以表明它们在 CR 交换后保持不变。如果不存在此类关系，CR 交换仍以相同方式成立；只需重复下面的证明，但不考虑带点的关系，即可轻易看出这一点。

采用这种编号后，我们将在以下顶点序列上进行突变：

$$l{-}2,\ l{-}3,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ l{+}1,\ l{+}2,\ \ldots,\ l{+}m$$

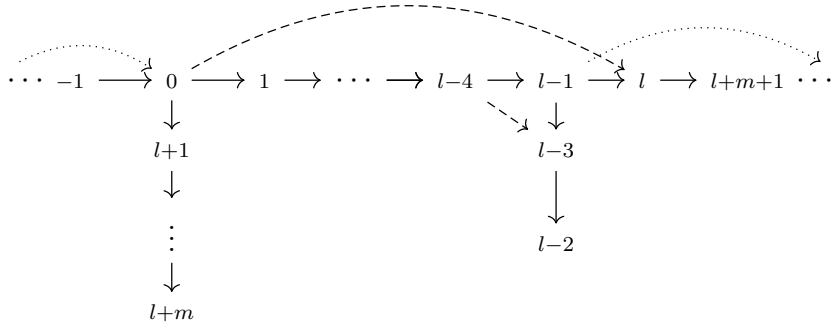
换言之，我们先在关系末端倒数第二个顶点处进行突变。然后每次向前移动一个顶点，直到到达关系的起点，接着沿着弦进行突变。

现在，让我们在顶点 $l{-}2$ 处对箭图进行突变。我们按照突变规则操作；在此情形下，这意味着添加一条从$l{-}3 \to l{-}1$出发的箭，将箭 $l{-}2 \to l{-}1$ 翻转，并将箭 $l{-}3 \to l{-}2$替换为一条关系。于是，我们得到箭图

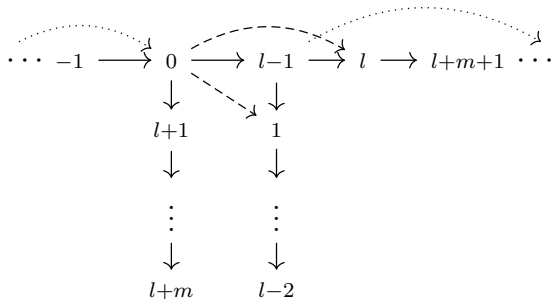


在顶点 $l{-}3$ 处进行变异的操作与此类似，只不过我们还将关系 $l{-}3 \dashrightarrow l{-}2$ 转换为一条箭，并添加一个关系，使新的复合路径 $l{-}1 \to l{-}3 \to l{-}2$ 等于箭 $l{-}1 \to l{-}2$。综上，

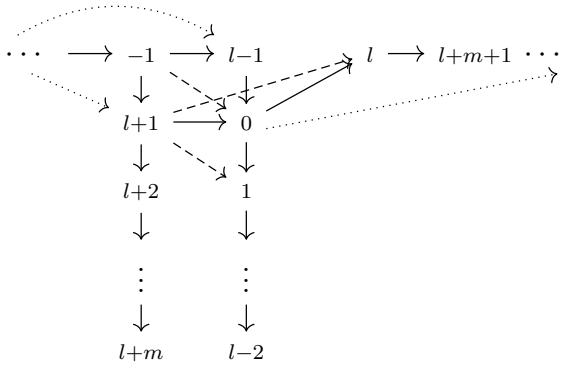
这些变化导致箭图中的...



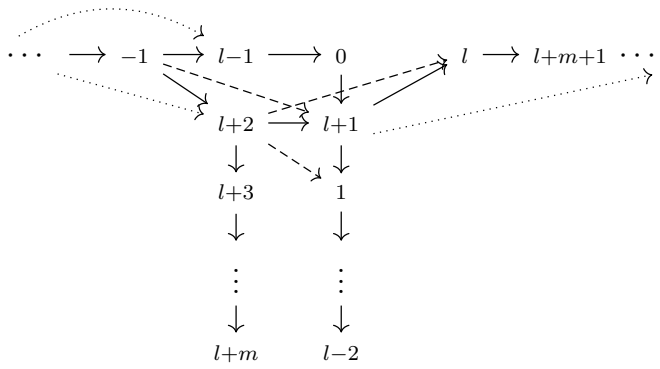
当我们沿着 $l-4$、.....、1 进行变异时，这种模式会持续下去。每进行一次变异，顶部的关系路径就会缩短一条箭，而从顶点 $l-1$ 出发的路径则会延长一条箭。利用变异规则可以很容易地看出这一点。最终，在依次对从 $l-2$ 到 1（含）的每个顶点进行变异后，我们得到如下箭图。



在顶点 0 处进行变异后，经过一番重新排列和化简，将得到如下箭图。请注意，左侧的虚线关系会产生两个新关系，它们都从同一个顶点出发。

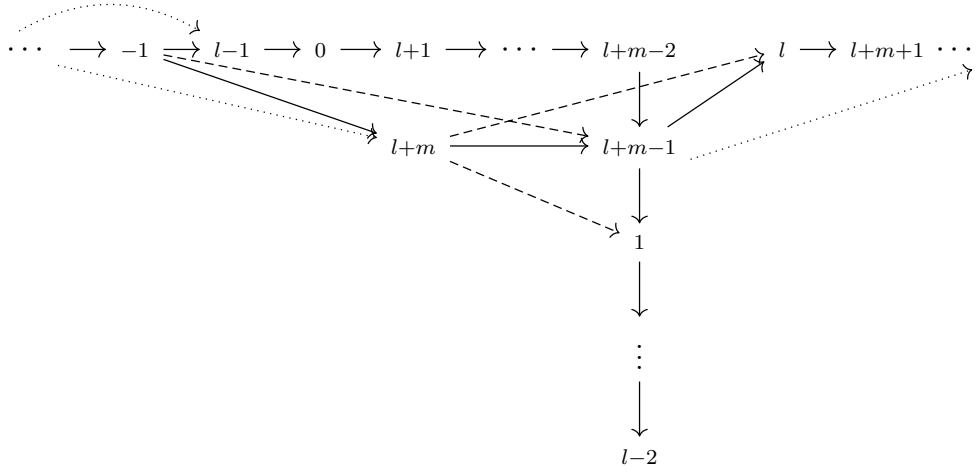


在 $_{l+1}$ 处进行变异现在可得到

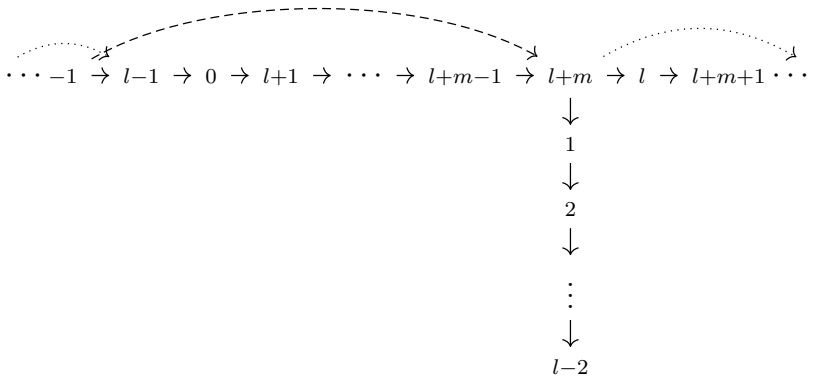


请注意，箭图的结构基本没有变化，只是 $_{l+1}$取代了$_0$， $_{l+2}$ 取代了 $_{l+1}$，而$_0$ 则被插入交换图的上方路径中。因此，区别在于，从交换关系的下方路径出发的弦缩短了一支箭，而上方路径则增加了一支箭。

当我们沿着弦 $_{l+2}$， $_{l+3}$，.....继续进行变异时，这一模式会不断延续。最终，在对 $_{l+m-1}$ 进行变异后，我们得到如下箭图。



最后，如果我们现在在 $_{l+m}$ 处进行变异，并稍作调整，就会得到如下箭图。



这就是我们想要证明的结论。弦与关系交换了位置，并且很容易看出，弦的长度为 $l-2$，关系的长度为 $m+2$。注意，相对于箭图的其余部分，虚线关系保持不变。还要注意，如果不存在箭 $_{-1} \to {}_{0}$，那么突变过程会简化，并且交换后不会产生任何关系。至此，证明完成。□

CR 交换是研究奎普代数导出等价类的一种有价值的工具。现在，我们给出使用 CR 交换的一些特殊情形的一个推论。

推论 3.4。设 Q 是一个具有几乎分离关系的奇普箭图，其中一条长度为 l 的关系和一条长度为 m 的弦始于同一个顶点。若对这条关系和弦应用 *CR* 交换，则有：

(1) 如果 $l=2$，则通过 *CR* 交换得到的弦的长度为0。*(2)* 如果 $m=0$，则通过 *CR* 交换得到的关系的长度为 2

点 1 意味着，在这种情况下进行 CR 交换后，所得的奎普箭图仅包含一个长度为 $m+2$ 的关系，该关系沿主串向后移动了一个顶点，且其最后一个顶点没有弦伸出。由点 2 可知，如果在一个第一个顶点没有弦伸出的关系处进行交换，那么所得的奎普箭图将包含一个长度为 2 的关系，且有一条长度为$l-2$ 的弦从其最后一个顶点伸出。

结合这两点，我们注意到，对一个没有弦的孤立长度为 2 的关系进行 CR 交换后，会得到一个没有弦的新的长度为 2 的关系，并在箭图中向后移动一个顶点。

注释 3.5. 如本文所述，CR 交换采用右倾斜变异。存在一个完全对偶的结果，即使用左变异，这意味着我们可以双向交换弦与关系。

4. 活结与中山代数蕴含分离关系

在本节中，我们将证明，任何具有几乎分离关系的线性中山代数都与某个奇普箭图的路径代数导出等价。此外，我们将利用这一结果，发展一种将所有具有几乎分离关系的中山代数按导出等价类分类的方法。

核心思想是找到一种方法，在某个位置具有特定长度关系的箭图，与在相应位置具有相应长度弦的箭图之间进行突变。将此方法与 CR 交换结合起来，我们就能构造出一系列箭图突变，将奇普箭图变为中山代数的箭图。

我们将证明，在奎普箭图 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 与具有 $(r+1)$ 个关系的箭图 A_n 之间，存在一系列箭图突变，其中第 i 个关系的长度为 (m_i+2)，其起始顶点由计算 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}{}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$中第 i 条弦的起始位置之前出现的顶点数量来确定。因此，如果将 A_n 中的顶点标记为从 1 到 n，那么第 0 个关系将从顶点 k_0 开始，长度为 m_0；第 1 个关系将从顶点 $(k_0+m_0+k_1+1)$ 开始，长度为 m_1，依此类推。一般而言，关系 i 的长度为 m_i，并从顶点 $k_0+\sum_{j=1}^{i}(m_{j-1}+k_j+1)$开始，其中 $1\le i\le r$。这一对应关系的示例见图 7。

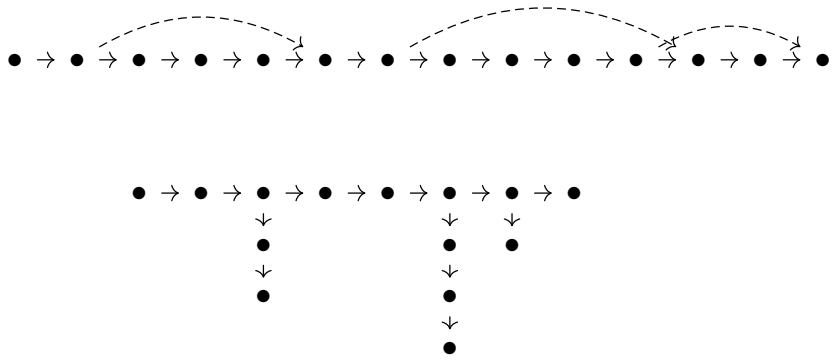


FIGURE 7. 代数 $A_{14}^{(4,5,3)}{}_{,(2,7,11)}$ 与 $kD^{(2,3,1)}{}_{(2,2,0,1)}$之间存在导出等价。

引理 4.1. 设 Q 是一个具有几乎分离关系的奇普箭图，并令 s、t 和 l 分别表示沿 Q 的主串的第一个关系的源点、目标点和长度。设 Q' 与 Q 相同，但作出以下修改：

- 关系 $s \dashrightarrow t$ 被移除。
- 路径 $s\to\ldots\to t$ 被一条路径 $s\to t'\to t$替换。
- 有一条长度为 $l-2$ 的弦从顶点 t' 延伸出来。

那么，Q 和 Q' 具有导出等价的路径代数。

证明。 这一证明的思路是，沿着 Q 中的主串，反复对第一个关系应用 CR 交换。每次这样操作时，构成第一个关系的部分都会沿主串向起始端移动一步，直到最终将其完全消去。在此过程中，第一个关系左侧的弦会先转变为关系，再重新变回弦，从而最终使除第一个关系之外的所有部分保持不变。随后，原来的第一个关系便被一支从其目标顶点引出一条弦的单箭所取代。

令 $m_i \geq 0$ 表示对于每个 $1 \leq i \leq n_0$，从主串的第 i 个顶点出发的弦的长度（可能为平凡弦）。如果 Q 的第一个关系从顶点 n_0 开始，且长度为 l_0，我们可以对其应用 CR 交换，并使用 $l = l_0$ 和 $m = m_{n_0}$。这将得到一个与之前相同的箭图，唯一的区别是给定的弦和关系已被移除，并替换为一个长度为 $m_{n_0} + 2$、从顶点 $n_0 - 1$ 开始的关系，同时从其最后一个顶点引出一条长度为 $l_0 - 2$ 的弦。

由于顶点 $n_0 - 1$ 按假设也有一条长度为 m_{n_0-1} 的弦从其发出，我们现在可以对这个新的关系以及 $l = m_{n_0} + 2$ 和 $m = m_{n_0-1}$ 应用 CR 交换。这将产生一个长度为 $m_{n_0-1} + 2$、始于顶点 $n_0 - 2$ 的关系，其最后一个顶点 n_0 有一条长度为 $(m_{n_0} + 2) - 2 = m_{n_0}$ 的弦从其发出。换句话说，我们重新构造出了从顶点 n_0 发出的长度为 m_{n_0} 的弦，但主串上的第一个关系现在出现在这条弦之前，而不是之后。现在，从顶点 n_0 有一条单独的箭指向我们在第一步中构造的长度为 $l_0 - 2$ 的弦的起始顶点。

由于从 1 到 n_0 的每个顶点都有一条长度为 ≥ 0 的弦，因此我们可以重复这一过程。每次我们对主串上的当前第一条关系应用 CR 交换时，该关系都会被移除，并由一条向后移动一个顶点开始的新关系取代。同时，在上一步中移除的弦会在这条新关系之后重新形成。经过 n_1 次 CR 交换后，该关系便从主串的第一条关系中移除，所有弦也都恢复原状。这样，我们得到的箭图与最初的箭图同构，唯一的区别是：从顶点 n_0 开始、长度为 l_0 的关系被一条从顶点 $n_0 + 1$ □开始、长度为 $l_0 - 2$ 的弦所取代。

定理 4.2。 设 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ 是一个具有几乎分离关系的线性中山代数。那么，$A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ 与该奇普箭图的路径代数之间存在导出等价。

$$D^{\left(l_0-2,\quad l_1-2\quad,\ \ldots\ ,\quad l_r-2\quad\right)}_{\left(\ n_0\ ,\ (n_1+1-n_0-l_0),\ \ldots\ ,\ (n_r+1-n_{r-1}-l_{r-1}),\ (n+1-n_r-l_r)\right)}$$

证明。 由于 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ 具有几乎分离关系，因此其箭图可以视为具有几乎分离关系的奇普箭图。这意味着引理 4.1 中的假设均得到满足，对从顶点 n_0 开始的关系进行 n_0 次 CR 交换，将会把该关系替换为一条从顶点 $n_0 + 1$ 出发、长度为 $l_0 - 2$ 的弦。

由于被移除关系的内部顶点已被移出并形成弦，因此主串中后续所有顶点到主串起点的距离均减少了 l_0-2。因此，沿主串的下一个关系（其起始顶点在交换之前为 n_1）现在从主串中的顶点 n_1-l_0+2 开始。同样，对该关系应用 n_1-l_0+2 次 CR 交换将其移除，并将其替换为一条长度为 l_1-2 、从顶点 n_1-l_0+3 开始的弦。请注意，这两条弦的起始顶点之间严格位于其间的顶点数量为

$$(n_1-l_0+3)-(n_0+1)-1=n_1+1-n_0-l_0,$$

它等于 1 加上第一条关系的末尾与第二条关系的开头之间的顶点数。

我们可以对箭图中其余的关系重复这一过程，每次都将当前排在最前面的关系替换为相应的弦。请注意，随着我们沿着箭图逐步处理，这会改变主串的编号，但不会改变关系起点之前出现的顶点总数。

原先从顶点 n_i 开始的关系将被一条长度为 l_i-2 的弦替换；这条弦起点之前的顶点总数（包括主串和弦上的顶点）为 n_i。前一条弦的长度为 $l_{i-1}-2$，其前方共有 n_{i-1} 个顶点。因此，这两条弦之间严格来说的顶点数为

$$n_i-(n_{i-1}+1)-(l_{i-1}-2)=n_i+1-n_{i-1}-l_{i-1}.$$

最后，当所有关系都被替换为弦后，最后一条弦之前有 n_r 个顶点，且弦上共有 l_r-1 个顶点（包括起点）。由于箭图中的顶点总数为 n，这意味着最后一条弦之后有 $n+1-n_r-l_r$ 个顶点。

换言之，我们最终得到的箭图恰好就是奎普箭图。

$$D^{(l_0-2,\quad l_1-2\quad ,\ \dots\ ,\quad l_r-2\quad)}_{(\ n_0\ ,\ (n_1+1-n_0-l_0),\ \dots\ ,\ (n_r+1-n_{r-1}-l_{r-1}),\ (n+1-n_r-l_r))},$$

由于这两个箭图之间存在一系列突变，因此它们的路径代数导出等价。□

在图 8 中，我们给出了本证明所采用方法的一个具体示例，该方法逐步将 Nakayama 代数的箭图转化为奇普箭图。

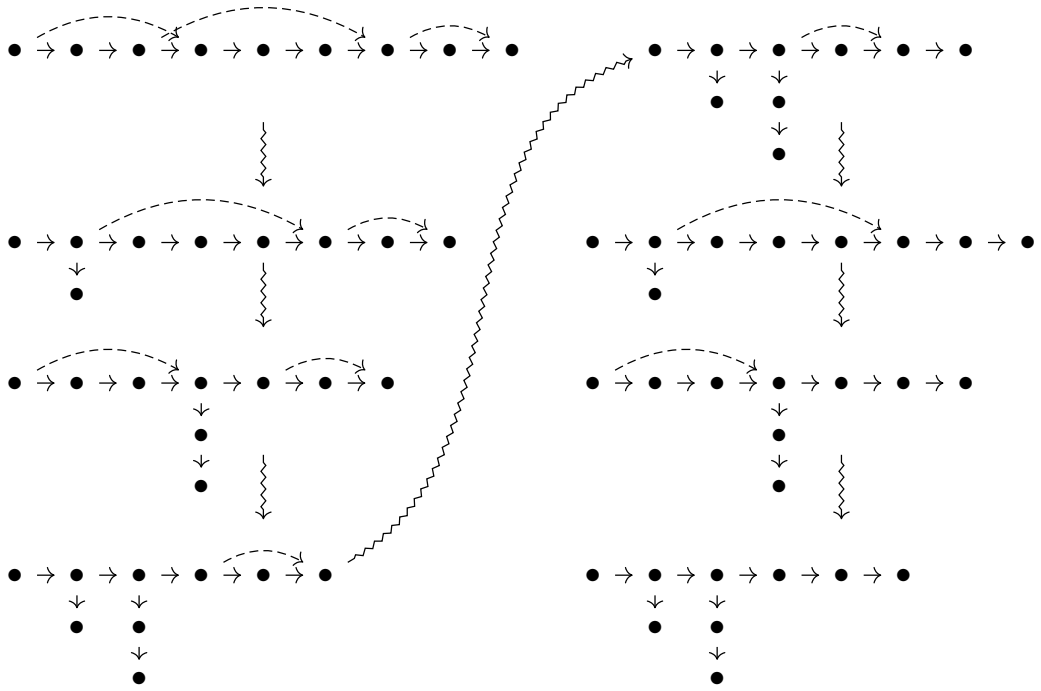


FIGURE 8.从 $A_{9\ 1,3,7}^{(3,4,2)}{}_{,\ ()}$ 的箭图变换到 $D^{(1,2)}{}_{(1,\ 0,\ 3)}$。每个波浪箭头都表示我们对当前奎普箭图中最左侧的关系应用 CR 交换。

推论 *4.3.* 如果 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$ 是一个具有几乎分离关系的线性中山代数，并且如果对于某个 $0 \le i \le r$， $l_i = 2$，那么 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_i,\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_r)}$ 与 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_r)}{}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_{i-1},n_{i+1},\ldots,n_r)}$ 导出等价。

证明。 这两个代数都满足定理 4.2 中的条件，而且很容易看出，由此得到的奎普将完全相同。这是因为唯一可能存在的差异是对应于从 n_i 开始的关系的弦，但该弦的长度为 $l_i - 2 = 0$，这意味着在两种情况下该处都不存在弦。因此，这两个中山代数都与同一个绳结代数导出等价，进而彼此导出等价。□

推论 4.3 表明，长度为 2 的关系不会影响具有几乎分离关系的线性中山代数的导出等价类。

引理 4.4。 两个没有关系的奇普箭图的路径代数导出等价，当且仅当它们是同一个底层奇普的不同定向。

证明。 根据 [1] 中的定理 1.2，我们知道，如果 Q 是一个底层图为树的箭图，而 Q' 是同一棵树的另一种定向，那么kQ和 kQ' 是导出等价的。由于奎普都是树，引理的一个方向便得证。

另一个方向可由 [2] 中推论 4 的证明得出。 □

定理 4.5。 设 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 为一个奎普，并设

$$n_i = k_0 + \sum_{j=1}^{i}(m_{j-1} + k_j + 1) \text{ for } 1 \le i \le r+1.$$

如果 D 是一个奇普箭图，那么存在一个导出等价。

$$kD \simeq A^{(m_0+2,m_1+2,\ldots,m_r+2)}_{n_{r+1},(k_0,n_1,n_2,\ldots,n_r)}$$

当且仅当 D 是 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_r,\ k_{r+1})}$ 且具有某种定向时。

证明。 我们将证明，对于奎普的一种定向，即 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$，导出等价存在。定理的其余部分由引理 4.4 得出。如果我们令

$$\begin{aligned} m_i &= l_i - 2 \\ k_0 &= n_0 \\ k_i &= n_i + 1 - n_{i-1} - l_{i-1}, \quad 1 \le i \le r+1, \end{aligned}$$

那么由定理 4.2 可知，存在一个导出等价。

$$kD^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})} \simeq A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}_{n,(n_0,n_1,\ldots,n_r)}$$

因此，我们得到，对于所有 i， $n_0 = k_0$ 和 $l_i = m_i + 2$ 成立，而将最后一个方程对 n_i 求解可得，对于 $1 \le i \le r+1$， $n_i = n_{i-1} + l_{i-1} + k_i - 1$ 成立。这意味着 $n_1 = k_0 + m_0 + k_1 + 1$，通过简单的归纳法即可证明：

$$n_i = k_0 + \sum_{j=1}^{i}(m_{j-1} + k_j + 1) \text{ for } 1 \le i \le r+1.$$

特别是，我们有：

$$n_{r+1} = k_0 + \sum_{j=1}^{r+1}(m_{j-1} + k_j + 1) = r + 1 + \sum_{i=0}^{r+1} k_i + \sum_{i=0}^{r} m_i,$$

其等于 $D^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 中顶点的数量。如果现在将这些值代入 $A^{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}_{n,(n_0,n_1,n_2,\ldots,n_r)}$，我们便得到一个导出等价。

$$kD^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})} \simeq A^{(m_0+2,m_1+2,\ldots,m_r+2)}_{n_{r+1},(k_0,n_1,n_2,\ldots,n_r)},$$

这正是我们想要证明的。上述中山代数与奎普 $P^{(m_0,m_1,\ldots,m_r)}_{(k_0,k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})}$ 的某一种定向所对应的路径代数导出等价，因此，根据引理 4.4，它与该奎普所有可能定向所对应的路径代数都导出等价。□

借助定理 4.2 和定理 4.5，我们得到了在奎普代数与具有几乎分离关系的线性中山代数之间进行转换的显式公式，同时保持导出等价性。

推论 4.6. 如果 $A^{(l_0,\dots,l_r)}{}_{n,(n_0,\dots,n_r)}$ 是一个具有几乎分离关系的线性中山代数，其中 $l_i \geq 3$ 对所有 i均成立，那么下列中山代数是导出等价的。

$$A^{(l_0,l_1,\dots,l_{r-1},l_r)}_{n,(n_0,n_1,\dots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(l_r,l_{r-1},\dots,l_1,l_0)}_{n,(n-n_r-l_r+1,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\dots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(l_0,l_1,\dots,l_{r-1},n-n_r-l_r+3)}_{n,(n_0,n_1,\dots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(n-n_r-l_r+3,l_{r-1},\dots,l_1,l_0)}_{n,(l_r-2,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\dots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(n_0+2,l_1,\dots,l_{r-1},l_r)}_{n,(l_0-2,n_1,\dots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(l_r,l_{r-1},\dots,l_1,n_0+l_0)}_{n,(n-n_r-l_r+1,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\dots,n-n_0-l_0+1)}$$
$$A^{(n_0+2,l_1,\dots,l_{r-1},n-n_r-l_r+3)}_{n,(l_0-2,n_1,\dots,n_{r-1},n_r)} \qquad A^{(n-n_r-l_r+3,l_{r-1},\dots,l_1,n_0+l_0)}_{n,(l_r-2,n-n_{r-1}-l_{r-1}+1,\dots,n-n_0-l_0+1)}.$$

此外，在这些代数中的任意一个的可用位置添加一组长度为2 的几乎分离关系，不会改变其导出等价类。

证明。 我们可以利用定理 4.2 将 $A^{(l_0,\dots,l_r)}{}_{n,(n_0,\dots,n_r)}$ 转化为一个奎普。然后，根据观察 2.2 给出的该奎普的其他定向，应用定理 4.5，即可得到其他中山代数。最后一部分由推论 4.3 得出。 □

注释 4.7. 任何具有几乎分离关系的奇普箭图都可以视为具有几乎分离关系的中山代数与无关系的奇普箭图之间的一个中间步骤。因此，这一导出分类也涵盖了所有具有几乎分离关系的奇普箭图，尽管描述这些箭图所需的组合学将变得复杂得多。

5. Complete classification for $n \leq 8$

现在，我们将明确列出长度为 $n \leq 8$ 、具有几乎分离关系的所有线性中山代数在导出等价意义下的完整分类。由推论 4.3 可知，我们可以将考察范围限制为代数 $A^{(l_0,\dots,l_r)}{}_{n,\ (n_0,\ \dots,\ n_r)}$ ，其中 $l_i \geq 3$ 对所有 i 均成立。

现在我们列出所有阶为 ≤ 8 的奎普。对于每个奎普，我们选择一个定向以得到一个奇普箭图，并应用定理 4.5 得到相应的线性中山代数。最后，我们应用推论 4.6，得到同一等价类中的其他中山代数。

由于篇幅所限，我们将列表列至 $n = 8$ ，但只要需要，我们完全可以轻松地继续列出更大的 n 。以下观察是推论 4.6 的一个简单推论

观察 5.1。每个导出等价类中，这类所有关系长度均为 ≥ 3 的代数至多有 8 个不同的代数。

这些导出等价类还会包含相同的代数，只是其上装饰了所有可能的长度为 2 的关系集合。

请注意，这些类中的大多数还会包含其他线性中山代数，它们的关系之间有更大的重叠；但本文只关注具有几乎分离关系的中山代数。

在下表中，与（扩展）Dynkin 图相同的奎普会标明其名称；其余的则采用我们对奎普的记法。

奎普	相应的中山代数
$\mathbb{A}_1$	A_1
$\mathbb{A}_2$	A_2
$\mathbb{A}_3$	A_3
$\mathbb{A}_4$	A_4
$\mathbb{D}_4$	$A^{(3)}_{4,(1)}$
$\mathbb{A}_5$	A_5
$\mathbb{D}_5$	$A^{(3)}_{5,(1)},\quad A^{(4)}_{5,(1)},\quad A^{(3)}_{5,(2)}$
$\mathbb{A}_6$	A_6
$\mathbb{D}_6$	$A^{(3)}_{6,(1)},\quad A^{(5)}_{6,(1)},\quad A^{(3)}_{6,(3)}$
$\mathbb{E}_6$	$A^{(4)}_{6,(1)},\quad A^{(3)}_{6,(2)},\quad A^{(4)}_{6,(2)}$
$\tilde{\mathbb{D}}_5$	$A^{(3,3)}_{6,(1,3)}$
$\mathbb{A}_7$	A_7
$\mathbb{D}_7$	$A^{(3)}_{7,(1)},\quad A^{(6)}_{7,(1)},\quad A^{(3)}_{7,(4)}$
$\mathbb{E}_7$	$A^{(4)}_{7,(1)},\quad A^{(5)}_{7,(1)},\quad A^{(3)}_{7,\ (2)},\quad A^{(5)}_{7,(2)},\quad A^{(3)}_{7,(3)},\quad A^{(4)}_{7,(3)}$
$\tilde{\mathbb{D}}_6$	$A^{(3,3)}_{7,(1,4)}$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$	$A^{(4)}_{7,(2)}$
$P_{(1,1)}$ $_{(1,0,2)}$	$A^{(3,3)}_{7,\ (1,\ 3)},\quad A^{(3,4)}_{7,\ (1,\ 3)},\quad A^{(4,3)}_{7,\ (1,\ 4)},\quad A^{(3,3)}_{7,\ (2,\ 4)}$
$\mathbb{A}_8$	A_8
$\mathbb{D}_8$	$A^{(3)}_{8,(1)},\quad A^{(7)}_{\text{<escape>@<escape>(1),\ <escape>@<escape>(3),}},\quad A^{(3)}_{8,(5)}$
$\mathbb{E}_8$	$A^{(4)}_{\text{<escape>@<escape>(1),\ <escape>@<escape>(1),}},\quad A^{(6)}_{\text{<escape>@<escape>(1),\ <escape>@<escape>(1),}},\quad A^{(3)}_{8,(2)},\quad A^{(6)}_{8,(2)},\quad A^{(3)}_{8,\ (4)},\quad A^{(4)}_{8,(4)}$
$\tilde{\mathbb{D}}_7$	$A^{(3,3)}_{8,(1,5)}$
$\tilde{\mathbb{E}}_7$	$A^{(5)}_{\text{<escape>@<escape>(1),\ <escape>@<escape>(3),}},\quad A^{(3)}_{8,(3)},\quad A^{(5)}_{8,\ (3)}$
$P_{(1,1)}$ $_{(1,\ 1,\ 2)}$	$A^{(3,3)}_{8,(1,4)},\quad A^{(3,4)}_{8,(1,4)},\quad A^{(4,3)}_{8,(1,5)},\quad A^{(3,3)}_{8,\ (2,\ 5)}$
$P_{(1,1)}$ $_{(1,0,3)}$	$A^{(3,3)}_{8,\ (1,\ 3)},\quad A^{(3,5)}_{8,(1,3)},\quad A^{(5,3)}_{8,(1,5)},\quad A^{(3,3)}_{8,(3,5)}$
$P_{(1,1,1)}$ $_{(1,0,0,1)}$	$A^{(3,3,3)}_{8,(1,3,5)}$
$P_{(1,1)}$ $_{(2,\ 0,\ 2)}$	$A^{(4,3)}_{8,\ (1,\ 4)},\quad A^{(4,4)}_{8,\ (1,\ 4)},\quad A^{(3,3)}_{8,\ (2,\ 4)},\quad A^{(3,4)}_{8,(2,4)}$
$P_{(1,2)}$ $_{(1,0,2)}$	$A^{(3,4)}_{8,\ (1,\ 3)},\quad A^{(4,3)}_{8,(2,5)}$
$P_{(2)}$ $_{(2,3)}$	$A^{(4)}_{8,(2)},\quad A^{(5)}_{8,(2)},\quad A^{(4)}_{8,\ (3)}$

FIGURE 9. 所有阶数为 ≤ 8 的奎普，以及对应的导出等价中山代数（不包括长度为 2 的关系）。

References

[1] Claire Amiot 和 Steffen Oppermann。《无环簇型代数：树型与 A 型》。载于：名古屋数学杂志 211 （ 2013 年 9 月），第 1–50 页。[2] Philippe Caldero 和 Bernhard Keller。《从三角范畴到簇代数 II》。载于：高等师范学校科学年刊 ´系列第 4 系列，39.6（2006 年），第 983–1009 页。[3] Didrik Fosse。《倾斜变异的组合程序》。2021 年。URL： https://arxiv.org/abs/2112.08129。[4] Mamad Ghebleh、Ali Kanso 和 D. Stevanovi´c。《具有与其二次线图相同 Wiener 指数的开放奎普》。载于：应用数学与计算281（2016 年 4 月），第 130–136 页。[5] Jingfen Lan 和 Lingsheng Shi。《直径为 2(n − 1)、谱半径最小的 n 阶图》。载于：线性代数及其应用486（2015 年），第 219–233 页。[6] Renee Woo 和 Arnold Neumaier。《关于谱半径有界的图》。载于：图论与组合学23（2007 年 12 月）。