arXiv:2305.06824v1 [nlin.AO] 11 May 2023

通过自诱导随机共振形成嵌合图样

Taniya Khatun[a]、Tanmoy Banerjee[a,*]

[a]伯德万大学物理系混沌与复杂系统研究实验室，伯德万 *713 104*，印度西孟加拉邦

摘要

可激发系统中的噪声诱导有序现象有多种表现形式，例如相干共振（CR）和随机共振。在这一背景下，自诱导随机共振（SISR）是一种较少受到探索的现象。与CR不同，SISR可能在远离分岔阈值的情况下出现，且诱导振荡的性质取决于噪声强度和时间尺度分离因子。在本研究中，我们报告了耦合可激发单元网络中的一种新型嵌合图样，即源自SISR现象的自诱导随机共振嵌合态（SISR奇美拉）。我们采用适当的定量指标，探索参数空间中SISR奇美拉的详细动力学。我们发现，与CR嵌合态不同，SISR奇美拉图样强烈依赖于时间尺度与噪声强度之比。因此，只要激活子和抑制子的时间尺度分离足够大，即使噪声强度极低，也能诱导出这类嵌合图样。

关键词：嵌合体、噪声、可激发系统、相干共振、自诱导随机共振。

1. 引言

噪声和涨落在自然过程与系统中不可避免。噪声在可激发系统中的作用更加显著，有时甚至违背直觉[1]。例如，噪声与可激发性的相互作用

*通讯作者电子邮箱地址： tbanerjee@phys.buruniv.ac.in（Tanmoy Banerjee）

提交至 *Elsevier* 的预印本。 *2023*年*5*月*12*日

以相干共振（CR）的形式产生噪声诱导有序 [2]和随机共振（SR） [3]现象。这两种现象在过去几十年中一直是研究的核心[4, 5, 6, 7, 8]。在这一背景下，一种研究相对较少的现象是参考文献[9, 10]中报道的自诱导随机共振。参考文献 [9] 证实，SISR 确实是一种不同于 CR 的现象：具体而言，CR 仅在Hopf分岔附近出现，并且对噪声强度和时间尺度分离因子相当不敏感。另一方面，SISR 可以在远离分岔阈值的情况下出现，且所诱导振荡的特性取决于噪声强度和时间尺度分离因子[11]。

在自然界中，动力系统很少孤立存在，因此，耦合振荡器为研究耦合或相互作用对动力学单元的影响提供了一个通用框架。在这一背景下，人们研究了多种涌现动力学现象，例如同步、图样形成和对称性破缺 [12]。近年来发现的最引人注目的涌现行为是嵌合图样：在由相同振荡器构成的网络中，由于对称性破缺，同步与非同步状态共存 [12]。自文献 [13], 首次发现嵌合图样以来，理论[14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] 和实验 [24, 25] 中都发现了多种嵌合图样（详情见 [12] 和 [26, 27, 28, 29] ）。然而，在嵌合态研究中，嵌合态与噪声之间的相互作用仍是一个相对缺乏了解的课题 [30]。直到最近，文献 [31]才报道了一种新颖的嵌合图样，即Hopf分岔阈值附近耦合可激发 FitzHugh-Nagumo 单元中的CR嵌合态。随后，文献[32] 将CR嵌合态的概念推广到I型可激发系统。文献 [33] 提出了通过时滞控制CR嵌合图样的方案。这些研究促使我们提出以下相关问题：SISR现象会产生嵌合图样吗？如果会，所产生的嵌合图样会呈现何种特征？

在本研究中，我们探讨了由SISR现象产生的嵌合图样。为开展这项研究，我们考虑了FitzHugh–Nagumo系统，该系统是II型可激发性的典型模型 [34]。我们报告了一种新型嵌合图样的出现，即自诱导随机共振奇美拉（SISR奇美拉），并通过定量指标对其进行表征，以探讨其独特特征。我们表明，与CR嵌合态不同，SISR奇美拉图样在很大程度上取决于时间尺度与噪声强度之比。此外，我们还证明，SISR奇美拉可以出现在远离Hopf分岔阈值的参数区域中。

本文其余部分安排如下：下一节讨论在 FitzHugh-Nagumo（FHN）模型中产生 SISR 的条件。第 3 节介绍存在噪声时耦合 FitzHugh-Nagumo 单元的网络模型。第 4 节探讨由 SISR 诱导的时空行为，包括嵌合图样。本节还将阐述嵌合图样在参数空间中的特征。最后，第 5 节总结整项研究的成果。

2. 含噪声的 FitzHugh–Nagumo系统

我们考虑以下存在高斯白噪声 [9]时的 FitzHugh–Nagumo（FHN）模型：

$$\begin{aligned} \epsilon\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y + \delta_1\sqrt{\epsilon}\xi(t), \\ \dot{y} &= x + a + \delta_2\xi(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中，x 和 y 分别为激活子和抑制子。$\epsilon > 0$ 是控制激活子与抑制子之间时间尺度分离的小参数。a (> 0)决定了兴奋性阈值：当 $a > 1$ 时，系统处于可激发区域；当 $a < 1$ 时，系统呈现稳定极限环；而在 $a = 1$ 处发生 Hopf分岔。我们考虑高斯白噪声，即$\langle\xi(t)\rangle = 0$，且 $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t - t')$。$\delta_1$ 和 δ_2 为正的常数。当 $\delta_1 = 0$ 且 $\delta_2 \neq 0$ 时，可能出现相干共振（CR），正如 Pikovsky 和 Kurths 所报告的那样 [2]；另一方面，当 $\delta_1 \neq 0$ 且 $\delta_2 = 0$ 时，则会出现自诱导随机共振（SISR），这一现象已在 [9, 10]中得到证明。

看起来，无论噪声是加入激活子（x）、抑制子（y）还是二者同时加入，其作用都相似。然而，文献 [9]证明了二者之间存在显著差异，尤其是在 ϵ取较小值时。我们在图 1 中展示了以下情况的相平面图和时间序列图：**(i)** $\delta_1 = 0$，以及 $\delta_2 = 0.5$：显示CR现象；**(ii)** $\delta_1 = 0.5$，以及$\delta_2 = 0.0$：显示SISR现象。我们取 $a = 1.001$，使得确定性模型处于可激发区域（$\epsilon = 0.005$）。请注意这两种现象之间的区别：在SISR情况下，极限环的噪声更强。然而，令人意外的是，文献[9] 表明，对于相同的噪声强度，SISR比CR更具“相干性”：SISR中的相干程度显著提高；此外，$\langle T\rangle$ 振荡的平均周期向较小值偏移，其偏移量远大于T [9]的不确定性。

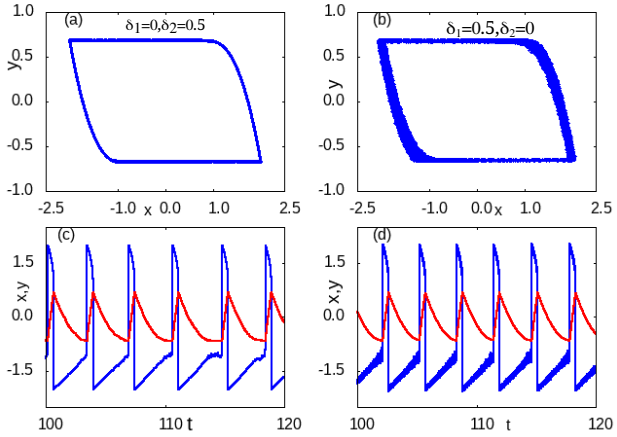

图 1：极限环由 CR 产生：（a）相空间，（c） $\delta_1 = 0.0$ 和$\delta_2 = 0.5$的时间序列。极限环由 SISR 产生：（b）相空间，（d） $\delta_1 = 0.5$ 和 $\delta_2 = 0.0$的时间序列。在（c、d）中：蓝色的 x 和红色的 y 。参数值： $\epsilon = 0.005$,$a = 1.001$。

3. 网络模型

接下来，我们考虑一个由 N 个相同的可激发FitzHugh-Nagumo（FHN）系统组成的环形网络。在噪声存在的情况下，这些系统通过非局部矩阵耦合连接。该网络的数学模型如下

$$\begin{aligned}\epsilon\dot{x}_i &= x_i - \frac{x_i^3}{3} - y_i + \frac{\sigma}{2P}\sum_{j=i-P}^{i+P}[b_{xx}(x_j - x_i) \\ &\quad + b_{xy}(y_j - y_i)] + \delta_1\sqrt{\epsilon}\xi_i(t), \qquad (2)\\ \dot{y}_i &= x_i + a_i + \frac{\sigma}{2P}\sum_{j=i-P}^{i+P}[b_{yx}(x_j - x_i) \\ &\quad + b_{yy}(y_j - y_i)] + \delta_2\xi_i(t). \qquad (3)\end{aligned}$$

其中， $i = 1$、2、$3...N$、 $\sigma > 0$为耦合强度，耦合范围 $P \in [1, N/2]$ 表示每个振荡器两侧的最近邻振荡器数量。极限 $P = 1$ 和 $P = N/2$ 分别对应最近邻耦合和全局耦合。我们定义了耦合半径 $r = P/N \in [1/N, 0.5]$。 δ_1 和 δ_2 为噪声控制参数。我们采用了高斯白噪声，即$\langle\xi_i(t)\rangle = 0$ 和 $\langle\xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = \delta_{ij}\delta(t - t')$。由公式3可知，激活子（$x_i$）和抑制子（$y_i$）变量 [35], 之间不仅存在直接耦合项，还存在交叉耦合项，该项通过旋转耦合矩阵进行建模。 b_{lm}的系数，其中 l、 $m \in [x, y]$为元素。

旋转矩阵的:

$$|B| = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

其中 $\phi \in [-\pi, \pi]$。矩阵 $\mathbf{B}$ 允许 x 与 y 之间进行直接耦合以及交叉耦合，如 [35]所示。在本研究中，我们采用参数$\phi = \pi/2 - 0.1$ [35]，该参数充当相位滞后参数。为了理解嵌合图样的空间相干态和非相干态，我们使用局部序参量 [36, 37] ，其定义如下:

$$Z_k = \left| \frac{1}{2\delta_m} \sum_{|j-k| \le \delta_z} e^{i\Theta_j} \right|, \tag{4}$$

其中，$i = \sqrt{-1}$、 $k = 1$、2、 ...N和 δ_z是 j号节点两侧的最近邻。第 j个元素的几何相位定义为 $\Theta_j = arctan(y_j/x_j)$[35]。局部序参量 $Z_k \approx 1$表示第 j个振荡器处于嵌合图样的相干域中。同样，若 $Z_k < 1$，则表示第 j个振荡器处于嵌合图样 [31, 19]的非相干域中。在我们的研究中，取最近邻 $\delta_m = 25$，并在较长的时间区间内计算局部序参量。

4. 结果

在文献 [31], Semenova 等人的研究中，他们仅考虑在抑制子部分添加噪声，即考虑了 $\delta_1 = 0$和 $\delta_2 \neq 0$ ，并观察到了相干共振嵌合现象。在 I 型可激发系统中也观察到了相同的现象[32]。然而，为了探索 SISR 诱导的嵌合图样，在本研究中，我们仅考虑 $\delta_1 \neq 0$ 和 $\delta_2 = 0$。在整个研究过程中，除非另有说明，我们对所有节点均取 $a_i = a$ ，并将 $a = 1.001$ 固定在可激发区域内，且非常接近 Hopf分岔阈值。然而，我们也探索了远离 Hopf分岔阈值时的 SISR 嵌合图样。在模拟中，选取分布在半径为 $x_i^2 + y_i^2 = 4$ 的圆上的随机初始条件 [31]。

根据噪声强度 δ_1，我们研究网络中出现的不同时空模式。作为示例，我们考虑以下参数值： $\epsilon = 0.01$, $a = 1.001$, δ_2=0, $\sigma = 0.1$, $P = 60$ 和 $N = 500$。我们从零噪声强度（$\delta_1 = 0$）开始，此时所有节点都处于其中。

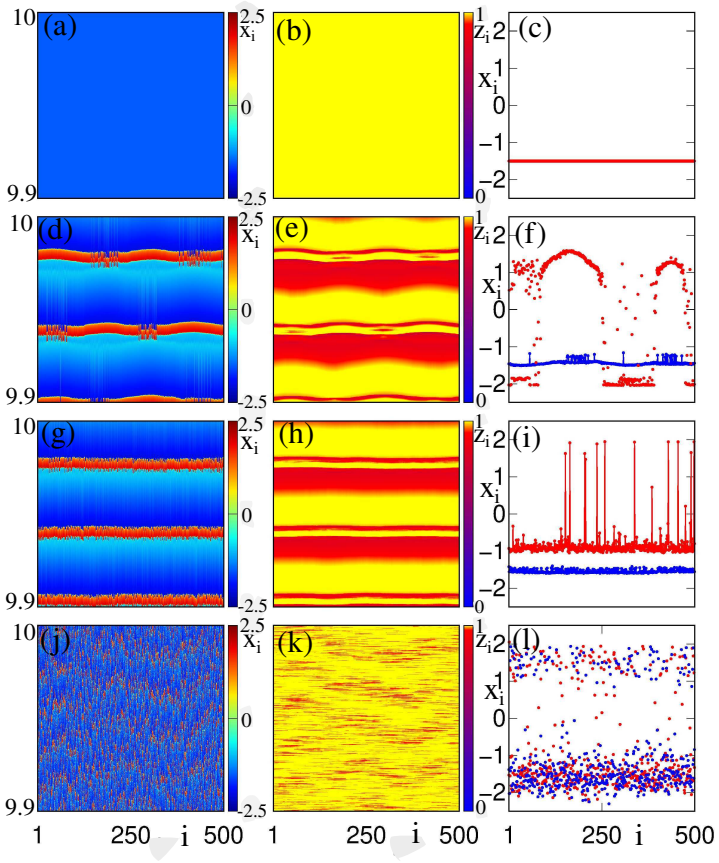

图 2：不同噪声强度下（x_i）状态的时空图（左列）、局部序参量（Z_i）（第二列，$\delta_m = 25$）。右列显示两个不同时间点的对应快照： $t = 991$ （蓝色）和 $t = 993$ （红色）。(a,b,c)：δ_1=0.01：稳态，(d,e,f)： $\delta_1 = 0.045$，自诱导随机共振奇美拉，(g,h,i)：$\delta_1 = 0.1$ 空间非相干、时间相干。(j,k,l)： δ_1=0.5 完全非相干图样。参数值：$\epsilon = 0.01$、 $a = 1.001$、 δ_2=0、 $\sigma = 0.1$、 $P = 60$ 和$N = 500$。

网络处于均匀稳态（即非振荡态）。这种均匀稳态条件在噪声强度 $\delta_1 \leq 0.035$达到一定阈值之前得以保持。图2(a)展示了 $\delta_1 \leq 0.01$ 下的这一情形，相应的局部序参量如图2(b)所示。在 $t = 991$ 和 $t = 993$ 时所有节点的快照如图2(c)所示；它们彼此重合，表明网络处于均匀稳态。随着噪声强度增加，节点呈现出噪声诱导的极限环（$\delta_1 > 0.035$）。我们观察到了自诱导随机共振奇美拉（SISR奇美拉），其中一部分节点处于非相干态，其余节点在空间上保持同步。图2(d)展示了一个代表性数值$\delta_1 = 0.045$下的SISR奇美拉；相应的局部序参量也证实了相干态与非相干态的共存（图2(e)）。有趣的是，该嵌合图样呈现出呼吸型奇美拉的特征，相干区和非相干区在每个周期中交替改变位置。$t = 991$ （蓝色）和 $t = 993$ （红色）时对应的快照如图2(f)所示。随着噪声强度进一步增加，尽管网络在时间维度上仍保持相干性，但非相干区在空间中不断扩展（ [）， δ_1=0下的情况见图2(g、h、i)。1]。最后，在较强的噪声强度下，网络在空间和时间两个维度上均变为非相干态（ [）， δ_1=0下的情况见图2(j、k、l)。5]。

激活子的时间演化 x_i 及其在 $x_i - y_i$ 平面上的相应相图如图3所示。我们展示了 $t = 1981$时刻的一个快照，此时网络中的所有节点均位于 $x_i \approx -1$ [附近，见图3(a,b)]。图3(b)表明，所有节点均位于 x-零斜线的左下角附近。

图 3（c、d）展示了 $t = 1993$处的 SISR奇美拉，其中非相干域（红色所示）位于两个相干域（绿色所示）之间。相平面图 [图 3（d）] 显示，对应于非相干域的节点（红色点）沿相空间分散开来，而相干域的节点则聚集在 x-零流线的右上角附近。在 $t = 1995$ 处，所有节点再次回到下支 [图 3（e、f）]，形成相干域。这一情形证实了 SISR奇美拉图样的呼吸特性。

4.1. 动力学状态

4.1.1. 耦合参数的影响

我们绘制了网络在 $\sigma - r$ 参数空间中的不同动力学状态。以下参数固定为 $\epsilon = 0.01$， $a = 1.001$和 $\delta_1 = 0.045$。图4 表明，当耦合强度较强(σ)，且耦合范围较大时

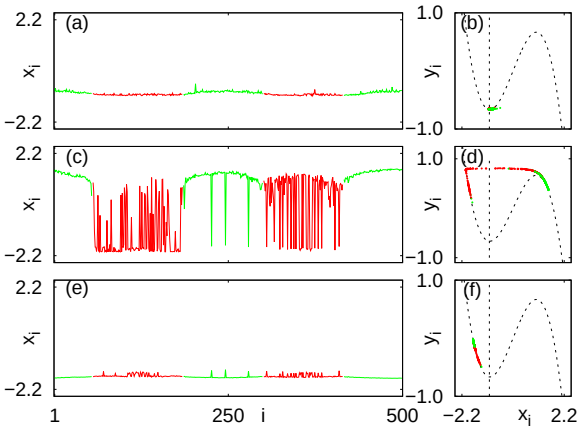

图3：快照及相应的相空间：(a, b) $t = 1981$，(c, d) $t = 1993$，(e, f) $t = 1995$。系统参数为 $\epsilon = 0.01$、$a = 1.001$、$\sigma = 0.1$、$P = 60$ 和 $N = 500$。

网络处于均匀稳态。随着 σ和 r 减小，系统会从均匀稳态转变为SISR奇美拉。较小的耦合范围和较弱的耦合强度有利于形成SISR奇美拉。图中未显示非相干区，因为它们位于接近耦合强度下限的一条极窄区域内。

4.1.2. 时间尺度的影响

接下来，我们探究在网络参数固定时，时间尺度因子（ϵ）与噪声强度（δ_1）相互作用的影响。SISR 的特征之一是其取决于时间尺度因子与噪声强度之比（不同于 CR）[9]。由于我们的网络中激活子部分存在扰动，我们注意到，网络会根据时间尺度和噪声强度呈现若干不同的动力学状态。图 5 展示了 $\delta_1 - \epsilon$ 的二维参数空间中的情形。有趣的是，我们发现，时间尺度差异越大（即 ϵ 越小），即使噪声强度较低，也会出现 SISR奇美拉。此外，SISR奇美拉存在于稳态与非相干态之间。因此，不同于 CR嵌合态，我们可以通过调节噪声强度与时间尺度因子的比值来控制 SISR奇美拉的出现。

4.2. 嵌合图样的表征

我们进一步探讨可激发参数和噪声对嵌合图样的影响。由于网络的尖峰持续时间取决于可激发参数。

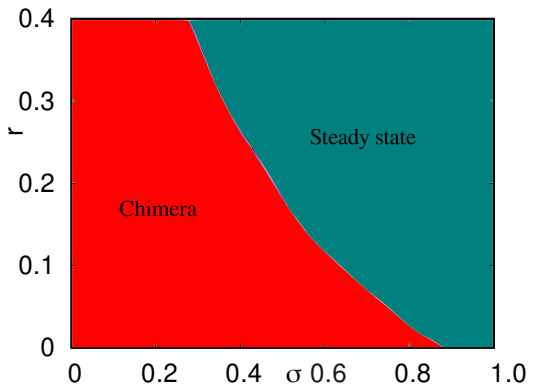

图 4：($\sigma - r$) 参数空间中的动态状态。由于非相干区出现在 $\sigma = 0$ 附近的一个非常狭窄的区域内，因此未予显示。参数为 $\epsilon = 0.01$、 $a = 1.001$、$\delta_1 = 0.045$ 和 $N = 500$。

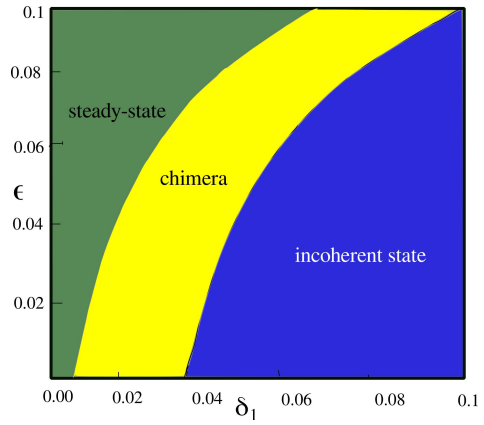

图5： $\delta_1 - \epsilon$ 参数空间中的动力学状态。固定的系统参数为$\sigma = 0.1$、 $a = 1.001$、 $r = 0.12$ 和 $N = 500$。

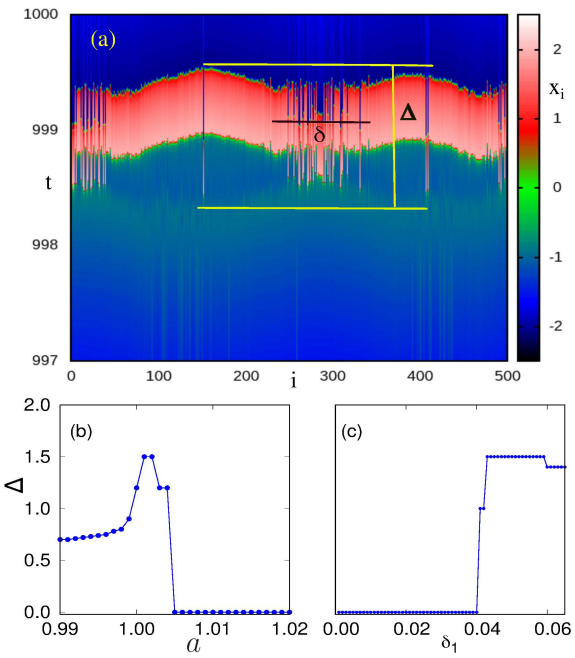

图 6：斑图的表征：（a）时空图，定义活跃时间跨度 Δ 和非相干域 δ。（b）活跃时间随可激发阈值 a （$\delta_1 = 0.045$）的变化，（c）活跃时间随噪声强度 δ_1 （$a = 1.001$）的变化。其他参数为： $\sigma = 0.6$、 $P = 60$ 和 $N = 500$。

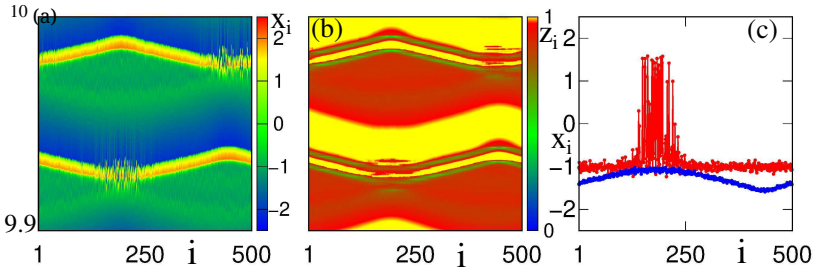

图 7: (a) (x_i) 状态的时空图（左列），(b) 局部序参量（Z_i）（第二列，$\delta_m = 25$），(c) δ_1=0 时 $t = 993$（红色）和 $t = 996$（蓝色）处的快照。32. 参数值：$\epsilon = 0.05$、$a = 1.02$、δ_2=0、$\sigma = 0.8$、$P = 60$ 和 $N = 500$。

阈值 (a)和噪声强度（δ_1，因此，我们将研究它们对一种称为活跃时间跨度的螺旋波状态（Δ）的特征度量的影响。该度量表示从第一个属于非相干区域的节点到其返回静息状态之间的时间间隔 [，见图6(a)]。图 6(b) 和图 6(c) 分别展示了 Δ 随 a 和 δ_1的变化。图6(b) 表明，在噪声强度固定时，活跃时间跨度随 a 增加，直至达到某一可激发阈值。超过该阈值后，网络不再表现出任何尖峰活动，并突然坍缩至均匀稳态。图6(c) 表明，在可激发阈值固定时，随着噪声强度从零开始增加，网络最初处于均匀稳态。当噪声强度达到 $\delta_1 \approx 0.045$ 或更高时，网络呈现尖峰特性，活跃时间跨度从零增加至几乎恒定的非零值（尽管噪声强度较大时，活跃时间跨度会略微缩短）。

4.3. 远离可激发阈值时系统的动力学

SISR现象的一个显著特征是，即使激励参数远离Hopf分岔阈值，它也会发生。SISR不依赖于可激发阈值，即不要求$a \to 1+$。事实上，我们可以在任意 $1 < a < \sqrt{3}$[9]中选择可激发参数。在图7 中，我们展示了 $a = 1.02$处的SISR奇美拉。可以看到，当 a 值远离阈值时，非相干区的数量减少到一个。图7(a)显示了SISR奇美拉的时空图，相应的序参量见图 7(b)。SISR奇美拉在两个不同时间点 [$t = 993$ (红色)和 $t = 996$

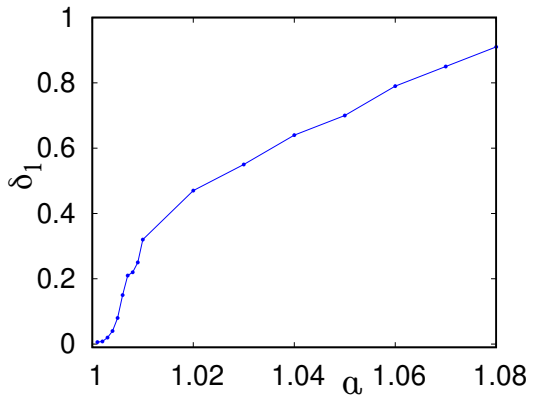

图 8：使 SISR奇美拉出现所需的兴奋性参数（a）与最小噪声强度（δ_1）。参数值： $\epsilon = 0.01$、δ_2=0、 $\sigma = 0.6$、 $P = 60$ 和 $N = 500$。

(蓝色)] 如图所示。7(c)所示。在我们的研究中，我们注意到，使 SISR奇美拉产生所需的最小噪声强度会随着 a的值增大而增加。这一点如图8所示，该图展示了产生 SISR奇美拉（$\epsilon = 0.01$）所需的最小噪声强度（δ_1）的变化。这可以归因于将系统从可激发态转变为振荡态所需的能量更大。

5. 结论

在本研究中，我们报道了一种存在于耦合可激发单元网络中的新型嵌合图样。我们将其称为自诱导随机共振奇美拉（SISR奇美拉），因为其产生根源于SISR现象，而这是一种不同于相干共振（CR）的独特机制。我们利用适当的定量指标，在参数空间中探索了SISR奇美拉的详细动力学。我们发现，与CR嵌合态不同，SISR奇美拉图样强烈依赖于时间尺度与噪声强度之比。因此，只要激活子与抑制子之间的时间尺度分离足够大，即使噪声强度极低，也能够诱导产生此类嵌合图样。我们进一步发现，SISR奇美拉出现在远离可激发阈值的区域。本研究表明，噪声对可激发系统的影响并非微不足道，因此，本研究加深了我们对噪声存在条件下神经元网络的理解。

补充说明：本研究完成后，我们得知近期 arXiv 论文 [38] 研究了自诱导随机共振。

呼吸型奇美拉。

致谢

T. B. 感谢印度政府科学与工程研究委员会（SERB）以 MATRICS 研究基金 [MTR/2022/000179]的形式提供的经费支持。

参考文献

[1]V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, 《混沌与随机系统的非线性动力学：教程与最新进展》, Springer Science and Business Media, 2007。[2] A. S. Pikovsky, J. Kurths, 噪声驱动的可激发系统中的相干共振, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 777。[3] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, 随机共振, Rev. Mod. Phys. 70 (1998) 223–287。[4] K. Wiesenfeld, F. Moss, 随机共振与噪声的益处：从冰河时期到小龙虾和鱿鱼, Nature 373 (6509) (1995) 33–36。[5] A. N. Pisarchik, A. E. Hramov, 神经网络中的相干共振：理论与实验, Physics Reports 1000 (2023) 1–57。[6] B. Lindner, J. Garcıa-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier, 可激发系统中的噪声效应, Physics Reports 392 (6) (2004) 321–424。[7] N. Semenova, A. Zakharova, 弱多路复用诱导相干共振, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 28 (5) (2018) 051104。[8] M. E. Yamakou, T. D. Tran, 忆阻神经元中的 Lévy 噪声诱导自诱导随机共振, Nonlinear Dynamics 107 (3) (2021) 2847–2865。[9] R. DeVille, E. Vanden-Eijinden, C. B. Muratov, 随机扰动动力系统中的两种不同相干机制, Phys. Rev. E. 72 (2005) 031105。

[10] C. B. Muratov, E. V. Eijnden, W. E，可激发系统中的自诱导随机共振，Physica D 210 (2005) 227–240。[11] M. I. Freidlin，小噪声诱导的稳定振荡和平衡态，J. Stat. Phys. 103 (2001) 4283。[12] A. Zakharova，《网络中的奇美拉图样：动力学、结构、噪声与时滞之间的相互作用》，Springer Nature Switzerland AG，瑞士 Cham，2020。[13] Y. Kuramoto, D. Battogtokh，非局部耦合相位振子中相干与非相干的共存，Nonlinear Phenom. Complex Systems 5 (2002) 380–385。[14] G. C. Sethia, A. Sen, G. L. Johnston，振幅介导的奇美拉态，Phys. Rev. E 88 (2013) 042917。[15] L. Laurent, P. Bogdan, M. Yuri，时滞反馈系统中的虚拟奇美拉态，Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 054103。[16] A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll，奇美拉死亡：动力网络中的对称性破缺，Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 154101。[17] T. Banerjee，平均场扩散诱导的奇美拉死亡态，EPL 110 (2015) 60003。[18] V. M. Bastidas and I. Omelchenko and A. Zakharova and E. Schöll and T. Brandes，奇美拉态的量子特征，Phys. Rev. E 92 (2015) 062924。[19] B. K. Bera, D. Ghosh, T. Banerjee，局部突触梯度耦合诱导的非完美行波奇美拉态，Phys. Rev. E 94 (2016) 012215。[20]F. P. Kemeth, S. W. Haugland, L. Schmidt, I. G. Kevrekidis, K. Krischer，奇美拉态分类方案，Chaos 26 (2016) 094815。[21] P. S. Dutta, T. Banerjee，同步振荡与死亡的空间共存：一种类奇美拉态，Phys. Rev. E 92 (2015) 042919。

[22] T. Banerjee、P. S. Dutta、A. Zakharova、E. Schöll，通过生态网络中依赖距离的幂律耦合诱导的嵌合图样，Phys. Rev. E 94 (2016) 032206.[23] V. Semenov、A. Zakharova、Y. Maistrenko、E. Schöll，延迟反馈奇美拉态：受迫多簇与随机共振，EPL（欧洲物理学快报）115 (1) (2016) 10005.[24] A. M. Hagerstrom、T. E. Murphy、R. Roy、P. Hövel、I. Omelchenko、E. Schöll，耦合映射格点中奇美拉态的实验观测，Nat. Phys. 8 (2012) 658–661.[25]M. R. Tinsley、S. Nkomo、K. Showalter，耦合化学振子群体中的嵌合态与相位簇态，Nat. Phys. 8 (2012) 662–665.[26] M. J. Panaggio、D. M. Abrams，嵌合态：耦合振子网络中相干与非相干的共存，Nonlinearity 28 (2015) R67–R87.[27] S. Majhi、B. K. Bera、D. Ghosh、M. Perc，神经元网络中的奇美拉态：综述，Physics of Life Reviews 28 (2019) 100–121.[28] E. Schöll，复杂网络中的同步图样与奇美拉态：拓扑结构与动力学的相互作用，Eur. Phys. J. Special Topics 225 (2016) 891.[29] Fatemeh Parastesh、Sajad Jafari、Hamed Azarnoush、Zahra Shahiari、Zhen Wang、Stefano Boccaletti、Matjaž Perc，奇美拉态，Phys. Rep 898 (2021) 1–114.[30] S. A. M. Loos、J. C. Claussen、E. Schöll、A. Zakharova，噪声影响下的嵌合图样，Phys. Rev. E 93 (2016) 012209.[31]N. Semenova、A. Zakharova、V. Anishchenko、E. Schöll，可激发元件网络中的相干共振嵌合态，Phys. Rev. Lett. 117 (2016) 014102.[32]T. Khatun、B. Bandyopadhyay、T. Banerjee，耦合I型可激发系统中的多种相干共振嵌合态，Phys. Rev. E 106 (2022) 054208.

[33] A. Zakharova, N. Semenova, V. S. Anishchenko, E. Schöll，通过时滞反馈控制相干共振奇美拉态，Chaos 27 (2017) 114320。[34] V. V. Semenov, A. V. Bukh, N. Semenova，时滞诱导的 Fitzhugh–Nagumo 模型自激振荡激发：规则与混沌动力学，Chaos, Solitons & Fractals 172 (2023) 113524。[35] I. Omelchenko 和 E. O. Omelćhenko 和 P. Hövel 和 E. Schöll，当振荡器之间的非局部耦合变得更强时：分段同步或多奇美拉态，Phys. Rev. Lett. 110 (2013) 224101。[36] I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll，动力网络中的相干性丧失：空间混沌与奇美拉态，Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 234102。[37] M. Wolfrum 和 O. Omelćhenko 和 S. Yanchuk 和 Y. Maistrenko，奇美拉态的谱特性，Chaos 21 (2011) 013112。[38]J. Zhu, M. E. Yamakou，自诱导随机共振呼吸奇美拉态，arXiv:2305.04538。