arXiv:2305.06732v1 [cs.DM] 11 May 2023

度序列多胞体中的整数点

Eleonore Bach *, Friedrich Eisenbrand †, Rom Pinchasi ‡

2023年5月11日

摘要

整数向量 $b \in \mathbb{Z}^d$ 是度序列，当且仅当存在一个顶点集为 $\{1,\dots,d\}$ 的超图，使得每个 b_i 都是包含 i 的超边数量。度序列多胞体 $\mathscr{Z}^d$ 是所有度序列的凸包。我们证明，度序列多胞体中的整数向量有除 $2^{-\Omega(d)}$ 比例以外的所有向量都是度序列。此外，可以通过线性规划技术在时间 $2^{O(d)}$ 内计算这些点所对应的超图。这比当前最佳度序列问题算法的运行时间 $2^{O(d^2)}$ 快得多。我们还证明，对于 $d \geqslant 98$，$\mathscr{Z}^d$ 中存在不是度序列的整数点。此外，我们证明，在 $\mathscr{Z}^d$ 上的线性优化问题是 NP 困难。这补充了 Deza 等人（2018）近期的一项结果，他们给出了一种算法，其运行时间关于 d 和超边数量是多项式的。

1 引言

超图 $[1,2]$ 是一个组 $H=(V,E)$，其中 $V=\{1,\dots,d\}$ 是顶点集合，$E \subseteq 2^V$ 是超边集合。顶点 $v \in V$的度是包含 v 的超边数量，而 H 的度序列是向量 $b=(b_1,\dots,b_d)^\top \in \mathbb{N}^d$，其中 b_i是顶点 i的度。本文关注以下判定问题的复杂性，并将其称为度序列问题（DSP）。

给定一个向量 $b \in \mathbb{N}^d$，它是否是某个具有 d个顶点的超图的度序列?

目前已知的 DSP 最快算法是以下动态规划算法，其运行时间为 $2^{O(d^2)}$。设 $\chi_1,\dots,\chi_{2^d-1} \in \{0,1\}^d$ 为 $\{1,\dots d\}$ 的各个子集的特征向量，并按任意顺序排列，考虑一个顶点为

$$\left\{(i,x) : 0 \leqslant i \leqslant 2^d-1,\ x \in \mathbb{N}_0^d,\ \|x\|_\infty \leqslant 2^{d-1}\right\}.$$

*瑞士洛桑，洛桑联邦理工学院
†瑞士洛桑，洛桑联邦理工学院
‡瑞士洛桑，洛桑联邦理工学院；以色列海法，理工学院

每一对有序顶点 (i,x) 和 $(i+1,x)$ 之间，以及 (i,x) 到 $(i+1,x+\chi_{i+1})$ 之间，都存在一条弧。这些弧分别表示不选择/选择第 $i+1$ 个超边。当且仅当该图中存在一条从 $(0,0)$ 到 $(2^d-1,b)$ 的路径时，向量 b 才是一个度序列。

整数规划

这一运行时间与整数规划领域的最先进水平相当。

$$\max\{c^\top x : A\,x = b,\ x \in \{0,1\}^n\} \tag{1}$$

具有 $0/1$-约束矩阵 $A \in \{0,1\}^{d\times n}$。注意，DSP 是带有完整 $0/1$-约束矩阵 A 的 (1) 的可行性问题，该矩阵的列是所有可能的 $0/1$- 向量。

不对变量施加上界的（1）版本，即 $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$，可在 $2^{O(d)}$ [8, 15] 时间内求解。Knop 等人 [18] 给出了一个匹配的下界：任何求解整数规划（1）的算法，其运行时间至少为 $2^{\Omega(d)}$。该下界基于指数时间假设 [12]；该假设已被确立为一种工具，可用于给许多算法问题提供下界，参见例如 [4]。

具有 $0/1$ 约束矩阵的整数规划 (1) 能否在单指数时间内求解，即在 $2^{O(d)}$ 时间内求解，是一个重要的开放性问题。若能得到肯定的解决方案，将立即对例如固定参数可处理性和调度等当前蓬勃发展的领域产生影响 [13, 14, 17],。

本文的贡献

度序列多胞体 [5, 20, 22] 是由顶点集为 $\{1,\dots,d\}$的超图的度序列构成的凸包 $\mathscr{Z}^d$。这对应于由 2^d 个互不相同的 $\{0,1\}^d$ 个向量生成的d维 zonotope。

$$\mathscr{Z}^d = \{A^{(d)}x : x \in [0,1]^{2^d-1}\} \tag{2}$$

其中，$A^{(d)} \in \{0,1\}^{d\times 2^d-1}$ 是一个完整的二进制矩阵，其列由所有可能的非零 $0/1$ 向量组成。

我们的主要结果表明，度序列多胞体 $\mathscr{Z}^d$ 中的整数向量中，除了指数级小比例的向量外，其余全部都是度序列。更准确地说，不是度序列的候选向量 $b \in \mathscr{Z}^d \cap \mathbb{Z}^d$ 都非常接近边界。这一结果意味着，从 $\mathscr{Z}^d \cap \mathbb{Z}^d$ 中独立同分布地随机选取一个整数点 b，它以极高的概率成为一个度序列，且该概率至少为

$$1 - \theta\left(\frac{d^2}{2^{d-1}}\right). \tag{3}$$

由此可得到以下算法推论。对于一个满足 $\|b\|_\infty \leqslant 2^{d-1}$ 的随机向量 $b \in \mathbb{N}_0^d$，以概率 (3)，我们可以通过求解线性规划 $b \in \mathscr{Z}^d$ [16]，在时间 $2^{O(d)}$ 内判定 b 是否为一个度序列。

这比 $2^{O(d^2)}$ 动态规划快得多。

我们证明，对于 $d \geqslant 98$ ， $\mathscr{Z}^d$ 中存在一些不是度序列的整数点（定理 6）。对于 $d \leqslant 9$ ，计算机实验表明， $\mathscr{Z}^d$ 中的所有整数点都是度序列。

最终 因此，我们给出以下复杂度结果。 果：

- 度序列问题是 NP 困难的。这可以通过从 Deza 等人的结果进行归约得到。 [6] 他们证明了，对于 3-均匀超图，判定度序列问题是困难的。若超图的每条超边都包含 k 个元素，则称该超图为 k-均匀超图。

- 在 $\mathscr{Z}^d$ 上的线性优化问题同样是 NP 困难。这与 Deza 等人 [6] 的一项结果形成对比，他们证明了在 d 和超边数量 m 的情况下，关于度序列的线性优化问题可以在多项式时间内求解。

相关结果

度序列问题在文献中受到了广泛关注。Erd˝os 和 Gallai [9] 的一项经典结果刻画了 2-均匀超图（即标准无向图）的度序列。这一刻画使得能够在多项式时间内判定 2-均匀图的度序列问题。关于 3-均匀超图是否存在类似刻画的问题，悬而未决超过 30 年 [3] ，直到 Deza 等人 [6,7]证明，对于每个固定的 $k \geqslant 3$ ， k-均匀超图的度序列问题都是 NP 完全的。 [1] Liu [19] 证明了 k-图形序列集合是非凸的，这意味着 Erd˝os-Gallai 型定理并不成立。因此，研究的一个主要方向是寻找适用于 k-均匀超图的良好 Havel-Hakimi [10,11] 式推广。

2 度序列多面体中的几乎所有整数点都是度序列

我们将 C_d 表示为离散 d 维立方体的顶点集合，并将 A 表示为大小为 d 的完全二进制矩阵 A 。这是一个 $d \times 2^d$ 矩阵，其列向量为 C_d 中的向量。注意，我们可以将 $\mathscr{Z}^d$ 写成 2^d 个线段 $[0, v]$ 的 Minkowski 和，其中 $v \in C_d$ 是离散 d 维立方体的 2^d 个顶点中的任意一个。从这一表示形式可以直接看出， $\mathscr{Z}^d$ 确实是一个 zonotope（区域）。

我们将 S 表示为度序列多胞体 $\mathscr{Z}^d$ 的度序列点集。

正如我们将在第 3 节看到的， $\mathscr{Z}^d$ 包含的整数点多于 S中的整数点。本节将证明，度序列多胞体的大多数整数点本身就是 S中的点。更准确地说，我们将在下文的定理 1 中证明， $\mathscr{Z}^d$ 中与 $\mathscr{Z}^d$ 边界的距离大于 $\sqrt{d}(d+1)^2$ 的所有整数点都是度序列。我们回顾

[1]值得注意的是，如果向量 $b \in \mathbb{N}^d$ 以二进制编码，目前尚不清楚度序列问题 (1) 是否属于 NP 或 co –NP。

$\mathscr{Z}^d$ 的直径为 $2^{d-1}\sqrt{d}$。 $\mathscr{Z}^d$ 的边界点到 $\mathscr{Z}^d$ 中心的最小距离为 $\theta(2^{d-1}\sqrt{d})$。因此，只要证明 $\mathscr{Z}^d$ 中与 $\mathscr{Z}^d$ 的凸包边界距离大于 $\sqrt{d}(d+1)^2$ 的所有整数点都是度序列，我们便可得出结论：度序列在度序列多胞体所有整数点中所占的比例为$\theta((1-\frac{(d+1)^2}{2^{d-1}})^d) = 1-\theta(\frac{d^2}{2^{d-1}})$。

令 e_i, $1 \leqslant i \leqslant d$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中第 i 个标准单位向量。令 $\overrightarrow{\mathbf{1}}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的全 1 向量。也就是说，$\overrightarrow{\mathbf{1}} = e_1 + \ldots + e_d$。我们需要关于 S 和 $\mathscr{Z}_d$ 的以下简单观察。

观察 1. S 和 $\mathscr{Z}_d$ 都关于点 $2^{d-2}\overrightarrow{\mathbf{1}}$ 中心对称。

证明. 事实上，假设 $P \in \mathscr{Z}_d$（分别地，$P \in S$）。因此，$P = \sum_{v \in C_d} a_v v$，其中 $0 \leqslant a_v \leqslant 1$（分别地，$a_v \in \{0,1\}$）。考虑点 $Q = \sum_{v \in C_d} (1-a_v)\, v$。显然，

$Q \in \mathscr{Z}_d$ $Q \in S$ $Q = \sum_{v \in C_d} v - P = 2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - P =$（分别地，）。我们有 $2^{d-2}\overrightarrow{\mathbf{1}} - P$ $2^{d-2}\overrightarrow{\mathbf{1}}$ ( ) ( )，这表明 是由 P 和 Q 确定的线段的中点。 □

本节的主要结果可概括为以下定理。

定理 1. 设 $b \in \mathscr{Z}^d$ 是一个整数点，其到 $\mathscr{Z}^d$ 的边界的距离大于 $\sqrt{d}(d+1)^2$。则 $b \in S$。

定理 1 将直接由下面的定理 2、定理 3、定理 4 和定理 5 得出。

定理 2. 假设 $b = (b_1, \ldots, b_d)$ 是一个整数点，满足 $b - d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in \mathscr{Z}^d$。还假设对于每个 $1 \leqslant i \leqslant d$，都有 $b_i \leqslant 2^{d-2}$。那么 $b \in S$。

作为定理 2 的直接推论，我们得到以下关于每个 $1 \leqslant i \leqslant d$ 的 $b_i \geqslant 2^{d-2}$ 情形的对称定理。

定理 3. 假设 $b = (b_1, \ldots, b_d)$ 是一个整数点，满足 $b + d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in \mathscr{Z}^d$。此外，假设对于每个 $1 \leqslant i \leqslant d$，都有 $b_i \geqslant 2^{d-2}$。那么 $b \in S$。

证明。根据观察 1 以及 $b + d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in \mathscr{Z}^d$ 的假设，我们有 $(2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - b) - d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} = 2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - (b + d^2\overrightarrow{\mathbf{1}}) \in \mathscr{Z}^d$。我们对向量 $2^{d-1} - b$ 应用定理 2，得出 $2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - b \in S$。再次根据观察 1，$b = 2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - 2^{d-1}\overrightarrow{\mathbf{1}} - b \in S$ □ ( )，证毕。

通过以下定理，我们将定理 2 和定理 3 推广到更一般的情形，即 b 的某些坐标可能大于 2^{d-2}，而另一些坐标则小于 2^{d-2}。

定理 4. 假设 $b = (b_1, \ldots, b_d)$ 是一个整数点，且 $I \cup J$ 是 $\{1, \ldots, d\}$ 的一个划分，其中 $|I| \geqslant |J| > 0$ 满足对于每个 $i \in I$ 都有 $b_i \leqslant 2^{d-2}$，并且对于每个 $j \in J$ 都有 $b_j > 2^{d-2}$。如果 $b - (d+1)^2(\sum_{i \in I} e_i - \sum_{j \in J} e_j) \in \mathscr{Z}^d$，那么 $b \in S$。

作为定理 4 的直接推论，在 $0 < |I| < |J|$ 的情况下，我们得到以下类似的结论。

定理 5. 假设 $b=(b_1,\ldots,b_d)$ 是一个整数点，且 $I\cup J$ 是 $\{1,\ldots,d\}$ 的一个划分，其中 $0<|I|<|J|$ 满足：对于每个 $i\in I$， $b_i<2^{d-2}$ 均成立；对于每个 $j\in J$，$b_j\geqslant 2^{d-2}$ 均成立。如果 $b-(d+1)^2(\sum_{i\in I}e_i-\sum_{j\in J}e_j))\in\mathscr{Z}^d$，那么 $b\in S$。

证明。考虑向量 $b'=2^{d-1}\overrightarrow{1}-b$。将 $b'=(b'_1,\ldots,b'_d)$ 写出，我们证明 I 和 J 互换角色，并且对于每个 $i\in I$，都有 $b'_i>2^{d-2}$，对于每个 $j\in J$，都有 $b'_j<2^{d-2}$。

如果我们假设 $b-(d+1)^2(\sum_{i\in I}e_i-\sum_{j\in J}e_j)\in\mathscr{Z}^d$，那么根据观察 1，我们有

$$b'-(d+1)^2(\sum_{j\in J}e_j-\sum_{i\in I}e_i)=2^{d-1}\overrightarrow{1}-(b-(d+1)^2(\sum_{i\in I}e_i-\sum_{j\in J}e_j))\in\mathscr{Z}^d.$$

现在我们可以使用定理 4，并得出 $b'\in S$。现在我们再次应用观察 1，以得到 $b=2^{d-1}\overrightarrow{1}-b'\in S$，如所求。 □

2.1 一些预备工具

我们首先介绍一些工具，为定理 2 和定理 4 的证明做好准备。

断言 1. 假设 $v=(v_1,\ldots,v_d)\in S$ 且 $v_i<2^{d-2}$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant d$ 成立。那么我们有 $v+\overrightarrow{1}+e_i\in S$。

证明。有 2^{d-1} 种不同的方式可以将 $\overrightarrow{1}+e_i$ 写成两个不同向量 f、$g\in C_d$ 之和 $f+g$。由于这样的 f 和 g 可以唯一地相互确定（$f+g=\overrightarrow{1}+e_i$），我们得到一个划分：将 C_d 中第 i 个坐标等于 1 的 2^{d-1} 个向量划分为 2^{d-2} 个形如 $\{f,g\}$ 的无序对，其中 $f+g=\overrightarrow{1}+e_i$。我们称这样的无序对 $\{f,g\}$ 为优良对。

由于 $v\in S$，我们可以写成 $v=u_1+\ldots+u_k$，其中 u_1、.....、u_k 是 C_d 中互不相同的向量。由于 $v_i<2^{d-2}$，必然存在一个良好对 $\{f,g\}$，使得 f 和 g 都不是 u_1、.....、u_k 中的一个。因此我们可以写成 $v+\overrightarrow{1}+e_i=u_1+\ldots+u_k+f+g$，这表明 $v+\overrightarrow{1}+e_i$ 属于 S。 □

断言 2. 假设对于每个 $1\leqslant i\leqslant d$， $v=(v_1,\ldots,v_d)\in S$ 且 $v_i<2^{d-2}$。那么我们有 $v+\overrightarrow{1}\in S$。

证明. 写作 $v=u_1+\ldots+u_k$，其中 u_1、$\ldots$、u_k 是 C_d 中的两两不同向量。

如果存在 $1\leqslant i\leqslant d$ 和 $1\leqslant j\leqslant k$，使得 u_j 的第 i 个坐标等于 1，但 u_j-e_i 不是表示 v 的和中的向量之一，那么结论成立。事实上，用 u_j-e_i 替换 u_j，并注意到 $v-e_i\in S$。然后应用断言 1，得到 $v+\overrightarrow{1}=v-e_i+(\overrightarrow{1}+e_i)\in S$。

我们声称，通过考虑坐标中等于 1 的数量最少的向量 u_j，必定存在这样的 i 和 j。于是，对于每个满足 u_j 的第 i 个坐标等于 1 的 i，它都是好的。这就完成了证明。 □

观察 2. 假设 $q=(q_1,\ldots,q_d)\in S$ 且 $q_i>q_j$，其中 i 和 j。定义 $q'=(q'_1,\ldots,q'_d)$ 如下：对于每个 $\ell\neq i$，$q'_\ell=q_\ell\, j$，同时 $q'_i=q_i-1$和 $q'_j=q_j+1$。则 $q'\in S$。

证明。由于 $q\in S$，我们可以将 $q=u_1+\ldots+u_k$ 写为 u_1，...，u_k，其中它们是 C_d 中两两不同的向量。由于 $q_i>q_j$，必定存在 u_ℓ，使得 u_ℓ 的第 i 个坐标等于 1，u_ℓ 的第 j 个坐标等于 0，并且 $u_\ell-e_i+e_j$ 不属于 u_1，...，u_k。否则，在 u_1，...，u_k 中，第 i 个坐标大于第 j 个坐标的向量数量，不会多于 u_1，...，u_k 中，第 i 个坐标小于第 j 个坐标的向量数量，这与假设 $q_i>q_j$ 矛盾。

现在我们注意到，u_1，...，u_k，其中 u_ℓ 被 $u_\ell-e_i+e_j$ 替换后，构成了 C_d 中一组两两不同的向量，其和等于 q'。因此，$q'\in S$。

□

引理 1. 假设 $q=(q_1,\ldots,q_d)\in S$, $b=(b_1,\ldots,b_d)$ 是一个整数向量，并且存在 $\{1,\ldots,d\}$ 的一个划分 $I\cup J$，使得以下三个条件均得到满足。

(1) 对于每个 $i\in I$ 和 $j\in J$，均有 $b_i\leqslant b_j$。

(2) 对每个 $i\in I$，$q_i\leqslant b_i$；对每个 $j\in J$，$q_j\geqslant b_j$。

(3) $\sum_{i=1}^d b_i=\sum_{i=1}^d q_i$.

那么 $b\in S$。

证明。我们通过对 $\sum_{j\in J}(q_j-b_j)$ 进行归纳法来证明该引理。

如果 $\sum_{j\in J}(q_j-b_j)=0$，那么由于条件 (1) 和 (3)，$\sum_{i\in I}(q_i-b_i)=0$。由于条件 (2)，我们得出，对于每个 $1\leqslant i\leqslant d$，$q_i-b_i=0$ 均成立，因此 $b=q\in S$。

假设现在 $\sum_{j\in J}(q_j-b_j)>0$。那么存在 $j\in J$ 使得 $q_j>b_j$。由于 $\sum_{i=1}^d b_i=\sum_{i=1}^d q_i$，总和 $\sum_{i\in I}(q_i-b_i)<0$。因此，存在一个 $i\in I$ 使得 $q_i<b_i$。根据观察 2，$q-e_j+e_i\in S$。我们注意到，$q-e_j+e_i$ 和 b 满足引理 1 的条件。现在可以利用归纳法假设，得出结论：$b\in S$。

□

命题 3. 假设 $P=(p_1,\ldots,p_d)\in S$and $\sum_{i=1}^d p_i>d+1$。令 $0\leqslant r<d+1$ 为一个整数。那么存在 $Q=(q_1,\ldots,q_d)$，使得对于每个$1\leqslant i\leqslant d$，$\sum_{i=1}^d p_i=r+\sum_{i=1}^d q_i$ 和 $Q\in S$，都有 $q_i\leqslant p_i$。

证明。因为 $P\in S$，我们可以写成 $P=u_1+\ldots+u_k$，其中 u_1、...、u_k 是 C_d 中两两不同的向量。

我们通过对 r 进行归纳法来证明该定理。对于 $r=0$，我们可以取 $Q=P$。假设 $r>0$，并考虑满足以下条件的 u_ℓ：u_ℓ 中等于 1 的坐标数量最少。将 u_ℓ 替换为 $\tilde{u}_\ell$，其中除了一处坐标不同外，其余均与 u_ℓ 相同：该坐标在 u_ℓ 中等于 1，而在 $\tilde{u}_\ell$ 中等于 0。根据 u_ℓ 的最小性，我们知道 $\tilde{u}_\ell$ 不同于

˜分别属于 u_1、...、 u_k。总和 $P = u_1 + \ldots + u_{\ell-1} + \tilde{u}_\ell + u_{\ell+1} + \ldots + u_k$属于 S（也包括 $\tilde{u}_\ell = 0$的可能情况）。现在，我们可以利用归纳法˜假设，结合 P和 $r-1$，得到所需的向量 Q。 □

2.2 定理 2 和定理 4 的证明

我们先给出定理 2 的证明，过程非常简短。

定理 2 的证明。给定一个整数点 $b = (b_1, \ldots, b_d)$，满足对于每个 $1 \leqslant i \leqslant d$, $b - d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in \mathscr{Z}^d$ 和 $b_i \leqslant 2^{d-2}$。我们需要证明 $b \in S$。

根据通过其面约束定义度序列多面体 $\mathscr{Z}^d$ 的线性规划的解，我们由 $b - d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in \mathscr{Z}^d$ 得出 $b - d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} = P + W$，其中 $P \in S$ 和 $W = (w_1, \ldots, w_d)$ 是一个整数向量，它是 C_d 中 d 个向量的凸组合，其中没有任何一个向量被用于将 P 表示为 S 中的一个向量。

特别地，我们得出，对于每个 i, $w_i \leqslant d$。我们从 $P \in S$ 开始，并在 $i = 1$ 的条件下应用 1 w_1 次命题，以得出 $P + w_1 e_1 + w_1\overrightarrow{\mathbf{1}} \in S$。我们从这里继续，在 $i = 2$ 的条件下应用 1 w_2 次命题，依此类推，直到在 $i = d$ 的条件下应用 w_d 次命题，从而得出 $P + \sum_{i=1}^d w_i e_i + (\sum_{i=1}^d w_i)\overrightarrow{\mathbf{1}} \in S$。注意到 $\sum_{i=1}^d w_i e_i = W$。因此，$P + W + (\sum_{i=1}^d w_i)\overrightarrow{\mathbf{1}} \in S$。现在，我们多次应用命题 2 $d^2 - (\sum_{i=1}^d w_i)$，从而得出 $P + W + d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in S$。因此，$b = P + W + d^2\overrightarrow{\mathbf{1}} \in S$。 □

证明了定理 2 后，我们现在继续证明定理 4。

定理 4 的证明。根据通过面约束定义度序列多面体 $\mathscr{Z}^d$ 的线性规划的解，并且由于我们假设$b - (d+1)^2(\sum_{i\in I} e_i - \sum_{j\in J} e_j) \in \mathscr{Z}^d$，我们得出 $b - (d+1)^2(\sum_{i\in I} e_j - \sum_{j\in J} e_j) = P + W$，其中 $P \in S$，而 $W = (w_1, \ldots, w_d)$ 是 $\mathbb{Z}^d_{\geqslant 0}$中的一个向量，它是 C_d中 d 个向量的分数凸组合。特别地，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant d$, $0 \leqslant w_i \leqslant d-1$。

令 $r = \sum_{i=1}^d b_i$(模 $d+1$)。根据命题 3，存在 $Q = (q_1, \ldots, q_d) \in S$和 $R = (r_1, \ldots, r_d)$，使得 $P = Q + R$, $\sum_{i=1}^d b_i \equiv \sum_{i=1}^d q_i$(模 $d+1$)，且 $\sum_{i=1}^d r_i = r \leqslant d$。

因此

$$b - (d+1)^2 \left(\sum_{i\in I} e_i - \sum_{j\in J} e_j \right) = P + W = Q + (R + W). \tag{4}$$

现在，方程 (4) 与 $\sum_{i=1}^d b_i \equiv \sum_{i=1}^d q_i$(模 $d+1$) 一起推出 $\sum_{i=1}^d (r_i + w_i) \equiv 0$(模 $d+1$)。令 $\sum_{i=1}^d r_i + w_i = (d+1)a$ 表示某个适当的整数 a，并注意到 $0 \leqslant a \leqslant d+1$。

再次考虑（4），我们可以看到，

$$\sum_{i=1}^d b_i - \sum_{i=1}^d q_i = a(d+1) + (d+1)^2(|I| - |J|) = (d+1)(a + (d+1)(|I| - |J|)). \tag{5}$$

我们将依次应用断言 1，在 Q 中得到 S 中的新点，其坐标之和在每次应用断言 1 时都会增加 $d+1$。如果我们能连续应用断言 1 $a+(d+1)(|I|-|J|)$ 次，那么最终会得到一个向量 $Q^*=(q_1^*,\ldots,q_d^*)\in S$，使得 $\sum_{i=1}^d b_i=\sum_{i=1}^d q_i^*$。我们将证明，确实可以应用断言 1 $a+(d+1)(|I|-|J|)$ 次。

回顾一下，当我们对一个点 $Y\in S$ 和一个满足 Y 的第 i 个坐标小于 2^{d-2} 的指标 i 应用断言 1 时，可以得出 $Y+\overrightarrow{1}+e_i\in S$。因此，我们从 Y 转移到了 S 中的另一个点，其中 Y 的每个坐标都增加了 1，唯独第 i 个坐标增加了 2。需要特别强调的是，我们连续应用断言 1 共 $a+(d+1)(|I|-|J|)$ 次，但应用方式是确保 I 中的每个指标被选取的次数大致相同，具体而言，最多被选取 $\frac{a+(d+1)(|I|-|J|)}{|I|}+1$ 次。我们只需证明，只要始终遵循这一规则，在每一步中，所得点在 S 中的第 i 个坐标始终小于 2^{d-2}，对每个 $i\in I$ 都成立。这一点至关重要，因为只有这样才能确保我们能够继续操作，并按照所需次数应用断言 1。

考虑 $j\in J$。每次应用断言 1 时，索引为 $i\in I$，我们得到的 S 中的点的第 j 个坐标都会增加 1。由 (4) 可知，我们得出

$$\begin{aligned} b_j-q_j^* &= -(d+1)^2+r_j+w_j-(a+(d+1)(|I|-|J|)) \\ &\leqslant -(d+1)^2+d+(d-1)\leqslant 0. \end{aligned}$$

现在考虑 $i\in I$。这种情况下的分析要复杂一些。每次应用断言 1 之后，每当索引 i 属于 I时，我们得到的 S 中各点的每个坐标都会增加 1，只有第i个坐标会增加 2。由于我们对同一索引应用断言 1 的次数不超过 $\frac{a+(d+1)(|I|-|J|)}{|I|}+1$ 次，因此由 (4) 得出以下不等式。

$$\begin{aligned} b_i-q_i^* & \qquad (6)\\ &\geqslant (d+1)^2+r_i+w_i-(a+(d+1)(|I|-|J|))-\tfrac{a+(d+1)(|I|-|J|)}{|I|}-1 \\ &\geqslant (d+1)^2-(a+(d+1)(|I|-|J|))(1+\tfrac{1}{|I|})-1 \\ &= (d+1)^2-(a+(d+1)(2|I|-d))(1+\tfrac{1}{|I|})-1 \\ &\geqslant (d+1)^2-(d+1)(2|I|-d+1)(1+\tfrac{1}{|I|})-1. \qquad (7) \end{aligned}$$

当 $|I|$ 取最大值时，(7)的右侧取得最小值。由于我们假设 $|J|>0$，因此 $|I|\leqslant d-1$。因此，

$$b_i-q_i^*\geqslant (d+1)^2-(d+1)(d-1)(1+\frac{1}{d-1})-1=d>0.$$

特别地，对于每个指标 $i\in I$，经过每次（至多）$\frac{a+(d+1)(|I|-|J|)}{|I|}+1$ 次断言 1 的应用后，我们在 S 中得到的点的第 i 个坐标值都严格小于 b_i，因此也严格小于 2^{d-2}。这表明，确实可以一次又一次地应用断言 1，共 $a+(d+1)(|I|-|J|)$ 次，直到得到 S 中的点 Q^*。

我们声称，可以应用引理 1，将 Q^* 视为 Q，并将指标划分为 I 和 J，从而得出 $b \in S$。我们需要证明引理 1 中的三个条件均得到满足。我们已经看到，对于每个 $i \in I$，都有 $q_i^* \leqslant b_i$，并且对于每个 $j \in J$，都有 $q_j^* \geqslant b_j$。我们还知道 $\sum_{i=1}^{d} b_i = \sum_{i=1}^{d} q_i^*$。这恰好就是引理 1 中的最后两个条件。为了证明第一个条件也得到满足，我们回顾一下，对于每个 $i \in I$，都有 $b_i \leqslant 2^{d-2}$，而对于每个 $j \in J$，都有 $b_j \geqslant 2^{d-2}$。因此，对于每个 $i \in I$和 $j \in J$，都有 $b_i \leqslant b_j$。由此，我们现在可以根据引理 1 得出 $b \in S$。

□

3 度序列多面体中不是度序列的整数点

下面的定理给出了一族度序列多胞体中的整数点，这些点并非度序列，即无法表示为 C_d 中互不相同的向量之和的整数格点。正如我们将看到的，在定理 6 的证明中构造的这些不可实现点位于度序列多胞体的边界上。定理 6 证明中的具体构造，即使在相同维度 $d = \binom{8}{2} + \binom{8}{4} = 98$ 下，也能产生更多不可实现点。例如，我们可以改变矩阵 B 中列的排列顺序。此外，很容易看出，通过在更高维度下选取二项式系数的其他组合，定理 6 证明中的构造可以推广到其他不可实现点族。我们还可以考虑将低维不可实现点提升到高维的可能性。

定理 6。对于 $d \geqslant \binom{8}{2} + \binom{8}{4}$，$\mathscr{Z}^d$ 这个 zonotope 包含不可实现的整数点。

证明。我们对 $d = \binom{8}{2} + \binom{8}{4}$ 证明该定理。由于可以将 $\mathscr{Z}^d$ 嵌入 $\mathscr{Z}^{d'}$，只需给每个点添加 $d' - d$ 个零坐标即可，因此这立即推出对任意更高维数的情形，$d' > d$。所以，在证明的其余部分，我们固定 $d = \binom{8}{2} + \binom{8}{4}$。

回顾一下，对于每个 k，我们令 $C_k = \{0,1\}^k$ 表示维数为 k 的单位立方体的所有顶点组成的集合。

我们按如下方式构造八个向量 v_1、……、v_8，它们属于 C_d。令 B 为 $8 \times (\binom{8}{2} + \binom{8}{4})$ 矩阵，其前 $\binom{8}{2}$ 列是 C_8 中所有恰有两个坐标等于 1 的向量。接下来的 $\binom{8}{4}$ 列则是 C_8 中所有恰有四个坐标等于 1 的向量，且它们是 B 的列。

我们将 v_1、……、v_8 取为矩阵 B 的八行。注意，确实有 v_1、……、$v_8 \in C_d$。令 U_0 表示 C_d 中所有位于 v_1、……、v_8 的线性张成空间内的向量。稍后我们将证明，除零向量外，U_0 仅由 v_1、……、v_8 构成。

设 $c \in \mathbb{R}^d$ 为一个向量，它垂直于 U_0 的线性张成空间，但不垂直于 $C_d \setminus U_0$ 中的任何向量。这样的向量 c 必然存在。这是因为垂直于 U_0 的线性张成空间的所有向量所构成的空间的维数为 $d-k$，其中

k 是 U_0的线性张成空间的维数。与 U_0 的线性张成空间垂直的所有向量构成的空间，以及任何不属于 U_0 的线性张成空间的向量，其维数均为 $d-k-1$。维数为 $d-k$ 的空间不能被有限个维数为 $d-k-1$的空间的并集所覆盖。

定义 $U_1 \coloneqq \{v \in C_d \mid \langle v, c\rangle > 0\}$ 和 $U_{-1} \coloneqq \{v \in C_d \mid \langle v, c\rangle < 0\}$。注意， C_d 是 U_{-1}、 U_0 和 U_{-1}的不交并。

令 $z_0 \coloneqq \sum_{v\in U_1} v$。令 b为向量 $b \coloneqq \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \ldots + v_8)$。注意， b 是一个向量，其前 $\binom{8}{2}$ 个坐标等于 1，接下来的 $\binom{8}{4}$个坐标等于 2。

显然， $z_0 + b$ 包含在度序列多胞体 $\mathscr{Z}^d$ 中。我们声称 $z_0 + b$ 不可实现。也就是说，我们声称 $z_0 + b$ 不能写成 C_d 中互不相同的向量之和。

反设 $z_0 + b$ 是可实现的，并且令 $U_b \subset C_d$ 为满足 $z_0 + b = \sum_{v\in U_b} v$ 的一个集合。注意到 $\langle z_0 + b$、 $c\rangle = \langle z_0$、 $c\rangle$。观察可知，经过 z_0 且垂直于 c 的超平面是度序列多胞体 $\mathscr{Z}_d$ 的一个支撑超平面，并且 $z_0 + b$ 是该支撑超平面上的一个点。因此，必然有 U_1 中的每个向量都属于 U_b，且U_{-1} 中没有任何向量属于 U_b。这意味着 b 是 U_0 中向量的和。

引理 2. U_0 仅由 v_1、...、 v_8 和零向量组成。

证明。回顾一下， U_0 是 C_d 中所有属于 v_1，.....， v_8的线性张成空间的向量所构成的集合。考虑任意一个线性组合。

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_8 v_8 \in C_d \tag{8}$$

v_1、.....、 v_8，并假设它属于 C_d。然后，通过考察 (8 $1 \leqslant i < j \leqslant 8$ $\lambda_i + \lambda_j \in$) 的前 $\binom{8}{2}$ 个坐标，我们 $\{0,1\}$ $\binom{8}{4}$ 8 得出结论：对于每个 ，都有 。通过考察 ( ) 的接下来的坐标，我们得出结论：对于每个 $1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant 8$，都有 $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_\ell \in \{0,1\}$。

首先，假设不存在满足 $\lambda_i + \lambda_j = 1$ 的 $1 \leqslant i < j \leqslant 8$。那么，对于每个 $1 \leqslant i < j \leqslant 8$，我们都有 $\lambda_i + \lambda_j = 0$，因此，对于每个 i，都有 $\lambda_i = 0$。

因此，不失一般性，我们可以假设 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$。对于每个 $3 \leqslant i < j \leqslant 8$，我们都有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_i + \lambda_j \in \{0,1\}$。因此，对于每个 $3 \leqslant i < j \leqslant 8$， $\lambda_i + \lambda_j$ 必须等于零。这意味着，对于 $3 \leqslant i \leqslant 8$，有 $\lambda_i = 0$。现在注意到 $\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_3 \in \{0,1\}$，类似地， $\lambda_2 \in \{0,1\}$。结合 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，可知式 (8) 中的线性组合要么等于 v_1，要么等于 v_2。 □

我们知道， b 必定是 U_0中的向量之和。根据引理 2， U_0 仅由 v_1、.....、 v_8 以及零向量组成。因此，为了导出矛盾，我们证明 b 无法表示为来自 v_1、.....、 v_8的向量之和。这一点很容易通过观察得出，也可以通过注意到 b 并不等于 v_1、.....、 v_8中的任何一个来说明。此外， v_1、.....、 v_8 中的两个（或更多）向量之和必然会使前 $\binom{8}{2}$ 个坐标中的某一个大于或等于 2，而 b的前 $\binom{8}{2}$个坐标则全部等于 1。

这就完成了定理 6 的证明，表明 $z_0 + b$ 是 $\mathscr{Z}^d$ 中一个不可实现的整数向量。 □

本节所提出的构造表明，对于 $d \geqslant 98$，度序列多胞体中存在不可实现的整数格点。与这一结果相反，计算实验表明，对于 $d \leqslant 9$，度序列多胞体中不存在不可实现的点。这引出了一个尚未解决的问题：我们所发现的构造是否在维数意义下是最小的?

4 DSP 的复杂性与关于度序列的线性优化问题

3-一致超图度序列问题是指判定 $b \in \mathbb{Z}^d_{\geqslant 0}$ 是否为某个 3-一致超图的度序列的问题。已知该问题是 NP 完全的 [6]。现在，我们将展示如何将 b 转化为 DSP 的一个实例，从而证明 DSP 是 NP 困难的。

考虑向量 $w := (-3, 1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$，并令 $A_+ := \{v \in C_{d+1} : \langle v, w\rangle > 0\}$。我们定义 $A_0 := \{v \in C_{d+1} : \langle v, w\rangle = 0\}$。集合 A_0恰好由 C_{d+1} 中首个坐标等于 1 且另外恰有三个坐标等于 1 的那些向量组成，即 $A_0 = \{v \in C_{d+1} : v = (1, x^\top)^\top, \ \|x\|_1 = 3\}$。定义 $z := \sum_{v\in A_+} v$。那么 w 垂直于仿射超平面 $H := z + \{v \in \mathscr{L}^{d+1} : \langle v, w\rangle = 0\}$。注意到 $A_0 \subseteq H$。

引理 3. 序列 $b \in \mathbb{N}^d$ 是一个 3-均匀超图的度序列，当且仅当整数点 $z + (\frac{\|b\|_1}{3}, b^\top)^\top$ 是一个度序列。

证明。若 b 是一个 3-均匀超图的度序列，则我们可以将b 写成若干两两不同的向量 $b = x_1 + \ldots + x_k$ 之和，其中每个 $x_i \in C_d$ 都是一个恰好包含三个 1-元素的 0/1-向量，因此 $(1, x_i^\top)^\top \in A_0$。

我们有 $(\frac{\|b\|_1}{3}, b^\top)^\top = \sum_{i=1}^k (1, x_i^\top)^\top$。因此，$z + (\frac{\|b\|_1}{3}, b^\top)^\top$ 在 $\mathscr{L}^{d+1}$ 中是可实现的，因为它等于 $\sum_{v\in A_+} v + \sum_{i=1}^k (1, x_i^\top)^\top$。

反过来，如果 $z + (\frac{\|b\|_1}{3}, b^\top)^\top$ 是可实现的，那么它就等于某个子集 $S \subset C_{d+1}$中所有向量的和。和 $\sum_{v\in S} v$ 应当属于支撑超平面 H。因此，S 必定等于 A_+ 与A_0的某个子集的并集。由于 $z = \sum_{v\in A_+} v$，我们得出结论：$(\frac{\|b\|_1}{3}, b^\top)^\top$ 等于 A_0中两两不同的向量之和。特别地，b 等于 C_d 中各向量的和，其中每个向量恰好有三个坐标等于 1。因此，b 是一个 3-一致超图的度序列。

□

我们注意到，z 可以在多项式时间内构造出来。回顾一下，z 是 A_+中所有向量的和。集合 A_+ 是 C_{d+1} 中满足 $\langle v、 w\rangle > 0$的所有向量构成的集合，其中 $w := (-3, 1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$。

w 与 C_d 中的一个向量的数量积等于一个大于或等于 -3的整数。对于 $k = -3、 -2、 -1、 0$，我们定义集合 $A_k = \{v \in C_{d+1} : \langle v、 w\rangle = k\}$。然后

$$z = \sum_{v\in C_{d+1}} v - \sum_{v\in A_{-3}} v - \sum_{v\in A_{-2}} v - \sum_{v\in A_{-1}} v - \sum_{v\in A_0} v.$$

现在，我们可以利用以下等式轻松求得 z：

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in C_{d+1}} v &= (2^d,\ldots,2^d),\\
\sum_{v\in A_{-3}} v &= (1,0,\ldots,0),\\
\sum_{v\in A_{-2}} v &= (d,1,\ldots,1),\\
\sum_{v\in A_{-1}} v &= \left(\binom{d}{2}, d-1,\ldots,d-1\right),\\
\sum_{v\in A_{0}} v &= \left(\binom{d}{3}, \binom{d-1}{2},\ldots,\binom{d-1}{2}\right).
\end{aligned}$$

我们最后以如下定理作结。

定理 7. 度序列问题 DSP 是 NP 困难的。

Deza 等人 [6] 证明，可以在关于d 和 m的多项式时间内，在至多有 m 条边的超图的度序列集合上最大化一个线性函数。我们的最终结果表明， m 中的这种参数化是必要的。

命题 1. 对度序列多胞体 $\mathscr{Z}^d$ 进行优化是 NP 困难的。

证明。我们将其归约为背包解计数问题。已知该问题是 #P-困难的 [23]，其定义如下：给定 $a\in\mathbb{Z}^d_{\geqslant 0}$、 $\beta\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，确定

$$N=\left|\{x\in\{0,1\}^d : a^Tx<\beta\}\right|.^2$$

注意，对于 $x\in\{0,1\}^d$，当且仅当 $a^Tx<\beta-1/2$ 时， $a^Tx<\beta$ 成立，因为 a 和 β 均为整数。

通过对目标函数值为正的 $0/1$向量求和，即可求解 $\mathscr{Z}^d$ 上的线性优化问题。换言之，对于 $w\in\mathbb{R}^d$，有

$$\max\{w^Tx : x\in\mathscr{Z}^d\}=\sum_{\substack{z\in\{0,1\}^d\\ w^Tz>0}} w^Tz.$$

为此，令 $w_1^T=(-c^T,\beta)$ 和 $w_2^T=(-c^T,\beta-1/2)$。显然， $x_0\in\{0,1\}^d$ 是背包解，当且仅当 $w_1^T\binom{x_0}{1}>0$；而这当且仅当 $w_2^T\binom{x_0}{1}>0$。若分别用 OPT_1 和 OPT_2 表示以目标向量 w_1 和 w_2 为目标、在 $\mathscr{Z}^{d+1}$ 上求解的线性优化问题的最优值，则 $OPT_1=OPT_2+N/2$。这表明，在度序列多胞体上求解线性优化问题是 NP 困难的。 □

[2]严格不等式 $<$ 可通过将 a 和 β 乘以二，然后将 β 加一来证明。

参考文献

[1] Claude Berge。《超图：有限集合的组合学》，第 45 卷。Elsevier，1984 年。[2] B´éla Bollob´ás。《组合学：集合系统、超图、向量族与组合概率》。剑桥大学出版社，1986 年。[3] Charles J. Colbourn、W. L. Kocay 和 D. R. Stinson。《超图度序列的一些 NP 完全问题》。Discrete Applied Mathematics，14(3):239–254，1986 年。[4] Marek Cygan、Fedor V Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Micha l Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》，第 5 卷。Springer，2015 年。[5] Antoine Deza、Mingfei Hao 和 Lionel Pournin。《为白鲸估算尺寸》。arXiv 预印本 arXiv:2205.13309，2022 年。[6] Antoine Deza、Asaf Levin、Syed M. Meesum 和 Shmuel Onn。《度序列上的优化》。SIAM Journal on Discrete Mathematics，32(3):2067–2079，2018 年。[7] Antoine Deza、Asaf Levin、Syed Mohammad Meesum 和 Shmuel Onn。《超图度序列是困难的》。EATCS Bulletin，1(127)，2019 年。[8] Friedrich Eisenbrand 和 Robert Weismantel。《利用施泰尼茨引理获得整数规划的邻近性结果与更快算法》。ACM Trans. Algorithms，16(1): 第 5 条，14 页，2020 年。[9] Paul Erd˝os 和 Tibor Gallai。《具有指定顶点度数的图（匈牙利语）》。Mat. Lapok 11，第 264–274 页，1960 年。[10] S Louis Hakimi。《关于一组整数能否实现为线性图顶点度数的问题 I》。Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics，10:496–506，1962 年。[11] V´áclav Havel。《关于有限图存在性的一则注记》。Časopis Pěst. Mat.，80:477–480，1955 年。[12] Russell Impagliazzo 和 Ramamohan Paturi。《论 k-SAT 的复杂度》。Journal of Computer and System Sciences，62(2):367–375，2001 年。[13] Klaus Jansen、Kim-Manuel Klein、Marten Maack 和 Malin Rau。《增强 configuration-IP：具有准备时间的调度问题的新 PTAS 结果》。Mathematical Programming，195(1-2):367–401，2022 年。[14] Klaus Jansen、Alexandra Lassota 和 Marten Maack。《带类别约束的调度问题近似算法》。载于第 32 届 ACM 并行算法与架构研讨会论文集，第 349–357 页，2020 年。

[15] Klaus Jansen 和 Lars Rohwedder。《关于整数规划、差异性与卷积》。Operations Research 数学，2022 年。[16] Leonid Genrikhovich Khachiyan。《线性规划中的一个多项式算法》。载于《Doklady Akademii Nauk》，第 244 卷，第 1093–1096 页。俄罗斯科学院，1979 年。[17] Duˇsan Knop 和 Martin Kouteck`y。《调度与 n-fold 整数规划的结合》。Scheduling Journal，21：493–503，2018 年。[18] Duˇsan Knop、Micha l Pilipczuk 和 Marcin Wrochna。《约束较少的整数线性规划的紧复杂度下界》。ACM 计算理论汇刊（TOCT），12(3)：1–19，2020 年。[19] Ricky Ini Liu。《超图度序列集合的非凸性》。Electron. J. Combin.，20(1)：论文 21，第 7 页，2013 年。[20] B.N.L. Murthy 和 K. Srinivasan。《超图度序列的多面体》。Linear Algebra and its Applications，350：147–170，2002 年。[21] Christos H Papadimitriou。《整数规划的复杂性》。Journal of the ACM（JACM），28(4)：765–768，1981 年。[22] Richard P. Stanley。《与图度序列相关的 zonotope》。载于《Applied geometry and discrete mathematics》，DIMACS 离散数学与理论计算机科学丛书第 4 卷，第 555–570 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1991 年。[23] Leslie G Valiant。《计算 permanent 的复杂性》。Theoretical computer science，8(2)：189–201，1979 年。