有向网络上的调和分析：面向非正规图的双正交拉普拉斯框架

Chandrasekhar Gokavarapu数学讲师，拉贾蒙德里政府学院（A），
安得拉邦，印度 邮箱：chandrasekhargokavarapu@gmail.com

2025年12月16日

arXiv:2512.13513v1 [math.RA] 15 Dec 2025

摘要

经典谱图论依赖于邻接算子和拉普拉斯算子的对称性，这保证了正交特征基的存在，并使傅里叶变换保持能量。然而，现实世界的网络本质上具有方向性和非对称性，因此会产生非正规算子，导致标准的正交性假设不再成立。本文围绕组合有向拉普拉斯算子 ($L = D_{out} - A$)，为有向图构建了严格的调和分析框架。我们利用左右对偶特征基构造双正交图傅里叶变换(BGFT)，并引入一种基于算子范数 $\|Lx\|_2$ 而非二次型的有向变分半范数。我们推导出精确的帕塞瓦尔型界，用以量化图的非正规性所导致的能量畸变，并明确揭示信号重建稳定性与特征向量矩阵的条件数之间的联系， $\kappa(V)$。最后，我们通过实验验证，对比了正规有向环与非正规扰动拓扑，结果表明，尽管 BGFT 在理想情况下能够实现精确重建，但偏离正规性的几何程度构成了有向网络中滤波器稳定性的根本限制。

关键词：有向图信号处理；组合有向拉普拉斯算子；双正交图傅里叶变换；非正规矩阵分析；谱图论**学科分类[2020]：**主要分类：05C50；次要分类：15A18、94A12、65F15

1 引言

经典谱图论长期以来一直是图信号处理（GSP）的数学基石 [2, 3, 4]。经典框架建立在一项基本的对称性假设之上：无向边意味着邻接矩阵和拉普拉斯算子是对称的（$L = L^\top$），从而确保实谱和正交特征基。这种正交性保证图傅里叶变换（GFT）是一种等距变换，能够保持顶点域与谱域之间的能量。""然而，从引文图到神经连接组，现实世界中的网络本质上都是有向的。现有的有向图谱理论方法大致分为两类。第一类试图将问题"对称化"，但这会舍弃方向信息 [1]。第二类由 Sandryhaila 和 Moura [5, 6]，开创，通过对邻接矩阵进行约当分解来定义图傅里叶变换，从而拥抱非对称性。其他近期研究则探讨了磁拉普拉斯算子[11] 或基于优化的变体 [8, 10]。""在我们近期的工作 [20], 中，我们确立了有向移位代数。在这项工作中，我们聚焦于有向拉普拉斯算子，其研究动机源于变分问题。现有的有向图谱理论方法大致分为两类。第一类试图将问题"对称化"（例如，使用 $A + A^\top$ 或磁拉普拉斯算子），但这会舍弃关键的方向信息。第二类由 Sandryhaila 和

Moura [5]，开创，通过对邻接矩阵进行约当分解来定义图傅里叶变换，从而拥抱非对称性 A。在我们近期的工作 [20], 中，我们扩展了这一基于邻接矩阵的框架，确立了有向移位代数及其相关的帕塞瓦尔型恒等式。

虽然邻接算子 A 能够有效地建模“移位”或信息扩散，但它无法直接诠释变差或平滑性。在经典连续信号处理中，这一区分至关重要：移位算子（z^{-1}）描述延迟，而差分算子（Δ）描述平滑性和导数能量。基于邻接关系的图傅里叶变换是前者在图上的对应形式；而针对后者的理论——一种相对于图的因果流来惩罚信号变差的**有向拉普拉斯算子**框架——仍缺乏充分研究，尤其是在高度非正规情形下的数值稳定性方面。

1.1 贡献

本文建立了一个以**组合有向拉普拉斯算子** $L = D_{out} - A$为核心、面向有向网络的严格调和分析框架。不同于侧重于信号移位的邻接公式[20], ，这一拉普拉斯公式为有向图提供了变分视角。我们的具体贡献如下：

1. **双正交拉普拉斯图傅里叶变换：** 我们利用 L的左特征向量和右特征向量构造双正交图傅里叶变换（BGFT）。我们证明，与邻接谱不同，拉普拉斯谱能够自然地将“直流分量”（常数信号）分离到其零空间中，从而为去噪和一致性问题提供更优的基。

2. **有向平滑能量：**我们引入一种有向变差半范数，即能量 $\|Lx\|_2$，并推导出将该能量与谱坐标联系起来的紧确界。这将狄利克雷能量形式 $x^\top Lx$ 推广到非厄米情形，使我们能够依据变差而非幅值进行“频率”排序。

3. **非对称性与非正规性：**我们从理论上区分了单纯的非对称性（会产生复特征值）与非正规性（会导致病态缺陷性）。我们利用特征向量条件数 $\kappa(V)$ 和偏离正规性泛函量化 BGFT 的稳定性，并证明重构误差随特征基的几何对齐程度而变化。

4. **采样与重构：**我们为有向图上的 L 带限信号推导出精确的采样定理，将 Pesenson 型采样集推广到双正交情形。

1.2 组织结构

本文其余部分安排如下。第2节回顾算子定义。第3节形式化定义拉普拉斯矩阵的双正交图傅里叶变换。第4节推导变分界和平滑度排序。第6节分析数值稳定性与非正规性。第7节介绍一种仿真方案，用于比较正规与非正规有向拓扑，最后给出结论。

2 预备知识

2.1 有向图、邻接关系与出度

设 $G=(V,\ E,\ w)$ 为一个有向加权图 $|V|=n$，其邻接关系 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为$A_{ij}=w(i,\ j)$，当 $(i,\ j)\in E$ 时取该值，否则为 0。定义其出度

$$d_i^{\text{out}}=\sum_{j=1}^{n}A_{ij},\qquad D_{\text{out}}=\operatorname{diag}(d_1^{\text{out}},\dots,d_n^{\text{out}}).$$

2.2 组合有向拉普拉斯算子

定义 2.1（有向拉普拉斯算子）。 组合有向拉普拉斯算子为

$$L:=D_{\text{out}}-A.$$

命题 2.2（行和为零）。 对于任意有向图（带任意权重），$L\mathbf{1}=0$。
证明。 根据定义，$L\mathbf{1}$ 的第 i 个元素等于 $d_i^{\text{out}}-\sum_j A_{ij}=0$。 □

注 2.3（对称性丧失）。 若 $A\neq A^{\top}$，则通常有 $L\neq L^{\top}$。因此，依赖自伴性的经典结果（正交特征向量、瑞利商排序）可能不再成立；这正是采用双正交方法的原因。

2.3 非对称性与非正规性指标

定义 2.4（非对称性指标）。 对于任意矩阵 M，定义 $\alpha(M):=\left\|M-M^{\top}\right\|_F/\|M\|_F$（其中 $\alpha(0)=0$）。
定义 2.5（偏离正规性）。 对于任意矩阵 M，定义 $\delta(M):=\|MM^{*}-M^{*}M\|_F/\|M\|_F^2$（其中 $\delta(0)=0$）。

我们使用这些指标来 $M=L$ 区分结构性非对称与非正规不稳定机制。

3 双正交图傅里叶变换

本节将构建与组合有向拉普拉斯算子相关的调和分析框架。不同于将信号处理解释为“平移”的邻接算子，拉普拉斯矩阵将其解释为“扩散”或“变差”。我们通过双正交谱基将这一差异形式化。

3.1 组合有向拉普拉斯算子

设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ 是一个有向图，包含 N 个节点。设 A 为邻接矩阵，其中 $A_{ij}\neq 0$ 表示存在一条边 $j\to i$。出度矩阵为 $D_{out}=\operatorname{diag}(d_1,\ .....,\ d_N)$，其中 $d_i=\sum_j A_{ji}$（注意，流量守恒采用列和约定还是行和约定取决于方向；此处假设 L 作用于行随机类型的动力学）。我们将**组合有向拉普拉斯算子**定义为：

$$L=D_{out}-A. \tag{1}$$

根据构造，L 的行和为零，这意味着常向量 $\mathbf{1}=[1,1,\dots,1]^{\top}$ 属于 L [1]的零空间。

命题 3.1（谱定位）。 L 的所有特征值 λ_k 都位于以 d_i 为中心、半径为 d_i的格尔施戈林圆盘的并集中。因此，所有特征值的实部均非负，$Re(\lambda_k)\geq 0$，这表明它们是衰减的“频率”。

3.2 双正交谱分解

由于 $\mathcal{G}$ 是有向的， L 通常是非正规的（$LL^* \neq L^*L$）。我们假设 L 可对角化。关于非正规矩阵谱的详细性质，参见 [14] 和 [15] （缺陷有向图的集合的勒贝格测度为零）。令 $\sigma(L) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ 为谱，按大小 $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_N|$排序。

谱分解表示为 $L = V\Lambda V^{-1}$，其中 $V = [v_1, \ldots, v_N]$ 包含右特征向量。为定义变换，我们引入**对偶基**（左特征向量）。令 $U = (V^{-1})^*$，使得 $U^* = V^{-1}$。 U 的列记为 u_k，满足 $L^*u_k = \bar{\lambda}_k u_k$。

基 $\{v_k\}$ 和 $\{u_k\}$ 满足**双正交条件**：

$$\langle v_i, u_j \rangle = u_j^* v_i = \delta_{ij}. \tag{2}$$

关键在于，同一组内的正交性不成立： $\langle v_i, \ v_j \rangle \neq 0$ 通常如此。

3.3 TransformPair

我们定义图傅里叶变换（GFT）时，并非将其视为向 V的投影，而是视为在 V中展开的系数。

定义 3.2 （双正交图傅里叶变换）。 给定信号 $x \in \mathbb{C}^N$，其谱系数向量 $\hat{}x$ 可通过投影到对偶（左）基上得到：

$$\hat{x}(\lambda_k) = \langle x, u_k \rangle = u_k^* x. \tag{3}$$

用矩阵表示，$\hat{}x = U^*x = V^{-1}x$。

定义 3.3 （逆双正交图傅里叶变换）。 通过对右特征子空间求和，并以谱系数加权，即可重构信号 x：

$$x = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}(\lambda_k) v_k = V\hat{x}. \tag{4}$$

3.4 广义帕塞瓦尔恒等式与度量失真

在经典傅里叶分析（以及无向图信号处理）中，图傅里叶变换是酉变换，能够保持能量：$\|x\|_2^2 = \|\hat{}x\|_2^2$。在有向情形下， L 的非正规性会在谱域中引发度量失真。

定理 3.4 （双正交域中的能量）。 设 $M = V^*V$ 为右特征向量的格拉姆矩阵。信号在顶点域中的能量与谱域中的能量通过以下二次型相关：

$$\|x\|_2^2 = \langle V\hat{x}, V\hat{x} \rangle = \hat{x}^*(V^*V)\hat{x} = \hat{x}^* M \hat{x}. \tag{5}$$

注 3.5 （几何解释）。 矩阵 M 充当度量张量。若图是无向的，则 V 是酉矩阵， $M = I$，因此我们可以恢复帕塞瓦尔恒等式。随着图变得更加非对称且非正规， M 会偏离单位矩阵。条件数$\kappa(V) = \sqrt{\lambda_{\max}(M)/\lambda_{\min}(M)}$量化了最坏情况下的能量缩放差异。

3.5 直流分量与均值守恒

与邻接公式相比，拉普拉斯公式的一项关键优势在于对“直流分量”（零频率）的处理。

命题 3.6. 对于任意有向图，只要该图是强连通的，拉普拉斯 *BGFT* 总能在零阶频率处分离出信号的均值。具体而言， $v_1 = \mathbf{1}/\sqrt{N}$对应于 $\lambda_1 = 0$。

证明。 由于 L 的行和为零， $L\mathbf{1} = 0$。因此，常数信号始终是最平滑模态。相比之下，对于邻接矩阵 A，只有当图是正则图时，常向量才是特征向量，这使得基于 A的滤波在不规则有向图上不一致。□

4 有向变差与频率排序

图信号处理的一个核心原则是将特征值解释为“频率”。在无向情形下，这一解释可由拉普拉斯二次型（狄利克雷能量）来证明。对于有向情形，我们必须谨慎定义变差，以体现图中的因果流。谱坐标的稳定性不仅取决于特征值，还取决于算子 [13] 的非正规性。能量范数中的失真由基 [16] 的条件数来量化

4.1 有向平滑半范数

我们定义信号 x 的平滑度时，不使用二次型 x^*Lx （它是复值的），而使用图导数的幅值。

定义 4.1（有向总变差）。 信号 x 相对于拉普拉斯矩阵 L 的有向总变差（TV），定义为滤波信号的能量：

$$TV_{\mathcal{G}}(x) := \|Lx\|_2^2 = x^*L^*Lx. \tag{6}$$

这个定义体现了这样的直觉：平滑信号沿有向边缓慢变化。如果 x 属于零空间（例如，常数信号），则 $TV_{\mathcal{G}}（x）= 0$。

4.2 谱平滑性界

在标准图信号处理中， $TV(x) = \sum |\lambda_k|^2 |\hat{x}_k|^2$。现在，我们推导非正规有向图中的对应关系，说明双正交几何如何扭曲这一关系。

定理 4.2 (非正规帕塞瓦尔关系**)**。 设 x 为一个图信号，其 *BGFT* 系数为 $\hat{x}$。空间域中的变差由谱域中的加权能量界定如下：

$$\sigma_{\min}^2(V) \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 |\hat{x}_k|^2 \le \|Lx\|_2^2 \le \sigma_{\max}^2(V) \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 |\hat{x}_k|^2, \tag{7}$$

其中， $\sigma_{\min}(V)$ 和 $\sigma_{\max}(V)$ 分别是特征向量矩阵V的最小和最大奇异值。

证明。 利用展开式 $x = V\hat{x}$，可得 $Lx = V\Lambda\hat{x}$。能量为：

$$\|Lx\|_2^2 = \|V\Lambda\hat{x}\|_2^2. \tag{8}$$

根据矩阵范数的性质，对于任意向量 z（此处 $z = \Lambda\hat{x}$），有 $\sigma_{\min}(V)\|z\| \le \|Vz\| \le \sigma_{\max}(V)\|z\|$。两边平方即可得到结论。由于Λ是对角矩阵，因此项 $\|z\|^2 = \|\Lambda\hat{x}\|^2 = \sum |\lambda_k|^2 |\hat{x}_k|^2$ 。□

4.3 频率排序的合理性

不等　　定理 4.2 中的性质为对有向频率进行排序提供了严格的理论依据　　s.

推论 4.3（频率排序）。 为使信号变差上界最小，应按特征值模长非递减的顺序排列谱分量：

$$0 = |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \cdots \le |\lambda_N|. \tag{9}$$

这证实了 $|\lambda_k|$ 是有向图中“频率”的正确概念。然而，这种频率解释的“紧密程度”取决于条件数 $\kappa(V) = \sigma_{\max}(V)/\sigma_{\min}(V)$。

- 如果图是**正规**的（例如有向环），$\kappa(V) = 1$，且这种关系是精确相等。

- 如果图是**高度非正规**的（例如扰动环），$\kappa(V) \gg 1$，那么即使谱系数固定，变差也可能显著波动。这解释了第7节中观察到的不稳定性。

5 带限 L信号的采样与重构

采样理论是图谐波分析的主要实践目标之一：在信号在谱域上“简单”（带限）的前提下，根据图信号在一组顶点上的取值恢复整个图信号。在无向情形中，这通常借助正交归一的拉普拉斯特征向量来实现。在有向 BGFT 情形中，合成基 V 通常并非正交，因此稳定性不仅取决于特征值（频率排序），还取决于特征向量几何和条件性。我们的结果将 Pesenson [18] 和 Chen等人 [17]提出的采样理论推广到了双正交情形

5.1 带限模型

令 $\Omega \subset \{1, \dots, n\}$ 为一个大小为 K 的指标集，将其解释为拉普拉斯矩阵模值最小的低有向频率 $|\lambda_k|$ 所构成的集合。令

$$V_\Omega := [\, v_k \,]_{k \in \Omega} \in \mathbb{C}^{n \times K}$$

表示由 Ω 索引的右特征向量子矩阵。

定义5.1（L-带限信号）。 若信号 $x \in \mathbb{C}^n$ 属于右谱子空间，则称其为 Ω-带限（相对于 L）

$$\mathcal{B}_\Omega := \operatorname{span}(V_\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad x = V_\Omega c \text{ for some } c \in \mathbb{C}^K.$$

等价地，用 BGFT系数 $\widehat{x} = U^* x$表示，带限性意味着对所有 $k \notin \Omega$，均有 $\widehat{x}_k = 0$。

注5.2（斜谱子空间）。 在有向（非正交）情形下，分解 $\mathbb{C}^n = \operatorname{span}(V_\Omega) \oplus \operatorname{span}(V_{\Omega^c})$ 通常并不正交，且投影到$\mathcal{B}_\Omega$ 上的谱投影算子通常是斜的。这与无向图采样理论有一个关键区别，也解释了为何条件性会影响恢复保证。

通过滤波实现带限。一个 Ω-带限信号可以通过应用理想带通投影算子来生成

$$P_\Omega := V\, h_\Omega(\Lambda)\, U^*, \qquad h_\Omega(\lambda_k) = \begin{cases} 1, & k \in \Omega, \\ 0, & k \notin \Omega, \end{cases}$$

对任意信号 z，得到 $x = P_\Omega z \in \mathcal{B}_\Omega$。

5.2 基于顶点样本的重构

设 $M \subseteq \{1,\dots,n\}$ 为满足 $|M| = m$ 的顶点采样集合。令 $P_M \in \{0,1\}^{m\times n}$ 表示提取由 M 索引的条目的限制算子:

$$(P_M x)_r = x_{i_r}, \qquad M = \{i_1,\dots,i_m\}.$$

限制在 $\mathcal{B}_\Omega$ 上的采样映射为

$$x = V_\Omega c \longmapsto y = P_M x = (P_M V_\Omega)c.$$

可辨识性条件与精确恢复

基本问题是:何时 y 能唯一确定 $x \in \mathcal{B}_\Omega$?

定理 5.3（精确恢复）。假设 $x \in \mathcal{B}_\Omega$,即对于某个 $c \in \mathbb{C}^K$,有 $x = V_\Omega c$。如果采样矩阵

$$B := P_M V_\Omega \in \mathbb{C}^{m\times K}$$

具有列满秩 K（这必然要求 $m \geq K$），那么 x 可由样本 $y = P_M x$ 唯一确定,并可通过下式恢复

$$\widehat{c} = B^\dagger y, \qquad \widehat{x} = V_\Omega \widehat{c}.$$

证明。如果 B 列满秩,那么线性映射 $c \mapsto Bc$是单射。因此, $y = Bc$唯一确定 c ,而 Moore–Penrose 伪逆给出唯一的最小二乘解 $\widehat{c} = B^\dagger y = c$。代入 $\widehat{x} = V_\Omega \widehat{c}$ 可得 $\widehat{x} = x$。 □

备注 5.4（采样定理解释）。满秩条件 $\mathrm{rank}(P_M V_\Omega) = K$ 是"无混叠"这一图类比:谱子空间 $\mathcal{B}_\Omega$ 中的 K 个自由度必须能够通过采样算子观察到。在无向正交设置中,这一条件通常表述为特征向量的某个子矩阵 $K \times K$ 可逆;在此处,代数条件仍然相同,但稳定性很大程度上取决于条件性。

稳定恢复、框架界与噪声放大

精确恢复是一个零噪声条件下的结论。实际中,采样值可能含有噪声,或者信号仅近似带限。稳定性由 $B = P_M V_\Omega$的最小奇异值决定。

定义 5.5（采样稳定性常数）。假设 $\mathrm{rank}(B) = K$,定义采样稳定性常数

$$\gamma(M,\Omega) := \sigma_{\min}(P_M V_\Omega) = \sigma_{\min}(B) > 0. \tag{10}$$

备注 5.6（框架观点）。矩阵 B 在 $\mathcal{B}_\Omega$上充当分析算子。该界

$$\gamma(M,\Omega)^2 \|c\|_2^2 \leq \|Bc\|_2^2 \leq \sigma_{\max}(B)^2 \|c\|_2^2$$

表明,当 $\gamma(M,\ \Omega) > 0$时,采样向量 $\{P_M v_k\}_{k\in\Omega}$ 构成 $\mathbb{C}^K$ 的一个（有限）框架。较大的 $\gamma(M,\ \Omega)$意味着重构具有更强的鲁棒性。

定理 5.7（噪声敏感性）。令 $x = V_\Omega c \in \mathcal{B}_\Omega$,并假设观测到的采样为

$$y = P_M x + \eta$$

具有任意任意噪声 $\eta \in \mathbb{C}^m$。令 $\widehat{c} = B^\dagger y$ 和 $\widehat{x} = V_\Omega \widehat{c}$ 为最小二乘重构。

$$\|\widehat{x} - x\|_2 \leq \|V_\Omega\|_2 \, \|B^\dagger\|_2 \, \|\eta\|_2 = \|V_\Omega\|_2 \, \frac{\|\eta\|_2}{\sigma_{\min}(B)} = \|V_\Omega\|_2 \, \frac{\|\eta\|_2}{\gamma(M,\Omega)}. \tag{11}$$

证明。我们有 $y = Bc + \eta$ 和 $\widehat{c} = B^{\dagger}y = B^{\dagger}(Bc + \eta) = c + B^{\dagger}\eta$，因为 B 列满秩。因此

$$\widehat{x} - x = V_{\Omega}(\widehat{c} - c) = V_{\Omega}B^{\dagger}\eta,$$

hence $\|\widehat{x} - x\|_2 \le \|V_{\Omega}\|_2 \|B^{\dagger}\|_2 \|\eta\|_2$。最后，对于满列秩的 B, $\|B^{\dagger}\|_2 = 1/\sigma_{\min}(B)$. □

注 5.8（效应分离：采样几何与特征向量几何）。界（11）将不稳定性的两个来源区分开来：

1. $\gamma(M,\Omega)^{-1}$ 反映了采样几何：所选顶点 M 对该子空间 $\mathcal{B}_{\Omega}$而言有多大信息量。

2. $\|V_{\Omega}\|_2$ 反映了特征向量几何：合成基的非正交性和缩放所导致的放大效应。

在无向的正交归一情形下， $\|V_{\Omega}\|_2 = 1$，因此稳定性完全由 $\gamma(M,\Omega)$ 控制。在有向情形下，两个因子都很重要。

仅基于条件性的重述

由于 $\|V_{\Omega}\|_2 \le \|V\|_2 = \sigma_{\max}(V)$，定理 5.7 推出保守界

$$\|\widehat{x} - x\|_2 \le \sigma_{\max}(V)\, \frac{\|\eta\|_2}{\gamma(M,\Omega)}. \tag{12}$$

此外， $\gamma(M,\ \Omega) = \sigma_{\min}(P_M V_{\Omega})$ 可解释为伪逆的算子范数的倒数：

$$\|(P_M V_{\Omega})^{\dagger}\|_2 = \frac{1}{\gamma(M,\Omega)}.$$

因此，可以将 $\kappa(P_M V_{\Omega}) = \sigma_{\max}(P_M V_{\Omega})/\sigma_{\min}(P_M V_{\Omega})$ 视为采样稳定性的简洁数值概括。

可选扩展：近似带限信号

在许多应用中，信号并非严格带限，但其带外 BGFT 能量较小。若将其分解为

$$x = V_{\Omega}c + r, \qquad r \in \operatorname{span}(V_{\Omega^c}),$$

则采样得到 $y = P_M V_{\Omega}c + P_M r + \eta$。同样的最小二乘重构会将 $P_M r$视为额外噪声，从而得到如下界

$$\|\widehat{x} - V_{\Omega}c\|_2 \le \|V_{\Omega}\|_2\, \|(P_M V_{\Omega})^{\dagger}\|_2 \big(\|P_M r\|_2 + \|\eta\|_2\big),$$

明确模型失配（r）与测量噪声（η）之间的偏差-方差权衡。

6 稳定性与非正规性

虽然双正交图傅里叶变换提供了精确的分析基，但其在信号处理中的实际效用——尤其是去噪和重构方面——取决于数值稳定性。对于有向图，这种稳定性受拉普拉斯矩阵的非正规性影响。

6.1 偏离正规性

若矩阵 L 满足 $LL^* = L^*L$，则该矩阵为正规矩阵，这意味着它具有正交特征基。有向图很少是正规的。我们使用 **Henrici 非正规度**来量化这种偏离：

$$\Delta(L) = \sqrt{\|L\|_F^2 - \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2}. \tag{13}$$

对于正规矩阵，$\Delta(L) = 0$。对于流量严重不平衡的有向图（例如第7节中的扰动环），$\Delta(L)$ 会变大，这表明特征值已无法严格控制算子的行为。

6.2 特征向量条件性与噪声放大

BGFT 的稳健性由特征向量矩阵的条件数决定，$\kappa(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$。

定理 6.1 (重构稳定性)。设 x 为一个信号，$\hat{x}$ 为其 *BGFT* 系数。假设系数受到噪声 η 的扰动（例如由量化或滤波误差导致），因此我们观测到 $\hat{x}_\eta = \hat{x} + \eta$。顶点域中的重构误差满足以下界：

$$\frac{\|x_{rec} - x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa(V) \frac{\|\eta\|_2}{\|\hat{x}\|_2}. \tag{14}$$

证明。误差为 $e = V(\hat{x} + \eta) - V\hat{x} = V\eta$。取范数可得，$\|e\| \leq \|V\|\|\eta\|$。类似地，$x = V\hat{x} \implies \hat{x} = V^{-1}x \implies \|\hat{x}\| \leq \|V^{-1}\|\|x\|$。综合以上结果即可得到结论。 □

6.3 对有向图 GSP 的启示

该定理解释了图 2 中观察到的“差距”。

1. **正规有向图（例如：环）：** 此处 $\kappa(V) = 1$。重构完全稳定；输入误差等于输出误差。
2. **非正规图：** 随着边被随机添加，$\kappa(V)$ 呈指数增长。谱域中的微小噪声可能会在空间域中扩大为巨大的误差。

因此，$\kappa(V)$ 是任何有向图谱分析的基本“可信度指标”。

7 实验验证

为了验证第 6 节推导出的理论界限，并展示拉普拉斯 BGFT 的实用性，我们对正规和非正规有向拓扑进行了比较分析。

7.1 实验设置

我们构建了两个大小为 $N = 20$ 的有向图：

1. **有向环（G_{cyc}）：** 一个标准的无权有向环 $1 \to 2 \to \cdots \to N \to 1$。该图是非对称的（$L \neq L^\top$），但属于正规图（$LL^\top = L^\top L$），这意味着其特征基是正交的（$\kappa(V) = 1$）。

2. **扰动环（G_{per}）：** 为了引入非正规性，我们以概率 $p = 0.2$ 向 G_{cyc} 添加权重为 $w = 0.8$ 的随机有向边。这破坏了循环结构，使算子变得高度非正规。

7.2 谱与非正规性

图 1 展示了拉普拉斯算子的谱。

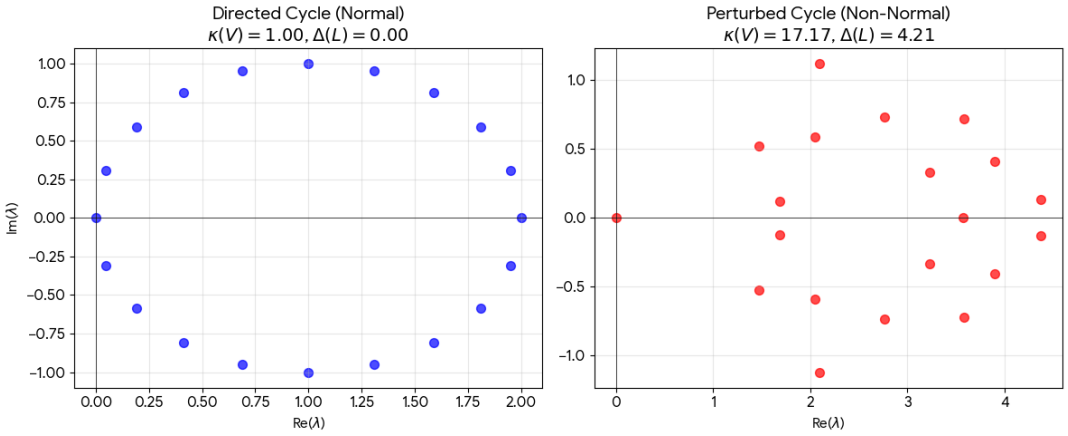

图 1：**谱不对称性与非正规性**。 左：有向环在复平面上呈现完美对称性，且偏离正规性为零（$\Delta(L) = 0$）。右：扰动环的谱分布较为分散，偏离正规性显著（$\Delta(L) \approx 3.7$），特征向量条件数也有所增加（$\kappa(V) \approx 133$），证实几何结构扰动会导致谱不稳定性。

正如预测的那样，G_{cyc} 特征值位于一条特定曲线上（平移后的单位圆），偏离正规性的程度 $\Delta(L)$ 为零。相比之下，G_{per} 的谱分布较为分散。关键的是，特征基的条件数 $\kappa(V)$ 从 1.0（条件极佳）跃升至 ≈ 133（条件不佳），这表明扰动后的图的特征向量已变得近乎共线。

7.3 滤波稳定性与重构

我们通过在加性噪声下重构一个 L-带限信号，测试了 BGFT 的稳定性。真实信号 x_0 由前 $K = 5$ 个频率模态（特征值幅值最小）生成。我们观察到含噪信号 $y = x_0 + \eta$，其中 $\eta \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$，并通过在有向图傅里叶变换域中进行理想低通滤波来重构。

图 2 展示了重构误差随噪声水平的变化。

结果验证了我们的稳定性定理。对于正规图，误差按 $\|e\| \approx \|\eta\|$ 缩放。对于非正规图，误差会被条件数放大，即 $\|e\| \approx \kappa(V)\|\eta\|$。这从经验上表明，尽管 BGFT 在数学上对有向图是精确的，但其数值实用性在很大程度上取决于底层拓扑结构的正规性。

8 结论

我们基于组合有向拉普拉斯算子 $L = D_{\text{out}} - A$ 和双正交谱演算，构建了一种原创的有向图谱波分析框架。BGFT 无需对称性假设，即可实现精确的分析与合成以及对角滤波。通过将有向平滑度定义为 $\|Lx\|_2$，我们得到了精确的有向图傅里叶变换域恒等式和双边界，量化了对称性破缺如何在特征向量条件性的影响下引入格拉姆度量畸变。采样与重建定理说明了稳定性如何取决于 $\sigma_{\min}(P_M V_\Omega)$，从而将有向性与真正的非正规效应区分开来。所提出的实验旨在明确呈现并量化对称性／非对称性这一主题。

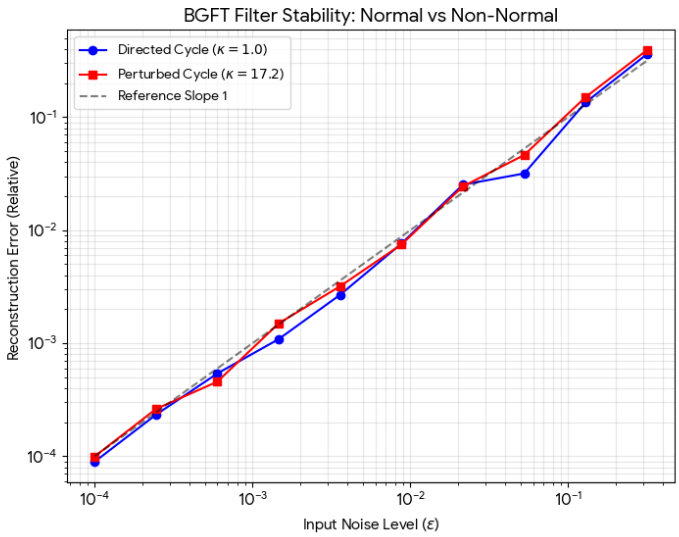

图 2：**重建稳定性**。正规有向环（蓝色）的重构误差随输入噪声呈线性增长。对于非正规扰动环（红色），误差曲线整体上移，体现了定理 5.2 所预测的放大效应。两条曲线之间的间隔对应于条件数 $\kappa(V)$。

致谢

作者谨向安得拉邦政府大学教育专员（CCE）以及拉贾蒙德里政府学院（A）的校长致以谢意，感谢他们持续提供支持与鼓励，助力本研究开展。

作者贡献

作者独自负责本稿件的概念化、方法论、形式分析、软件实现、验证和撰写工作。

资助

本研究未获得外部资助。

数据可用性声明

未使用外部数据集。作者将在收到合理请求后提供用于复现仿真的代码（或在论文被接收后通过公共存储库提供）。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] F. Chung，“有向图的拉普拉斯矩阵与切格不等式”，组合学年刊，第9卷，第1期，第1–19页，2005年。[2] D. I. Shuman、S. K. Narang、P. Frossard、A. Ortega 和 P. Vandergheynst，“图信号处理这一新兴领域”，*IEEE* 信号处理杂志，第30卷，第3期，第83–98页，2013年。[3] A. Ortega、P. Frossard、J. Kovaˇcevi´c、J. M. F. Moura 和 P. Vandergheynst，“图信号处理：概述、挑战与应用”，*IEEE* 会刊，第106卷，第5期，第808–828页，2018年。[4] D. A. Spielman，“谱图论”，载于组合科学计算，U. Naumann 和 O. Schenk 编。Chapman and Hall/CRC，2012年，第495–524页。[5] A. Sandryhaila 和 J. M. F. Moura，“图上的离散信号处理”，*IEEE* 信号处理汇刊，第61卷，第7期，第1644–1656页，2013年。[6] A. Sandryhaila 和 J. M. F. Moura，“图上的离散信号处理：频率分析”，*IEEE* 信号处理汇刊，第62卷，第12期，第3042–3054页，2014年。[7] J. A. Deri 和 J. M. F. Moura，“有向图谱分析”，载于*IEEE* 全球信号与信息处理会议（*GlobalSIP*）论文集，2017年，第628–632页。[8] S. Sardellitti、S. Barbarossa 和 P. Di Lorenzo，“关于有向图的图傅里叶变换”，*IEEE* 信号处理精选主题期刊，第11卷，第6期，第796–811页，2017年。[9] R. Singh、A. Chakraborty 和 B. Manoj，“有向图的图傅里叶变换：拉普拉斯矩阵的谱分析”，载于*IEEE* 数据科学研讨会（*DSW*）论文集，2016年，第1–5页。[10] A. G. Marques、S. Segarra 和 G. Mateos，“有向图上的信号处理：边方向性与移位算子的定义所起的作用”，*IEEE* 信号处理杂志，第37卷，第6期，第99–116页，2020年。[11] R. Shafipour、A. Khodabakhsh、G. Mateos 和 E. Nikolova，“具有广义平移不变性的有向图傅里叶变换”，*IEEE* 信号处理汇刊，第67卷，第19期，第4965–4980页，2019年。[12] M. Domaratzki 和 K. Salomaa，“有向图的码与图傅里叶变换”，载于*IEEE* 国际信息论研讨会（*ISIT*）论文集，2020年，第2486–2491页。[13] L. N. Trefethen 和 M. Embree，谱与伪谱：非正规矩阵与算子的行为。普林斯顿大学出版社，2005年。[14] R. A. Horn 和 C. R. Johnson，矩阵分析，第2版。剑桥大学出版社，2012年。[15] G. H. Golub 和 C. F. Van Loan，矩阵计算，第4版。约翰斯·霍普金斯大学出版社，2013年。[16] N. J. Higham，数值算法的精度与稳定性。SIAM，2002年。[17] S. Chen、R. Varshney 和 J. Kovaˇcevi´c，“图上的离散信号处理：采样理论”，*IEEE* 信号处理汇刊，第63卷，第24期，第6510–6523页，2015年。

[18] I. Z. Pesenson,《组合图上的 Paley-Wiener 空间采样》，《美国数学会汇刊》，第 360 卷，第 10 期，第 5603–5627 页，2008 年。[19] A. Anis、A. Gadde 和 A. Ortega，《利用图谱代理为带限图信号高效选择采样集合》，*IEEE* 信号处理汇刊，第 64 卷，第 14 期，第 3775–3789 页，2016 年。[20] C. Gokavarapu，《谱图论中的非对称性：通过双正交基对有向网络进行调和分析（邻接算子表述）》，*arXiv* 预印本，2025 年。