arXiv:2512.13566v1 [cs.CC] 15 Dec 2025

单调性的距离放大引理

Dor Minzer*

摘要

我们展示了这样一个过程：给定对函数 f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 的预言机访问，可以获得对函数 f': $\{0,1\}^{n'} \to \{0,1\}$ 的预言机访问，使得如果 f是单调的，那么 f'是单调的；如果 f与单调性的距离为 ε，那么 f' 与单调性的距离为 $\Omega(1)$。此外， $n' \leqslant n2^{O(1/\varepsilon)}$ 以及对 f'的每次预言机查询，都可以通过进行 $2^{O(1/\varepsilon)}$次对 f的预言机查询来回答。

我们的引理受到 [Chen、Chen、Cui、Pires、Stockwell 在 arXiv:2511.04558],上的近期结果的启发。他们证明，对于所有 $c > 0$，存在 $\varepsilon_c > 0$，使得任何能够区分单调函数与距单调性 ε_c的函数的（甚至是双侧、自适应的）算法，都需要进行 $\Omega(n^{1/2-c})$ 次查询。将我们的引理与他们的结果结合起来，可以得到类似的结果，只是与单调性的距离是一个绝对常数 $\varepsilon > 0$，而下界为 $\Omega(n^{1/2-o(1)})$ 次查询。

1 引言

考虑布尔超立方体 $\{0,1\}^n$，其上赋有如下偏序：对于所有 $i \in [n]$，若 $x_i \leqslant y_i$，则 $x \leqslant y$。若函数 f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 满足 $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$，则称其为单调函数。$f$ 与单调函数集合之间的距离定义为

$$\varepsilon(f) = \min_{\substack{g\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\} \\ \text{monotone}}} \Pr_{x \in \{0,1\}^n} [f(x) \neq g(x)].$$

在接近参数为 ε 的单调性测试问题中，给定一个函数 f，并保证它要么是单调的，要么满足 $\varepsilon(f) \geqslant \varepsilon$；任务是区分这两种情况。单边 q-查询测试器是一种随机算法，最多对函数 f 进行 q 次查询；若 f 单调，则它以概率 1 接受；若 f 与单调函数的距离至少为 ε，则它以至多 $1/3$ 的概率接受。双边 q-查询测试器是一种算法，最多对函数 f 进行 q 次查询；若 f 单调，则它以至少 $2/3$ 的概率接受；若 f 与单调函数的距离至少为 ε，则它以至多 $1/3$ 的概率接受。若对于每个 i，测试器进行的第 i 次查询都独立于前 $i-1$ 次查询的响应，则称该测试器为非自适应的；否则，称其为自适应的。

这个由 [9], 提出的问题在过去二十年中受到了广泛关注。 [9]的工作给出了一种单边、非自适应的 $O(n/\varepsilon)$查询测试器，随后一系列工作 [3, 6, 10], 进一步改进了这一结果，最终得到了一种单边、非自适应的 $\tilde{O}(\sqrt{n}/\varepsilon^2)$查询测试器。在下界方面， [8]的工作表明，任何单边、非自适应测试器都必须进行 $\Omega(\sqrt{n})$次查询； [6, 5, 7]又将这一结果扩展到了所有双边、非自适应测试器。这些下界结果并未涉及自适应测试器，特别是没有排除用于单调性的 $\Theta_\varepsilon(\log n)$次查询自适应算法。

*数学系 学，麻省理工学院，美国剑桥。获美国国家科学基金会 CCF 项目资助 222787 以及 NSF CAREER 项目资助 编号 2239160。

这一局面随着 [1], 的工作而改变：该工作为双边自适应算法确立了 $\tilde{\Omega}(n^{1/4})$的下界。随后， [7]将这一下界改进为 $\tilde{\Omega}(n^{1/3})$。最近， [4], 证明了双边自适应测试器的一个几乎紧的下界，具体如下所述。

定理 1.1。 对于所有 $c>0$，存在 $\varepsilon_c>0$，使得任何用于测试给定布尔函数 $f\colon \{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是否单调或与单调性的距离至少为 ε_c 的双侧自适应测试器，都需要 $\Omega(n^{1/2-c})$ 次查询。渐近地， $\varepsilon_c=2^{-\Theta(1/c)}$。

定理 1.1 给出了单调性测试的近乎最优下界，其唯一的小缺点是参数 ε_c 会随着 c 趋近于 0 而趋于 0。特别是，它并未排除这样的可能性：对于某个较小的常数 $\varepsilon>0$，例如 $\varepsilon=0.001$，存在一个用于单调性测试的 $O(n^{0.49})$ 查询测试器。这引出了一个问题：是否存在一种能够放大与单调性的距离的过程（同时保证原本单调的函数仍保持单调）。在本文中，我们对这一问题给出了肯定的回答，并将其形式化为以下引理。

引理 1.2。 存在一个绝对常数 $\delta>0$，使得对于所有 $\varepsilon>0$，存在一种随机化变换，对一个 n元函数 $f\colon \{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 进行 $2^{\Theta(1/\varepsilon)}$ 次预言机查询，并生成对一个 n' 元函数 $f'\colon \{0,1\}^{n'}\to\{0,1\}$ 的预言机访问，且具有以下性质：

1. 我们有 $n'=n\cdot 2^{\Theta(1/\varepsilon)}$，且对 f'进行一次查询可以通过对 f进行 $2^{\Theta(1/\varepsilon)}$次查询来模拟。

2. 如果 f 是单调的，那么以概率 1， f' 是单调的。

3. 如果 $\varepsilon(f)\geqslant\varepsilon$，那么以至少 0.99 的概率，有 $\varepsilon(f')\geqslant\delta$。

利用引理 1.2，我们立即从定理 1.1 推出以下结果：

定理 1.3。 存在 $\delta>0$，使得任何用于测试给定布尔函数 $f\colon \{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是单调的还是与单调函数相差至少 δ 的双边自适应测试器，都需要 $\Omega(n^{1/2-o(1)})$ 次查询。

注 1.4。 我们为引理 *1.2*（以及后续的定理 *1.3*）给出的论证，可以调整以得到一个任意接近 $\ln 2/2$ 的 δ。或许可以使 δ任意接近 $1/2$，并将膨胀因子改进为关于 $1/\varepsilon$ 的多项式。若能使 δ 接近 $1/2$，则是最优的（因为任何布尔函数都与某个常值函数相差至多 $1/2$，而常值函数是单调的）。将膨胀因子改进为关于 $1/\tilde{\varepsilon}$ 的多项式，会改进定理 *1.3* 中指数里的 $o(1)$，但不会直接导出自适应双边测试器的 $\Omega(\sqrt{n})$ 下界。要得到这一结果，似乎有必要改进定理 *1.1*，使其具有 $\varepsilon_c=c^{\Theta(1)}$。

2 预备知识

2.1 违反对、匹配与距离单调性

固定一个函数 $f\colon \{0,1\}^n\to\{0,1\}$。如果 $x,\ y\in\{0,1\}^n$ 满足 $x<y$且 $f(x)>f(y)$，或满足 $x>y$且 $f(x)<f(y)$，则称点对 $x,\ y\in\{0,1\}^n$ 为违反单调性的点对。f 的违反图记为 $G^f{}_{\mathsf{viol}}$，是一个二分图，其两侧分别为 $f^{-1}(1)$ 和 $f^{-1}(0)$，边为违反单调性的点对。[8] 中的以下结果建立了 $\varepsilon(f)$ 与 $G^f{}_{\mathsf{viol}}$中最大匹配大小之间的联系。

引理 2.1。 对于任意函数 $f\colon \{0,1\}^n\to\{0,1\}$，有 $\varepsilon(f)2^n$ 等于 $G^f{}_{\mathsf{viol}}$中最大匹配的大小。

证明。 根据 [8, 推论 2]， $\varepsilon(f)2^n$ 等于 $G^f{}_{\mathsf{viol}}$ 中最小顶点覆盖的大小。由 K˝onig 定理即可得出结论。 □

2.2 Tribes 函数

我们将使用 [2] 中的部落函数。通常，人们会在赋有均匀测度的超立方体 $\{0,1\}^k$ 上研究它。出于技术原因，我们需要考虑赋有 p-偏置测度 $\mu_p(x) = p^{|x|}(1-p)^{k-|x|}$ 的超立方体，其中 p 非常接近某个远离 0 和 1 的 $\alpha \in (0,\ 1)$。

对于整数 $k \in \mathbb{N}$，我们取 T_1、……、$T_r \subseteq [k]$ 个两两不相交的集合所构成的极大集合族，每个集合的大小均为 $\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k$。注意，$r \geqslant {}^{k}\!/_{\log_{1/\alpha} k}$ 且

$$\Pr_{x\sim\mu_\alpha}\left[\bigwedge_{j\in T_1} x_j = 1\right] = \alpha^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k} = \frac{\log^{10} k}{k}, \tag{1}$$

因此，我们可以选择 $r' \leqslant r$，例如 $r' = \left\lfloor {}^{k}\!/_{\ln 2 \log^{10} k} \right\rfloor$，使得定义函数 $T\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ 为

$$T(x) = \bigvee_{i=1}^{r'} \bigwedge_{j\in T_i} x_j,$$

我们有 $\Pr_{x\sim\mu_\alpha}[T(x) = 1] = \frac{1}{2} + o(1)$。我们固定这一选择，并陈述一些关于 Tribes 函数的常见事实。首先，我们证明在 μ_p 下，概率 T 为 1 的情形也大致为 $1/2$。

事实 2.2。假设 $\frac{1}{10} \leqslant \alpha \leqslant \frac{9}{10}$、$|p-\alpha| \leqslant \frac{1}{k}$，且 k 足够大。那么

$$\Pr_{x\sim\mu_p}[T(x) = 1] = \frac{1}{2} + o(1).$$

证明。注意，采样 $x \sim \mu_p$ 时，$T_1(x) = 1$ 等于

$$p^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k} = \frac{\log^{10} k}{k}\left(1 + \frac{p-\alpha}{\alpha}\right)^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k} = \frac{\log^{10} k}{k}\left(1 + \Theta\left(\frac{\log k}{k}\right)\right), \tag{2}$$

其中在第一次变换中我们使用了 (1)。由此可得

$$\begin{aligned}
\Pr_{x\sim\mu_p}[T(x) = 1] &= 1 - \left(1 - \frac{\log^{10} k}{k}\left(1 + \Theta\left(\frac{\log k}{k}\right)\right)\right)^{r'} \\
&= 1 - \Pr_{x\sim\mu_\alpha}[T(x) = 0]\left(\frac{1 - \frac{\log^{10} k}{k} \pm \Theta\left(\frac{\log^{11} k}{k^2}\right)}{1 - \frac{\log^{10} k}{k}}\right)^{r'} \\
&= 1 - \Pr_{x\sim\mu_\alpha}[T(x) = 0]\left(1 \pm \Theta\left(\frac{\log^{11} k}{k^2}\right)\right)^{r'},
\end{aligned}$$

这等于 $\frac{1}{2} + o(1)$。 □

接下来，我们需要了解关于函数 T 的顶点边界的一些事实。对于给定的输入 $x \in \{0,1\}^k$，如果部落 T_i 中除一个变量外，其余变量在 x 中都被赋值为 1，我们就称该部落几乎满足。我们用 $\mathrm{as}_T(x)$ 表示几乎满足的部落 T_i 的数量。

事实 2.3. 假设 $\frac{1}{10} \leqslant \alpha \leqslant \frac{9}{10}$, $|p - \alpha| \leqslant \frac{1}{k}$，且 k 足够大。那么对于所有 $\delta > 0$

$$\Pr_{x \sim \mu_p}\left[\mathsf{as}_T(x) \geqslant (\ln 2 + \delta)\log_{1/\alpha} k\right] \leqslant k^{-\Omega_\delta(1)}.$$

证明。对 x进行采样，我们注意到，T_i 几乎满足的事件 E_i 是独立的。一个固定部落 T_i 几乎满足的概率等于

$$(\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k)\cdot p^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k - 1} \leqslant (1+o(1))\log_{1/\alpha} k \frac{\log^{10} k}{k},$$

其中我们使用了（2）。因此，令 Z 表示几乎满足的部落数量，我们有 $\mathbb{E}[Z] \leqslant r' \cdot (1+o(1))\log_{1/\alpha} k \frac{\log^{10} k}{k} \leqslant (\ln 2 + o(1))\log_{1/\alpha} k$，由 Chernoff 界即可得到结论。 □

对于满足 $T(x) = 1$ 的输入 $x \in \{0,1\}^k$，如果存在唯一一个在 x 下取值为 1 的部落 T_i，则称 x 位于顶点边界上。

事实 2.4。 设 $\frac{1}{10} \leqslant \alpha \leqslant \frac{9}{10}$、$|p - \alpha| \leqslant \frac{1}{k}$，且 k 足够大。则

$$\Pr_{x \sim \mu_p}[T(x) = 1 \textit{ and } x \textit{ is on the vertex-boundary}] = \frac{\ln 2}{2}(1+o(1)).$$

证明。固定一个部落 T_i。在随机选取的 $x \sim \mu_p$ 下，它是唯一取值为 1 的部落的概率等于

$$\begin{aligned}
&p^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k}(1 - p^{\log_{1/\alpha} k - 10\log_{1/\alpha}\log k})^{r'-1} \\
&= \frac{\log^{10} k}{k}\left(1 + \Theta\left(\frac{\log k}{k}\right)\right)\left(1 - \frac{\log^{10} k}{k}\left(1 + \Theta\left(\frac{\log k}{k}\right)\right)\right)^{r'-1} \\
&= \frac{\log^{10} k}{k}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right),
\end{aligned}$$

其中，第二个等号用到了 (2)，最后一个等号用到了 r' 的选取方式。由于这些事件两两不相交，所求概率等于

$$r' \frac{\log^{10} k}{k}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{\ln 2}{2}(1+o(1)).$$ □

3 证明

3.1 引理 1.2 的证明

设 f 是引理陈述中的函数，并令 p 表示其平均值。首先，我们说明不失一般性，可以假设 $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant \frac{2}{3}$。事实上，我们定义 $F\colon \{0,1\}^{n+6} \to \{0,1\}$ 为：当 $|y| = 3$ 时，$F(y,\ x) = f(x)$；当 $|y| \leqslant 2$ 时，$F(y,\ x) = 0$；当 $|y| \geqslant 4$ 时，$F(y,\ x) = 1$。容易看出，F 取 0 和 1 中每个值的概率都至少为 $\frac{15+6+1}{64} \geqslant \frac{1}{3}$。此外，若 f 单调，则 F 单调；若 $\varepsilon(f) \geqslant \varepsilon$，则 $\varepsilon(F) \geqslant \Omega(\varepsilon)$。

现在我们描述这种随机化变换。令 $k = 2^{\frac{C}{\varepsilon}}$ 为一个整数，使得对于 $C > 0$，它是一个足够大的绝对常数。我们在 k^3 个均匀分布且相互独立选取的点上查询 f，并将得到的结果记为 α

经验平均值。取 $T\colon\ \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ 为与此 α对应的第2.2节中的部落函数，并按如下方式定义 $f'\colon\ \{0,1\}^{kn} \to \{0,1\}$。首先，将输入 x 解释为 k 个块 $x(1)\ldots,x(k) \in \{0,1\}^n$，并设

$$f'(x) = T(f(x(1)),\ldots,f(x(k))).$$

至此，我们完成了对变换的描述，接下来分析它的性质。对于第一项，要在输入 x 上查询 f'，我们需要在 k 个输入 $x(1)\ldots,x(k)$ 上查询 f。对于第二项，如果 f 是单调的，那么 f' 是单调函数的复合，因此它也单调。其余论证将用于第三项。注意，以至少 0.99 的概率，我们有 $|\alpha - p| \leqslant \frac{1}{k}$。我们证明在这种情况下，$f'$ 与单调性相距 $\Omega(1)$。

利用引理 2.1，我们得出二分图 G^f viol 具有大小为 $\varepsilon 2^n$ 的匹配。令 $X \subseteq \{0,1\}^n$ 为该匹配的左端点，也就是说，这一侧的输入在 f 下取值为 1。对于每个$x \in X$，令 $M(x)$ 为与其匹配的点。

抽取 $x \in \{0,1\}^{kn}$，并令 $y = (f(x(1))\ldots,f(x(k))) \in \{0,1\}^k$。注意，$y$的分布为$\mu_p$。结合事实2.3和2.4，我们得出：对于选择 x，以至少 $\ln_2{}^2 - 0.01$ 的概率有，当$T(y) \leqslant (\ln 2 + 0.01)\log_{1/\alpha} k$ 时，$T(y) = 1$，且 y 位于 T 的顶点边界上；我们将此事件记为 E，并从此处起以此为条件。因此，存在唯一一个完全满足条件的部落 T_i，记作 $T_i = \{j_1,\ldots,j_s\}$。注意，点 $x(j_1)\ldots,x(j_s)$ 在 $f^{-1}(1)$ 中独立且均匀分布，因此它们各自落入 X 的概率为 ε/p。令 $Z(x)$ 表示满足 $x(j_\ell) \in X$ 的 ℓ 的数量，则有 $\mathbb{E}[Z] = \varepsilon s/p$；又由于 $s = \log_{1/\alpha} k - 10\log^{1/\alpha}\log\ k = \Theta(C/\varepsilon)$，由 Chernoff 界可得

$$\Pr\left[|Z(x) - \varepsilon s/p| \leqslant 0.01\varepsilon s/p \mid E\right] \geqslant 0.99$$

对于足够大的 C。定义

$$W = \left\{x \mid x \in E, |Z(x) - \varepsilon s/p| \leqslant 0.01\varepsilon s/p\right\},$$

那么 $\Pr_{x\in\{0,1\}^{kn}}[x \in W] \geqslant \ln_2{}^2 - 0.02$。

我们构造一个二分图 H，其左侧为 W，右侧为 $f'^{-1}(0)$。对于每个$x \in W$，令 T_i 为取值为 1 的唯一部落，并令 $T_i' \subseteq T_i$ 为坐标 $j \in T_i$ 的子集，使得 $x(j) \in X$。对于每个 $j \in T_i'$，我们在 H 中添加一条边，连接 x 和点 x'；该点与 x 仅在块 j上不同，而在该块上它等于 $M(x(j))$。

显然，每个 $x \in W$的度为 $Z(x) \geqslant 0.99\varepsilon s/p$，因此 H中的边数至少为 $0.99\varepsilon s|W|/p$。现在我们估计 W 中的右侧度。均匀分布地采样 $x \in f'^{-1}(0)$，并令 $y = (f(x(1))\ldots,f(x(k)))$。如果 $\mathrm{as}_T(y) \geqslant (\ln 2 + 0.01)\cdot\log_{1/\alpha} k + 2$，那么它的度为 0，因此接下来我们在事件 $\mathrm{as}_T(y) \leqslant (\ln 2 + 0.01)\cdot\log_{1/\alpha} k + 1 \leqslant (\ln 2 + 0.02)\cdot\log_{1/\alpha} k$ 下进行条件化。令 $I = \{i \mid T_i$ 几乎被 $x\}$满足，从而 $|I| = \mathrm{as}_T(y) \leqslant (\ln 2 + 0.02)\cdot\log_{1/\alpha} k$。然后对每个 $i \in I$，我们取 $j_i \in T_i$ 为满足 $f(x(j_i)) = 0$的唯一块。于是 x 的度可写为

$$d(x) = \sum_{i\in I} 1_{x(j_i) \text{ matched in } M}.$$

给定 I 和 $\{j_i\}_{i\in I}$。注意，对于 $i \in I$，$x(j_i)$ 的分布是独立的，且每个都在 $f^{-1}(0)$ 中均匀分布，因此我们得出 $\mathbb{E}[d(x)] = |I|\frac{\varepsilon}{1-p} \leqslant (\ln 2 + 0.02)\frac{\varepsilon}{1-p}\log_{1/\alpha} k \leqslant (\ln 2 + 0.02 + o(1))\frac{\varepsilon}{1-p}s$。根据 Chernoff 界，对于所有 $L \geqslant 1$，

$$\Pr_x\left[d(x) \geqslant L\cdot(\ln 2 + 0.03)\frac{\varepsilon}{1-p}s\right] \leqslant e^{-\Omega(L\log_{1/\alpha} k)} = k^{-\Omega(L)}.$$

因此，从 H 中移除所有满足 $d(x) \geqslant (\ln 2 + 0.03)\frac{\varepsilon}{1-p}s$ 的顶点 $x \in f'^{-1}(0)$ 后，可知从 H 中移除的边数至多为

$$\sum_{L=1}^{\infty} 2L \cdot (\ln 2 + 0.03)\frac{\varepsilon}{1-p}s \cdot k^{-\Omega(L)}2^{nk} \leqslant 2\frac{\varepsilon}{1-p}s \cdot k^{-\Omega(1)}2^{nk} \leqslant 2^{nk},$$

当 C 足够大时，最后一个不等式成立。设 H' 为移除这些顶点后得到的图 H。注意，H' 是一个二分图，两侧的大小至多为 2^{nk}，其边数为

$$0.99\frac{\varepsilon}{p}s|W| - 2^{nk} \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{p}s\left(\frac{\ln 2}{2} - 0.03\right) - 1)\right)2^{nk} \geqslant \left(\frac{\ln 2}{2} - 0.04\right)\frac{\varepsilon}{p}s \cdot 2^{nk}.$$

这里我们用到了 C 足够大的事实。此外，每个左侧顶点的度至多为 $1.01\frac{\varepsilon}{p}s$，每个右侧顶点的度至多为 $(\ln 2 + 0.03)\frac{\varepsilon}{1-p}s$。因此，运行贪心算法可知，$H'$ 至少有一个大小为 $\frac{(\ln 2^2 - 0.03)\frac{\varepsilon}{p}s \cdot 2^{nk}}{\max(1/p, 1/(1-p))s} \geqslant \Omega(2^{nk})$ 的匹配，并且注意到该匹配中的每条边都是 f' 的一个违反单调性的点对。由引理 2.1 可知，$\varepsilon(f') \geqslant \Omega(1)$。 $\square$

3.2 定理 1.3 的证明

令 $n \in \mathbb{N}$ 足够大，并取 $c = \frac{\xi}{\log\log n}$，其中 $\xi > 0$ 是充分小的绝对常数。利用定理 1.1，我们得到一个定义在 n 元单调函数上的分布 $\mathcal{D}_{\mathsf{yes}}$，以及一个定义在 n 元、与单调性相距 ε_c 的函数上的分布 $\mathcal{D}_{\mathsf{no}}$，使得对于任意 $O(n^{1/2-c})$ 查询算法 ALG，

$$\left|\Pr_{f\sim\mathcal{D}_{\mathsf{yes}}}[\mathsf{Alg}(f)] - \Pr_{f\sim\mathcal{D}_{\mathsf{no}}}[\mathsf{Alg}(f)]\right| \leqslant 0.1.$$

此外，$\varepsilon_c = 2^{-\Theta(1/c)} = (\log n)^{-\Theta(\xi)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\log n}}$，其中最后一个不等式用到了 ξ 充分小这一条件。

取自引理 1.2 的 $\delta > 0$，并假设存在一个 $q(n')$ 查询算法 Alg'，能够区分 n' 元单调函数和与单调性相距 δ 的 n' 元函数。我们现在描述一个区分单调函数和与单调性相距 ε_c 的函数的算法 Alg。给定一个 n 元函数 f 的预言机访问，令 $k = 2^{\Theta(1/\varepsilon_c)}$，并利用引理 1.2 构造对函数 f' 的预言机访问。在 f' 上运行算法 Alg'，且仅当它接受时才接受。

首先，注意到 Alg' 的查询复杂度为 $k \cdot q(kn)$。其次，注意到如果 f 是单调的，那么 f' 也是单调的，因此根据 Alg' 的前提，我们得出该算法以至少 $2/3$ 的概率接受。第三，注意到如果 f 与单调性相差 ε_c，那么根据引理 1.2，我们以至少 0.99 的概率可知 f' 与单调性相差 δ，于是 Alg' 以至多 $1/3$ 的概率接受。因此，如果 f 与单调性相差 ε_c，Alg 以至多 $1/3 + 0.01$ 的概率接受。总之，我们得到

$$\left|\Pr_{f\sim\mathcal{D}_{\mathsf{yes}}}[\mathsf{Alg}(f)] - \Pr_{f\sim\mathcal{D}_{\mathsf{no}}}[\mathsf{Alg}(f)]\right| \geqslant \frac{1}{3} - 0.01 > 0.1$$

根据 $\mathcal{D}_{\mathsf{yes}}$ 和 $\mathcal{D}_{\mathsf{no}}$ 的选择，这意味着 $kq(kn) \geqslant \Omega(n^{1/2-c})$。令 $n' = kn = n^{1+o(1)}$，我们得到 $q(n') \geqslant n'^{1/2-o(1)}$，从而完成证明。 $\square$

参考文献

[1] Aleksandrs Belovs 和 Eric Blais。单调性测试的多项式下界。*SIAM*计算杂志，50(3)，2021年。[2] Michael Ben-Or 和 Nathan Linial。集体抛硬币。计算研究进展，5:91–115，1989年。[3] Deeparnab Chakrabarty 和 C. Seshadhri。针对超立方体上布尔函数的一个 $o(n)$ 单调性测试器。*SIAM*计算杂志，45(2):461–472，2016年。[4] Mark Chen、Xi Chen、Hao Cui、William Pires 和 Jonah Stockwell。布尔函数单调性测试需要（几乎） $n^{1/2}$ 查询。*CoRR*，abs/2511.04558，2025年。[5] Xi Chen、Anindya De、Rocco A. Servedio 和 Li-Yang Tan。布尔函数单调性测试需要（几乎） $n^{1/2}$ 非自适应查询。载于第四十七届年度美国计算机协会计算理论研讨会会议录，*STOC 2015*，美国俄勒冈州波特兰，*2015*年*6*月*14*日至*17*日，第519–528页。美国计算机协会，2015年。[6] Xi Chen、Rocco A. Servedio 和 Li-Yang Tan。单调性测试的新算法与下界。载于第*55*届电气电子工程师学会年度计算机科学基础研讨会，*FOCS 2014*，美国宾夕法尼亚州费城，*2014*年*10*月*18*日至*21*日，第286–295页。IEEE计算机学会，2014年。[7] Xi Chen、Erik Waingarten 和 Jinyu Xie。超越Talagrand函数：单调性与单向性测试的新下界。载于第*49*届年度美国计算机协会*SIGACT*计算理论研讨会会议录，*STOC 2017*，加拿大魁北克省蒙特利尔，*2017*年*6*月*19*日至*23*日，第523–536页。美国计算机协会，2017年。[8]Eldar Fischer、Eric Lehman、Ilan Newman、Sofya Raskhodnikova、Ronitt Rubinfeld 和 Alex Samorodnitsky。一般偏序集定义域上的单调性测试。载于第*34*届年度美国计算机协会计算理论研讨会会议录，*2002*年*5*月*19*日至*21*日，蒙特´利尔，魁´北克，加拿大，第474–483页。美国计算机协会，2002年。[9] Oded Goldreich、Shafi Goldwasser、Eric Lehman、Dana Ron 和 Alex Samorodnitsky。单调性测试。组合学，20(3):301–337，2000年。[10] Subhash Khot、Dor Minzer 和 Muli Safra。关于单调性测试与布尔等周型定理。*SIAM*计算杂志，47(6):2238–2276，2018年。