自接触结构的拓扑优化

Andreas Henrik Frederiksen*[1]、Ole Sigmund[1],和Konstantinos Poulios[1]

[1]丹麦技术大学土木与机械工程系，Koppels All´e，404号楼，丹麦灵比市，邮编2800

2023年5月11日

arXiv:2305.06750v1 [cs.CE] 11 May 2023

摘要

在机械设计中纳入接触可拓展广泛的设计可能性，其中包括齿轮、联轴器、开关、夹具等具有接触的经典设计。然而，将接触纳入拓扑优化颇具挑战性，因为当边界未定义时，经典接触模型无法直接适用。本文旨在通过扩展第三介质接触方法，解决拓扑优化中接触的局限性，以应对具有内部接触的拓扑优化问题。

当目标是在给定位移下使指定接触载荷最大化时，随着优化过程逐渐接近最优解，可能会出现失稳现象。为了缓解稳定性问题，同时提高优化设计的鲁棒性，在设计目标中引入了切线刚度约束。为避免在优化设计中非物理地利用第三介质，通过在膨胀设计上评估体积约束，对微小特征进行惩罚。本研究采用了拓扑优化领域中成熟的方法，包括 Helmholtz 偏微分方程滤波、阈值投影、带惩罚的固体各向同性材料插值以及移动渐近线法。通过三个算例，展示了该方法如何利用内部接触，实现承受大变形的结构的拓扑优化。

1 引言

拓扑优化已在多个领域得到应用，涵盖从微观和宏观尺度问题到流体流动、热传递和纳米光子学等多物理场问题。非线性对于拓扑优化而言并不陌生，针对大应变拓扑优化的几何非线性和材料非线性已成功应用于大变形结构的设计中 [8, 3, 2, 5, 23, 16, 12]。当此类结构发生大变形时，可能会产生接触现象，而将此类接触纳入拓扑优化过程能够扩展解空间，从而实现更先进的设计。这在柔顺机构或软体机器人设计中可能具有特殊意义，因为人工设计中已经采用了接触机制。然而，直到最近，由于一个看似矛盾的难题，仍然没有可行的方法将内部接触纳入拓扑优化：当边界尚未定义时，如何分配接触力?

目前已有几种将内部接触纳入拓扑优化的方法。其中一种方法[11] 已成功应用于形状变换柔顺机构的设计。该方法采用显式接触表面处理方式：基于负掩膜方案确定实体相和空隙相，随后通过边界分辨与平滑方案确定光滑边界。这些表面之间的接触采用拉格朗日乘子法进行建模。此外，还存在一种相关方法，该方法基于框架结构，并考虑不同构件之间的接触 [18]。

另一种同样包含内部接触的方法，是 [13] 提出的基于水平集的滑动接触界面方法。该方法基于两种相互独立、共享一个界面的材料的分布。使用水平集方法定义界面，接触体可以沿该界面滑动或分离。通过拉格朗日乘子法对这些界面上的牵引力进行建模。Lawry 和 Maute 以嵌入宿主材料中的锚固件设计为例，展示了这种方法。

*andfr@dtu.dk

需要指出的是，该方法是在小位移梯度的基础上开发的，并且该方法中不存在间隙；也就是说，接触表面之间没有必须跨越的空洞区域，接触才能建立。

最近有人提出了一种将内部自接触纳入拓扑优化的有前景的新方法 [1]。这种方法对拓扑优化很有吸引力，因为它：1）利用已有的空洞区域作为接触介质，也就是说，无需定义额外的区域或表面；2）采用可微的接触公式。具体而言，该方法利用空洞区域作为接触介质，将第三介质接触方法 [25] 纳入基于密度的拓扑优化。第三介质接触是一种隐式接触，其形成机制是：夹在接触体之间的高柔顺性介质受压后发生刚化。由于第三介质在任何非零体积的压缩状态下都具有有限（尽管极低）的刚度，因此该方法具有可微性。这样，接触效应便被纳入优化过程中的灵敏度计算，使第三介质接触方法对基于梯度的拓扑优化极具吸引力。

[1, 11, 18, 13] 的研究目前是作者所知唯一采用上述限制条件将内部接触纳入拓扑优化的方法。除此之外，还有多种将外部接触界面纳入优化的方法。 [9], 对这些方法进行了很好的概述，文中作者还介绍了一种将设计域中的构件与某个外部边界之间的摩擦接触纳入优化的方法。Hilding、Klarbring 和 Petersson 的综述论文 [7]介绍了更早期的相关研究。 [11] 的作者此前也开展过采用非常相似方法的研究，不过其中并未考虑设计域内不同构件之间的接触；换言之，接触仅限于该方法 [10]中指定的掩码。

通常，在虚拟域方法中，空洞区域在发生严重变形时往往会发生反转，从而引入数值不稳定性。这一问题可以通过多种方式缓解。常见的方法包括：1）放宽收敛准则 [17], 2 2）移除空洞单元 [4]，以及 3）空洞单元线性化 [24]。然而，这些方法均不适用于涉及第三介质接触的拓扑优化。放宽收敛准则是指放宽空洞区域的收敛准则，但对于第三介质接触而言，空洞区域至关重要，因为它充当接触介质，因此不应对其进行妥协。移除空洞单元也不可行，因为这些单元是作为接触介质所必需的。空洞单元线性化同样不是合适的选择，因为在接触区域中，单元受到高度压缩，剪切自锁会给接触引入非物理刚度。近期提出了一种更适用于考虑第三介质接触的方案 [1]。该方法引入了一个空洞正则化项，为空洞单元中的弯曲和翘曲变形增加应变能。由于只需极低程度的正则化即可提供足够的稳定性，因此在不存在接触的情况下，空洞正则化对结构物理行为的影响可以忽略不计。

一个颇具挑战性的设计问题是承受大变形的刚性耦合。对于这类问题，最大化反作用力可能会导致设计处于稳定性的极限，此时微小的位移扰动就可能使耦合脱开。本研究通过在承受大变形的耦合结构的设计目标中加入切线刚度项来解决这一问题；也就是说，如果目标函数最大化曲线上的某个给定点，则该点处曲线的斜率也纳入目标函数。本文采用一种拓扑优化方法，其中包含膨胀和侵蚀密度场，并结合采用广泛使用的移动渐近线法（MMA） [22]的交错求解方法。通过所采用的材料定律以及带惩罚的固体各向同性材料插值（SIMP） [20], 纳入第三介质接触。

第 2 节概述建模方法：a）定义材料模型，包括空洞正则化；b）定义材料插值方案，包括所采用的滤波和投影方法；c）阐述最小化问题以及用于求解该问题的求解算法。第 3 节将该建模方法应用于三个问题：A）升降机构；B）形成钩状结构的刚性耦合问题；C）灵感源自内窥镜弯曲段的弯曲问题。第 4 节给出结论，并在表 1 中总结本文通篇采用的通用符号。

2 建模方法

2.1 材料模型

采用了 [1] 提出的包含空洞正则化的超弹性材料模型。下面重新陈述该模型，并对正则化项的缩放方式作了微小调整。

$A \cdot B = A_i B_i$	标量积
$A{:}\ B = A_{ij} B_{ij}$	双重缩并
$A \vdots B = A_{ijk} B_{ijk}$	三重缩并
$\|A\| = \det(A)$	矩阵 A 的行列式
$\|\|A\|\| = \sqrt{A{:}\ A}$	矩阵 A 的 Frobenius 范数
$\nabla A = \dfrac{\partial A_i}{\partial X_j}$	向量场 A 的空间梯度
$\mathbb{H}A = \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial X_j \partial X_k}$	向量场 A 的空间海森矩阵
$\langle x \rangle = \max(0, x)$	正部函数

表 1：符号约定。

材料应变能密度由各向同性新胡克定律表示。

$$\overline{\Psi}(u) = \frac{K}{2}(\ln|F|)^2 + \frac{G}{2}\left(|F|^{-2/3}||F||^2 - 3\right) \tag{1}$$

其中， $F = I + \nabla u$ 为变形梯度张量， K 和 G 分别为体积模量和剪切模量，在本文所研究的所有示例中，它们分别为 $K = 5/3$MPa和 $G = 5/14$ MPa。

通过在材料应变能密度中添加空洞正则化项，可得到增广应变能密度表达式

$$\Psi(u) = \overline{\Psi}(u) + k_r \frac{1}{2}\mathbb{H}u \vdots \mathbb{H}u \tag{2}$$

其中， $\mathbb{H}u$ 为位移场 u的海森矩阵， k_r 为缩放常数，其定义为

$$k_r = \bar{k_r} L^2 K, \tag{3}$$

其中， L为结构的特征长度尺度。在 [1],中给出的原始形式中，式（2）中的正则化项乘以因子 $\exp(-5|F|)$进行缩放，使得拉伸区域中的正则化作用减弱。为使整个区域内的正则化保持均匀，本文省略了这一项。为与 [1]保持一致，常数 $\bar{k_r}$ 设为 $\bar{k_r} = 10^{-6}$ 。较小的取值可减轻空洞区域可能出现的刚化，而较大的取值则能使问题更加稳定。

正则化项通过惩罚高阶变形（¯即翘曲和弯曲变形），有效稳定空洞区域。应尽可能选取较小的 k_r 值，以减小正则化对问题物理行为的影响，同时该值又需足够大，才能有效稳定空洞区域。

力学平衡可表示为一般的弱形式

$$\mathcal{V}(u, q; \delta u, \delta q) = 0 \quad \forall\ \delta u, \delta q \tag{4}$$

其中

$$\mathcal{V}(u, q; \delta u, \delta q) = \int_\Omega \Psi_{,u}(u; \delta u)\, d\Omega + \int_{\Gamma_D} \{q \cdot \delta u + (u - u_D) \cdot \delta q\}\ d\Gamma_D. \tag{5}$$

这里，Ω 为建模域， $\Psi_{,u}(u; \delta u)$ 是应变能密度关于 u 的一阶变分， Γ_D 是域上的一条边界，可在该边界上施加位移 u_D ，而 q 是表示边界 Γ_D 上反力牵引的向量场，该反力牵引由施加的位移 u_D 产生。

2.2 通过材料插值实现接触

在拓扑优化中，任意给定点处的材料刚度应取决于材料密度，使得实体区域代表材料模型，而空洞区域则代表材料的缺失。介于这两个极限值之间的数值通过插值获得。在这种情况下，可以通过将式（1）中的应变能密度与一个材料插值函数相乘来引入材料插值，该函数在此记为 $\gamma(\tilde{\rho})$。通过引入这种材料插值,

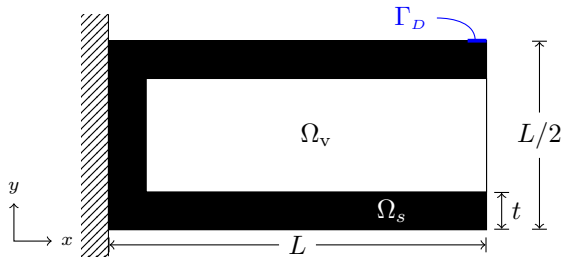


图 1：带有空洞区域 Ω_v 和实体区域 Ω_s的 C 形问题。厚度 $t = 0.1L$。

力学平衡，如上一节所述，形式如下

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\tilde{\rho}, u, q; \delta u, \delta q) = &\int_\Omega \left\{\gamma(\tilde{\rho})\, \overline{\Psi}_{,u}(u; \delta u) + k_r\, \mathbb{H}u : \mathbb{H}\delta u\right\}\, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_D} \left\{q \cdot \delta u + (u - u_D) \cdot \delta q\right\}\, d\Gamma_D = 0 \quad \forall\ \delta u, \delta q,\end{aligned} \tag{6}$$

其中， $\tilde{\rho}$ 是一个密度场。

材料插值 $\gamma(\tilde{\rho})$通过结合 SIMP 方案 [20] 和光滑的¯Heaviside 投影函数 $\bar{\rho}(\tilde{\rho})$得到，其结果为

$$\gamma(\tilde{\rho}) = \gamma_0 + (1 - \gamma_0)\bar{\tilde{\rho}}(\tilde{\rho})^p, \tag{7}$$

其中， p 是惩罚参数， γ_0 是 $\gamma(\tilde{\rho})$的最小刚度值。投影¯函数 $\bar{\rho}(\tilde{\rho})$用于得到物理材料密度，并将 $\tilde{\rho}$ 的取值投影至 0 和 1 附近。该函数将在下一节中介绍。在本文中，始终采用 $p = 3$ 的惩罚。在实体区域中， $\gamma(1) = 1$ ；在空洞区域中， $\gamma(0) = \gamma_0$。因此， γ_0 表示式（1）中应变能密度表达式在实体区域与空洞区域之间的量级差异。在未变形构型中，这对应于实体区域与空洞区域之间的刚度比。

需要强调的是，材料插值，即应变能密度的缩放，会自然地将第三介质接触引入力学模型。如果参数 γ_0 选得足够低，空隙变形时几乎不会受到阻力。然而，当空洞区域被压缩至零体积时，neo-Hookean 材料模型会使该区域变硬，从而使其能够传递载荷。如果参数 γ_0 选得过高，寄生力会影响优化所得的设计。这一直是第三介质接触方法 [26] 受到批评的一个方面。不过，选择足够低的值可以缓解这一问题。图 1 展示了来自 [1] 的接触问题，作为一个示例。图 2 展示了 γ_0 的影响，其中对该问题施加了三种不同的位移。从图 2 可以看出，较高的值会 1）通过空隙在彼此不接触的构件之间传递力；2）在预期发生接触时无法建立恰当的接触。对于公式 (1) 中的 neo-Hookean 材料，取值 $\gamma_0 = 10^{-6}$ 可得到寄生力水平足够低的结果。因此，本文全程采用 $\gamma_0 = 10^{-6}$ 。这种刚度对比值在一般的结构拓扑优化中也很常见。

物理材料密度场的参数化

拓扑优化中一种成熟的方法是使用平滑的密度场 $\tilde{\rho}$，该密度场通过对底层设计场 ρ 应用滤波步骤获得；底层设计场可采用单元常数或线性有限元进行离散 [23, 21]。

首先对场 ρ 应用滤波，以控制材料密度场的平滑度。在现有的滤波方法中， [14], 中提出的 Helmholtz 滤波是一种相当简单且通用的方法。基于设计变量场 ρ，Helmholtz 滤波通过求解一个线性偏微分方程，得到一个更平滑的场 $\tilde{\rho}$

$$\int_\Omega (\tilde{\rho} - \rho)\, \delta\tilde{\rho} + r^2 \nabla\tilde{\rho} \cdot \nabla\delta\tilde{\rho}\, d\Omega = 0 \tag{8}$$

在 $\partial\Omega$ 上采用自然边界条件。一般而言， ρ 和 $\tilde{\rho}$ 可在不同的离散有限元空间中近似。离散化后，方程 (8) 等价于

$$\mathbf{M}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}} = -\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} \tag{9}$$

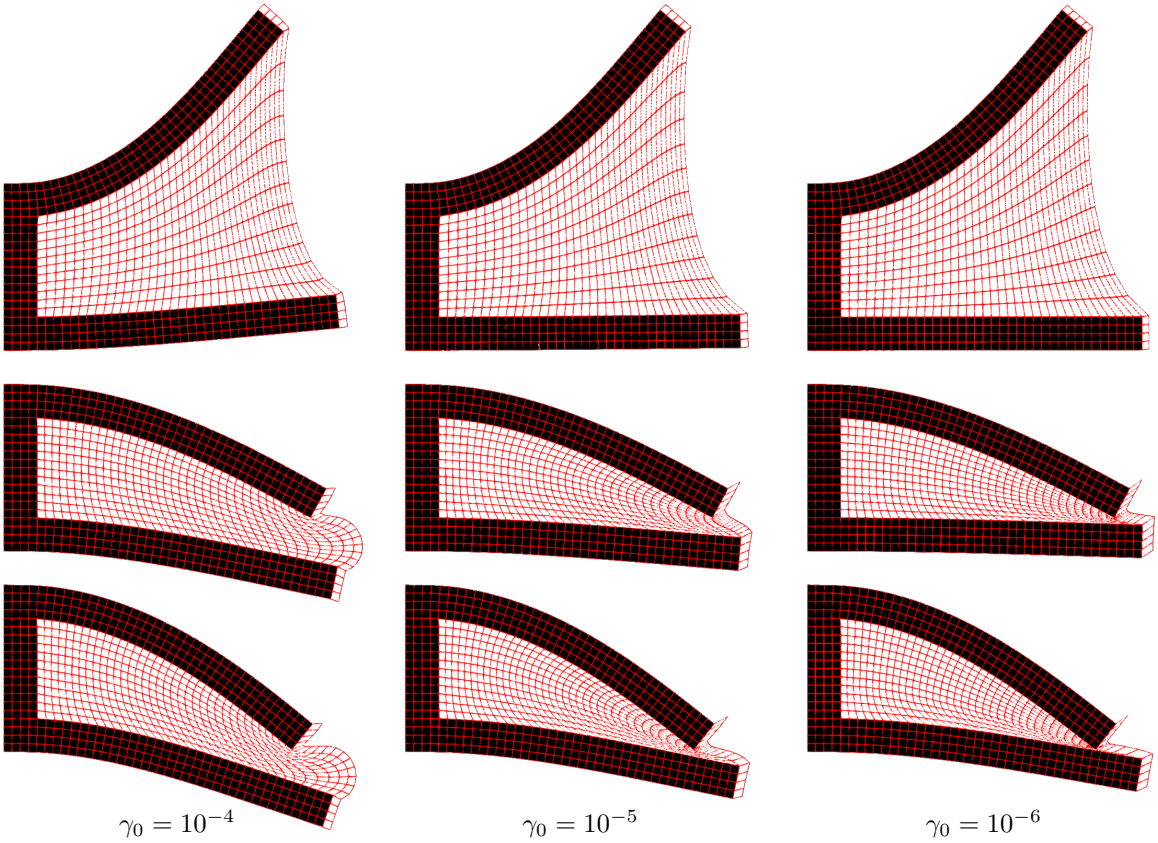


图 2：由 $u_{Dy} = 0.5L$、 $u_{Dy} = -0.3L$、 $u_{Dy} = -0.4L$ 变形的 C 形结构，对应 γ_0 的三个不同取值。

其中， $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ 是相应的离散向量，$\mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{M}_1$ 是由方程 (8) 组装得到的切线矩阵，用于两个变量之间的耦合。

由于设计更新后矩阵 $\mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{M}_1$ 保持不变，因此只需计算一次。相对于 $\tilde{\rho}$ 的这种线性关系使得系统可以预先进行因子分解，如 [14]中所述。这里，对 $\mathbf{M}_1$ 及其转置进行 LU 分解。现在，无需计算式（9）中的逆矩阵，而是求解一个已分解的系统；该分解可以在优化循环之外预先完成。

上述滤波步骤得到一个平滑的密度场 $\tilde{\rho}$，其特征是包含中间密度。为了 1）获得以实体区域和空隙区域为主导的设计，以及 2）实现实体与空隙之间更清晰的过渡，将滤波后的密度 $\tilde{\rho}$ 通过函数进行投影。

$$\bar{\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}) = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho} - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \tag{10}$$

其中 β 是投影参数， η 是阈值参数。投影后的设计 $\bar{\tilde{\rho}}$表示物理材料密度，即式（7）中材料插值所用的密度场。 $\tilde{\rho}$ 高于 η 的值将被投影至接近 1，而低于 η 的值将被投影至接近 0。投影值趋近于 0 和 1 的程度由投影参数β控制， β 越大，投影越强。应用两个阈值，分别为 η_e 和 η_d ，其中$\eta_e > \eta_d$。阈值的应用分别得到腐蚀设计 $\bar{\tilde{\rho}}_e$ 和膨胀设计 $\bar{\tilde{\rho}}_d$，详见第 2.3 [23]节。这里的目标是惩罚设计中的小特征，而非直接控制长度尺度。因此，阈值的选择并不关键，在本文中始终设为 $\eta_e = 0.50$ 和 $\eta_d = 0.40$ 。现在，滤波与投影仅由滤波半径 r 和投影参数 β控制。在 $\tilde{\rho}$ 上添加下标 e 和 d，以指明滤波后的设计 $\tilde{\rho}$ 在经过式（10）的投影函数时应进行腐蚀还是膨胀。

2.3 最小化问题

设计问题的一般表述是：在满足力学平衡约束以及设计域内材料总体积上限的条件下，最小化目标函数 $C(\bar{\tilde{\rho}}, u, q)$

并对设计变量施加盒约束

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \;& C(\tilde{\rho}_e, u, q) \\ s.t.: \;& \mathcal{R}(\tilde{\rho}_e, u, q; \delta u, \delta q) = 0 \quad \forall\, \delta u, \delta q \\ & \int_{\Omega} \bar{\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_d)\, d\Omega \leq V^* \\ & 0 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

采用两个不同的设计场 $\tilde{\rho}_e$ 和 $\tilde{\rho}_d$ 的做法，借鉴了拓扑优化中的稳健公式 [23], ，该公式使用侵蚀设计、中间设计和膨胀设计，对最终设计施加长度尺度约束。完整的稳健公式采用包含这三种设计的极小极大公式。这种做法计算成本较高，而且在本例中并非必需，因为无需施加特定的长度尺度约束。因此，我们采用另一种方法：在侵蚀设计上定义目标函数和力学平衡，同时在膨胀设计上定义体积约束。将体积约束定义在膨胀设计上、将力学平衡定义在侵蚀设计上，本质上是对细薄结构施加惩罚；也就是说，细薄结构增加的刚度很小，却会因所需材料体积而付出很大代价。增大式 (10) 中 η_e 和 η_d 之间的差值，或增大式 (8) 中的滤波半径 r ，都会使小型结构特征变得越来越不经济。此方法不同于稳健公式，因为它既不直接控制长度尺度，也不一定会消除所有灰度区域，而只是对细薄结构施加惩罚。需要注意的是，由于体积约束仅在膨胀设计上定义，侵蚀设计所用的材料体积始终会少于膨胀设计所规定的体积。

按照 [1] 中的方法，可以通过最小化增广目标函数来消除力学平衡约束。

$$C^*(\tilde{\rho}_e, u, q) = C(\tilde{\rho}_e, u, q) + \mathcal{R}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q), \tag{12}$$

其中， λ_u 和 λ_q 分别是空间 δu 和 δq 中的拉格朗日乘子。假设目标函数采用加法分解。

$$C(\tilde{\rho}_e, u, q) = C_{\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_e) + C_u(u) + C_q(q) \tag{13}$$

从而可以直接应用伴随方法。加性分解使目标函数的总变分得到】【。

$$\begin{aligned} \delta C^* = & C_{\tilde{\rho},\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_e; \delta\tilde{\rho}) + \mathcal{R}_{,\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \delta\tilde{\rho}) \\ & + C_{u,u}(u; \delta u) \;\; + \mathcal{R}_{,u}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \delta u) \\ & + C_{q,q}(q; \delta q) \;\; + \mathcal{R}_{,q}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \delta q), \end{aligned} \tag{14}$$

通过求解满足伴随方程的乘子 λ_u 和 λ_q ，可将其简化。

$$C_{u,u}(u; \widehat{\delta u}) + \mathcal{R}_{,u}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \widehat{\delta u}) = 0 \quad \forall\, \widehat{\delta u} \quad \text{and} \tag{15}$$

$$C_{q,q}(q; \widehat{\delta q}) \;\; + \mathcal{R}_{,q}(\tilde{\rho}_e, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \widehat{\delta q}) \;\; = 0 \quad \forall\, \widehat{\delta q}, \tag{16}$$

其中， ^用于区分伴随方程（15）和（16）中的变分与力学平衡方程（6）中的变分。求解伴随方程组可以从目标函数的变分中消去δu 和 δq 中的变分，从而将其简化为

$$\delta C^* = C_{\tilde{\rho},\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}_e; \delta\tilde{\rho}) + \mathcal{R}_{,\tilde{\rho}}(\tilde{\rho}, u, q; \lambda_u, \lambda_q; \delta\tilde{\rho}). \tag{17}$$

这种变分是平稳的，即 $\delta C^* = 0$ 在最优点处成立。然而，在下一节概述的方法中，并不会显式求解这一平稳条件，而是使用公式 (17) 来确定目标函数的灵敏度。

上述设计变化是相对于场 $\tilde{\rho}$而言的；然而， $\tilde{\rho}$ 取决于场 ρ，在此例中，该场表示设计变量。场 $\tilde{\rho}$ 和 ρ 通过第 2.2 节所述的滤波相关联。由于第 2.2 节中的滤波系统已完成因式分解，离散化后即可高效地从 $\tilde{\rho}$ 转换到 ρ 。这在计算增广目标函数 (12) 和体积约束 (11) 相对于设计变量的灵敏度时很有用。需要这些灵敏度来应用 MMA 更新设计。

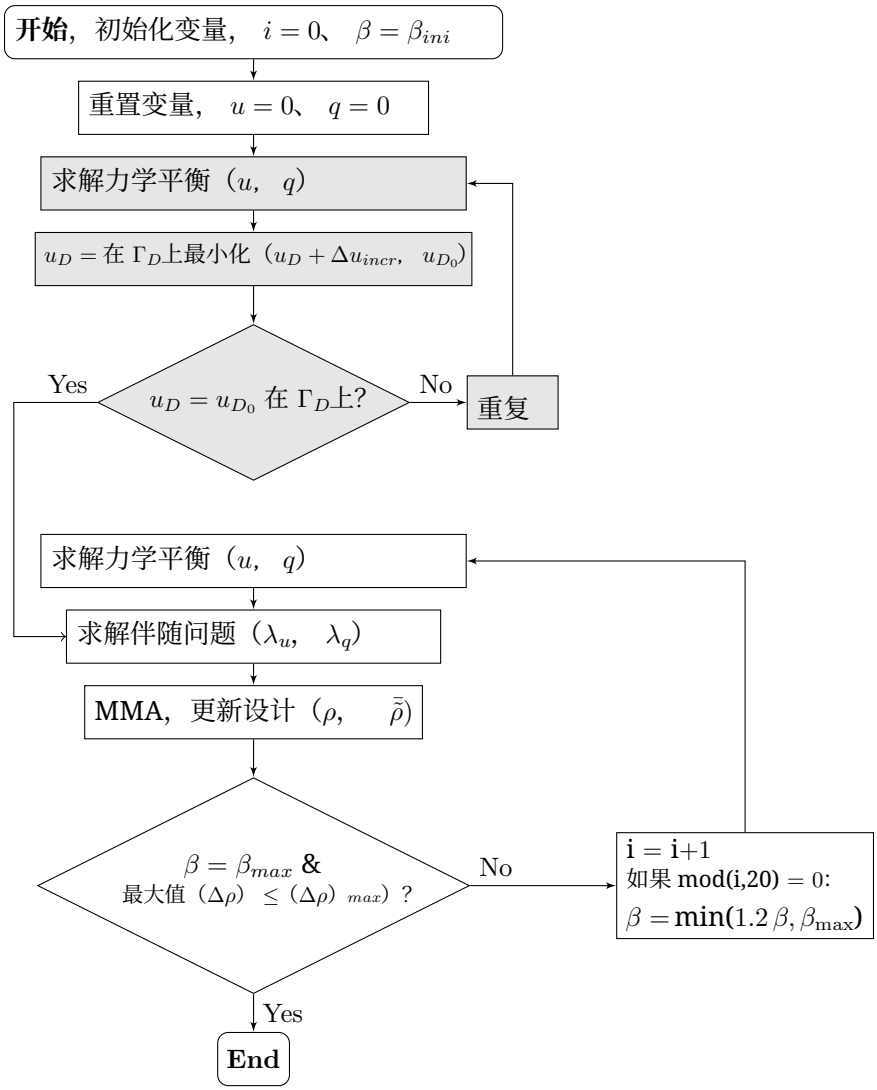


图 3：交错求解方法。

为说明这一点，考虑 $\mathcal{R}_{,\tilde{\rho}}(\tilde{\rho},u,q;\ \lambda_u,\lambda_q;\ \delta\tilde{\rho})$ 这一例子，它可写成离散形式 $\partial\mathcal{R}/\partial\tilde{\boldsymbol{\rho}}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}$。然后， $\mathcal{R}_{,\rho}(\tilde{\rho},u,q;\ \lambda_u,\lambda_q;\ \delta\rho)$ 的离散形式可表示为

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\boldsymbol{\rho}}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}=\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right)^T\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}=-\mathbf{M}_0^T\mathbf{M}_1^{-T}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\rho}}}\cdot\delta\boldsymbol{\rho},\tag{18}$$

其中，r 而非计算$\mathbf{M}_1$,的逆矩阵，而是求解其分解后的线性系统。相同的步骤
已应用 计算体积约束灵敏度时的 d。

2.4 求解算法

与 [1] 中采用整体求解方法不同，这里我们采用交错求解方法，依次求解力学平衡方程（式（6）、伴随问题（式（15、16））以及设计变量更新。该过程如图 3 所示。

在更新力学平衡方程（6）后，通过求解方程（15）和（16）确定伴随变量 λ_u 和 λ_q。利用伴随变量，根据方程（12）确定增广目标函数的值，并根据方程（17）计算其相对于设计变量的灵敏度。这些量是进行 MMA 设计更新所必需的。

每次设计迭代后，都会评估一个用于增加 β 的准则。该准则依据标准的鲁棒公式 [23]，其中 β 连续化会使实体区域与空洞区域之间的过渡越来越陡峭。上限 β_{max} 的选取应使实体区域与空洞区域之间的过渡足够陡峭，同时又足够平滑，以确保接触不会直接受离散化影响。根据设计变量 ρ 的变化来评估收敛性，其中

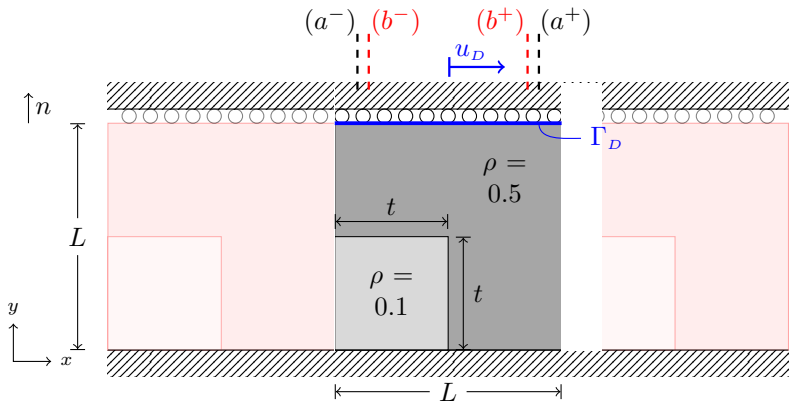
$(\Delta\rho)_{max}$ 是设计收敛时 ρ 任意取值的最大变化限值。需要注意的是，在图 3 中推进阈值时， β 会增加 1.2 倍。这个推进参数的取值相当低，但选择这一水平是为了在推进阈值时保持稳定性。

上述方法通过 Python 实现，其中所有切线矩阵和残差向量均通过 GetFEM [19] 库计算，该库使用 C++执行所有底层计算。设计更新则基于 MMA [22]的 Python 实现 [6]。

3 结果与讨论

3.1 推升机构

为说明该方法的应用方式，我们采用图4所示的示例，在域的左右两侧设置周期性边界。一般而言，有四种水平平移:



Figu图 4：用于推举-提升的周期性设计域 $L \times L$，并在 ρ 上为 $t = 0.5$ 标出了初始猜测。 L.

$$\begin{aligned} &(a^+) \quad u_D = u_{max}, \qquad (a^-) \quad u_D = -u_{max} \\ &(b^+) \quad u_D = u_{min}, \qquad (b^-) \quad u_D = -u_{min} \end{aligned}$$

在顶部边界 Γ_D上施加约束。作为第一个示例，考虑一个仅利用前两种情况（a^+）和（a^-）的目标函数。该目标函数使两个变形构型中 Γ_D 上的竖向反力之和最大化，其形式为

$$C_0(\tilde{\rho}_e, u, q) = k_q \left(-(Q_{a^+} \cdot n) - (Q_{a^-} \cdot n)\right) \tag{19}$$

其中

$$Q_i = \int_{\Gamma_D} q_i \, d\Gamma_D \tag{20}$$

分别为构型（a^+）和（a^-）中的反作用力。因子 k_q 是缩放常数， n 是图4所示的向上单位法向量

该问题的数值参数见表2。初始猜测如图4所示，其中 $t \times t$区域采用较低的密度以打破对称性。位移场u 采用Q2单元进行离散化，密度场 ρ 和 $\tilde{\rho}$ 采用Q1单元进行离散化。表面

区域尺寸	$L \times L$	1×1	mm^2
强制位移	$(u_{min}, \ u_{max})$	$(0.35L, \ 0.40L)$	mm
网格尺寸	$N_x \times N_y$	100×100	-
滤波半径	r	0.10	mm
阈值参数	$(\beta_{ini}, \beta_{max})$	$(2, 240)$	-
目标权重	k_q	10^4	-
力的大小权重	k_s	10^3	1/N

表2：推举机构的参数 m.

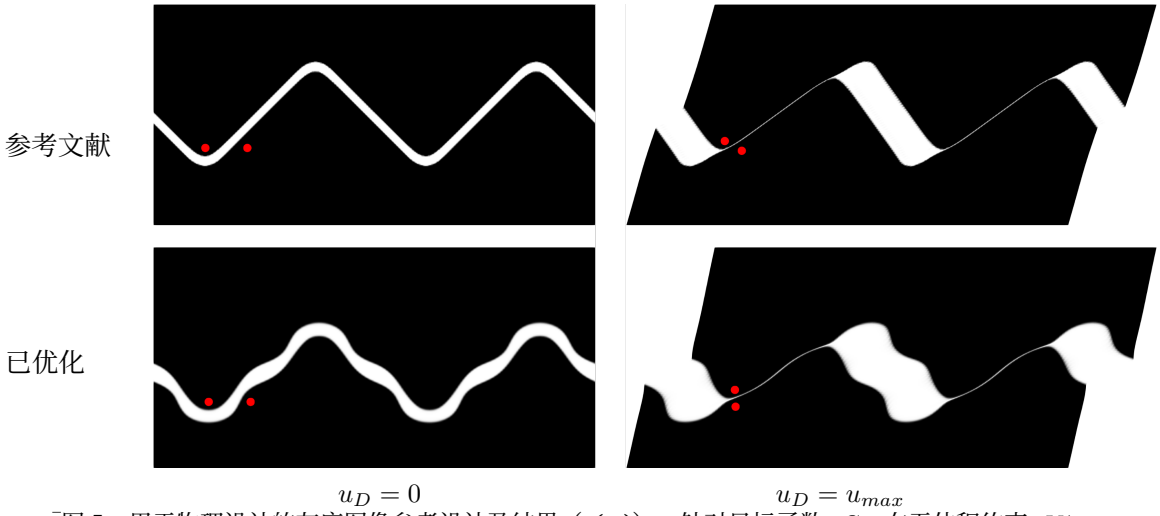


图 5：用于物理设计的灰度图像参考设计及结果（$\tilde{\rho}(\tilde{\rho}_e)$），针对目标函数 C_0 在无体积约束 $V^* = 1.0$ 的情况下进行优化。红点跟踪从未变形构型到变形构型的位移。结果展示了周期性域的 2 个周期。

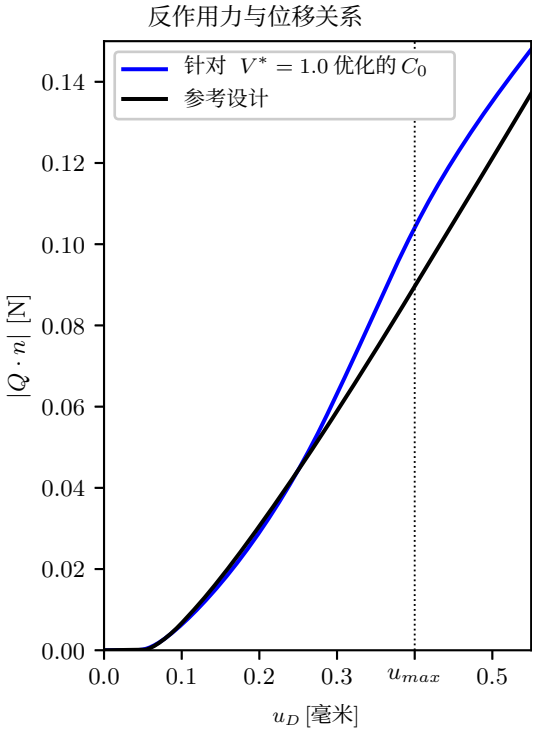


图6：升降机构设计的力-位移曲线。 C_0 优化设计和参考设计。

牵引力 q 与边界 Γ_D 上的 u 采用相同的离散化方式。所有单元的数值积分均采用包含九个高斯点的高斯求积法。未施加体积约束的结果，即 $V^* = 1.0$，如图 5 所示。

尽管没有体积约束，图5所示的设计仍有一道明显的间隙，将结构分为上、下两部分。来自表2的最大阈值 β_{max} 确保了从实体到空隙的快速过渡，这是为了形成物理上合理的接触界面。

间隙宽度通过改变滤波半径进行间接控制。然而，优化设计中间隙的弯曲接触界面并不直观。优化设计的一个直观替代方案可能是采用如图 5 所示、以 $45°$ 角度形成的窄间隙，作为参考设计。通过比较图 6 所示两种设计的力-位移曲线，可以更好地理解优化设计。在变形构型下，$u_D = u_{max}$ 优化设计（蓝色曲线）具有更高的竖直载荷，因此相对于目标函数 C_0也表现更好。在图 5 中添加了两个红点，以说明其中的原因。这些红点

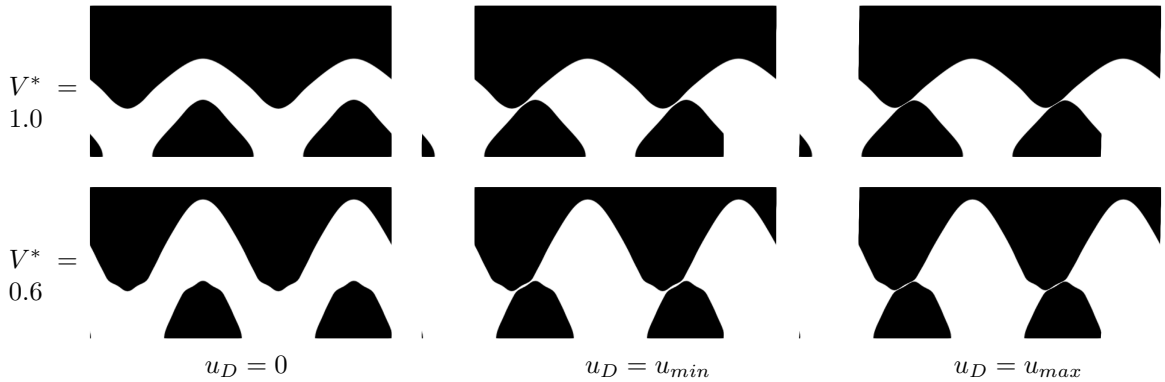


图 7：物理设计结果的灰度图像（$\tilde{\rho}$（$\tilde{\rho}_e$）），通过 2 个周期进行展示，目标函数为 C_1，位移分别为 $u_D = 0$、$u_D = u_{min}$ 和 $u_D = u_{max}$，体积分数分别为 $V^* = 1.0$ 和 $V^* = 0.6$。

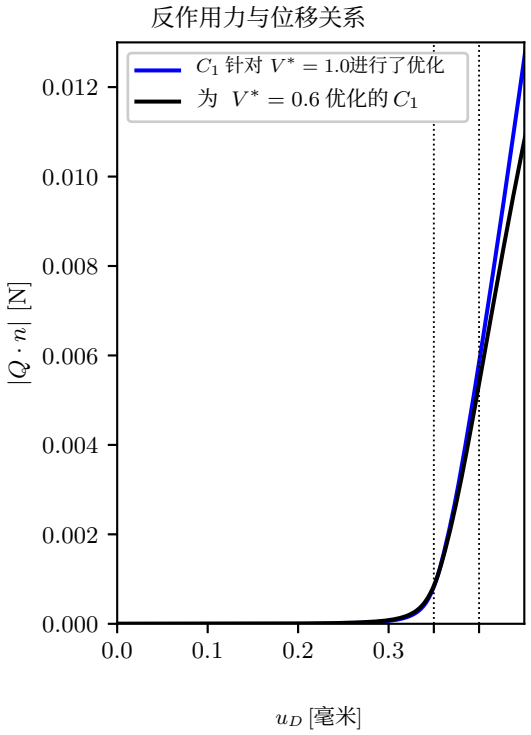


图 8：升降机构设计的力-位移曲线。

最初处于相同高度，且优化设计与参考设计中的间距相等。在变形构型下，优化设计中两点之间的竖直距离大于参考设计，这表明该处的压缩程度更高，因此竖直方向上的反作用力也更大。因此，波浪状形状似乎能够使接触表面发生适应性调整，从而在较大的水平平移下提供更大的力。

为了更好地控制接触过程以及接触发生的位置，可以将另外两个控制点（b^+）和（b^-）添加到目标函数中。

$$C_1(\tilde{\rho}_e, u, q) = k_q \left(-(Q_{a^+} \cdot n) - (Q_{a^-} \cdot n) + k_s \left|\left|Q_{b^+}\right|\right|^2 + k_s \left|\left|Q_{b^-}\right|\right|^2 \right), \tag{21}$$

其中，k_s 是一个新的缩放常数。附加项用于惩罚在位移为 $\pm u_{min}$时作用于 Γ_D 的任何合力，从而抑制 $-u_{min} < u_D < u_{min}$处的接触。采用目标函数 C_1 得到的结果如图7所示。

这些工况得到的力-位移曲线如图 8 所示。对于 C_1 目标函数，在达到位移 u_{min} 后，反作用力显著增加。这表明在该点附近建立了接触。因此，目标函数 C_1实现了预期目的。此外，对于 $V^* = 1.0$，其在 u_{max} 处的反作用力高于$V^* = 0.6$，而在 u_{min}处则略低，这反映了提高体积分数所带来的改进。

3.2 自啮合钩

考虑图9所示的区域，其中 Γ_D 是施加竖向位移的边界。区域 Ω_v（包括边界 Γ_{top} 和 Γ_{bot}）是指定空域，而 Ω_d 表示设计区域，该区域被划分为两个尺寸相等的部分。对于这一问题，可以设定一个目标：在给定向下位移 u_0 的情况下，最大化边界 Γ_D 上的竖向反力。如果位移 u_0 较大，则优化设计的边界 Γ_D 上的反力很可能相对于位移 u_0 达到极值。在这种情况下，任何增大位移的扰动都可能导致结构发生突跳并脱离接触。因此，无法期望所得设计在其变形构型下对位移具有鲁棒性。一种简单而有效的获得更鲁棒设计的方法，是在目标函数中加入变形构型切线刚度为正的要求。这里，相对于初始位移 $(0,\ -u_0)$，在水平方向或竖直方向上施加一个小扰动 Δu 。

设 T 和 T' 分别为边界 Γ_D 上的竖直和水平反作用力。

$$T = Q \cdot \hat{n} = \int_{\Gamma_D} q \cdot \hat{n}\, d\Gamma_D, \tag{22}$$

$$T' = Q \cdot n = \int_{\Gamma_D} q \cdot n\, d\Gamma_D, \tag{23}$$

其中，$\hat{}n$ 是指向上方的单位切向量，n 是单位法向量，如图9所示。

图10定性地展示了竖直方向 T边界 Γ_D 上的反作用力随施加的竖向位移 u_D变化的加载历程。为了将切线刚度纳入目标函数，添加了两个相距 Δu 的控制点，如图10所示。上述切线刚度的一阶近似可以基于这两个控制点建立。

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_D}\right|_{u_D=u_0} \approx \frac{\Delta T}{\Delta u}. \tag{24}$$

一种直接纳入该切线刚度的方法是，对低于给定阈值的切线刚度值施加惩罚。这里，我们选择对低于结构平均刚度的切线刚度值施加惩罚，其中结构平均刚度由割线刚度 T_0/u_0 表示。现在，可以通过对变形构型中小于平均刚度的切线刚度值施加惩罚来控制切线刚度，即正值的

$$\frac{T_0}{u_0} - \frac{\Delta T}{\Delta u}. \tag{25}$$

为提高稳定性，可以采用相同的逻辑，通过惩罚低于 $1/10$ 平均刚度的切线刚度值，将其应用于水平扰动 $\Delta u'$ on Γ_D。扰动如图9所示。请注意，施加的位移在 y-方向为负，在 x-方向为正，因此式（25）中各项的符号发生翻转。此时目标函数具有

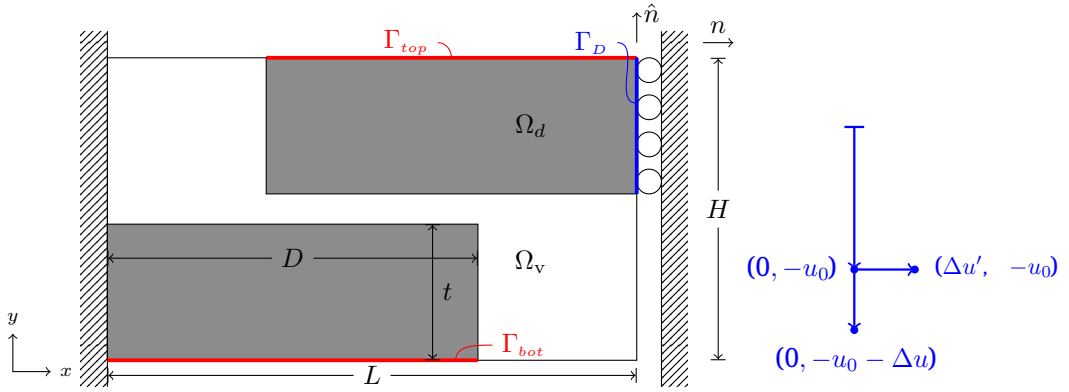


图 9：自啮合钩问题的计算域。初始猜测 $\rho = 0.5$ in Ω_d。用于对 Γ_D 施加强制位移的点如右侧所示。

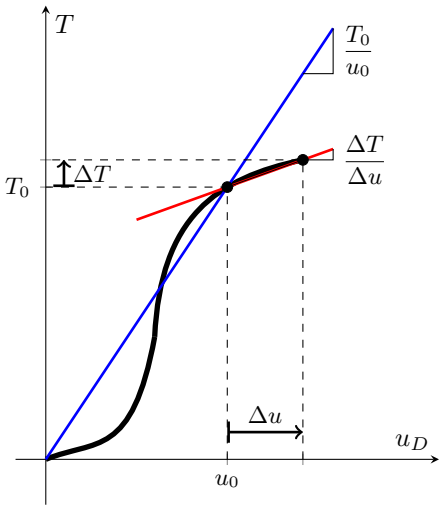


图 10：加载历程及所示控制点的示意图。

form

$$C(\tilde{\rho}_e, u, q) = k_q \left(-(T_0 + \Delta T) + k_s \frac{1}{2} \left\langle \frac{\Delta T}{\Delta u} - \frac{T_0}{u_0} \right\rangle^2 + k_s \frac{1}{2} \left\langle -\frac{\Delta T'}{\Delta u'} - \frac{T_0}{u_0} \frac{1}{10} \right\rangle^2 \right). \tag{26}$$

目标函数中的第一项（$T_0 + \Delta T$）是变形构型中的反作用力（0，$-u_0 - \Delta u$）。式（26）中的第二项会惩罚向下扰动 Δu 下小于平均刚度 $-T/u_0$的切线刚度值。第三项惩罚横向刚度，即反作用力 T 相对于水平扰动$\Delta u'$ on Γ_D的变化。因此，目标函数在变形构型的基础上，同时包含了针对竖直和水平方向位移的切线刚度项。因子 k_q 对目标函数进行缩放，以便使其与式（12）中的增广目标函数具有适当的尺度，而k_s 则是施加于切线刚度项惩罚的相对权重。

该问题的数值参数列于表 3，离散方式与第 3.1 节所述相同。图中展示了三种不同强制位移值 u_0 的结果

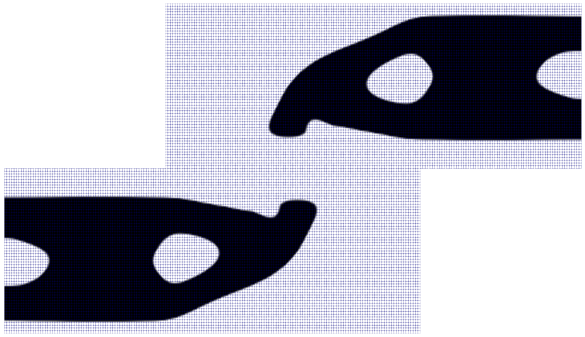
区域尺寸	$L \times H$	56×32	mm^2
设计区域尺寸	$t \times D$	$0.45H \times 0.70L$	mm^2
位移扰动	Δu, $\Delta u'$	$0.01t$	mm
网格尺寸	$N_x \times N_y$	240×120	-
体积约束	V^*	0.34	-
滤波半径	r	1.60	mm
阈值参数	$(\beta_{ini}, \beta_{max})$	(2, 120)	-
目标权重	k_q	10^4	-
切线刚度权重	k_s	10^4	mm^2/N

表 3：自啮合钩的参数配置

问题。

如图11所示，图11a中标出了网格区域。这三种设计在一定程度上都类似于两个相对的钩状结构。在变形构型中，这些钩状结构相互啮合，图12展示了图11c所示设计的这一情况。图12中的放大图显示，空隙在正则化的作用下保持稳定，并被完全压缩至反映接触状态的程度。

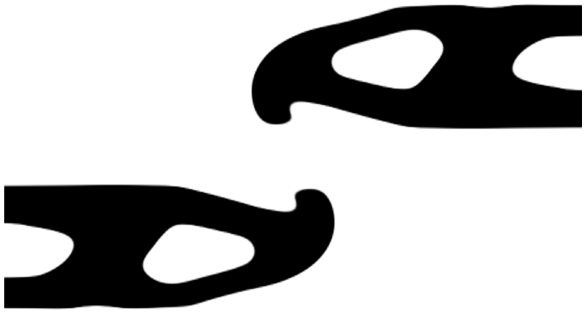
通过规定的加载历程使钩状结构发生变形，可以得到如图13所示的力-位移曲线。正如预期，对于 $u_0 = 2.0\,t$ ，在 $u_D = 2.0\,t$处获得的设计在三个设计中具有最大的力。对于 $u_0 = 2.5\,t$，在 $u_D = 2.5\,t$处也有类似的情况。在变形构型中，如图13中对 $u_0 = 3.0\,t$处获得的设计的放大图所示，切线刚度与平均刚度高度吻合。这表明，目标函数式（26）中的第一个惩罚项在达到收敛状态之前始终保持激活。图13中对 $u_0 = 2.5\,t$ 设计的放大图显示，力-位移曲线出现了一次突跃。这次突跃是由图11b中钩状结构的非重叠尖端之间的啮合引起的。



(a) $u_0 = 2.0\,t$

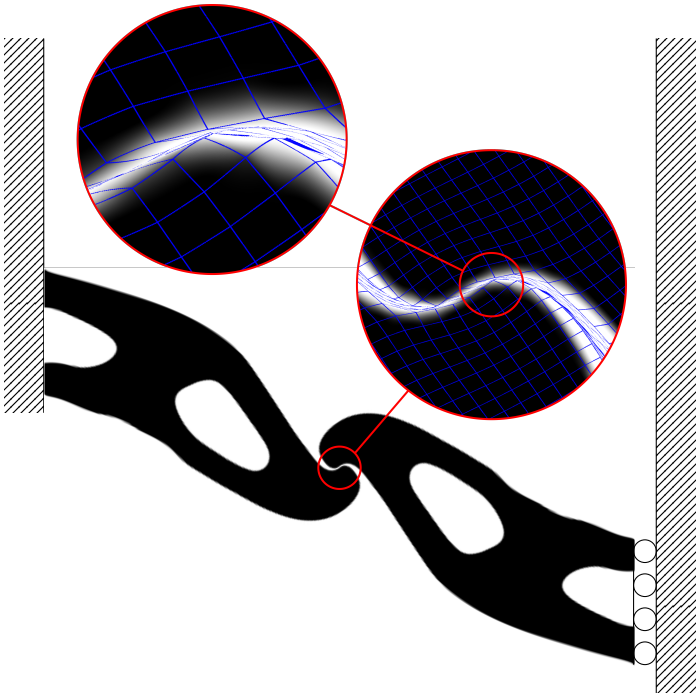


(b) $u_0 = 2.5\,t$



(c) $u_0 = 3.0\,t$

Figu图 11：在三种不同的强制位移值下获得的优化设计 u_0.



Figu图 12：变形构型中位移为 $u_0 = 3.0\,t$ 时优化得到的钩状结构（$u_D = 3.0\,t$).

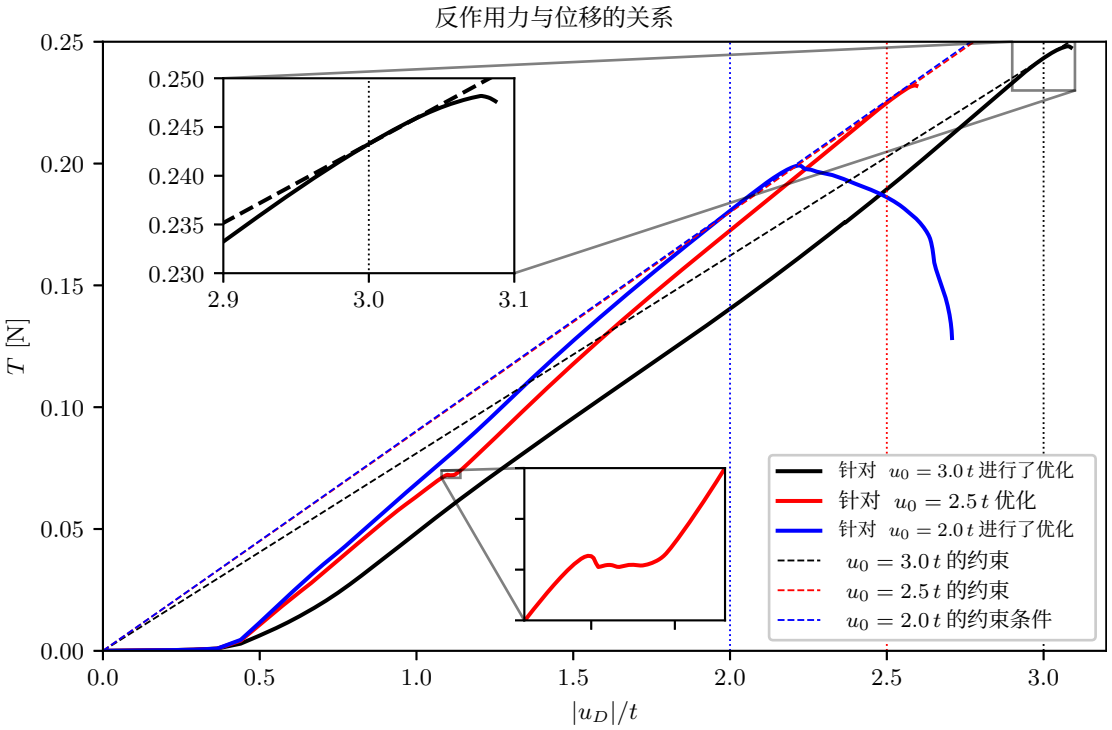


图13：图12中钩形设计的力-位移曲线。

3.3 弯曲机制

本节将第 2 节中概述的方法应用于一个受内窥镜弯曲段启发的弯曲问题。内窥镜弯曲段是内窥镜远端的可控部分，通常由周期性结构组成。因此，在设计此类组件时，将重点放在周期性结构的单个单元上是合理的。图 14 展示了弯曲段及其重复单元的示意图。将图 14 中重复单元的设计域定义为图 15a 所示，其中边界 Γ_{top} 和 Γ_{bot} 为周期性边界。

使用过程中，内窥镜弯曲段发生变形，使图 15a 中的节段形成图 15b 所示的环形截面，其中环形截面中心处的弧长为 H。通过指定环形截面的角度 α，在外边界 $\delta\Omega$ 上规定变形。沿边界 Γ_{top} 和 Γ_{bot}不存在应变，即它们作为刚体旋转。

从内窥镜医师的角度来看，理想情况下，内窥镜弯曲段应能在低于某一特定阈值的任意角度下非常容易地弯曲。这样，内窥镜医师便可轻松操控内窥镜弯曲段，而不会使其超过某一特定曲率。超过该角度阈值可能会损坏穿过内窥镜的器械。此外，理想情况下，所获得的设计应处于纯弯曲状态。这可以减少与内窥镜弯曲段中其他部件之间的相互作用。此外，在不存在弯曲-拉伸耦合的纯弯曲状态下，内窥镜的控制也更加简单。

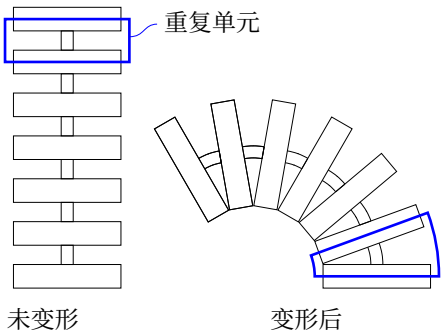
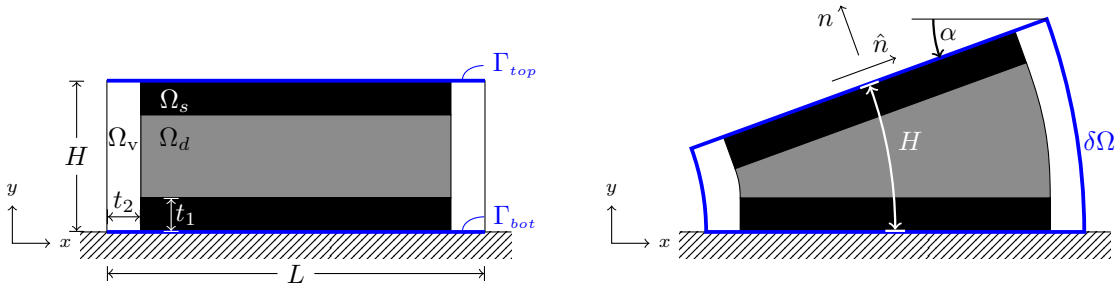


图 14：具有周期性结构的弯曲部分。



(a) 未变形构型。 (b) 变形构型。

图 15：弯曲部分的域，其中指定的实体部分（黑色）和空隙部分（白色）。Ω_d中的初始猜测 $\rho = 0.4$ 。

相应边界上的反作用力和弯矩通过反作用牵引力 q by 计算得到。

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_{\Gamma_i} q \, d\Gamma_i \quad \text{and} \\ M_i &= \int_{\Gamma_i} ((q - \bar{q}_i) \cdot n)(p \cdot \hat{n}) \, d\Gamma_i, \end{aligned} \tag{27}$$

其中， n 和$\hat{n}$ 分别是图 15b 所示的单位法向量和切向量， p 是边界 Γ_i上的一点， $\bar{q}_i$ 是平均表面牵引力。

基于两个角度控制点 α_0 和 α_1 （其中 $\alpha_0 < \alpha_1$），可将期望属性表示为一个近似期望结果的目标函数。这里，我们提出如下定义的目标函数：

$$C(\tilde{\rho}_e, u, q) = k_q \Big(- M_{top}|_{\alpha_1} - M_{bot}|_{\alpha_1} + k_m \left(M_{top}^2|_{\alpha_0} + M_{bot}^2|_{\alpha_0} \right) + k_s \left(||Q_{top}||^2|_{\alpha_0} + ||Q_{bot}||^2|_{\alpha_0} \right) \Big). \tag{28}$$

式 (28) 中的目标函数会将角度 α_0处弯矩的正值或负值都降至最低，从而确保低角度下的弯曲阻力较小。同时，它会使角度 $\alpha_1 > \alpha_0$处的弯矩最大化，以抑制大角度下的弯曲。纳入包含反作用力的项，可确保相关边界处的反作用力最小化。k_s 是边界 Γ_{top} 和 Γ_{bot}上反作用力的权重因子。同样，k_m 是角度 α_0处弯矩的权重因子。 k_m 的值越高，对较小角度下弯矩的惩罚越大。

控制点 α_0 取两个不同值时的结果，以及表 4 中列出的参数，见图 16。所有离散化均保持第 3.1 节中的设定不变。请注意，正则化

区域尺寸	$L \times H$	9.0×3.5	mm^2
最大角度	α_1	24	deg
网格尺寸	$N_x \times N_y$	200×100	-
体积约束	V^*	0.55	-
滤波半径	r	0.60	mm
固定区域宽度	(t_1, t_2)	$(r, 2r)$	mm
阈值参数	$(\beta_{ini},\ \beta_{max})$	$(2,\ 240)$	-
空隙正则化权重	k_r	$3 \cdot 10^{-6}$	-
目标权重	k_q	10^4	-
目标力矩权重	k_m	10	1/Nmm
目标力权重	k_s	10^{-2}	mm/N

表 4：弯曲问题的参数。

与前两个示例相比，缩放项 k_r 已增大，这是为了进一步稳定该问题。变形构型展示了优化设计如何在角度 α_0 附近建立接触。两种设计的一个显著区别在于， $\alpha_0 = 14°$ 设计包含两个用于接触的空洞区域，而 $\alpha_0 = 18°$ 设计仅包含一个。与该示例相比

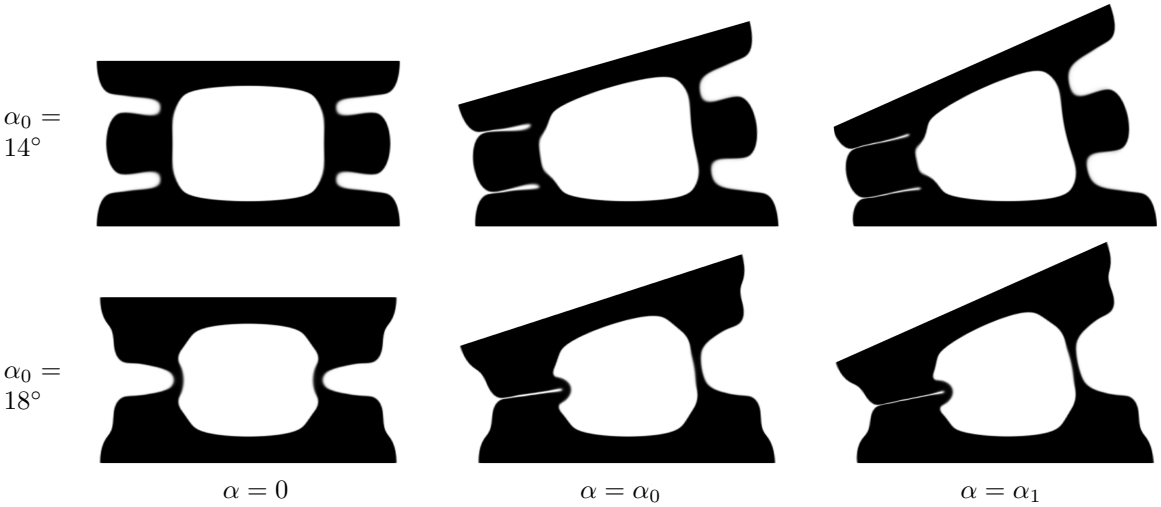


图 16：针对 $\alpha_0 = 14°$ 和 $\alpha_0 = 18°$，在角度为 $\alpha = 0$、$\alpha = \alpha_0$ 和 $\alpha = \alpha_1$ 时的弯曲设计。

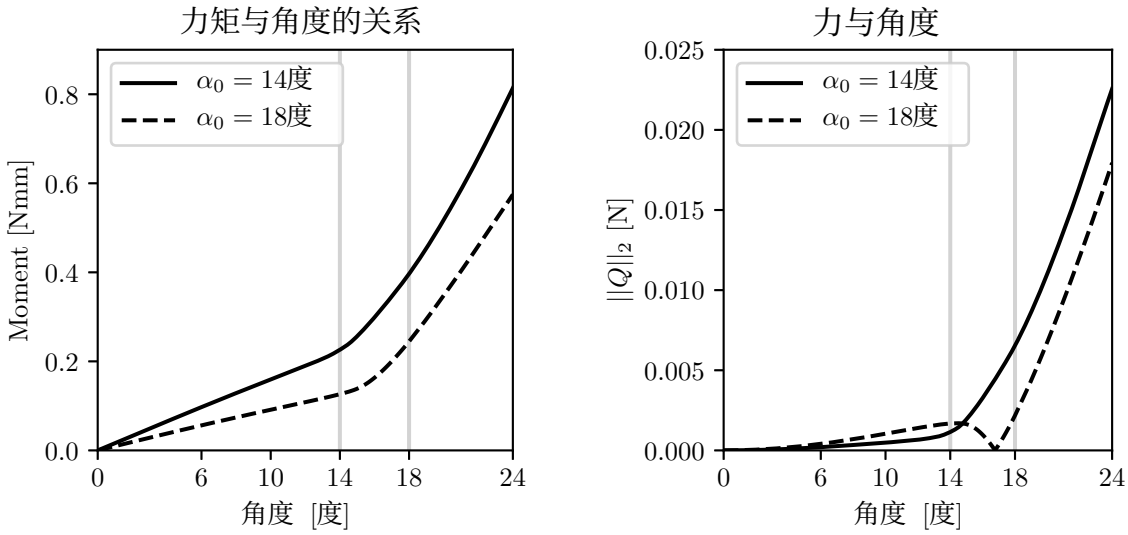


图 17：弯曲问题的弯矩和力结果。

在第 3.2 节中，图 16 所示的接触并非通过强制设置空洞区域形成的，而是作为接触介质的空隙直接由优化过程产生。这一点也可以从第 3.1 节的结果中看出。因此，这表明，无需预先指定用作接触介质的空隙，即可在设计区域内形成相互接触的表面。

图 17 展示了所得设计的弯矩和力的范数随弯曲角度的变化。弯矩曲线的斜率代表弯曲刚度，在点 α_0附近显著增大。两条弯矩曲线都出现了一个轻微的拐点，表明已发生接触，对应的角度分别约为 $14°$ 和 $16°$。从力曲线可以看出，正如目标函数所期望的那样，在发生接触之前，力始终保持在相对较低的水平。

4 结论

本研究将 [1] 中用于拓扑优化的第三介质接触方法改编为标准拓扑优化方法，并将其应用于高级运动学示例。这包括通过非均匀 Helmholtz 方程进行 PDE 滤波、阈值投影、SIMP，以及 MMA 的应用。为避免对空洞区域（作为第三介质）进行非物理利用，实践证明，在膨胀后的设计上评估体积约束，以惩罚小特征，是一种有效方法；这与拓扑优化 [23] 中已知的鲁棒公式相同。这种惩罚还间接控制了所得结构的长度尺度。此外，

建议采用一种求解算法，其中包含 β 延续法，如 [23] 中所提出的。

第三介质接触的应用已扩展至更复杂的场景，例如需要对结构的切向刚度进行额外控制的应用。本文通过三个示例展示了该方法的潜在应用，以及该方法在涉及大变形的问题中的工作原理：1）一种在水平位移作用下使竖向反力最大化的升降机构；2）一种用于连接两个被空洞区域隔开的设计域的耦合结构，最终形成两个钩状结构；3）一种受内窥镜弯曲段启发的弯曲机构设计。结果表明，优化后的结构既可以利用指定空域建立接触，也可以在设计域内部形成新的空洞区域，用于实现接触。将接触纳入拓扑优化扩展了可能的解空间，并有望在柔顺机构设计中实现比 [15]所提供的更复杂的力-位移响应编程。

参考文献

[1] G. L. Bluhm、O. Sigmund 和 K. Poulios。有限应变拓扑优化中的内部接触建模。计算力学，67(4):1099–1114，2021。[2] T. E. Bruns、O. Sigmund 和 D. A. Tortorelli。具有突跳行为的结构拓扑优化的数值方法。国际工程数值方法期刊，55(10):1215–1237，2002。[3] T. E. Bruns 和 D. A. Tortorelli。非线性弹性结构与柔顺机构的拓扑优化。计算力学与工程中的数值方法，190(26- 27):3443–3459，2001。[4] T. E. Bruns 和 D. A. Tortorelli。用于结构和柔顺机构拓扑优化的单元移除与重新引入策略。国际工程数值方法期刊，57(10):1413–1430，2003。[5] T. Buhl、C. B. Pedersen 和 O. Sigmund。利用拓扑优化进行几何非线性结构的刚度设计。结构与多学科优化，19(2):93–104，2000。[6] A. Deetman。GCMMA-MMA-Python：移动渐近线法的 Python 代码。检索日期：16/12/2022，来源：https://github.com/arjendeetman/GCMMA-MMA-Python，2021 年 12 月。[7] D. Hilding、A. Klarbring 和 J. Petersson。单边接触条件下的结构优化。应用力学评论，52(4)，1999。[8] D. Jung 和 H. C. Gea。非线性结构的拓扑优化。有限元分析与设计，40(11):1417–1427，2004。[9] H. Kristiansen、K. Poulios 和 N. Aage。摩擦结构问题中针对柔顺性和接触压力分布的拓扑优化。计算力学与工程中的数值方法，364(112915)，2020。[10] P. Kumar、R. A. Sauer 和 A. Saxena。利用材料掩膜叠加法合成 C0 轨迹生成接触辅助柔顺机构。机械设计期刊（*ASME* 汇刊），138(6)，2016。[11] P. Kumar、R. A. Sauer 和 A. Saxena。大变形接触辅助形状变换柔顺机构的拓扑优化研究。机构与机器理论，156(104135)，2021。[12] R. D. Lahuerta、E. T. Sim˜oes、E. M. Campello、P. M. Pimenta 和 E. C. Silva。大变形拓扑优化中低密度单元稳定化的研究。计算力学，52(4):779–797，2013。[13] M. Lawry 和 K. Maute。具有滑动接触界面的拓扑优化问题的水平集方法。结构与多学科优化，52(6):1107–1119，2015。[14] B. S. Lazarov 和 O. Sigmund。基于 Helmholtz 型微分方程的拓扑优化滤波器。国际工程数值方法期刊，86(6):765– 781，2011。

<escape>[15] </escape>W. Li、F. Wang、O. Sigmund 和 X. S. Zhang。用于实现任意编程机械响应的自由形态多材料结构数字合成。美国国家科学院院刊，119(10)，2022。<escape>[16] </escape>Y. Luo、M. Y. Wang 和 Z. Kang。基于加性超弹性技术的几何非线性结构拓扑优化。计算力学与工程方法，286：422–441，2015。<escape>[17] </escape>C. B. Pedersen、T. Buhl 和 O. Sigmund。大位移柔顺机构的拓扑综合。工程数值方法国际期刊，50(12)：2683–2705，2001。<escape>[18] </escape>B. V. Reddy、S. V. Naik 和 A. Saxena。基于接触辅助的整体式柔顺机构大位移系统综合。机械设计学报（美国机械工程师学会会刊），134(1)，2012。<escape>[19] </escape>Y. Renard 和 K. Poulios。GetFEM：基于通用弱形式语言的多物理场问题自动有限元建模。*ACM* 数学软件汇刊，47(1)，2021。<escape>[20] </escape>G. I. N. Rozvany、M. Zhou 和 T. Birker。无需均匀化的广义形状优化。结构优化，4(3-4)：250–252，1992。<escape>[21] </escape>O. Sigmund。制造容差下的拓扑优化。力学学报，25(2)：227–239，2009。<escape>[22] </escape>K. Svanberg。移动渐近线法——一种新的结构优化方法。工程数值方法国际期刊，24(2)：359–373，1987。<escape>[23] </escape>F. Wang、B. S. Lazarov 和 O. Sigmund。拓扑优化中的投影方法、收敛性与鲁棒公式。结构与多学科优化，43(6)：767–784，2011。<escape>[24] </escape>F. Wang、B. S. Lazarov、O. Sigmund 和 J. S. Jensen。用于虚拟域技术以及有限应变弹性问题拓扑优化的插值方案。计算力学与工程方法，276：453–472，2014。<escape>[25] </escape>P. Wriggers、J. Schr¨oder 和 A. Schwarz。一种使用第三介质处理接触问题的有限元方法。计算力学，52(4)：837–847，2013年10月。<escape>[26] </escape>Z. Zong、X. Li、J. Ye、S. Wen、Y. Yang、D. M. Kaufman、M. Li 和 C. Jiang。摩擦自接触拓扑优化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2208.04844*，2022。