布里渊区　非互易 *Willis* 单原子晶格中的定义　*es*

Hasan B. Al Ba'ba'a

机械工程系，Union College，美国纽约州斯克内克塔迪，邮编 12308，
albabaah@union.edu

对一类非互易威利斯单原子晶格（*WMLs*）中的布里渊区（*BZ*）定义进行了解析量化。研究表明，在一维 *WMLs* 中，布里渊区边界仅随非互易性的变化而发生偏移，这意味着布里渊区宽度保持不变，而非对称色散图则表现出正向和反向传播波具有不同的波数范围。文中还简要讨论了向方形威利斯单原子晶格的扩展，类似地证明了偏移且形状不规则的布里渊区的出现，并且无论非互易性强度如何，其面积始终保持不变。

关键词
非互易单原子晶格；布里渊区偏移；相移；威利斯材料；波动方程。

arXiv:2305.06814v2 [physics.app-ph] 3 Dec 2023

1 引言

对新波动现象的探索一直是波传播研究的重要驱动力 [1]，，人们对弹性动力学非互易性的兴趣也日益浓厚 [2]。在具有线性时不变特性的弹性介质中，由于弹性动力学互易性，源向接收器传播的波在交换源和接收器的位置后，其行为不会发生变化。人工材料的结构设计为波的调控开辟了新的途径，使其能够实现天然材料无法实现的功能，而打破波互易性也不例外。鉴于其在实现新型应用方面的潜力（例如单向振动隔离器 [3]），研究人员提出了多种专门用于实现非互易性的结构设计，例如利用具有超传输现象的非线性失稳 [4]。类似地，颗粒晶体凭借其非线性和分岔混沌行为，已被用于实现能量的非对称传输，并在传感和能量采集方面具有潜在应用价值 [5]。另一种实现非互易性的方法是对机械属性进行时空调制，通过人工动量偏置迫使波在正向和反向传播时呈现不同的传播行为 [3, 6–10]。

当弹性介质违背弹性动力学互易性时，其色散图会发生倾斜，并且关于零波数呈非对称性，传统的布里渊区（BZ）定义也随之失效。Cassedy 和 Oliner 是最早研究布里渊区（BZ）倾斜（非互易）性质的学者之一，旨在推广其定义，以描述时空调制电路中的波传播 [11]。不同于色散图沿波数轴完美重复的仅空间调制，时间调制的存在会使色散图沿一条斜率取决于该调制的直线呈现周期性（假设调制幅度较小）。然而，传统布里渊区能否充分捕捉波的非互易性，仍是一个持续存在的问题，尤其对于二维系统而言 [8]。

在本研究中，针对一类非互易单原子晶格（MLs），根据描述轴向运动弹性（连续体）杆中纵波传播的非互易波动方程，对布里渊区（BZ）的定义进行了阐释，如下所示[12]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho v_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(\rho v_0^2-E\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

其中，ρ、E 和 $u(x,t)$ 分别表示杆的密度、弹性模量以及纵向位移，后者是空间x 和时间 t 的函数。杆的恒定 速度定义为$v_0=\beta c$，其中$c=\sqrt{E/\rho}$ 表示弹性介质中的声速，而 $\beta\in[-1,1]$ (+ (–)符号分别表示向前（向后）运动）表示无量纲相对运动速度 [12]。事实上，方程（1）的非互易性本质与具有时空调制特性的弹性杆的非互易性本质密切相关。在低频极限和缓慢调制条件下，具有时空波状调制的弹性杆的宏观行为由 Willis 型方程 [7],描述，其形式与 运动杆的方程（1） [12]完全相同。不仅方程（1）属于 Willis 型方程，而且它还是陀螺型的，因为它可以重新表示为 [13]:

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+Ku=0 \tag{2}$$

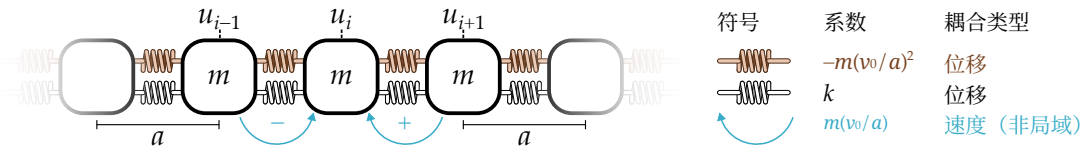

图 1： 由对式 (1) 进行离散化得到的非互易 Willis 单原子晶格（WML）示意图。晶格中的质量块m 以晶格常数a 均匀间隔排列，第i th 个质量块的位移表示为u_i。如图所示，晶格中存在两种弹簧：（i）源于杆弹性的常规弹簧k；（ii）由于杆的运动而产生的负弹簧 $-m(v_0/a)^2$。与第i^{th} 个晶胞相邻单元的速度成正比的非局域耦合参数会破坏晶格的互易性（仅展示了第i^{th} 个晶胞）。

其中，$M = \rho$、$G = 2\rho v_0\partial_x$ 和 $K = (\rho v_0^2 - E)\partial_x^2$ 分别为质量算子、陀螺算子和刚度算子。无论受到时空调制还是以恒定速度运动，满足方程 (1) 的弹性杆都会表现出线性动量偏置（从而引发非互易性），这一点可从混合导数项中明显看出。诱导出的非互易性对布里渊区（BZ）的影响，将首先针对方程 (1) 的晶格版本加以确立，随后再推广至二维对应情形。

2 一维 Willis 单原子晶格

2.1 数学模型

为找到与运动杆等效的 ML（以下称为*Willis* 单原子晶格 （WML）），使用中心差分格式对式 (1) 在空间域x 中的空间导数进行离散化，得到

$$\rho\ddot{u}_i + \rho v_0\left(\frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{a}\right) + \left(\rho v_0^2 - E\right)\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2}\right) = 0 \tag{3}$$

其中，a 为有限差分间距，也是晶格常数（图 1）。WML 的弹簧常数和质量分别定义为长度为 a 、横截面积为 A 的杆段的有效刚度 $k = EA/a$ 和质量 $m = \rho Aa$ 。利用上述参数，经过一些数学运算，可得 WML 第 i^{th} 个单元的运动方程：

$$m\ddot{u}_i + \frac{mv_0}{a}\left(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}\right) + \left(k - \frac{mv_0^2}{a^2}\right)\left(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}\right) = 0 \tag{4}$$

由式（4）和图 1 可知，单个质量块 m 的运动通过弹簧k在物理上相互耦合，这与典型的 ML 相同 [14, 15]。由于杆以恒定速度运动而引入了动量偏置，晶格运动的物理特性受到以下两方面的影响：

1. 除弹簧k外，第i^{th} 个单元的位移还通过耦合系数为 $-mv_0^2/a^2$, 的负弹簧与相邻单元耦合；无论v_0 的符号如何（或 β），该耦合系数始终为负。因此，WML 的有效刚度（$k_e = k - mv_0^2/a^2$）会随着杆速v_0 的增加而降低。当$mv_0^2/a^2 > k$ （等价于 $|\beta| > 1$）时，其有效刚度k_e 变为负值，从而危及系统的动力学稳定性。

2. 非局域耦合项由此产生，其大小与 i^{th} 单元胞中次近邻质量块的速度成正比。这种非局域相互作用（与 Willis 耦合 [16] 相关）源于对方程（1）中混合导数项的离散化，并决定了晶格非互易性的强度。虽然弹性介质的物理运动能够实现这种非局域耦合，但也可以通过反馈控制 [17–19] 来实现。最后，值得注意的是，这种非局域（正负）耦合与文献 [20–25] 中研究的反对称陀螺耦合具有相似性。

2.2 色散关系

假设其作简谐运动 $u_i = \hat{u}_i e^{\mathbf{i}\omega t}$ ，并施加布洛赫边界条件 $u_{i\pm1} = e^{\pm \mathbf{i}qa}u_i$，其中 q 为无量纲波数， ω 为激励频率，$\mathbf{i}$ 为虚数单位，由式（4）可推导出无量纲色散关系：

$$\Omega^2 + 2\Omega\beta\sin(q) - 4(1-\beta^2)\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) = 0 \tag{5}$$

这里，无量纲频率的定义为 $\Omega = \omega/\omega_0$，其中 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$。注意，$v_0 = \beta c \equiv a\beta\omega_0$。式(5) 中的色散关系只有一个（正频率）色散分支，其表达式为：

$$\Omega = 2\left|\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right|\sqrt{1-\beta^2\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)} - \beta\sin(q) \tag{6}$$

项 $\sin(q)$ 使式 (6) 中的色散关系成为非互易关系，因为其符号会随q同时改变。与我们此前关于晶格在速度v_0, 下的动力学稳定性的观察相印证，式 (6) 表明 $|\beta| > 1$ 会产生复数频率值 Ω，表明系统存在动力学不稳定性。

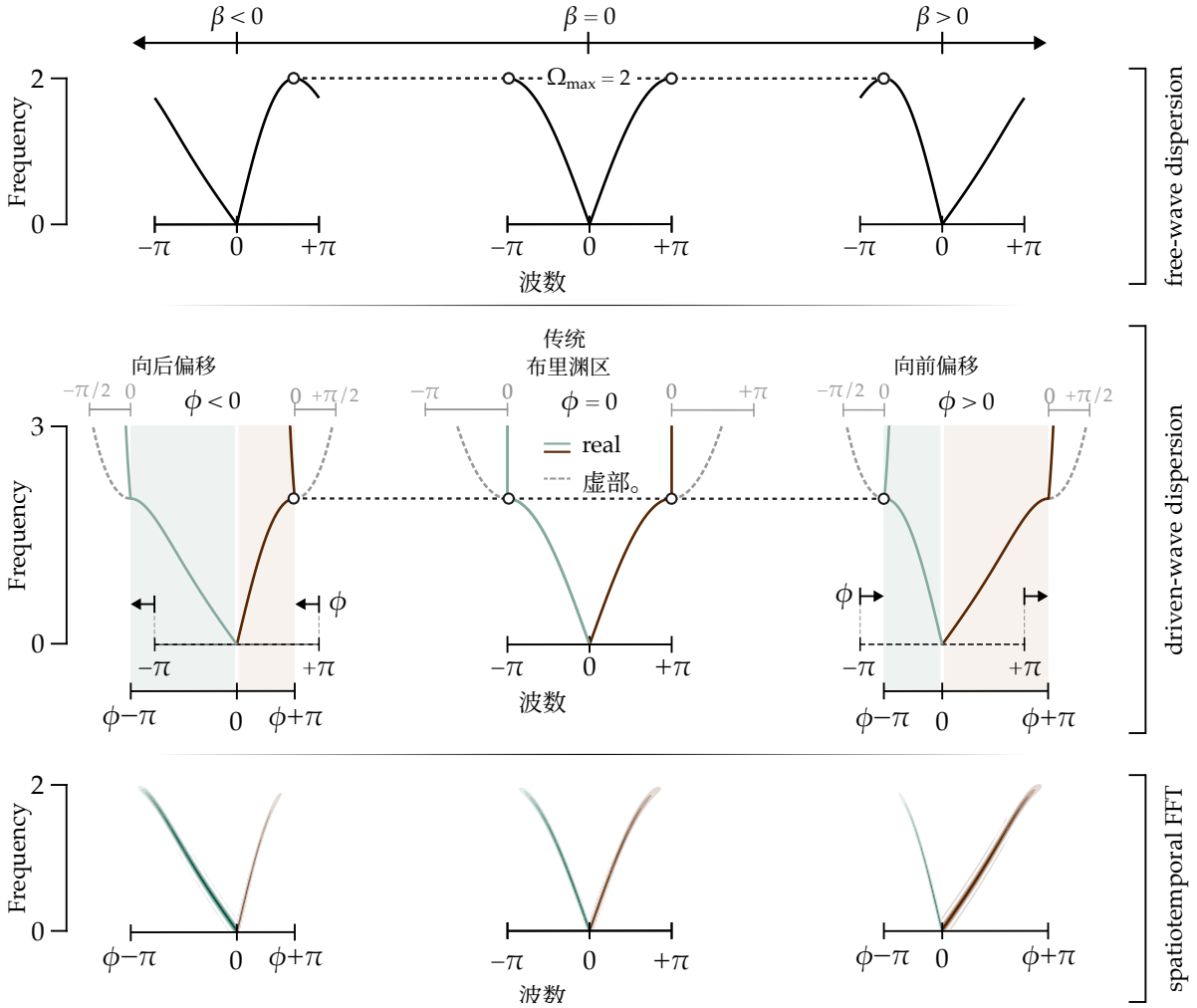

图 2: 采用自由波（上）和受迫波（中）方法绘制的 WML 色散图。正（负）的 β 会产生正（负）的偏移 ϕ，表现为偏向沿前进方向（后退方向）传播的波；而$\beta = 0$ 则恢复互易 ML 的色散图。不过，自由波色散无法体现布里渊区的偏移特性，这说明受迫波方法对于揭示布里渊区偏移 ϕ的重要性。请注意，与互易 ML 相比，WML 中的衰减（以受迫波色散中波数的虚部表示）较小（$\beta = 0$），当 $\Omega > 2$时，即频率高于晶格的截止频率 $\Omega_{\max} = 2$。此外，只有在 WML 情况下，$\Omega > 2$ 才会导致波数的实部不恒定。请注意，对于此处所示的 $\beta = \pm 0.5$，相应的布里渊区偏移为 $\phi \approx 0.3\pi$。（下）WML 在左右端受到脉冲激励时的时间响应的时空快速傅里叶变换，分别量化沿前进方向和后退方向传播的波数，并表明其与中间面板中的新布里渊区定义高度吻合。

2.3 布里渊区定义

通常，通过在第一个布里渊区（BZ）内扫描无量纲波数 $q \in [-\pi, \pi]$，并对每个 q 值求解式（6）中的 Ω，即可绘制色散关系；这种方法称为自由波色散

关系。该过程的结果如图 2 顶行所示，展示了不同 β 值的情况，其中 $\beta \neq 0$ 会导致色散关于零波数不对称（即 $q = 0$）。请注意，$\beta = 0$ 可恢复经典（且互易）ML [15] 的色散图，并使色散关于布里渊区中心完全对称（$q = 0$）。然而，对于 $\beta \neq 0$，传统布里渊区无法准确涵盖正向传播波和反向传播波所跨越的波数范围。为说明这一点，可将式（5）改写为以频率 Ω 为输入来求解波数 q，从而得到驱动波色散关系。将三角函数项改写为指数形式后，可以证明：

$$(1-\beta^2-\mathbf{i}\beta\Omega)e^{\mathbf{i}q}+\left(\Omega^2-2(1-\beta^2)\right)+(1-\beta^2+\mathbf{i}\beta\Omega)e^{-\mathbf{i}q}=0 \tag{7}$$

请注意，第一项和最后一项（式 (7)）互为复共轭，可改写为 $|z|e^{\pm \mathbf{i}(q-q^s)}$，其中

$$|z|=\sqrt{\beta^2\Omega^2+(1-\beta^2)^2};\quad q_s=\tan^{-1}\left(\frac{\Omega\beta}{1-\beta^2}\right) \tag{8}$$

产生的相移 q_s 是 Ω 和 β 的函数，并将决定布里渊区的新定义。根据式 (8) 中的参数化，式 (7) 中的色散关系可改写为：

$$\cos(q-q_s)=\frac{2(1-\beta^2)-\Omega^2}{2\sqrt{\beta^2\Omega^2+(1-\beta^2)^2}} \tag{9}$$

通过求解q，可得到色散关系的受驱波形式：

$$q=\pm\cos^{-1}\left(\frac{2(1-\beta^2)-\Omega^2}{2\sqrt{\beta^2\Omega^2+(1-\beta^2)^2}}\right)+q_s \tag{10}$$

对于 $\beta \neq 0$，式 (10) 的输出不再受传统布里渊区边界$q \in [-\pi,\pi]$的限制，这表明布里渊区因相移q_s而发生了偏移。由于周期介质在布里渊区边界处的群速度为零，必须首先推导 WML 的群速度，才能精确确定其布里渊区边界。随后，在群速度为零的频率处计算q_s，即可得到布里渊区偏移。为此，考虑 WML 的（无量纲）群速度c_g，其推导方法是对式 (6) 关于波数q 求导（有关群速度和相移的更多讨论，参见补充说明 1）：

$$c_g(q)=\frac{\partial\Omega}{\partial q}=\frac{\sin(q)\left(1-2\beta^2\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\right)}{2\left|\sin\left(\frac{q}{2}\right)\right|\sqrt{1-\beta^2\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)}}-\beta\cos(q) \tag{11}$$

令式 (11) 中的群速度等于零，可得以下波数根：

$$q_{\max}=4\tan^{-1}\left(\beta\pm\sqrt{1+\beta^2}\right) \tag{12}$$

将式 (12) 代入式 (6) 可知，群速度为零时的频率为 $\Omega_{\max}=2$，该值为常数，不依赖于 β，且等价于互易 ML 的截止频率。最后，通过计算q_s 在 $\Omega_{\max}=2$处的值，推导出布里渊区偏移量（记为 ϕ），这是本研究的关键结果：

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2}\right) \tag{13}$$

方程（10）和（13）揭示，整个布里渊区均发生了平移，其范围为$q \in [-\pi+\phi,\pi+\phi]$，宽度则保持恒定，为 2π，这与互易 ML 类似。根据 β（进而也根据ϕ）的符号，布里渊区会向前或向后移动，如图 2 中间一行所示。不仅非互易性会使布里渊区发生平移，还会导致对应正向传播波和反向传播波的波数范围不相等。为保持布里渊区宽度恒定为 2π，正向传播波波数范围（即$q \in [0,\pi+\phi]$）的缩小（或扩大）幅度，会由反向传播波更大的（或更小的）波数范围（即$q \in [-\pi+\phi,0]$）予以补偿，具体取决于 ϕ 的符号。正如预期，当相对速度 β 归零时，这种平移 ϕ 便会消失；这一点可由方程（13）验证，此时传统的布里渊区范围（$q \in [-\pi,\pi]$）得以恢复。

从图 2 的受迫波色散关系中还可以观察到几点：（i）在频率高于截止频率 $\Omega_{\max}=2$ 时，WML 中的衰减小于互易 ML。（ii）WML 中，$\Omega_{\max}>2$ 对应的波数实部并非恒定值，而是随频率升高而变化；这不同于互易情形，后者在衰减区（$\Omega_{\max}>2$）内具有恒定的波数实部 $\pm\pi$。（iii）对于 $\beta=0$，ML 中定义的布里渊区关于其中心对称，因此可以在$q\in[0,\pi]$范围内定义不可约布里渊区。由于 WML 的色散分支不对称，缩减第一布里渊区可能难以实现。不过，对于这两种晶格，零波数仍是区分正向传播波与反向传播波的分界点。最后，通过对有限 WML 的时间响应进行时空快速傅里叶变换（FFT），数值验证了正向与反向波数范围并不等价（见图 2 底部一行）；所得结果与中间一行中采用新定义方式定义的布里渊区解析结果高度吻合（更多详情见补充说明 2）。

3 二维晶格的推广

接下来，将一维 WML 的分析扩展到二维情形，采用一种在 x 和 y 方向上分别具有速度调制 v_x 和 v_y 的弹性薄膜，并提出如下控制方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+v_x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+v_y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(v_x^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(v_y^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{14}$$

其中，$u(x,y,t)$ 表示膜的横向位移。将式（14）离散化为方形网格后，可以证明，所得方形威利斯单原子晶格的色散关系为（见补充说明3）：

$$\Omega^2+\Omega\left(\beta_x\sin(q_x)+\beta_y\sin(q_y)\right)-2\left((1-\beta_x^2)\sin^2\left(\frac{q_x}{2}\right)+(1-\beta_y^2)\sin^2\left(\frac{q_y}{2}\right)\right)=0 \tag{15}$$

其中，$q_{x,y}$ 和 $\beta_{x,y}=v_{x,y}/c$ 分别表示x（或y）方向上的波数和相对速度。注意，$\beta_{x,y}\in[-1,1]$ 并且，当 $\beta_x=\beta_y=0$ 时，即可恢复传统方形 ML 的色散关系，这与预期一致。方形 WML 在式（15）中的色散曲面 Ω，可通过求解关于q_x和q_y的二次方程得到，其中二者取值范围位于一个新定义的（经过平移的）布里渊区内。为揭示这一布里渊区，此处采用与推导式（9）相同的步骤，从而得到式（15）的另一种形式：

$$\Omega^2-(2-\beta_x^2-\beta_y^2)+|z_x|\cos(q_x-q_s^x)+|z_y|\cos(q_y-q_s^y)=0 \tag{16}$$

其中

$$|z_{x,y}|=\sqrt{\beta_{x,y}^2\Omega^2+(1-\beta_{x,y}^2)^2};\quad q_s^{x,y}=\tan^{-1}\left(\frac{\Omega\beta_{x,y}}{1-\beta_{x,y}^2}\right) \tag{17}$$

数值结果表明，方形 WML 的色散关系在 $\Omega_{\max}=2$ 处具有恒定的截止频率，与 β_x 和 β_y 无关（见补充图 S3(a)）。类似于公式 (13)，将 $\Omega_{\max}=2$ 代回公式 (17) 中的 $q_s^{x,y}$ 后，可以得出结论：二维布里渊区的角点发生了偏移，其沿 x 和 y 方向的偏移量分别为：

$$\phi_{x,y}=\tan^{-1}\left(\frac{2\beta_{x,y}}{1-\beta_{x,y}^2}\right) \tag{18}$$

在互易方形ML中，完美方形布里渊区的垂直（水平）边界仅对应于x方向（y方向）群速度为零。推广而言，在非互易WML情形下也应施加相同条件，以确定移位布里渊区的水平和垂直边界。由此可知，WML的布里渊区不再是正方形，其边界形状不规则。不过，其面积仍为常数$4\pi^2$，与互易情形相同，且不受 β_x 和 β_y 大小的影响（见图3(a,b)和补充图S3(b)）。

描绘二维色散关系的另一种方式是使用指向性图，将两个变量q_x 和q_y 简化为一个（方向）角，等于 $\psi=\tan^{-1}(q_y/q_x)$。在互易情形下，角度 ψ 的四个象限均呈现相同的色散曲面轮廓；而当 $\beta_x\neq0$ 和/或 $\beta_y\neq0$时则并非如此（图3(c)）。若将非互易布里渊区边界内的波数值（如图3(b)所示）代入色散关系，即可在指向性图中得到完整的色散曲面；若改用波数q_x 和q_y 的传统布里渊区数值，则无法得到完整曲面（见图3(c)和补充图S4）。

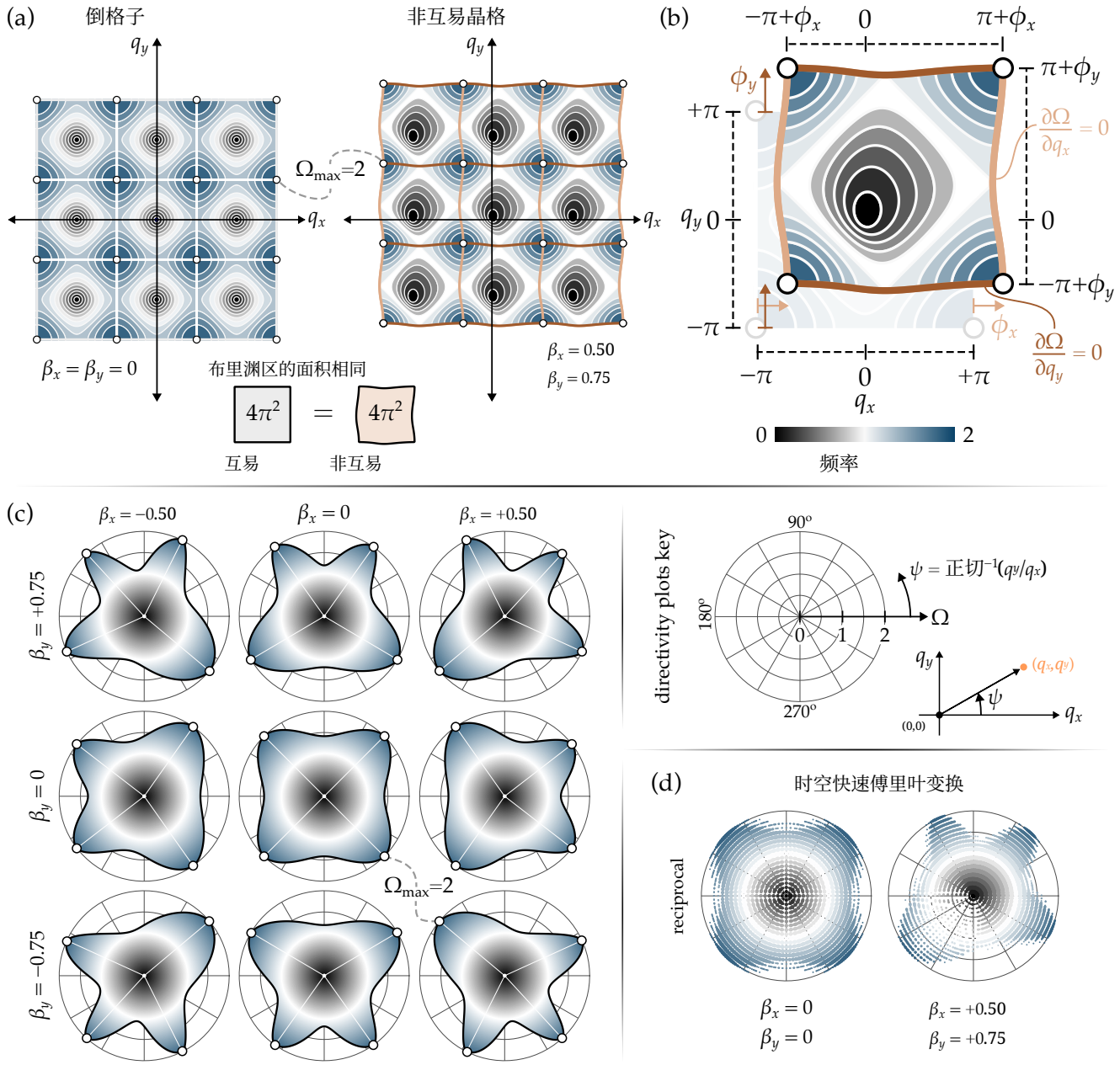

图 3： (a) 互易方形 ML（$\beta_x = \beta_y = 0$）和非互易方形威利斯单原子晶格（$\beta_x = +0.5$ 和$\beta_y = +0.75$）的色散等值线，展示了各自情形下布里渊区的定义。对于威利斯单原子晶格情形，布里渊区的形状虽不规则，但面积与其互易对应情形相同。(b) 方形威利斯单原子晶格布里渊区的局部放大图，展示了x 和y 传播方向（即ϕ_x 和 ϕ_y）的偏移，以及在变形的 垂直（水平）布里渊区边界处x方向（y方向）群速度的消失。(c) 使用所提出的方形威利斯单原子晶格布里渊区定义，展示多种 β_x 和 β_y组合的指向性图。白线表示截止频率出现的方向。(d) 通过时空快速傅里叶变换数值构建的 $\beta_x = \beta_y = 0$ （互易情形）和 $\beta_x = +0.5$、 $\beta_y = +0.75$（非互易情形）指向性图，与子图 (c) 中的理论结果高度吻合。

最后，图3(d)展示了有限尺寸方形威利斯单原子晶格的时间响应的时空快速傅里叶变换，其中 $\beta_x = \beta_y = 0$（互易情形）以及 $\beta_x = 0.5$ 和 $\beta_y = 0.75$（非互易情形）。快速傅里叶变换等值线与图3(c)中的解析对应结果高度吻合，证实了该方法的有效性以及新定义的布里渊区的完整性（更多详情请参见补充说明2）。

4 结论

总之，本研究表明，在一类威利斯单原子晶格（WML）中，尽管存在非互易性，布里渊区（BZ）的宽度/面积仍保持不变，但其边界会发生可精确量化的偏移。基于运动弹性杆中纵波的修正波动方程 [12], 综合构建了对一维威利斯单原子晶格的解析研究，并证明其驱动波色散关系对于量化布里渊区偏移至关重要 ϕ。研究表明，所提出的理论与数值模拟完全吻合，验证了布里渊区偏移、其宽度恒定，以及正向传播波与反向传播波所占波数范围并不相同。研究还证实，正向传播波波数范围的增加（减小）由反向传播波波数范围的缩小（扩大）所补偿。此外，研究将理论扩展至方形威利斯单原子晶格，表明布里渊区会发生偏移，但其面积保持不变，不受非互易程度影响；非互易程度由x 和y 方向上的速度调制决定。此外，研究表明，二维布里渊区不再是正方形；通过令群速度在x （y）传播方向上的分量为零，可以确定其变形后的竖直（水平）边界。对布里渊区定义的这一澄清有望成为进一步研究不同类型波非互易调制下布里渊区量化，以及具有多模态色散关系的周期介质的基石。

参考文献

[1] Y.-F. Wang、Y.-Z. Wang、B. Wu、W. Chen、Y.-S. Wang, 《应用力学评论》2020年，72，040801。[2] H. Nassar、B. Yousefzadeh、R. Fleury、M. Ruzzene、A. Al`u、C. Daraio、A. N. Norris、G. Huang、M. R. Haberman, 《自然·材料评论》2020年，5，667–685。[3] G. Trainiti、M. Ruzzene, 《新物理学杂志》2016年，18，83047。[4] Z. Wu、K.-W. Wang, 《声学与振动杂志》2019年，458，389–406。[5] N. Boechler、G. Theocharis、C. Daraio, 《自然·材料》2011年，10，665–668。[6] H. Nassar、H. Chen、A. Norris、M. Haberman、G. Huang, 《英国皇家学会学报A辑：数学、物理与工程科学》2017年，473，20170188。[7] H. Nassar、X. Xu、A. Norris、G. Huang, 《固体力学与物理学杂志》2017年，101，10–29。[8] M. A. Attarzadeh、M. Nouh, 《声学与振动杂志》2018年，422，264–277。[9] M. A. Attarzadeh、H. Al Ba'ba'a、M. Nouh, 《应用声学》2018年，133，210–214。[10] H. Nassar、H. Chen、A. Norris、G. Huang, 《物理评论B》2018年，97，014305。[11] E. S. Cassedy、A. A. Oliner, 《IEEE会刊》1963年，51，1342–1359。[12] M. A. Attarzadeh、M. Nouh, 《AIP Advances》2018年，8，105302。[13] J. Wickert、C. Mote Jr，1990年。

[14] M. I. Hussein, M. J. Leamy, M. Ruzzene, 《应用力学评论》2014年，66，040802。[15] H. Al Ba'ba'a, J. Callanan, M. Nouh, T. Singh, 《力学》2018年，53，3105 3122–。[16] H. Nassar, A. N. Norris, G. Huang, arXiv预印本 arXiv:2211 06294，2022年。[17] M. I. Rosa, M. Ruzzene, 《新物理学杂志》

2020, 10.1088/ DOI。1367-2630/ab81b6

[18] D. Braghini, L. G. Villani, M. I. Rosa, J. R. de F Arruda, 《物理学杂志D：应用物理》2021年，54，285302。[19] J. E. Pechac, M. J. Frazier, 《晶体》2021年，11，94。[20] G. Carta, M. Brun, A. B. Movchan, N. V. Movchan, I. S. Jones, 《国际固体与结构杂志》2014年，51，2213–2225。[21] L. M. Nash, D. Kleckner, A. Read, V. Vitelli, A. M. Turner, W. T. Irvine, 《美国国家科学院院刊》2015年，112，14495–14500。[22] P. Wang, L. Lu, K. Bertoldi, 《物理评论快报》2015年，115，104302。[23] R. S¨usstrunk, S. D. Huber, 《美国国家科学院院刊》2016年，113，E4767–E4775。[24] M. Attarzadeh, S. Maleki, J. Crassidis, M. Nouh, 《美国声学学会杂志》2019年，146，789–801。[25] H. Zhou, A. Baz, 《振动与声学杂志》2023年，145，021004。[26] J. S. Mart

2017, *96*, 063831

ınez-Romero, P. Halevi, 《物理评论A辑》。

注 1. 群　　一维 Willis 单原子晶格中的速度与相移

为完整起见，图 S1 展示了不同 β 值下的群速度 c_g、相移 q_s 和布里渊区偏移（对应于 $\Omega_{\max} = 2$ 的截止频率处的 q_s ）。如前所证，群速度（此处展示的是正向传播波 $q \in [0, \pi + \phi]$ 的群速度）在截止频率 $\Omega_{\max} = 2$ （对应于 $q = \pi + \phi$）处为零，与相对速度 β 的大小无关。值得注意的是，对于对应于正向传播波（反向传播波）的色散分支，其初始斜率（即 $\Omega = 0$ 处的群速度）为 $c_0 = 1 - \beta$ （$c_0 = -1 - \beta$）。对于相移 q_s，可以看到，其范围在 $[-\pi/2, \pi/2]$, 之内，对应的相对速度范围为 $\beta \in [-1, 1]$ ，频率范围为 $\Omega \in [0, 2]$。从图 S1 中 $\beta \neq 0$ 的一系列曲线可以看出，相移 q_s 的另一个明显特征是频率依赖：q_s 似乎随频率升高而增大。另一方面，布里渊区偏移 ϕ 不依赖于 Ω ，因为它对应于恒定 截止频率 $\Omega_{\max} = 2$ 处的相移 q_s 。

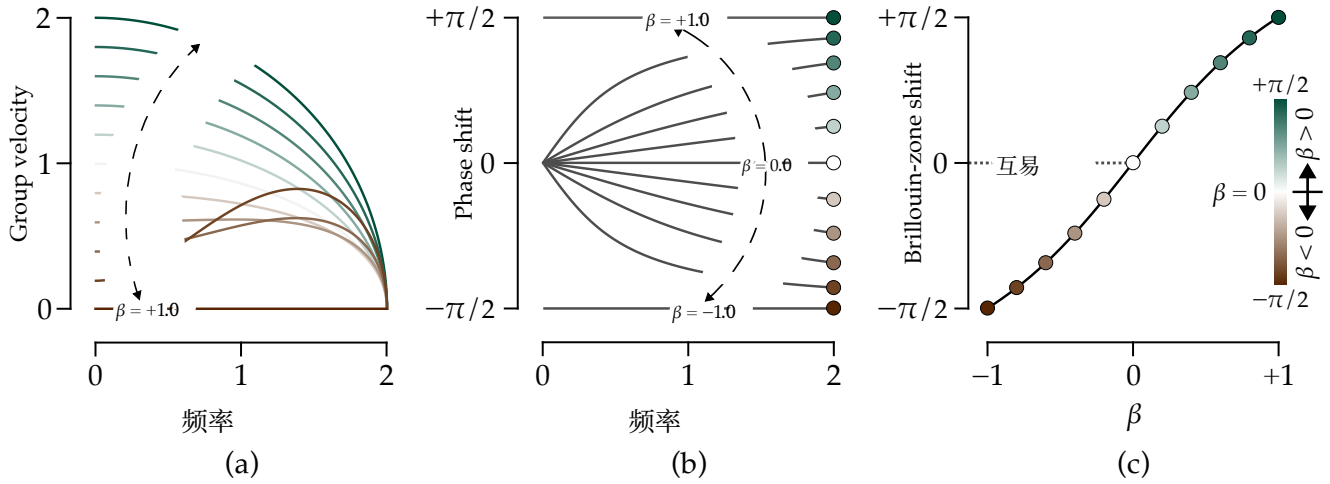

图 S1： (a) 正向传播波的群速度 c_g $q \in [0, \pi + \phi]$, (b) 相移 q_s 以及 (c) 布里渊区偏移 ϕ 随相对速度 β的变化关系。注意，群速度 c_g 和相移 q_s 的输出还取决于激励频率 Ω。布里渊区偏移 ϕ 表示频率为 $\Omega_{\max} = 2$时的相移 q_s 的取值，因此仅是 β的函数。

注 2. 数值　　Willis 单原子晶格色散关系的数值验证

采用具有固定边界且尺寸足够大的有限晶格进行数值模拟，以支持理论结果，并进一步验证布里渊区（BZ）边界的偏移。对于一维情况，为了准确量化布里渊区的偏移，必须分别激发与正向传播波（反向传播波）对应的波数。因此，在由 151 个质量块组成的有限晶格的左端（右端）施加脉冲激励，并选择适当的模拟时间，以确保脉冲不会到达另一端并发生反射（关于 $\beta = \pm 0.5$ 和 $\beta = 0$ 对应的有限晶格响应，请参见补充视频 S1-S6）。随后，对晶格的脉冲响应进行时空快速傅里叶变换（FFT），以构建数值色散图。正向传播波（反向传播波）的色散分支分别根据在左端（右端）施加脉冲激励时晶格的数值响应构建，从而确保能够分别量化正向传播波和反向传播波对应的波数。如图 S2 所示，当 $\beta < 0$ （$\beta > 0$）时，正向传播波（反向传播波）的波数范围小于（大于）互易介质中的传统范围，这与理论结果一致（白色虚线所示）。由此可以明确看出，数值模拟证实布里渊区已不再处于传统范围内，并且可以基于相移 ϕ 精确量化其偏移。

对于方形晶格，在一个 40×40 晶格的中部施加初始位移，以激发结构的所有模态，并在边界反射发生之前终止仿真。进行时空快速傅里叶变换，并将其幅值投影到指向性图上，结果如主文中的图3(d)所示。

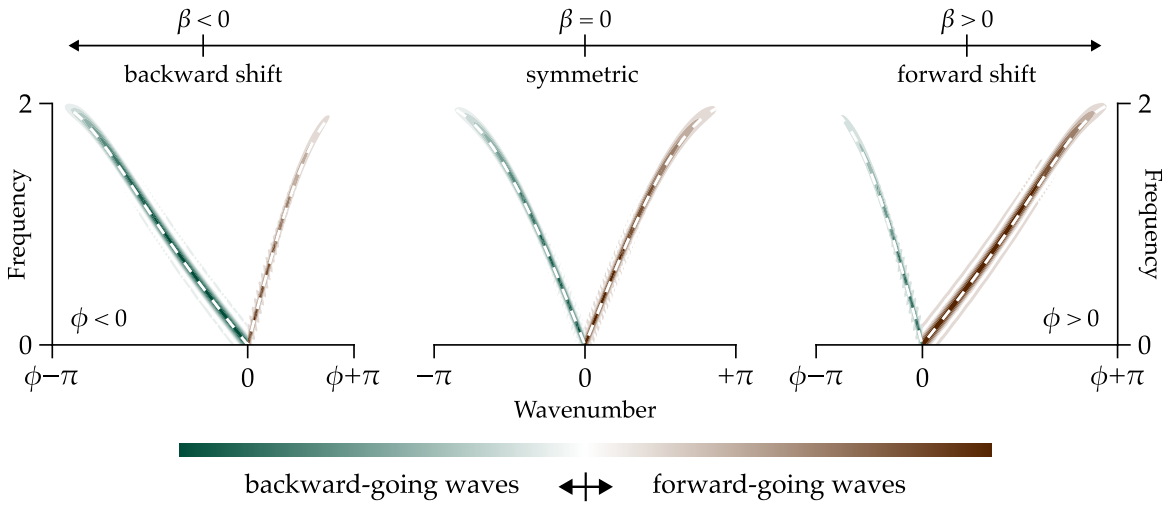

图 S2：对一维单原子晶格的脉冲响应进行时空快速傅里叶变换，分别施加于左端和右端，以量化向前和向后传播的波数。相对速度 β 为正（负）时，观测到向前（向后）移位，这也对应于相移值 ϕ 为正（负）。β 为零时，得到互易单原子晶格的传统色散关系，其布里渊区未移位且色散分支对称。非互易情形的结果对应 $|\beta| = 0.5$，与主文图 2 相同。

此过程采用的波数来自新提出的布里渊区，所得色散图与主文图3(c)中通过解析方法得到的结果高度吻合。为便于观察结果，幅值为最大值 10% 或更小的快速傅里叶变换分量已被滤除。

注 3. 方程　　方形 Willis 单原子晶格的运动方程与色散关系　　es

所提出的二维非互易连续弹性介质的运动方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v_y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(v_x^2 - c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(v_y^2 - c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{S1}$$

对应于　　至主文稿中公式（2）所示的以下质量、回转和刚度算子。　　t:

$$M = 1, \quad G = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad K = \frac{1}{2}\left(v_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{S2}$$

对空间区域采用中心有限差分，混合导数以及x 和y 二阶导数的离散格式如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\dot{u}_{i+1,j} - \dot{u}_{i-1,j}}{2a_x} \tag{S3a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \frac{\dot{u}_{i,j+1} - \dot{u}_{i,j-1}}{2a_y} \tag{S3b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{a_x^2} \tag{S3c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{a_y^2} \tag{S3d}$$

其中，$[\dot{\cdot}]$ 表示对时间 t 的导数。假设采用正方形网格，即 $a_x = a^y = a$，并使用公式（S3）中所示的离散化方案，可以证明，$(i,j)^{\text{th}}$ 个元胞的运动方程为：

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{i,j} + \frac{v_x}{2a}\left(\dot{u}_{i+1,j} - \dot{u}_{i-1,j}\right) + \frac{v_y}{2a}\left(\dot{u}_{i,j+1} - \dot{u}_{i,j-1}\right) + \frac{1}{2a^2}\left(c^2 - v_x^2\right)\left(2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) \\ + \frac{1}{2a^2}\left(c^2 - v_y^2\right)\left(2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right) = 0\end{aligned} \tag{S4}$$

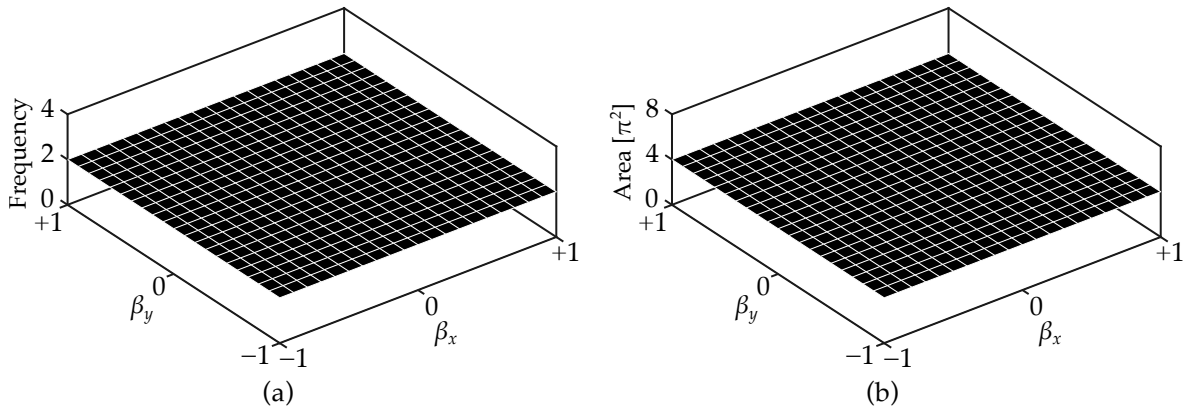

图 S3： 在 β_x 和 β_y 的整个取值范围内，对方形 Willis 单原子晶格的 (a) 截止频率和 (b) 布里渊区面积进行数值计算，结果表明二者均独立于这两个参数。

已知 $\omega_0 = c/a$，并采用每个晶胞的等效质量 m，运动方程 (S4) 可以重新写成包含质量 m 和刚度参数 $k = m\omega_0^2$ 的形式：

$$m\ddot{u}_{i,j} + \frac{mv_x}{2a}\left(\dot{u}_{i+1,j} - \dot{u}_{i-1,j}\right) + \frac{mv_y}{2a}\left(\dot{u}_{i,j+1} - \dot{u}_{i,j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(k - \frac{mv_x^2}{a^2}\right)\left(2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2}\left(k - \frac{mv_y^2}{a^2}\right)\left(2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right) = 0 \tag{S5}$$

代入布洛赫定理，并利用 $\omega_0 = c/a$ 和 $v_{x,y} = c\beta_{x,y}$，运动方程可简化为：

$$\ddot{u}_{i,j} + \mathbf{i}\omega_0\left(\beta_x \sin(q_x) + \beta_y \sin(q_y)\right)\dot{u}_{i,j} + 2\omega_0^2\left(\left(1 - \beta_x^2\right)\sin^2\left(\frac{q_x}{2}\right) + \left(1 - \beta_y^2\right)\sin^2\left(\frac{q_y}{2}\right)\right)u_{i,j} = 0 \tag{S6}$$

假设做简谐运动，并使用 ω_0 对激励频率进行归一化，可得到以下方形 Willis 单原子晶格的无量纲色散关系，该关系与主文中的式 (15) 相同。式 (15) 对应的布里渊区不再像互易方形ML那样是正方形，而是呈不规则的变形形状；如主文所证明，其边界通过令x方向（y方向）波的群速度为零来确定，从而得到竖直（水平）边界。最后，需要再次强调：

- 色散关系具有恒定的截止频率 $\Omega\mathrm{max} = 2$，与β_x 和β_y的大小无关，如图 S3(a) 所示。

- 方形 Willis 单原子晶格的布里渊区与其互易对应结构的布里渊区面积相同，而与 β_x 和 β_y 的大小无关，这一点已在图 S3(b) 中通过数值结果加以展示。不同 β_x 和 β_y 组合下布里渊区形状的变化如补充视频 S7 所示。

<escape>- </escape>采用方形晶格的传统布里渊区范围，即 $q_x \in [-\pi, \pi]$ 和 $q_y \in [-\pi, \pi]$，得到的色散图并不完整，这一点可以从图 S4 所示的指向性图中看出（对于相同的 β_x 和 β_y组合，完整的色散图请参见主文中的图 3）。

若在式 (15) 中取 $q_y = 0$（类似地取 $q_x = 0$），色散关系将变得与正文中给出的一维情形（即式 (5)）非常相似。正方晶格的一维版本在群速度为零处的偏移不等于 $\phi_{x,y}$，这表明布里渊区边界确实不再构成正方形。通过仅分析正方晶格沿单一方向的波传播即可证明这一点，即波数的一个分量必须为零。因此，色散关系可简化为（此处以 $q_y = 0$ 为例，但对 $q_x = 0$ 也可采用相同的步骤）：

$$\Omega^2 + \Omega\beta_x \sin(q_x) - 2\left(\left(1 - \beta_x^2\right)\sin^2\left(\frac{q_x}{2}\right)\right) = 0 \tag{S7}$$

按照主文稿中的相同步骤，求出截止频率出现时的波数（即沿 x 方向群速度为零时），布里渊区边界上的波数解为：

$$q_{x,1} = -\mathbf{sgn}[\beta_x]\cos^{-1}(\beta_x^2 - 1) \tag{S8a}$$

$$q_{x,2} = \mathbf{sgn}[\beta_x]\left(2\pi - \cos^{-1}(\beta_x^2 - 1)\right) \tag{S8b}$$

将该波数代回式 (15) 中的色散关系，并求解频率 Ω，可以证明，截止频率是参数 β_x 的函数，其取值为：

$$\Omega_{\max} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(6-\beta_x^2)\beta_x^4 - 12\beta_x^2 + 8} + \sqrt{\beta_x^4(2-\beta_X^2)}\right] \tag{S9}$$

由此产生的相移 q_s^x 小于 ϕ_x，这表明方形 Willis 单原子晶格的布里渊区应为不规则形状。

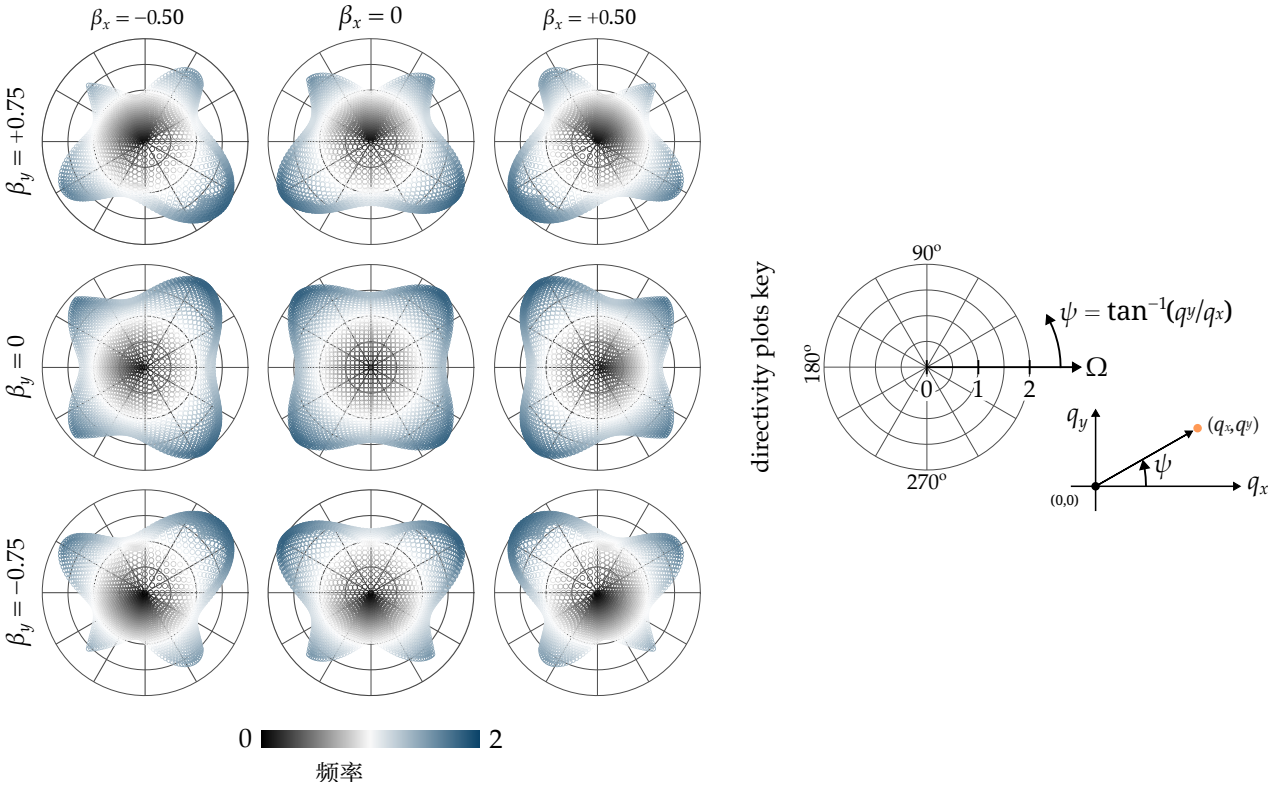

图 S4： 采用方形晶格的传统布里渊区（BZ）定义，通过指向性图展示了具有多种 β_x 和 β_y 组合的方形 Willis 单原子晶格的色散关系等值线。可以看出，与主文图 3 中采用新提出的 BZ 定义绘制的等值线形成鲜明对比的是，这些色散图并不完整。