arXiv:2305.06646v1 [math.NA] 11 May 2023

面向剪切波弹性成像的基于对象的贝叶斯全波形反演

Ana Carpio（马德里康普顿斯大学）、Elena Cebri´an（布尔戈斯大学）、Andrea Guti´errez（马德里康普顿斯大学）

2023年5月12日

摘要。 我们开发了一种计算框架，用于量化剪切波弹性成像中组织异常检测的不确定性。我们采用贝叶斯推断方法。给定观测数据、正向模型及其不确定性，我们求解表示异常几何形态及其剪切模量的参数场的后验概率。为了构建先验概率，我们利用相关目标函数的拓扑能量。我们通过具有光滑形状和不规则形状的合成二维测试，展示了该方法的有效性。利用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）技术对后验分布进行采样，我们获得了有关异常剪切模量和几何特性的统计信息。对于由低维至中等维参数集表征的形状，通用仿射不变集成马尔可夫链蒙特卡罗采样器能够满足需求。然而，马尔可夫链蒙特卡罗方法的计算成本较高。对于简单形状，我们设计了一种快速优化方案，用于计算代表最可能参数值的最大后验（MAP）估计。随后，我们通过在最大后验点附近进行线性化，构建一个高斯分布来近似后验分布，从而以较低的计算成本捕获其主要模态。

1 引言

医学成像是生物成像的一个分支，旨在通过无创技术 [33], （如 X 射线摄影、磁共振成像、断层成像、超声回波成像、超声成像、内窥镜检查、弹性成像、触觉成像、热成像、核医学和全息成像）揭示隐藏在组织内部的结构。从数学角度来看，这些技术都涉及逆问题，其目的是根据观测到的信号推断活体组织的特性。其典型框架如下：一组发射器发射波，这些波与组织相互作用。由此产生的波场在接收器网格处被记录，并经过分析以推断介质的结构。不同的成像技术在所使用的波的类型（电磁波、声波、热波、弹性波等）、发射器和接收器的排列方式以及所监测的介质特性方面各不相同。

采用光 [36], 声波 [46] 或弹性 [47] 波束的无害成像方式尤其值得关注，因为它们不会产生继发效应。弹性成像是一种相对较新的成像技术，用于绘制软组织 [47, 50]的弹性特性图。癌性肿瘤通常比周围组织更坚硬（例如前列腺肿瘤和乳房肿瘤），而受损的肝脏则比健康肝脏更坚硬 [3, 27, 50]。尽管现有技术 [45] 能够在特定情况下区分健康组织与不健康组织，但对于含有多个异常、微小肿瘤或低对比度区域的组织的研究，可能会受益于更精细的数学方法的发展。

本文提出了一种结合拓扑先验的软组织剪切波弹性成像物体贝叶斯全波形反演框架。不同于追踪组织内部弹性常数或波速的空间变化（这种方法常见于许多地球物理学和医学应用中，参见[3, 20, 22, 40, 47, 51], 及其中的参考文献），我们采用逆散射方法 [10] ，并将组织中的局部异常（如肿瘤或纤维瘤）表示为具有独特弹性常数、嵌入背景组织中的物体 [25]。这种方法的第一个优势在于，异常可以通过少量未知量来表征，这些未知量用于定义其参数化形式和弹性特性，从而降低计算成本。此外，其他成像装置 [7] 的研究表明，与追踪整个空间中材料参数场的空间变化相比，通过寻找界定局部非均匀区域边界的突变界面，以及这些区域内部的材料参数变化，能够更加精确地捕捉局部非均匀性。第二个优势在于，我们可以根据物体来定义失配泛函。

形状，然后利用相应的拓扑能量，以较低的代价构建尖锐先验。由于拓扑能量能够抑制包含多个物体的构型中的振荡，因此在确定性逆散射框架中，拓扑能量被用于寻找散射体的初始猜测，并应用于无损材料检测 [13, 14]和生物学领域 [44]。

根据预期的复杂程度，可以为异常边界 [21, 24, 29, 39] 选择不同的表示方式。这里，我们考虑两种星形参数化方式，它们的区别在于半径的参数化方法。星形物体的边界由一个角度相关的距离函数（即半径）定义，该函数沿着所有空间方向上的射线取值 [4]。我们可以用仅涉及少量参数的三角多项式近似半径，从而重现平滑的形状 [26]。对于较粗糙的边界，则更适合用高维半径函数描述 [15]。这两种情况对于研究组织中的异常都很有意义。例如，肿瘤会因其阶段和性质不同而呈现平滑或不规则的轮廓。我们表明，通过对后验分布进行马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）采样，可以推断组织中异常的结构并量化其不确定性。这些后验分布采用由拓扑能量方法构造的先验，其似然则根据记录的弹性成像数据与针对任意异常数值生成的合成观测之间的差异定义。 [23, 16] 当我们能够用三角多项式组合近似半径函数时，仿射不变集成采样器的表现尚可。我们还可以提取由高维半径函数定义的不规则物体的基本信息。然而，马尔可夫链蒙特卡罗方法的计算成本很高。对于简单形状，我们还开发了快速方法：先通过优化计算异常参数的最大后验 [5, 9] 近似，然后对后验分布的线性化近似进行采样。其计算成本低得多，但后验分布结构的细节（例如多峰性）可能会丢失。

本文组织结构如下。第2节介绍组织中剪切波成像的数学模型。第3节构建贝叶斯反演框架。第4节解释如何为异常的数量及其形状构建先验。第5节采用集成马尔可夫链蒙特卡罗采样器求解贝叶斯逆问题，并针对由低维参数集表征的相关配置，量化解的不确定性。同时确定定义良好的最大后验（MAP）近似。第6节介绍一种低代价方法，该方法结合优化来

计算最大后验点，并对其附近的后验概率进行线性化，以量化不确定性。最后，第7节调整仿射不变集成采样方法，以推断高维不规则形状的结构。最后的附录详细介绍所采用的数值方案和所做的参数选择。第8节给出我们的结论。

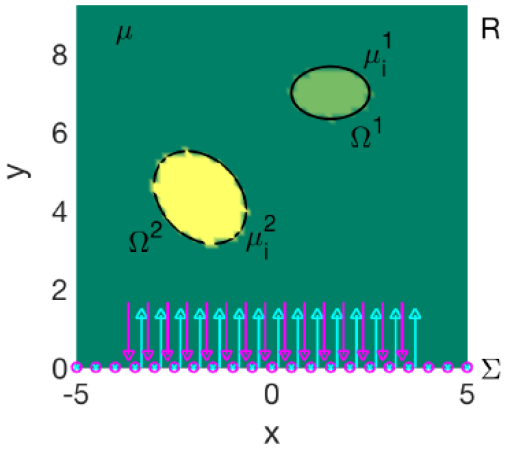

图1：成像装置的无量纲示意图。发射器（青色）产生与介质相互作用的波。反射波由接收器（洋红色）记录。发射器和接收器是位于同一位置的换能器。

2 物理装置

剪切波弹性成像通过剪切波追踪剪切模量 μ 的变化，因为从健康组织到不健康组织的过程中，该属性的变化更为显著。介质中的弹性波分为剪切分量（剪切S波）和压缩分量（纵向P波） [31]。对于组织中所考虑的深度范围，剪切波是合适的，因为P波传播速度更快，能够迅速到达更深处。此外，在低频条件下，剪切波基本不受组织中衰减效应的影响 [45] ，并且遵循标准波动方程。

成像装置如图1所示。我们考虑一个包含一组异常 $\Omega = \cup_{\ell=1}^{L}\Omega^{\ell}$ 的介质 $R \subset \mathbb{R}^2$ （该组织），并定位

一组位于边界 ∂R 的一部分 Σ 上的发射器$\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, J$, 。介质的密度为 ρ ，弹性常数为 μ 和 λ，而异常的密度为 ρ_{i} ，弹性常数为 μ_{i} 和 λ_{i}。发射的波与介质相互作用，由此产生的波场记录在接收器网格$\mathbf{r}_k$, $k = 1, \ldots, K$上。发射器和接收器位于同一区域内。它们可以交错分布，或者在某些配置中相互重叠。在这里，我们将考虑它们是位于相同位置的换能器，交替发挥这两种作用。接下来，我们将建立该框架下控制波场动力学的正问题。

为简化起见，我们认为由声源发出的波遵循标量波动方程。

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f(t) g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R,\ t > 0, \\ &u(\mathbf{x}, 0) = 0, u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad\quad \mathbf{x} \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ \rho_{\mathrm{i}}^{\ell}, & \mathbf{x} \in \Omega^{\ell},\ \ell = 1, \ldots, L, \end{cases}$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ \mu_{\mathrm{i}}^{\ell}, & \mathbf{x} \in \Omega^{\ell}, \ell = 1, \ldots, L, \end{cases}$$

在健康组织中具有局部波速 $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$，在每个异常区域 Ω^{ℓ} 内部具有波速 $\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{i}}^{\ell}}{\rho_{\mathrm{i}}^{\ell}}}$。在组织中，我们有 $\rho_{\mathrm{i}} \sim \rho$。我们假设发射器 $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, J$,产生形式为 $f(t)g_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ 的源项，其中 g_j 是在 0 附近具有窄支撑集的光滑函数，将它们求和后得到 $g(\mathbf{x})$。我们用 Ricker 子波 $f(t) = f_0(1 - 2\pi^2 f_M^2 t^2) e^{-\pi^2 f_M^2 t^2}$ 表示函数 $f(t)$，其峰值频率为 f_M。从初始正极大值移动到负极小值所需的时间为 $T_D = \frac{\sqrt{6}}{2\pi f_M}$ ，此后该函数逐渐趋近于零。

整个器官 R 可以表示为一个在其物理边界 ∂R 处法向导数为零的区域。

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \quad \partial R. \tag{2}$$

方程 (1)–(2) 定义了正演模型，其中 $\rho \in L^{\infty}(R)$、 $\mu \in L^{\infty}(R)$、$\rho \geq \rho_0 > 0$ 和 $\mu \geq \mu_0 > 0$。假设 R 和 Ω 具有 C^1 边界，则问题 (1)–(2) 有唯一解 $u \in C([0, \tau]; H^1(R))$, $u_t \in$

$C([0,\tau];\ L^2(R))$，$u_{tt} \in L^2(0,\ \tau;(H^1(R))')$，对任意 $\tau > 0$ 均成立，见 [32]。这里，$H^1(R)$ 表示标准 Sobolev 空间，而 $(H^1(R))'$ 是其对偶空间[6]。由于 $u_{tt}(\mathbf{x},\ 0) =\in L^2(R)$，我们还有 $u_t \in C([0,\tau];\ H^1(R))$ 和 $u \in C([0,\tau];\ H^2(R\setminus\Omega))$，见附录。然后，$u(t)$ 定义在 Σ 上，并且在接收点处，既可按 $L^2(\Sigma)$ 迹的意义定义，也可逐点定义 [1, 38]。

假设 Ω_{true} 表示真实异常，$\rho_{\text{i, true}}$，$\mu_{\text{i, true}}$ 表示其真实材料属性。原则上，接收器处记录的数值构成数据，即 $d_{k,\text{ true}}^{m} = u(r_k,\ 0,\ t_m)$，其中 u 是当 $\Omega = \Omega_{\text{true}}$. 时方程 (1)-(2) 的解。实际上，记录数据 d_k^m会受到不同噪声源的干扰，即 $d_k^m = d_{k,\text{ true}}^{m}$ +噪声。我们假设加性噪声服从均值为零、协方差矩阵为 $\mathbf{\Gamma}_{\text{n}}$ 的多元高斯分布$\mathcal{N}(0,\ \mathbf{\Gamma}_{\text{n}})$:

$$d_k^m = d_{k,\text{true}}^m + \varepsilon_k^m, \tag{3}$$

对于 $k = 1$、.....、K，$m = 1$、.....、M，其中 ε服从 $\mathcal{N}(0$、$\mathbf{\Gamma}_{\text{n}})$ 分布。我们假设每个接收器的噪声水平相同且彼此不相关，因此 $\mathbf{\Gamma}_{\text{n}}$ 是一个维度为 $N = KM$ 、并乘以 σ_{noise}^2.的单位矩阵。

3 反问题

反问题在于寻找异常 Ω 及其材料系数 ρ_{i} 和 μ_{i} ，使正问题的解以某种待指定的方式与记录数据相符。对于组织中的剪切波弹性成像，我们取 $\rho_{\text{i}} \sim \rho$，因此只需识别 μ_{i}。在确定性框架下，通常采用优化形式：寻找物体 Ω 和参数 μ_{i} ，使代价最小。

$$J(\Omega,\mu_{\text{i}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}|u_{\Omega,\mu_{\text{i}}}(r_k,0,t_m) - d_k^m|^2, \tag{4}$$

其中，$u_{\Omega,\mu_{\text{i}}}(r_k,0,t_m)$ 表示在记录时刻于接收器处计算得到的相应正问题的解。也可以采用基于最优传输的更精细的代价函数 [18, 35]。为减少非物理极小值的出现，对代价函数（4）进行正则化，即添加额外项，例如 Tikhonov 类型的项，参见 [8, 26]及第 6 节。

为了继续进行，我们需要用一组参数 $\boldsymbol{\nu}$ 对异常的几何形状进行数学表征。星形参数化为表征异常的形状提供了一种简单的选择，尽管也可以考虑更一般的表征方式 [24, 29, 39]。星形物体由一个中心和一个半径函数定义，该函数确定从中心出发的所有可能射线上边界点的位置。假设我们知道组织中包含 L 个星形异常，即 $\Omega = \cup_{\ell=1}^{L}\Omega^{\ell}$。假设 $\mu_{\mathrm{i}}(x)$ 是分段常数，在 Ω^{ℓ}. 中等于 μ_{i}^{ℓ}。那么，半径函数的不同表示方式将产生维度较低或较高的方法。我们将考虑两种可能性。

对于光滑的星形物体，我们可以用三角多项式近似半径函数。给定数据 $\mathbf{d} = (d_1^1, \ldots, d_K^1, \ldots, d_1^m, \ldots, d_K^m)$，我们希望预测 $n(L, Q) = L(2Q + 4)$ 参数

$$\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}^1, \ldots, \boldsymbol{\nu}^L), \quad \boldsymbol{\nu}^{\ell} = (c_x^{\ell}, c_y^{\ell}, a_0^{\ell}, b_1^{\ell}, a_1^{\ell}, \ldots, b_Q^{\ell}, a_Q^{\ell}, \mu_{\mathrm{i}}^{\ell}), \quad \ell = 1, \ldots, L, \quad (5)$$

表示与参数化相关的异常的中心（c_x^{ℓ}, c_y^{ℓ}）和半径 $r^{\ell}(\theta)$，按块排序

$$\mathbf{q}(\theta)^{\ell} = (c_x^{\ell}, c_y^{\ell}) + r^{\ell}(\theta)(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)), \quad \theta \in [0, 1], \quad (6)$$

$$r^{\ell}(\theta) = a_0^{\ell} + 2\sum_{q=1}^{Q} a_q^{\ell}\cos(2\pi q\theta) + 2\sum_{q=1}^{Q} b_q^{\ell}\sin(2\pi q\theta), \quad (7)$$

对于 $\ell = 1, \ldots, L$。在三维空间中也存在类似的参数化方法，即用球谐函数展开来替代半径的傅里叶级数展开 [8, 21]。模态数量 Q 控制边界允许的粗糙程度，较大的数值会生成更复杂的形状 [21]。

不规则边界采用一般半径函数$r(\theta)$表示效果更好，见 [2, 4]。在我们的情形中，我们通过在均匀网格 θ_j 上构建分段线性重建来近似边界，该网格由 $[0, 1]$ 组成，节点值为$r_j = r(\theta_j)$、 $j = 0, \ldots, Z$。因此，异常集合由$n(L, Z)$维参数集表示。

$$\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}^1, \ldots, \boldsymbol{\nu}^L), \quad \boldsymbol{\nu}^{\ell} = (c_x^{\ell}, c_y^{\ell}, r_0^{\ell}, r_1^{\ell}, \ldots, r_{Z-1}^{\ell}, \mu_{\mathrm{i}}^{\ell}), \quad \ell = 1, \ldots, L, \quad (8)$$

其中 $r_j^{\ell} = r^{\ell}(\theta_j)$、 $j = 0$、.....、 $Z - 1$ 和 $r_Z = r_0$。每个对象的边界由以下内容给出。

$$\mathbf{q}(\theta)^{\ell} = (c_x^{\ell}, c_y^{\ell}) + r^{\ell}(\theta)(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)), \quad \theta \in [0, 1], \quad (9)$$

$$r^{\ell}(\theta) = r_j^{\ell}\frac{\theta - \theta_{j+1}}{\theta_j - \theta_{j+1}} + r_{j+1}^{\ell}\frac{\theta - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \ \theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \ j = 0, 1, \ldots, Z-1, \quad (10)$$

对于 $\ell = 1, \ldots, L$。请注意，虽然 Q 通常很小，但 Z 可能非常大。图 2 比较了由 (5)-(7) 定义的星形对象与由基于 (8)-(10) 构建的分段近似定义的星形对象。

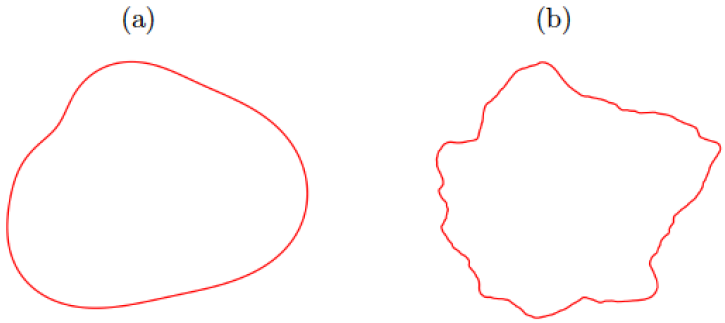

图 2：半径由以下方式定义的星形物体：(a) 使用 $Q = 5$ 的三角多项式 (7)；(b) 基于均匀网格 (θ_j, r_j)，$j = 0, \ldots, Z$, $Z = 500$构建的分段近似 (10)，步长为 $1/Z$。

为了量化逆问题解的不确定性，我们采用有限维情形下的贝叶斯公式 [28, 48]：

$$p_{\mathrm{pt}}(\boldsymbol{\nu}) := p(\boldsymbol{\nu}|\mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d}|\boldsymbol{\nu})}{p(\mathbf{d})} p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu}). \tag{11}$$

这里，变量 $p_{\mathrm{pr}}(\cdot)$的先验密度纳入了现有的专家知识，而 $p(\mathbf{d}|\boldsymbol{\nu})$表示在给定变量 $\boldsymbol{\nu}$的条件下观测值$\mathbf{d}$ 的条件概率（或似然）。贝叶斯逆问题的解是给定数据时参数的后验密度 $p_{\mathrm{pt}}(\boldsymbol{\nu}|\mathbf{d})$。密度 $p(\mathbf{d})$是一个与参数无关的归一化因子。我们选择一个似然函数 $p(\mathbf{d}|\boldsymbol{\nu})$

$$p(\mathbf{d}|\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{n}}|}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}) - \mathbf{d}\|^2_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{n}}^{-1}} \Big). \tag{12}$$

这里，$\|\mathbf{v}\|^2_{\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{n}}^{-1}} = \mathbf{v}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{\mathrm{n}}\, \mathbf{v}$ 和$\mathbf{f}(\boldsymbol{\nu})$表示与参数 $\boldsymbol{\nu}$相关联的测量算子，即，

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}) = \left(U_{\Omega_{\boldsymbol{\nu}}, \mu_{\mathrm{i}}}(\mathbf{r}_k, 0, t_m)\right)_{k=1,\ldots,K, m=1,\ldots,M}, \tag{13}$$

其中，$U_{\Omega_{\boldsymbol{\nu}},\ \mu_{\mathrm{i}}}$ 是正问题的解，且 $N = KM$。

我们通常选择 $p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu})$ 作为多元高斯分布或对数高斯分布，详情请参见第4.2节。我们可以利用通过任何方式获取的先验信息来实现这种方法，例如来自其他成像系统或其他成像算法的信息，见 [45]。如果没有这类信息，下一节将说明如何从数据中生成先验知识。

4 异常的拓扑先验

拓扑能量方法通过将记录数据分为两半，提供关于异常数量、位置和大小的先验信息：dodd 表示在时刻 t_{2m+1} 测得的数据，deven 表示在时刻 t_{2m} 测得的数据。我们利用 deven，通过确定性代价泛函 (4) 的拓扑能量生成关于异常的先验信息。数据的另一半 dodd 则用于似然 (12)，下文将对此进行说明。

4.1 拓扑能量的计算

给定数据 $\mathbf{d}_{\mathrm{even}}$，代价的拓扑能量 [13, 14]

$$J(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{obs}}\int_0^{\tau_{\mathrm{end}}} |u_\Omega(\mathbf{x},s) - \mathbf{d}_{\mathrm{even}}(\mathbf{x},s)|^2 ds dx, \tag{14}$$

u_Ω 作为（1）-（2）的解，表示为

$$E(\mathbf{x}) = \int_0^{\tau_{\mathrm{end}}} |U(\mathbf{x},s)|^2 |P(\mathbf{x},s)|^2 ds, \tag{15}$$

其中，$U = u_\Omega$ 和 P 是计算拓扑导数 [34]时出现的相应伴随场。在我们的设置中，我们将观测集 Γ_{obs} 视为一个接收器集合。因此，公式（14）中的$\int_{\Gamma_{\mathrm{obs}}}$ 变为接收器$\mathbf{r}_k$处各数值之和。由于我们仅在离散时间点 t_{2m}记录数据，因此也将 $\int_0^{\tau_{\mathrm{end}}}$ 近似为这些时间点处各数值之和。令 $\Omega = \emptyset$，则正演场 U 和伴随场 P 表示为

$$\begin{aligned} &U_{tt} - c^2\Delta U = f(t)g(\mathbf{x}), && \mathbf{x}\in R,\\ &\tfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0, && \mathbf{x}\in \partial R,\\ &U(\mathbf{x},0) = 0, U_t(\mathbf{x},0) = 0, && \mathbf{x}\in R, \end{aligned} \tag{16}$$

对于 $t \in [0, \tau_{\text{end}}]$ 和

$$\begin{aligned} &[P_{tt} - c^2\Delta P](\tau_{\text{end}} - t) = -(U - \mathbf{d}_{\text{even}})(\tau_{\text{end}} - t) \sum_{k=1}^{K} \delta_{\mathbf{r}_k}, && \mathbf{x} \in R, \\ &\tfrac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = 0, && \mathbf{x} \in \partial R, \\ &P(\mathbf{x}, \tau_{\text{end}}) = 0, P_t(\mathbf{x}, \tau_{\text{end}}) = 0, && \mathbf{x} \in R, \end{aligned} \tag{17}$$

对于 $t \in [\tau_{\text{end}}, 0]$。这里， c 是一个常数，表示所有位置处健康组织的波速，而 $\delta_{\mathbf{r}_k}$ 表示支撑在接收器处的狄拉克质量。出于计算目的，我们用高斯正则化来替代它们。请注意，即使c_{i} 和 μ_{i} 未知，问题（16）和（17）仍然可以通过计算求解。与基于拓扑导数 [34] 的替代方法相比，这是一项优势，因为后者需要预先知道这些参数。此外，在存在多个物体时，伪振荡现象显著减弱，这也是一项额外优势。拓扑能量与反向传播技术 [49] 有一定关联，并已被用于材料和组织的无损检测，参见 [13, 14, 44]。

前面的描述假设我们从开始发射的时刻 $t = 0$ 起，在接收器处记录数据。如果我们在较晚的时刻 τ_{in}开始记录，则公式（14）的积分区间为 τ_{in} 至 τ_{end} ，且（17）式右侧仅在 $[\tau_{\text{in}}, \tau_{\text{end}}]$内非零。我们将最终时间设为 $\tau_{\text{end}} \sim 2\frac{H}{c}$，其中 H 为预期的分辨率深度。

图 3 展示了在去除量纲后，对于 A.2 中指定的参数值，在不同发射器/接收器配置下，几种物体几何形状所得到的拓扑能量场。用于计算这些能量场的数据 $\mathbf{d}_{\text{even}}$ 是合成数据：通过在真实物体存在的情况下，对无量纲化的正问题 (30) 进行数值求解，在选定的空间/时间数据网格上评估解，并添加 10% 的噪声来生成这些数据，具体如第 2 节所述。为避免逆犯罪，采用较粗糙的网格对 (16) 中的场 U和 (17) 中的场 P 进行数值近似：这些场所使用的空间步长和时间步长均为生成数据时数值求解所用步长的两倍，且空间网格有所不同。在拓扑能量的计算中，我们设置了$\tau_{\text{in}} = 2$ （对于我们所选的参数，该值使 $f(t)$ 几乎为零的取值）以及$H = 7$ 。

4.2 先验构建

一旦计算出拓扑场，我们便利用峰值构建背景介质 R 中异常区域的初始猜测 Ω_0 。

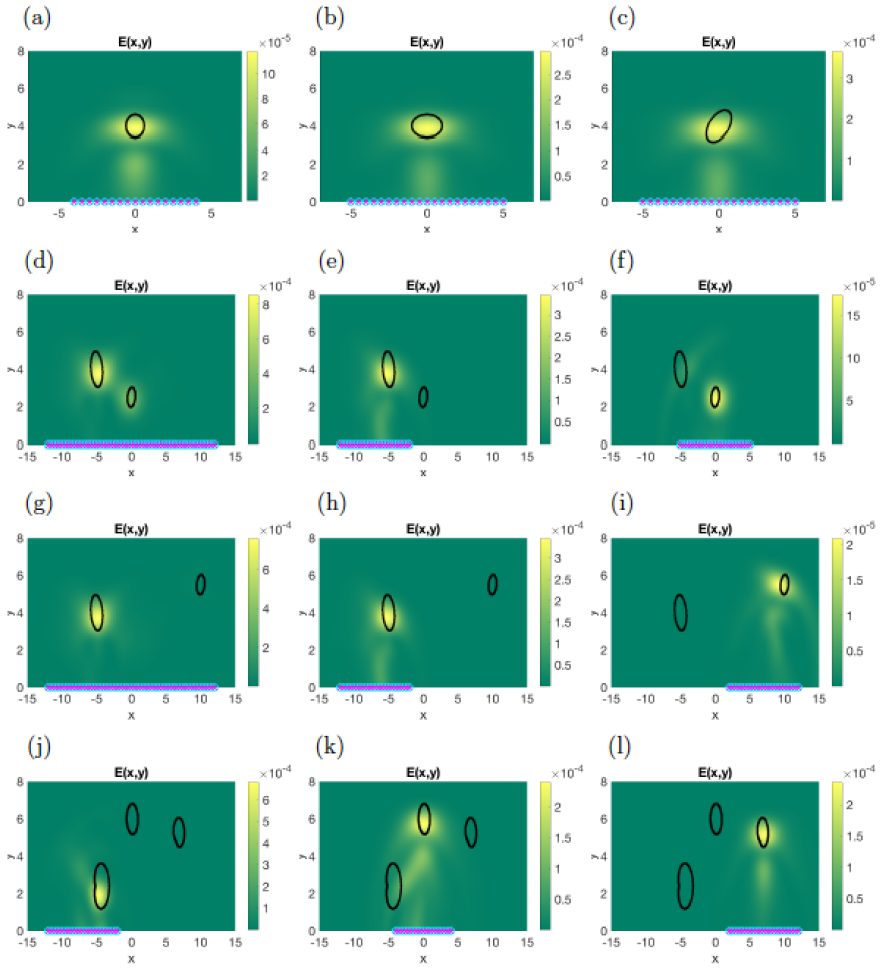

图 3：以下情况下的拓扑能量场：尺寸和方向各异的单个物体（a）圆，（b）椭圆，（c）旋转椭圆；不同发射器/接收器配置下的两个物体（d）、（g）居中，（e）、（h）偏左，（f）、（i）偏右；以及扫过底部区域的三个星形物体（j）–（l）。叉号和圆表示发射器和接收器，它们位于同一位置。黑色曲线表示真实物体。数据噪声水平：10%。

拓扑能量的：

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in R \mid E(\mathbf{x}) > (1 - C_0) \max_{\mathbf{y} \in R} E(\mathbf{y})\}, \tag{18}$$

其中， $C_0 \in (0,1)$ 满足 $J(\Omega_0) < J(\emptyset)$. 当存在多个物体时，如图 3(d)-(l) 所示，通过依次激活整个发射器/接收器网络的不同部分，我们可以获得更精确的信息。我们对每个部分中发现的主要峰值进行圆拟合。通过这种方式，我们能够检测到所有异常。相反，当我们使用来自整个网络的信息时，通常只能找到最显著的异常。我们利用这些信息，按照以下方式为所考虑的两种星形参数化构建先验。

假设我们定位到 L 个峰值，就对这些峰值拟合由 $\boldsymbol{\nu}_0 = (\boldsymbol{\nu}_0^1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_0^L)$ 参数化的圆。当我们采用表示式 (5)-(7) 时，我们设定

$$\boldsymbol{\nu}_0^\ell = (c_{x,0}^\ell, c_{y,0}^\ell, a_{0,0}^\ell, b_{1,0}^\ell, a_{1,0}^\ell, \ldots, b_{Q,0}^\ell, a_{Q,0}^\ell, \mu_{\mathrm{i},0}^\ell), \quad \ell = 1, \ldots, L, \tag{19}$$

其中，$c_{x,0}^\ell, c_{y,0}^\ell$ 表示每个组分的质心，$a_{0,0}^\ell$ 表示最小直径的一半，$a_{1,0}^\ell = \ldots = a_{Q,0}^\ell = b_{1,0}^\ell = \ldots = b_{Q,0}^\ell = 0$。我们还设置了 $\mu_{\mathrm{i},0}^\ell = \mu$，即已知的健康组织背景值。然后，我们将 $p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu})$ 选为协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}$ 的多元高斯分布。

$$p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0)^t \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0)\right), \tag{20}$$

其中，n 是 $\boldsymbol{\nu}_0$ 的维度，假设 $\mu_{\mathrm{i}}^\ell > 0$，与参数化 $\boldsymbol{\nu}$ 相关联的曲线满足 $r^\ell(\theta) > 0$，对于 $\theta \in [0,1]$ 和所有 ℓ，这些曲线均不相交，且不形成嵌套构型。否则，$p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu})$ 设为零。请注意，$r^\ell(\theta) > 0$ 并非对曲线参数符号的约束，而是对组合式（7）符号的约束。我们选择一个由 L 个块构成的对角协方差矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}$。在我们的数值测试中，每个块以 $(\sigma_x^\ell)^2 = (\sigma_y^\ell)^2 = 0.1$ 开始，并以 $(\sigma_\mu)^2 = 20^2$. 结束。随后，$(\sigma_{a_0}^\ell)^2 = 0.1$ 和 $(\sigma_{a_q}^\ell)^2 = (\sigma_{b_q}^\ell)^2 = 0.1/(1+q^2)^s$、$1 \le q \le Q$、$s$ 较大，如[9], 中所示，从而使先验分布倾向于具有 $r(t) > 0$ 的规则形状。通常，我们固定 $s = 3$ 和 $Q = 5$。

当我们使用表示式 (8)-(10) 时，我们设定

$$\boldsymbol{\nu}_0^\ell = (c_{x,0}^\ell, c_{y,0}^\ell, r_{0,0}^\ell, r_{1,0}^\ell, \ldots, r_{Z-1,0}^\ell, \mu_{\mathrm{i},0}^\ell), \quad \ell = 1, \ldots, L, \tag{21}$$

其中 $c_{x,0}^\ell = \ldots = r_{Z-1,0}^\ell = \mu_{\mathrm{i},0}^\ell = \mu$，$c_{y,0}^\ell$ 是各个分量的质心，$r_{0,0}^\ell = r_{1,0}^\ell = \ldots = r_{Z-1,0}^\ell$ 是最小直径的一半，且 $r_{0,0}^\ell = r_{1,0}^\ell = \ldots = r_{Z-1,0}^\ell$。注意，我们选择 $p_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\nu})$，令其为变量 $c_{x,0}^\ell, c_{y,0}^\ell, \mu_{\mathrm{i},0}^\ell$ 的多元高斯分布的乘积（标准差与之前相同），以及 $r_{0,0}^\ell, r_{1,0}^\ell, \ldots, r_{Z-1,0}^\ell$ 的对数高斯分布，其协方差矩阵为 Matérn 协方差矩阵，参见

[15]。我们使用以下表达式表示相距 d 的点 (cos(θ_i),sin(θ_i)) 和 (cos(θ_j),sin(θ_j)) 之间的 Matérn 协方差： [43]

$$C_{\nu,\rho,\sigma}(d) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\boldsymbol{\nu})} \left(\sqrt{2\nu}\frac{d}{\rho}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\sqrt{2\nu}\frac{d}{\rho}\right),$$

其中， Γ 为伽马函数， K_ν 为第二类修正贝塞尔函数， ν、 ρ、 σ 为参数。在我们的数值测试中，我们固定$\nu = 3/2$、 $\sigma = 0.2$、 $\rho = 0.5$。

5 马尔可夫链蒙特卡洛采样

我们将上一节中得到的先验分布代入由（11）和（12）给出的后验概率 p_{pt}，其中数据 $\mathbf{d}_{\text{odd}}$ 未用于生成先验信息。随后，我们可以使用马尔可夫链蒙特卡罗方法对未归一化的后验分布 $q(\boldsymbol{\nu}) = p(\mathbf{d}_{\text{odd}}|\boldsymbol{\nu})p_{\text{pr}}(\boldsymbol{\nu})$ 进行采样。请注意，马尔可夫链蒙特卡罗采样不需要（11）中的未知缩放因子 $p(\mathbf{d})$。标准的马尔可夫链蒙特卡罗方法（例如 Metropolis-Hastings 或哈密顿蒙特卡罗） [37], 会生成一条由 N 维状态 $\boldsymbol{\nu}^{(0)} \longrightarrow \boldsymbol{\nu}^{(1)} \ldots \longrightarrow \boldsymbol{\nu}^{(i)} \ldots$ 组成的链，这些状态逐渐按照目标分布进行分布。首先从先验分布中采样一个初始状态 $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$，然后在转移算子的引导下，从一个状态 $\boldsymbol{\nu}^{(i)}$转移到下一个状态 $\boldsymbol{\nu}^{(i+1)}$。较新的集成马尔可夫链蒙特卡罗采样器 [16, 23] 从先验分布中抽取 W 个初始状态（“行者”或“粒子”），并在将这些状态混合的同时转移到新状态，从而构建链。这使我们能够处理多峰后验分布 [9], 并行化该过程，以更快地探索后验分布的结构。

不同的集成采样器对我们针对异常所考虑的不同参数化方式具有不同的适应能力。仿射不变采样器在我们的设置中表现良好。我们考虑了两种采样器。第一种是基于拉伸移动的仿射不变集成采样器（SAIES），参见 [23]:

- 初始化：以概率 π （本例中为先验概率 p_{pr} ）选择 W初始状态 $\boldsymbol{\nu}_w^{(1)} \in \mathbb{R}^d$, $w = 1, \ldots, W$, 以及一个值 $a > 1$。
- 对于每个步骤 $s = 1, \ldots, S$,–
  对于每个 $w = 1, \ldots, W$

* Draw $\boldsymbol{\nu}_q^{(s)}$ at random from the set $\{\boldsymbol{\nu}_j^{(s)}\}_{j\neq w}$.
* Choose a random value z_w from the distribution $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ when $z \in [1/a, a]$, zero otherwise.
* Set $\boldsymbol{\nu}_{w,\text{prop}}^{(s)} = \boldsymbol{\nu}_w^{(s)} + z_w(\boldsymbol{\nu}_w^{(s)} - \boldsymbol{\nu}_q^{(s)})$.
* Set $\boldsymbol{\nu}_w^{(s+1)} = \boldsymbol{\nu}_{w,\text{prop}}^{(s)}$ with probability $\min\left\{1, z_w^{d-1}\frac{p_{\text{pt}}(\boldsymbol{\nu}_{w,\text{prop}}^{(s)})}{p_{\text{pt}}(\boldsymbol{\nu}_w^{(s)})}\right\}$, or else keep $\boldsymbol{\nu}_w^{(s+1)} = \boldsymbol{\nu}_w^{(s)}$.

• 输出：样本 $\boldsymbol{\nu}_{(s)w}$, $w = 1, \ldots, W$, $s = 1, \ldots, S$。

第二种是一种通用的仿射不变集成采样器（AIES），其具体步骤如下，例如参见 [16]：

• 初始化：选择 W 初始状态 $\boldsymbol{\nu}_{(1)w} \in \mathbb{R}^d$, $w = 1, \ldots, W$，其概率为 π（在我们的案例中为先验概率 p_{pr}），取值为 $\lambda > 0$。

• 对于每一步 $s = 1$、.....、S–
对于每个 $w = 1$、.....、W

* 集合 $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{W-1}\sum_{j\neq w}\boldsymbol{\nu}_{(s)\,j}$。
* 以概率 $\mathcal{N}(0,1)$ 绘制 z_w。
* 设置 $\boldsymbol{\nu}_{(s)w,\text{属性}} = \boldsymbol{\nu} + \frac{z_w}{\sqrt{W-1}}\sum_{j\neq w} z_j(\boldsymbol{\nu}_{(s)\,j} - \boldsymbol{\nu})$.
* 设置 $\boldsymbol{\nu}_{(s+1)w} = \boldsymbol{\nu}_{(s)w,\text{ 提议}}$ 的概率为最小值 $\left\{1, \frac{p_{\text{pt}}(\boldsymbol{\nu}_{(s)w,\text{ 提议}})}{p_{\text{pt}}(\boldsymbol{\nu}_{(s)w})}\right\}$，否则保持 $\boldsymbol{\nu}_{(s+1)w} = \boldsymbol{\nu}_{(s)w}$.

• 输出：样本 $\boldsymbol{\nu}_{(s)w}$, $w = 1, \ldots, W$, $s = 1, \ldots, S$.

虽然第一个采样器在低维度下演化得更快 d，但通常需要 $W > 2d$ 才能正常运行。原则上，随着维度增加，通用仿射不变系综采样器可以更加稳健。图4至图8展示了使用 SAIES 对具有低维参数化的光滑形状进行采样的结果。仿射不变系综采样器将步数增加一倍后，可得出类似结果。第7节讨论高维不规则形状。在此情况下，当 W 略大于 d 时，仿射不变系综采样器的表现尚可。在这两种情况下，对于每个 w，我们每三~个样本保留一个，直到总数达到 $S = S/3$，以减少相关性，并丢弃前 $\tilde{S}/5$ 个作为预热期。我们将 $\sigma_{\text{noise}} = \alpha\text{max}|d_{n,\text{ true}}^k|/100$ 设为 $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{n}}$ 中的 $\alpha = 10$。

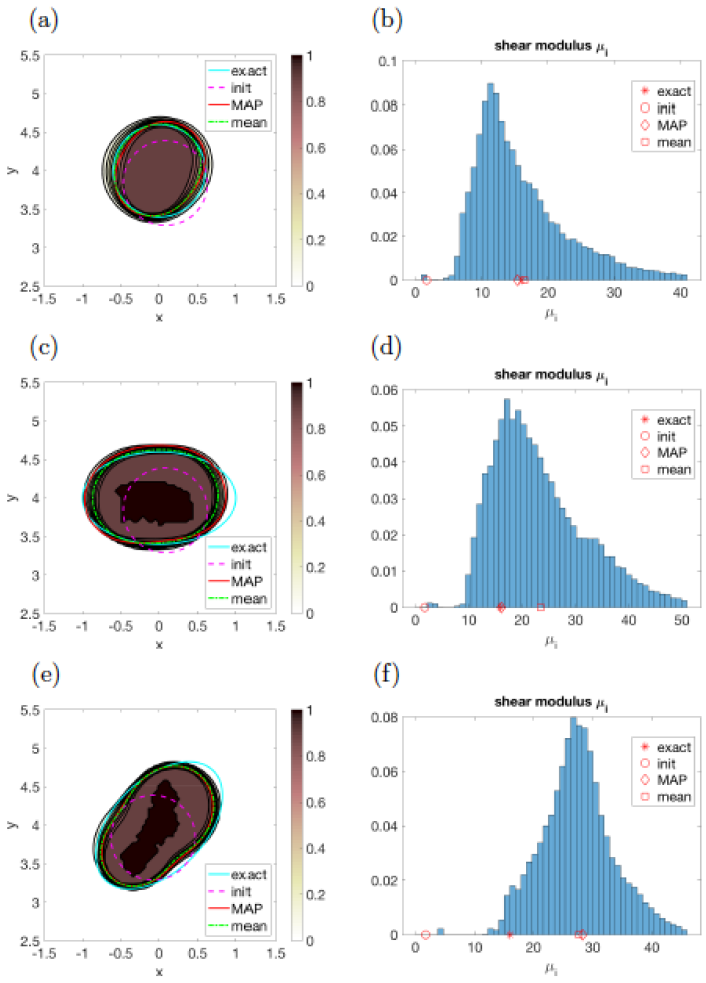

图4：(a)、(c)、(e) 不同几何结构下的真实物体与根据马尔可夫链蒙特卡罗样本计算得到的MAP估计及样本均值的对比。等高线级别表示属于该物体的概率。(b)、(d)、(f) 用于量化 μ_i的MAP估计及均值的不确定性的直方图。参数和采样器：SAIES，采用 $a = 2$、 $S = 500$、 $W = 480$ 和 $B = WS/5$。

这里，对于高度光滑的形状，我们考虑参数集 (19)，并按第4.2节中的定义定义 $\mathbf{\Gamma}_{\text{pr}}$ 。然后，我们将通过拓扑方法得到的先验概率 (20) 和似然 (12) 代入待采样的后验概率 (11)。通过样本，我们获得关于 $\boldsymbol{\nu}$ 最可能取值的信息，即最大后验 (MAP) 估计值

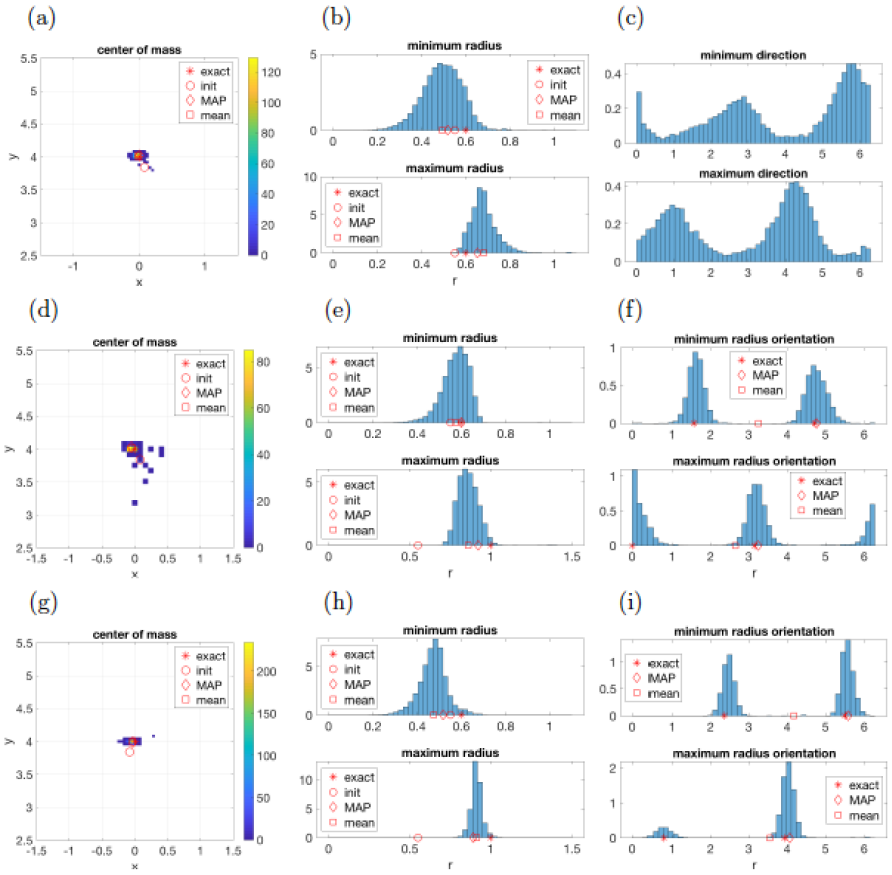

图5：表示图4所考虑的三种测试几何形状中质心分布 (a)、(d)、(g)，半径大小分布 (b)、(e)、(h)，以及方向分布 (c)、(f)、(i) 的密度离散近似的直方图。采样参数相同。

以及图4至图8所示的相关不确定性。图4展示了异常体形状以及表示无量纲剪切模量的参数值 μ_i 的不确定性，涉及两种单一形状：圆和方向各异的椭圆。概率最高的样本定义了最大后验点，而所有样本对应参数的均值则定义了均值估计。两者都能较好地捕捉异常的位置和形状；另请参见图5，其中展示了感兴趣几何特征的不确定性，例如质心的位置

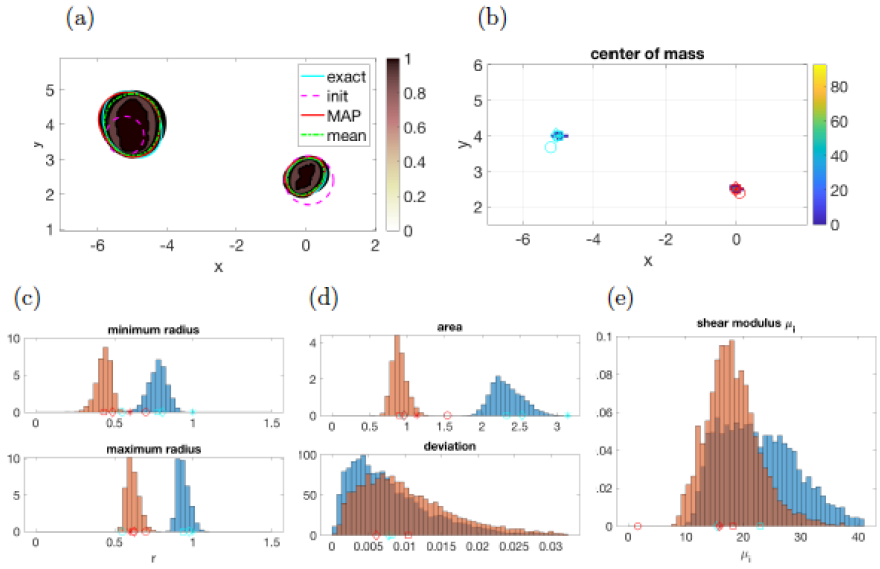

图 6：（a）真实物体与根据马尔可夫链蒙特卡罗样本计算得到的最大后验点估计和均值。等高线级别表示属于该物体的概率。叠加曲线分别表示精确等高线（浅青色实线）、最大后验点（深红色实线）、均值（绿色点划线）和初始猜测（洋红色虚线）。（b）表示质心分布密度离散近似的直方图。（c）—（d）分别为半径大小（c）、面积以及与圆形物体的偏差（d）和剪切模量 μ_i （e）的直方图。蓝色直方图和青色符号对应大型物体，橙色直方图和红色符号对应小型物体（星号：精确值，圆形：初始值，菱形：最大后验点，˜方形：均值）。参数和采样器：SAIES，使用 $a = 2$、$S = 500$、$W = 480$ 和 $B = WS/5$。

、最大和最小直径的大小及其方向。然而，剪切模量的值仍表现出较大的不确定性，但范围仍表明存在病变。直方图显示分布较宽，且具有非对称尾部。请注意，物体方向的改变可能会大幅增加预测的不确定性，对比图4(d)和图4(f)即可看出。

图 6–8 考察了包含多个异常的配置。最大后验点和均值对

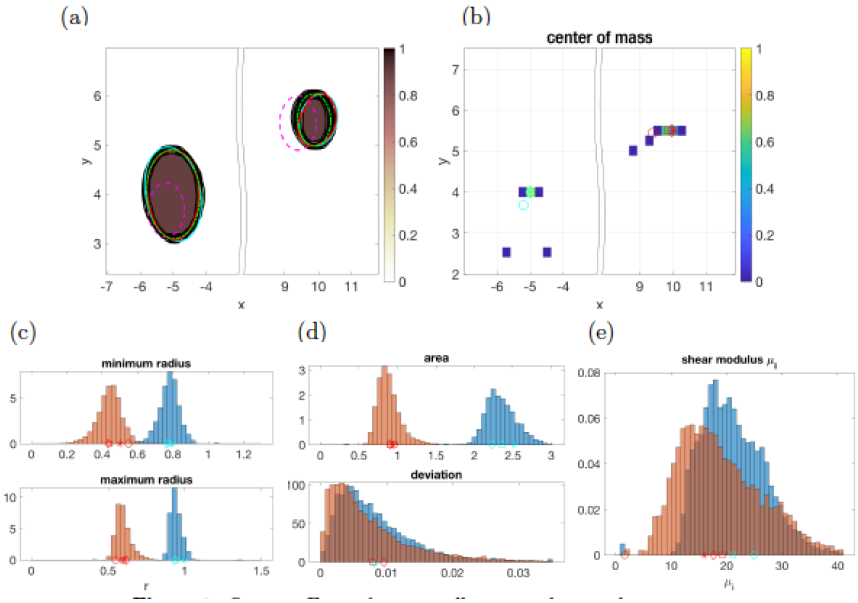

图 7：对于两个相距较远的异常，与图 6 相同。

图 6–8 中形状的近似相当合理，包括其形状、基本几何特征以及剪切模量，尽管我们再次观察到较宽的非对称尾部。

当先验中包含的异常少于所需数量时，分布可能呈多峰；我们可能会发现缺失的成分。当先验中包含的异常多于所需数量时，多余的异常可能会基本消失，因为 μ_i 基本等于 μ。请注意，我们的先验包含了正确数量的异常。由此得到的分布呈单峰。此外，均值与最大后验点相当接近。这表明，优化方案或许能够求得 MAP估计，从而对后验分布进行拉普拉斯近似；以远低于原来的代价对该近似进行采样。计算时间由数天缩短至数分钟。

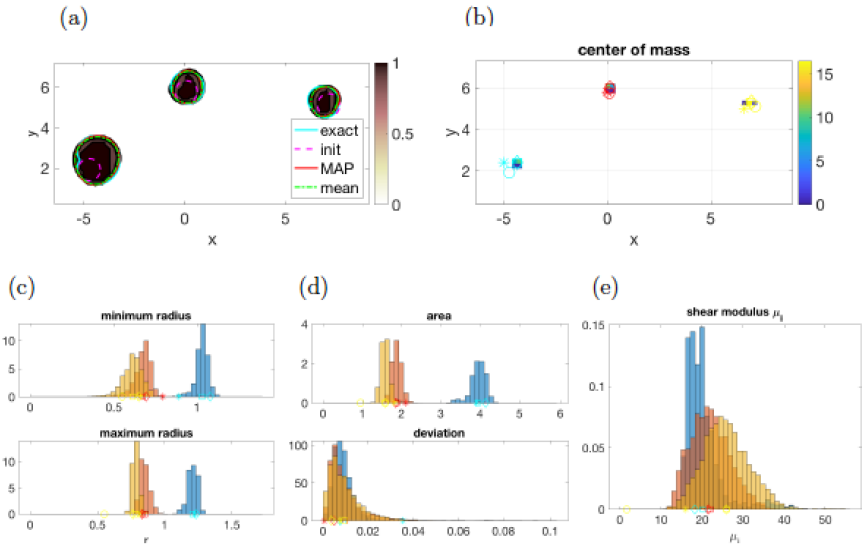

图 8：与图 6 相同，但对应于包含三个物体的配置。橙色直方图和红色符号对应中间的物体，蓝色直方图和青色符号对应最左侧的物体，黄色直方图和符号对应最右侧的物体。

6 从贝叶斯线性化公式中采样

为降低计算成本，我们分析通过在最大后验（MAP）点 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$处线性化而得到的后验密度（11）的拉普拉斯近似。该策略首先计算向量 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$，使其负对数似然最小化

$$J(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\sigma^2_{\mathrm{noise}}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} |U_{\boldsymbol{\nu}}(r_k, 0, t_m) - d_k^m|^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0)^t \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0), \quad (22)$$

其中， $U_{\boldsymbol{\nu}}$ 是对象 Ω 的正问题解，该对象由 (5) 给出的 $\boldsymbol{\nu}$ 参数化。然后，我们用多元高斯分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}, \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pt}})$ 近似后验分布，其后验协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pt}} = \mathbf{H}^{-1}_{\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}}$，其中 $\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$ 是在 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$ [5, 51] 处对测量算子 (13) 的 Hessian 的近似。

6.1 计算 MAP 点

最大后验点通过采用确定性优化技术进行计算。将先验 $\boldsymbol{\nu}_0$ 作为参数化的初始猜测，即 $\boldsymbol{\nu}^0 = \boldsymbol{\nu}_0$，我们可以实施牛顿型迭代 $\boldsymbol{\nu}^{j+1} = \boldsymbol{\nu}^j + \boldsymbol{\xi}^{j+1}$，其中 $\boldsymbol{\xi}^{j+1}$ 是.....的解。

$$\left(\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu}^j) + \omega_j \mathrm{diag}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu}^j))\right) \boldsymbol{\xi}^{j+1} = -\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu}^j), \tag{23}$$

参见 [19], ，其中 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\nu})$ 和 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nu})$ 分别表示代价函数的 Hessian 矩阵和梯度。实际应用中，为减少出现负半径的情况并降低曲线形成环路的风险，我们引入一个额外参数 $\lambda > 0$，用以下公式替换式（22）：

$$J_\lambda(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\sigma^2_{\mathrm{noise}}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} |U_{\boldsymbol{\nu}}(r_k, 0, t_m) - d_k^m|^2 + \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0)^t \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0) \tag{24}$$

并用以下公式替换式（23）：

$$\left(\mathbf{H}^{\mathrm{GN}}_{\lambda_j}(\boldsymbol{\nu}^j) + \omega_j \mathrm{diag}(\mathbf{H}^{\mathrm{GN}}_{\lambda_j}(\boldsymbol{\nu}^j))\right) \boldsymbol{\xi}^{j+1} = -\mathbf{g}_{\lambda_j}(\boldsymbol{\nu}^j). \tag{25}$$

这里，下标 λ_j 表示在初始迭代中，我们将 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}{}_{\mathrm{pr}}$ 乘以因子 λ_j，以平衡式（22）中定义代价的两个项 J。请注意，我们还用 Hessian 矩阵的 Gauss–Newton 部分替代了完整的 Hessian 矩阵，以降低每次迭代的计算成本。$\mathbf{H}^{\mathrm{GN}}_\lambda(\boldsymbol{\nu})$ 和 $\mathbf{g}_\lambda(\boldsymbol{\nu})$ 的分量为:

$$\begin{aligned}
(g_\lambda(\boldsymbol{\nu}))_i \quad &= \tfrac{\partial J(\boldsymbol{\nu})}{\partial \nu_i} \quad = \frac{1}{\sigma^2_{\mathrm{noise}}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} (U_{\boldsymbol{\nu}}(r_k, 0, t_m) - d_k^m) \frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_i}(r_k, 0, t_m) \\
&\qquad + \lambda [\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1} (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0)]_i, \qquad (26) \\
(\mathbf{H}^{\mathrm{GN}}_\lambda(\boldsymbol{\nu}))_{i,\ell} \quad &= \tfrac{\partial^2 J(\boldsymbol{\nu})}{\partial \nu_i \partial \nu_\ell} \quad \sim \frac{1}{\sigma^2_{\mathrm{noise}}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_i}(r_k, 0, t_m) \frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_\ell}(r_k, 0, t_m) \\
&\qquad + \lambda [\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1}]_{i,\ell}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

忽略 $U_{\boldsymbol{\nu}}$ 的二阶导数。

为了优化目标函数，我们采用双重迭代方法:

- Initially, we set $\omega_0 = 10^{-4}/2$, $\lambda_0 = 0.1\sigma^{-2}_{\mathrm{noise}}$, and $\boldsymbol{\nu}^0 = \boldsymbol{\nu}_0$.

• 在每一步中，我们计算 $\boldsymbol{\nu}^{j+1} = \boldsymbol{\nu}^j + \boldsymbol{\xi}^{j+1}$，其中 $\boldsymbol{\xi}^{j+1}$ 是式（25）的解。然后

– 我们检查 i） $r(\theta) > 0$, $r(\theta)$ 是否由式（7）给出，以及 $\mu_{\mathrm{i}} > 0.5\mu$ 是否成立；ii ）将 $\boldsymbol{\nu}^j$ 替换为 $\boldsymbol{\nu}^{j+1}$ 后，泛函 $J_{\lambda_j}(\boldsymbol{\nu})$ 是否减小。– 如果上述任一条件不满足，我们就不接受 $\boldsymbol{\xi}^{j+1}$。我们将 ω_j 增大 2 倍，重新求解式（25），并检查条件 i）和 ii），直到两者均得到满足。– 如果两个条件均得到满足，我们就接受 $\boldsymbol{\xi}^{j+1}$，并设置 $\omega_{j+1} = \omega_j/2$和 $\lambda_{j+1} = \max(\lambda_j/5, 1)$。

• 经过几步 j_0， $\lambda_{j+1} = 1$ 对于 $j \geq j_0$。当代价的新值与前一个值之间的相对差异小于容差 Tol（此处 Tol $= 5 \times 10^{-7}$）时，我们冻结除 $\mu^{j+1}{}_{\mathrm{i}}$ 以外的所有分量，并针对μ_{i} 进行迭代，直到变化低于阈值 0.02。

为评估每一步计算（26）—（27）所需的导数 $\frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_i}(r_k,\ 0,\ t_m)$，我们采用近似

$$\frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_i}(r_k, 0, t_m) \sim \frac{U_{\boldsymbol{\nu}+\eta_i}(r_k, 0, t_m) - U_{\boldsymbol{\nu}}(r_k, 0, t_m)}{\eta_i}$$

其中 η_i 较小， $U_{\boldsymbol{\nu}+\eta_i}$ 是将 ν_i 替换为 $\nu_i+\eta_i$. 后正问题的解。所有正问题均采用与第5节相同的离散化方式和步长求解。必须校准 η_i 的取值。最初，我们对（5）中的每个块 $\ell = 1,\ \ldots\ldots,\ L$ 设定
$\eta_1^\ell = \eta_2^\ell = \eta_3^\ell = \eta_{2Q+4}^\ell = \eta = 0.1$，并对 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ Q$设定
$\eta_{3+2i}^\ell = \eta_{2+2i}^\ell = \eta/2$。迭代过程中，我们通过估计商 $\frac{D_{\nu_i} U_{\boldsymbol{\nu}^j}(r_k,\ 0,\ t_m)}{D^2_{\nu_i} U_{\boldsymbol{\nu}^j}(r_k,\ 0,\ t_m)}$ 来校准 η_i 的取值，其中 D 和 D^2 分别表示导数的近似，并对 k 和 m 取平均。在我们进行的测试中，选择

$$\begin{aligned} \eta_1^\ell = \eta_2^\ell = 0.05, \quad \eta_{2Q+4} = 0.15, \\ \eta_{3+2i}^\ell = \eta_{2+2i}^\ell = 0.05, \quad i = 1, \ldots, Q, \end{aligned}$$

结果良好， η_3 的范围为 $0.025 - 0.225$。

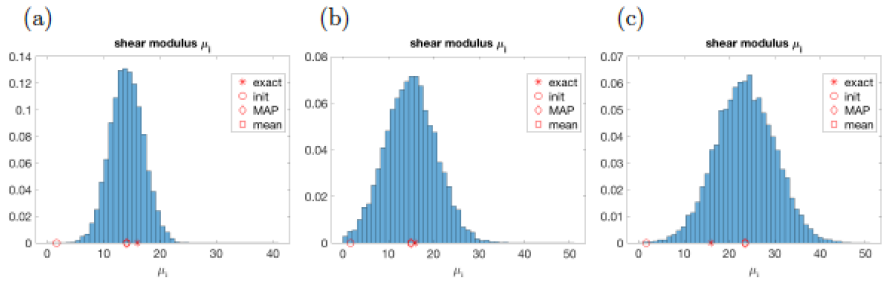

图 9：通过计算最大后验点并在该点附近对后验概率进行线性化，得到的图 4 (b)、(d)、(f) 的对应结果。图中绘制了 10000 个样本。

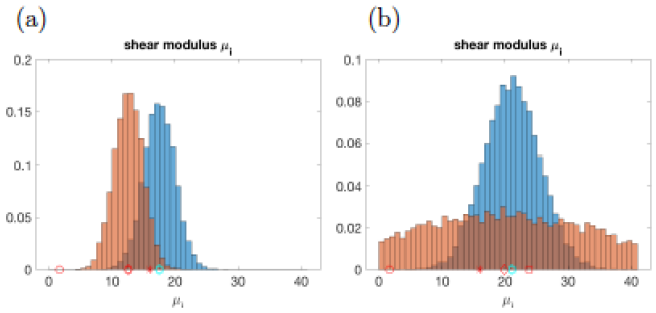

图10：通过线性化贝叶斯方法获得的图6(b)和图7(b)的对应结果。绘制了10000个样本。

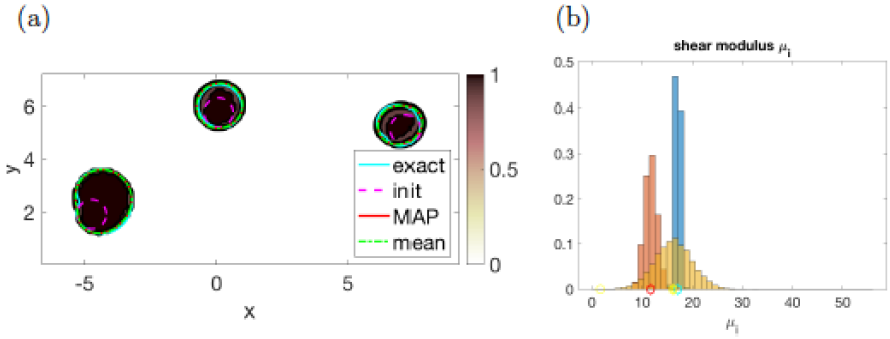

图11：通过线性化贝叶斯方法获得的图8的对应结果。绘制了10000个样本。

6.2 采样

一旦我们获得了 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$ 的近似，就以它为中心对后验分布进行线性化，将其近似为多元高斯分布$\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}},\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pt}})$，并从中抽取样本以量化不确定性。我们设定了

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pt}} = (\mathbf{F}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}})^t \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{n}}^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}) + \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pr}}^{-1})^{-1} = \mathbf{H}^{\mathrm{GN}}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}})^{-1},$$

其中$\mathbf{F}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}) = \left(\frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}}(p_j)}{\partial \nu_i} \right)_{j,\ i}$ 和

$$\mathbf{p} = ((r_1, 0, t_1), \ldots, (r_K, 0, t_1), \ldots, (r_1, 0, t_M), \ldots, (r_K, 0, t_M)),$$

也就是说，$\mathbf{F}(\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}})$ 是一个矩阵，其第 i 列为在 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}}$ 处计算得到的 $\frac{\partial U_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \nu_i}(r_k, 0, t_m)$，$k = 1, \ldots, K$,$m = 1, \ldots, M$。这可以通过以下关系实现。

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{MAP}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{pt}}^{1/2} \mathbf{n}, \tag{28}$$

$\mathbf{n}$ 为标准正态分布的随机生成向量（独立同分布）。

图9—11通过这一流程重新审视了此前的马尔可夫链蒙特卡罗测试。在每种情况下，我们都通过优化来近似求得最大后验点，并利用公式(28)生成大量后验分布样本。通过这种方式获得的近似MAP估计的代价值，与此前通过马尔可夫链蒙特卡罗采样得到的MAP估计的代价值相近。比较结果后，我们注意到，各种形状的最大后验点和等高线仍然相似。图11(a)通过一个包含三个物体的示例说明了这一点。然而，μ_{i} 的取值表现出更大的变异性。对于单个物体，最大后验点和均值仍然相似，但宽广的非对称尾部消失了。涉及更多物体的测试也呈现出类似的趋势。请注意，随着物体变得更小且彼此距离更远，信息可能会丢失，图10(b)中的红色直方图便是一个例子（与图7(b)对比）。

这种方法的计算成本要小得多。对于单个物体，MAP估计大约在10个步骤内即可获得，使用 MATLAB 在笔记本电脑上耗时约5分钟，而马尔可夫链蒙特卡罗采样则可能需要2至4天，具体取决于计算区域的大小。

7 不规则形状

最后，我们考虑由式 (8)–(10) 形式的高维参数化定义的不规则形状。我们将通过以下方法得到的先验分布 (21) 代入

拓扑方法给出的后验概率 (11) 和 (12) 中，其中数据 $\mathbf{d}_{\mathrm{odd}}$ 未用于生成先验信息。

第5节所述的仿射不变系综采样器 AIES 对不规则形状生成了图12所示的结果。请注意，使用 SAIES 需要 $W > 2d = 1006$ 个行者，而且混合速度会慢得多。此时，MAP估计并未趋近真实形状。尽管如此，平均轮廓和等高线图仍能大致显示异常的位置和大小。

在前几节中，负值 μ_{i} 的概率被设为零。现在，$\mu_{\mathrm{i}} = \exp(\gamma)$，其中 γ 是我们采样的随机变量。请注意，μ_{i} 在零附近出现峰值，这是由一组较大的样本造成的，这些样本的 μ_{i}较小。图12(c)展示了我们得到的最后 W 个样本。我们观察到一组占主导地位的样本，它们环绕着真实对象。第二组由较小的形状构成，这些形状的 μ_{i} 较大，位于对象与发射器之间，正好处于拓扑能量的一个较小次峰所在的位置（见图3(c)）。第三组对应于较大的样本，它们的 μ_{i} 较小，位于真实对象后方。由此得到的样本分布呈多峰性，不过在求平均以获得均值时，主峰占据主导地位。请注意，用这种方法得到的 μ_{i} 值的不确定性似乎相当大。在这种情况下，我们使用的先验信息质量较低。我们假设先验是一个平滑的圆，并且 μ_{i} 是健康组织的值，以此寻找不规则形状。正如上一节所指出的，先验与数据之间的不一致可能导致多峰性。

处理光滑形状时，对于已在图4(c)中研究过的旋转椭圆，我们得到图13。生成的样本表现与图12(c)中的样本相似。如果不施加关于光滑性的先验知识，最大后验点不太可能是光滑的。然而，均值参数以及几何特征和剪切模量数值的统计信息仍然有用，只是精度较低。施加光滑参数化后，我们能以更低的计算成本获得更好的光滑形状结果，见图4(c)。类似地，第12图中研究的不规则形状也可以采用第5节所用的光滑框架进行研究，以较低的代价获取均值信息。

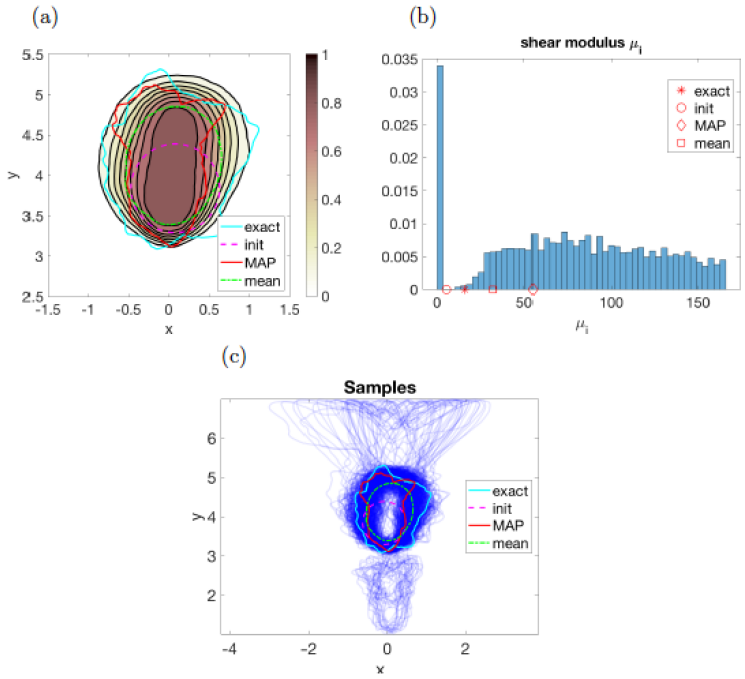

图12： $Z = 500$对应图3(b)中的对象的结果。马尔可夫链蒙特卡罗采用 ˜ ˜仿射不变系综采样器 $W = 600$, $S = 3900$, $B = WS/2$, $\lambda = 0.2$。

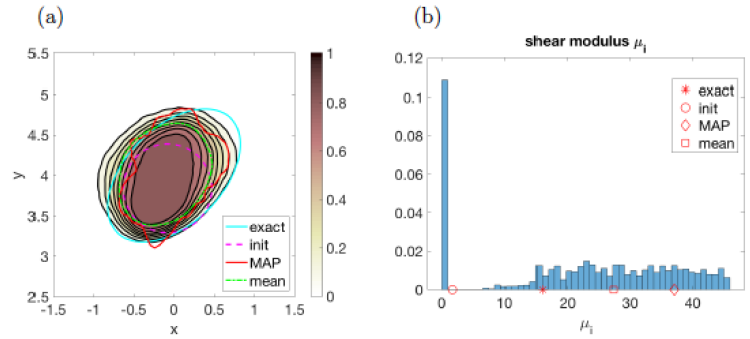

图13：旋转椭圆的结果，采用高维参数化，以允许使用 $Z = 500$ 表示不规则形状。除 $S = 2400$ 外，使用与图13相同的采样˜参数。

8 结论

我们开发了一种贝叶斯方法，用于检测和表征组织中的异常，并利用拓扑能量生成先验。在这一框架中，异常由星形物体表示，其剪切模量与周围组织不同。我们针对简单光滑的形状考虑了低维参数化，并针对不规则形状考虑了更高维的近似，例如，可用于区分包膜性（光滑）和浸润性（不规则）肿瘤。

对于简单形状，基于不同类型仿射不变集成采样器的马尔可夫链蒙特卡罗方法，能够很好地刻画后验分布的结构。该后验分布在代表各个物体的每个模态上均呈现出非对称尾部。这种方法耗时较长，因为我们必须针对每个样本求解一次时变波动方程，从而生成数十万个样本。我们已经证明，可以近似求得定义这些异常的硬度和几何形状的参数的最大后验（MAP）估计。为此，我们最小化一个适当的代价泛函，这一过程可以通过牛顿型迭代在少数几次迭代中完成。通过在最大后验点附近对参数到观测量映射进行线性化，我们能够以较低的计算成本生成后验分布的拉普拉斯近似样本，从而量化异常的性质、位置和形状方面的不确定性。

我们在二维剪切成像装置中测试了这些方案，发现对于这类形状，两种采样技术得出的结果相当一致。马尔可夫链蒙特卡罗采样能够更深入地揭示后验分布的结构，包括其不对称性和可能存在的多峰性，而线性化方法则能相当快速地给出结果。这对于潜在的技术应用和三维扩展至关重要。不过，这种方法可能会遗漏多峰性和不对称性的细节。

不规则形状会导致问题维度更高，而用于计算最大后验点的优化方法则会因边界快速变化而遭遇困难。我们发现，随着维度增加仍保持稳健的仿射不变采样器，依然能够提供一些关于异常基本属性的信息；不过，由于数据与先验知识之间不一致，我们也识别出了多峰性特征。若要更准确地描述异常形状和剪切模量，可能需要改进先验知识或采用不同类型的参数化方法。

其他贝叶斯公式旨在求解

整个组织中的波速变化，这会导致无限维问题和极高的计算成本。我们提出的方法通过寻找由适量参数描述的形状，已应用于形状简单、可使用高效边界元求解器的时不变成像问题。由于缺乏适用于时变波动问题的类似求解器，我们成功开发了快速有限元格式，使我们能够基于参数化边界以较低的计算成本实现贝叶斯公式，便于实际应用。

A 正问题的近似解

这里回顾正问题相关的存在性与正则性结果，以及一些离散化细节和参数选择。

A.1 存在性与正则性

下文中， H^1、 H^2 表示标准索伯列夫空间，而$(H^1)'$ 是 H^1 $[1, 6]$的对偶空间。 L^2 表示通常的平方可积函数空间。

定理 *1.* 设 R 和Ω为 C^1 域，$\Omega \subset R$ [1]。假设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \cup L^\infty(\mathbb{R}^+)$，且 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cup L^\infty(\mathbb{R}^2)$。那么，对于任意 $\tau > 0$，问题*(1)-(2)*有唯一解 $u \in C([0,\tau];\ H^1(R))$、 $u_t \in C([0,\tau];\ L^2(R))$、 $u_{tt} \in L^2(0,\tau;\ (H^1(R))')$。此外，若 $u_{tt}(x,\ 0) = 0$，则还有$u_t \in C([0,\tau];\ H^1(R))$和 $u \in C([0,\tau];\ H^2(R \setminus \Omega))$。

证明。对于具有正且有界的 μ 和 ρ 的波动方程，存在具有所述正则性的解 u ，这是 $[32, 42]$中已确立结果的一个特例。若 $u_{tt}(\mathbf{x}, 0) = 0$，则 u_t 满足将 f 替换为 f'后的方程 (1)-(2)。因此， $u_t \in C([0,\tau];\ H^1(R))$ 和 $u_{tt} \in C([0,\tau];\ L^2(R))$。由此，方程 (1)推出 $\Delta u(t) \in L^2(R \setminus \Omega)$，因此根据椭圆正则性理论， $u(t) \in H^2(R \setminus \Omega)$，且 u 在 Σ 和接收点处均有定义，其中迹 $L^2(\Sigma)$ 和逐点意义下的 $[6, 11]$。

[1]利用索伯列夫空间理论，对于具有分片边界正则性的区域或 R 为凸利普希茨域的情形，该结果仍然成立 $[1, 38]$。

A.2 物理参数与无量纲化

为便于计算，我们使用特征时间和特征长度对问题进行无量纲化。设 T 和 L 分别为待选取的特征时间尺度和长度尺度。为简化起见，对于组织可取 $\rho_{\mathrm{i}} = \rho \sim 1000\mathrm{kg/m}^3$，不过一般而言，$\rho_{\mathrm{i}} > \rho$（略有不同）。令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'L$，$t = t'T$，$u = u'L$，$\Omega = \Omega' L$，$R = R'L$ 和 $\Sigma = \Sigma' L$。作变量代换并为简洁起见省略符号 $'$，得到

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \operatorname{div}(\tfrac{\mu T^2}{\rho L^2}\nabla u) = \tfrac{T^2}{\rho L} f(tT)G(\mathbf{x}L) = \tilde{f}(t)\tilde{G}(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in R,\ t > 0, \\ &\tfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, && \mathbf{x} \in \partial R, \\ &u(\mathbf{x}, 0) = 0, u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, && \mathbf{x} \in R. \end{aligned} \tag{29}$$

这里，$\tilde{f}(t) = f_0 \frac{T^2}{\rho L}(1 - 2\pi^2 f_M^2 T^2 t^2) e^{-\pi^2 f_M^2 T^2 t^2}$。我们选择 $\tilde{G}$，使其在界面处的法向导数为零，例如，$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\kappa)^{n/2}} \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)|^2}{\kappa}\right)$，$n = 2$。此函数表示发射器的位置。

典型实验条件 [3, 27, 50] 表明，应选择 $L = 1$ cm$= 10^{-2}$ m 和 $T = 10^{-2}$ s。例如，在肝脏模型中，典型的异常形状和大小为直径约 0.963×1.15 cm 的椭球体，埋藏深度为 6 至 12 cm。若要检测大小为 1 cm（即 10^{-2} m）的异常，我们需要步长约为 10^{-3} m 的接收器网格，并将其布设在或移动于长度为若干厘米的区域上。例如，前列腺中的典型参数范围 [3, 27, 50] 为：癌 $\mu_{\mathrm{i}} = 96 - 241$kPa，正常组织 $\mu_{\mathrm{i}} = 55 - 71$ kPa，良性增生 $\mu_{\mathrm{i}} = 36 - 41$ kPa。在肝脏模型中，$\mu_{\mathrm{i}} = 0.4 - 6$ kPa（健康组织），$\mu_{\mathrm{i}} = 15 - 100$（不健康组织）。乳房不太适合采用这些方法，因为癌可能达到 $\mu_{\mathrm{i}} = 22 - 560$ kPa，与纤维组织 $\mu_{\mathrm{i}} = 96 - 244$ kPa、正常脂肪组织 $\mu_{\mathrm{i}} = 18 - 24$ kPa 和正常腺体 $\mu_{\mathrm{i}} = 28 - 66$ kPa 的数值重叠，因此可能更适合采用其他技术[30] 。剪切波弹性成像设备的频率 f_M 为$4 - 15$ Hz、50 Hz 或 $100 - 300$ Hz，具体取决于涉及的尺寸。

L	T	ρ_{i}	ρ	μ_{i}	μ	c_{i}	c	f_M	f_0
0.01 米	0.01 秒	ρ	$10^3 \frac{\text{千克}}{\mathrm{m}^3}$	16 千帕	1.69 千帕	$4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1.3\frac{m}{s}$	50 赫兹	$\frac{\rho L}{T^2}$

表 1：模拟中使用的有量纲参数。

在数值测试中，我们使用表 1 中列出的参数。我们设定 $\mu_{\mathrm{i}} = 16$ kPa 和 $\mu = 1.69$ kPa，由此得到的波速为 $c_{\mathrm{i}} = 4$ m/s

异常区域内为 $c = 1.3$m/s，区域外为 f_0m/s，属于低对比度情形。我们选择 $f_0 \frac{T^2}{\rho L} = 1$，使得 $f_M =$ ~~50~~ 和 $f_M T = 0.5$Hz，从而满足 。随后，无量纲正问题为

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \operatorname{div}(c(\mathbf{x})^2 \nabla u) = \tilde{f}(t)\tilde{G}(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in R, \\ & \tfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, && \mathbf{x} \in \partial R, \\ & u(\mathbf{x}, 0) = 0, u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, && \mathbf{x} \in R, \end{aligned} \tag{30}$$

对于 $t > 0$，其中

$$c^2(\mathbf{x}) = \frac{\mu(\mathbf{x})T^2}{\rho L^2} = \begin{cases} 1.69, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ 16, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \qquad c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.3, & \mathbf{x} \in R \setminus \overline{\Omega}, \\ 4, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

and

$$\tilde{f}(t)\tilde{G}(\mathbf{x}) = (1 - 2\pi^2 0.5^2 t^2) \frac{e^{-\pi^2 0.5^2 t^2}}{\pi\kappa} \sum_{j=1}^{J} e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^2}{\kappa}}. \tag{31}$$

我们通过对不同异常 Ω 进行数值求解 (30)-(31) 并添加随机噪声，生成模拟所用的合成数据。我们使用有限元 [12, 42]，空间步长为 $\delta x = 0.08$ ，并采用时间步长为 $\delta t = 0.00125$ 的全显式空间离散化，详情见下一节。我们将发射器/接收器置于步长为 0.5（或 0.2）的固定网格上，并以步长为 0.025 的固定时间网格记录信号。 κ 的值可调整为步长 δx，使其仅影响发射器周围的少数节点。此处，我们设定 $\kappa = 2$。或者，也可以在界面 $\Sigma = \{(x, y) \mid y = 0\}$ 处进行偶延拓，以得到一个定义在整个空间上的问题，并采用适用于波动问题的边界元方法 [41]，将发射器表示为点源。不过，目前仍缺乏实现此类边值方法的合适框架。

A.3 离散化

为降低计算成本，我们聚焦于有限的组织区域，并以如下方式截断计算区域： R 是一个矩形区域，如图1所示。在人工边界 $\partial R \setminus \Sigma$上，我们将施加非反射边界条件 [17]。在 Σ上，我们保留零 Neumann 条件。对于空间离散化，我们在一个

空间 [12, 42]中步长为 δx 的固定网格上使用有限元。若 $V = \text{span}$ $\{\phi_1, \ldots, \phi_D\} \subset H^1$ 是所得的有限元空间，则我们用 $u^D = \sum_{i=1}^{D} a_i(t)\phi_i$ 近似 u。因此，我们必须求得满足以下条件的 u^D

$$\int_R u_{tt}^D(\mathbf{x},t)\phi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_R c(\mathbf{x})^2\nabla u^D(\mathbf{x},t)\phi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\partial R\setminus\Sigma} c^2\frac{\partial u^D}{\partial \mathbf{n}}\phi_j(\mathbf{x})dS_{\mathbf{x}} = \tilde{f}(t)\int R\tilde{G}(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

对于 $j = 1, \ldots$ $-\frac{1}{c}u_t^D$ $\partial R\setminus\Sigma$ $\sim$ D。

接下来，我们使用非反射边界条件 $\frac{\partial u^D}{\partial}$ $\mathbf{n}$on，并在时间步长为 δt [12, 42] 的时间网格 t_n 上对时间导数进行全离散化。

$$u_{tt}^D(\mathbf{x},t_n) \sim \frac{u^D(\mathbf{x},t_{n+1}) - 2u^D(\mathbf{x},t_n) + u^D(\mathbf{x},t_{n-1})}{\delta t^2},$$
$$u_t^D(\mathbf{x},t_n) \sim \frac{u^D(\mathbf{x},t_n) - u^D(\mathbf{x},t_{n-1})}{\delta t}.$$

为计算系数 $a_i(t_n)$、 $i = 1, \ldots D$，我们求解递推关系式

$$\sum_{i=1}^{D} M_{j,i}a_i(t_{n+1}) = \sum_{i=1}^{D} M_{j,i}(2a_i(t_n) - a_i(t_{n-1})) - \delta t^2\sum_{i=1}^{D} A_{j,i}a_i(t_n) - c\,\delta t\sum_{i=1}^{D} B_{j,i}(a_i(t_n) - a_i(t_{n-1})) + \delta t^2\tilde{f}(t_n)G_j,$$

对于 $n \geq 1$，其中 $M_{j,\ i} = \int_R \phi_j\phi_i d\mathbf{x}$， $A_{j,\ i} = \int_R c^2\nabla\phi_j\nabla\phi_i d\mathbf{x}$， $B_{j,\ i} = \int_{\partial R\setminus\Sigma}\phi_j\phi_i dS_{\mathbf{x}}$,$G_j = \int_R \tilde{G}\phi_j d\mathbf{x}$。系数 $a_i(t_0) = 0$ 和 $a_i(t_1) = 0$ 对于 $i = 1, \ldots, D$，根据初始条件确定。以这种方式定义的数值解是连续的，因此代价 (4)、(22)、似然 (12) 和拓扑能量 (18) 都是定义良好的。

致谢。本研究部分得到了 FEDER / 科学与创新及大学部（Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades）—国家研究署（Agencia Estatal de Investigación）资助项目 No. MTM2017-84446-C2-1-R 和 PID2020-112796RB-C21 的支持。AC 感谢 G. Stadler 所进行的精彩讨论和提出的宝贵建议。

参考文献

[1] Adams R A 1975索伯列夫空间 （Academic Press，纽约）[2] Afkham B M、Dong Y 和 Hansen P C 2021 X射线断层成像背景下包涵体边界的不确定性量化，arXiv:2107.06607v1。[3] 剪切波弹性成像，载于《Blumgart 肝脏、胆道及胰腺外科学》（第六版，双卷本），2017。[4] Bui-Thanh T 和 Ghattas O 2014 无限维贝叶斯逆声散射形状问题及其数值近似的分析*SIAM/ASA* 不确定性量化期刊**2** 203-22[5] Bui-Thanh T、Ghattas O、Martin J 和 Stadler G 2013 无限维贝叶斯逆问题的计算框架（第一部分）：线性化情形及其在全球地震反演中的应用*SIAM* 科学计算期刊**35** A2494-A2523[6] Br´ezis H 1987 泛函分析理论 ´及其应用 （巴黎：Masson）[7]Carpio A 和 Rap´un ML 2012 电阻抗断层成像中的混合拓扑导数法与基于梯度的方法反问题**28** 095010[8] Carpio A、Dimiduk TG、Le Lou¨er F 和 Rap´un ML 2019 当拓扑导数与全息三维成像中的正则化高斯-牛顿迭代相遇计算物理学杂志 **388** 224-251[9] Carpio A、Iakunin S 和 Stadler G 2020 基于拓扑先验的目标检测贝叶斯方法反问题 **36** 105001[10] Colton D 和 Kress R 1998反声学与电磁散射（柏林：Springer）[11] Cazenave T 和 Haraux A 1999 半线性演化方程导论 牛津数学及其应用讲座丛书第13卷（牛津：Clarendon Press）

[12]Dautray R 和 Lions L 1984-87 科学与技术的数学分析 ′及数值计算 ′(巴黎：Masson)[13] Dominguez N、Gibiat V 和 Esquerre Y 2005 时域拓扑梯度与时间反转类比：一种用于超声目标检测的反演方法 波动运动**42** 31-52,[14] Dominguez N 和 Gibiat V 2010 使用时域拓扑能量方法进行无损成像 超声学**50** 367-372[15] Dunlop M M 2016 贝叶斯反问题的分析与计算博士学位论文Warwick[16] Dunlop M M 和 Stadler G 2022 一种用于无限维贝叶斯反问题的无梯度子空间自适应集成采样器, arXiv:2202.11088v1[17] Engquist B 和 Majda A 1979 声波与弹性波计算的辐射边界条件纯粹与应用数学通讯**32** 312-358[18] Engquist B、Froese B D 和 Yang Y 2016 地震全波形反演的最优传输数学科学通讯**14** 2309-2330[19]Fletcher R 1971 用于非线性最小二乘的修正 Marquardt 子程序技术报告197213[20] Fichtner A、Bunge H P 和 Igel H 2006 地震学中的伴随方法——II 应用：走时与灵敏度泛函地球与行星内部物理学 **157**105-123[21] Harbrech H 和 Hohage T 2007 三维逆障碍散射问题的快速方法积分方程应用杂志**19** 237-260[22]Gebraad L、Boehm C 和 Fichtner A 2020 使用哈密顿蒙特卡罗进行贝叶斯弹性全波形反演*JGR* 固体地球**125** e2019JB018428[23] Goodman J 和 Weare J 2010 具有仿射不变性的集成采样器，应用数学与计算科学通讯**5** 65-80

[24] Guo Z 和 De Hoop M V，2012 使用稀疏块状模型表示进行全波形反演中的形状优化项目评审论文集，地球数学成像小组 （普渡大学，西拉法叶，印第安纳州）1 189-208[25] Guzina B 和 Chikichev I，2007 从成像到材料识别：拓扑灵敏度的广义概念 《力学与固体物理学杂志》 55245-279[26] Hohage T 和 Schormann C，1998 一种用于逆散射中透射问题的牛顿型方法《逆问题》 1, 1207-27[27] Hoyt K、Castaneda B、Zhang M、Nigwekar P、di Sant'Agnese P A、Joseph J V、Strang J、Rubens D J 和 Parker K J，2008 组织弹性特性作为前列腺癌的生物标志物《癌症生物标志物》 4 213-225[28] Kaipio J 和 Somersalo E，2006 《统计与计算逆问题》 第160卷（柏林：Springer）[29] K¨auf P、Fichtner A 和 Igel H，2010 基于对象的概率全波形层析成像地球物理学硕士论文 慕尼黑路德维希-马克西米利安大学[30] Korta Martiartu N、Boehm C、Vinard N、Jovanovic Balic I 和 Fichtner A，2017 超声乳房成像中换能器定位的最优实验设计医学成像超声成像与断层成像 10139，101390M，国际光学与光子学学会[31]Landau L D 和 Lifshitz L M，1986 《弹性理论》 （牛津：Butterworth-Heinemann，第3版）[32] Lions J L 和 Magenes E，1968 《非齐次边值问题》 ´ ´（巴黎：Dunod）[33] 《医学成像系统：入门指南》 2018 Maier A、Steidl S、Christlein V、J Hornegger（编）Springer[34] Malcolm A 和 Guzina B，2008 瞬态声场的拓扑灵敏度《波动》 45 821-834[35] M´etivier L、Brossier R、M´erigot Q、Oudet E 和 Virieux J，2016 使用最优传输距离测量地震图之间的失配：在全波形反演中的应用《国际地球物理学杂志》 205 345-377

[36] Mishra A 2017 全息术：医学的未来——从《星球大战》到临床成像 Indian Heart J. 69 566-567[37] Neal R M 2011 使用哈密顿动力学的马尔可夫链蒙特卡罗。载于：Brooks S, Gelman A, Jones GL, Meng XL, 编者。《马尔可夫链蒙特卡罗手册》（伦敦：Chapman & Hall）[38] Ne˘cas J 1983 《非线性椭圆方程理论导论》（莱比锡：Teubner）[39] Palafox A, Capistr´an M A and Christen J A 2017 基于点云的散射体近似及逆散射问题中的仿射不变采样 Math. Methods Appl. Sci. 40 3393-403[40] Petra N, Martin J, Stadler G and Ghattas O 2014 无限维贝叶斯逆问题的计算框架：第二部分。随机牛顿马尔可夫链蒙特卡罗及其在冰盖流动逆问题中的应用 SIAM J. Sci. Comput. 36 A1525-55[41] Hsiao G C, S´anchez-Vizuet T and Sayas F J 2017 瞬态波-结构相互作用的边界与耦合边界有限元方法 IMA Journal of Numerical Analysis 37 237-265[42] Raviart P A and Thomas J M 1983 《偏微分方程数值分析导论》（巴黎：Masson）[43] Rasmussen C E and Williams C K I 2006 《机器学习中的高斯过程》（MIT Press）[44] Sahuguet P, Chouippe A and Gibiat V 2010，基于时域拓扑能量的生物组织成像，Physics Procedia 3 677-683[45] Sandrin L, Tanter M, Catheline S and Fink M 2002 使用二维瞬态弹性成像进行剪切模量成像，IEEE超声学、铁电学与频率控制汇刊 49 426-435[46] Sarvazyan A P, Urban M W and Greenleaf J F 2013 医学成像与诊断中的声波 Ultrasound Med. Biol. 39 1133-46[47] Sarvazyan A, Hall TJ, Urban MW, Fatemi M, Aglyamov SR and Garra BS 2011 弹性成像概述——医学成像的新兴分支 Current Medical Imaging Reviews 7 255-282

[48] Tarantola A 2005 《模型参数估计的逆问题理论与方法》（宾夕法尼亚州费城：SIAM）[49] Tsogka C and Papanicolaou G C 2002 穿过固-液界面的时间反转与超分辨率逆问题**18** 1639-1657[50] Wang Y, Yao B, Li H, Zhang Y, Gao H, Gao Y, Peng R and Tang J 2017 在人类前列腺癌异种移植模型中利用剪切波弹性成像评估肿瘤硬度超声医学杂志**36** 955-963[51] Zhu H, Li S, Fomel S, Stadler G and Ghattas O 2016 一种贝叶斯方法：利用深度偏移的先验信息估计全波形反演的不确定性地球物理学**81** R307-R323