arXiv:2512.13738v1 [physics.class-ph] 14 Dec 2025

非局部弹性理论中的欧拉弹性线

Vasyl Kovalchuk、Ewa Eliza Ro˙zko、Barbara Go˙lubowska

摘要

本文考虑欧拉弹性问题的一种推广，即对于所选的非局部微分本构应力-应变关系（即非局部弹性理论），求解伯努利薄理想弹性杆的平衡构形（平面弹性曲线）；其边界条件由固定端点和/或端点处的切线定义。在经典（局部）欧拉-伯努利梁模型中，对于大变形情形，弯矩和剪切力控制方程（非齐次但线性）的通解可用 Jacobi 椭圆函数和不完全椭圆积分表示。对于本文讨论的非局部玩具微分模型，其控制方程（此时为非线性）的通解也可以参数形式表示为全部三种不完全椭圆积分的线性组合。作为后续研究，我们计划为所得的非局部通解施加一些边界条件（固支、简支等），以便将其与相应边值问题的局部解进行比较。

MSC: 33E05, 34B15, 53A04, 74B20, 74D10.
Keywords: 欧拉-伯努利梁模型；欧拉弹性线；第一、第二和第三类不完全椭圆积分；Jacobi椭圆函数；非局部微分本构应力-应变关系；非局部弹性理论。

1 引言

经典的欧拉-伯努利模型最初于18世纪提出，旨在基于局部弹性理论描述平面曲梁的大变形。可以证明，该问题的精确解可用Jacobi椭圆函数以及第一、第二和第三类不完全椭圆积分表示（例如，参见文献 [4]，该文将其应用于分析由多根弧形曲梁构成的轻质吸能结构；这些曲梁置于两个平面平台之间，与普通弹性结构相比，能够储存更多能量并产生更小的反作用力）。

欧拉-伯努利理论也可应用于非常微小的物体，例如纳米梁（包括纳米线、 [5], 纳米管、纳米棒等），这些物体可视为长度尺度很小（处于纳米尺度）、能够发生弯曲变形的梁

弯矩，以及剪切力和轴向力。这类纳米尺度物体具有非凡的物理和力学特征：长径比高、柔韧性强、抗拉强度和抗剪强度高，且弹性模量高。例如，对于碳纳米管，我们有 [8]

$$\rho = 2300\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \quad E = 1000\ \mathrm{GPa}, \quad \nu = 0.19, \quad G = 420\ \mathrm{GPa}$$
$$d = 1.0\ \mathrm{nm},\ A = 0.785\ \mathrm{nm}^2,\ I = \frac{\pi d^4}{64} = 0.0491\ \mathrm{nm}^4,\ l_i = 1.5\ \mathrm{nm} \tag{1}$$

其中， ρ 为密度， E 为杨氏（弹性）模量， ν 为泊松比， G 为基尔霍夫（剪切）模量， d 为纳米管的直径， A为其截面面积， I 为其截面的惯性矩， l_i 为内部特征长度。

为了描述纳米梁，除了采用经典梁理论外，还应用了非局部弹性（与小尺度效应相关），这使我们能够研究静态弯曲、自由振动分析以及碳纳米管弹性屈曲等问题（例如，参见文献 [7, 8], 和 [9] ，其中研究了基于可变弧长（VAL）梁概念的未知长度纳米梁的屈曲后行为）。

2 局部弹性曲线的显式解析解

关于弹性线或欧拉弹性线的严格数学描述，例如可见文献 [1, 2] 或文献 [6], ，其中给出了以椭圆函数表示的通解，以及自由弹性线和受拉弹性线的显式参数化表达式。

弹性理论中梁微段的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = Q, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = -\kappa N, \qquad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \kappa Q \tag{2}$$

其中， M 为弯矩， N 和 Q 分别为轴向力和剪切力， κ为弹性曲线的曲率。该弹性曲线由所谓的弧长参数 s 进行参数化，其取值范围为 0 到 L，其中 L 为弹性曲线的总长度（有时，为简化起见，会考虑满足$L = 1$的单位弹性线）。

如果将 $\theta(s)$ 定义为弹性曲线上任意点 $P(x(s)\ y(s))$ 处的切线倾角，该弹性曲线沿 x 轴布置并承受同样沿 x 轴方向的压缩载荷 F，那么欧拉弹性线将沿 y 轴发生屈曲（例如横向挠度）。在这种情况下，轴向力、剪切力、曲率以及几何条件可表示为

$$N = -F\cos\theta, \quad Q = F\sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \kappa, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\theta. \tag{3}$$

在经典（局部）梁模型中，弹性曲线上任意点处的弯矩与其曲率成正比，即弯矩—曲率关系由欧拉-伯努利定律给出：

$$M = -EI\kappa = -EI\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \tag{4}$$

其中，抗弯刚度 EI 由杨氏模量 E和惯性矩 I表示。

此外，可以证明 [2]，沿弹性曲线作用的弯矩 M 和轴向力 N 之间满足以下关系：

$$\frac{M^2}{2EI} = |N| \tag{5}$$

这可以理解为如下要求的体现：在力学平衡状态下，弹性曲线上各点所受力的合力为零。

利用式 (2)–(4)，可以直接得到控制方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{1}{EI}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = -\frac{Q}{EI} = -\frac{F}{EI}\sin\theta = -\alpha^2\sin\theta, \qquad \alpha^2 = \frac{F}{EI}\cdot \tag{6}$$

将式 (7) 左右两边乘以 $2(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s)$，即可对上述关于函数 $\theta(s)$ 的非齐次线性二阶常微分方程积分一次。于是得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\big)^2\Big) = 2\alpha^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\cos\theta\right) \tag{7}$$

可积分为：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \pm\sqrt{2\alpha^2\cos\theta + C} = \pm\frac{2\alpha}{k}\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}, \qquad k^2 = \frac{4\alpha^2}{C + 2\alpha^2} \tag{8}$$

其中 C，或者等价地 k（若 $\alpha \neq 0$，即 $F \neq 0$），是第一个积分常数。值得注意的是，积分常数 C 并非无量纲，其量纲为 nm^{-2}，即与项 α^2的量纲相同。

当 $k^2 \leq 1$ （即 $C \geq 2\alpha^2$）时，上述表达式可积分为

$$s(\theta) = \pm\frac{k}{2\alpha}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = s_0 \pm \frac{k}{\alpha}F\big(\frac{\theta}{2}, k\big) \tag{9}$$

其中 s_0 是第二个积分常数，且

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{10}$$

是第一类不完全椭圆积分。

因此，对表达式（9）求逆，即注意到雅可比椭圆正弦函数 $\mathrm{sn}(u,\ k) = \sin\varphi$ 是第一类不完全椭圆积分 $F(\varphi,\ k) = u$的简单逆函数，方程（6）的通解可写为 [4]

$$\theta(s) = \pm 2\arcsin\big(\mathrm{sn}\big(\frac{\alpha}{k}(s-s_0),k\big)\big), \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \pm\frac{2\alpha}{k}\mathrm{dn}\big(\frac{\alpha}{k}(s-s_0),k\big) \tag{11}$$

其中，我们利用了雅可比椭圆 delta 函数与正弦函数之间的关系，将式（8）改写为式（11），即:

$$\mathrm{dn}^2(u,k) = 1 - k^2\mathrm{sn}^2(u,k) = 1 - k^2\sin^2\varphi. \tag{12}$$

两个积分常数，即 k （或 C）和 s_0，都可以通过对曲梁边值问题（BVPs）施加相应的边界条件（固支、简支等）来确定。

利用式（11），可得:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \pm 2\ \mathrm{sn}\big(\frac{\alpha}{k}(s-s_0),k\big)\mathrm{cn}\big(\frac{\alpha}{k}(s-s_0),k\big) \\ \cos\theta &= 1 - 2\ \mathrm{sn}^2\big(\frac{\alpha}{k}(s-s_0),k\big) \end{aligned} \tag{13}$$

其中，我们利用了雅可比椭圆余弦函数与正弦函数之间的关系，即:

$$\mathrm{cn}^2(u,k) = 1 - \mathrm{sn}^2(u,k) = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi. \tag{14}$$

接下来，对式（3）中的最后两个方程积分，并利用式（8），即可得到欧拉弹性线上任意一点的坐标（所得通解的示例图见图 1），即:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \int \cos\theta\,\mathrm{d}s(\theta) = \pm\frac{k}{2\alpha}\int \frac{1-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= x_0 \pm \frac{k}{\alpha}\big(1-\frac{2}{k^2}\big)F\big(\frac{\theta}{2},k\big) \pm \frac{2}{\alpha k}E\big(\frac{\theta}{2},k\big) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} y(\theta) &= \int \sin\theta\,\mathrm{d}s(\theta) = \mp\frac{1}{2\alpha^2}\int \frac{\mathrm{d}(2\alpha^2\cos\theta + C)}{\sqrt{2\alpha^2\cos\theta + C}} \\ &= y_0 \mp \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{2\alpha^2\cos\theta + C} = y_0 \mp \frac{2}{\alpha k}\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{aligned} \tag{16}$$

其中，x_0、y_0 为积分常数，且

$$E(\varphi,k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \tag{17}$$

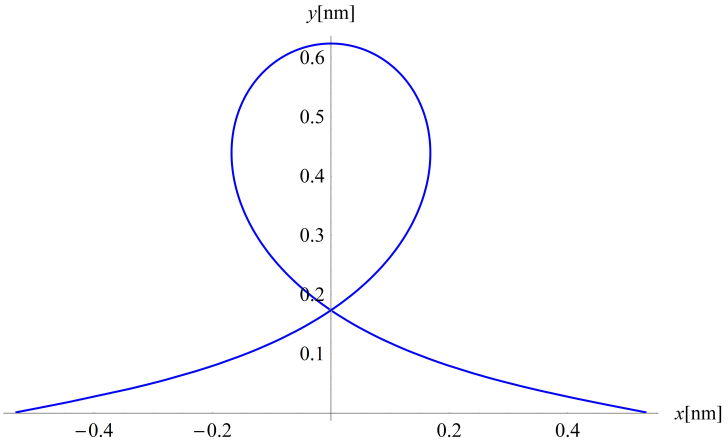

图1：由积分常数 $x_0 = y_0 = 0$, $C = 20\text{nm}^{-2}$、椭圆模数 $1/k = 0.99549$、力 $F = 500$ nN、杨氏模量 $E = 1000$ GPa、惯性矩 $I = 0.0491$ nm^{4}确定的参数解 $(x(\theta)\ \ y(\theta))$ 的示例图，该参数解由式 (15) 和 (16) 定义。

为第二类不完全椭圆积分。

利用式 (11)，式 (15)–(16) 也可以改写为关于 s的函数，即

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \big(1 - \frac{2}{k^2}\big)(s - s_0) \pm \frac{2}{\alpha k} E\big(\text{am}\big(\frac{\alpha}{k}(s - s_0), k\big), k\big) \\ y(s) &= y_0 \mp \frac{2}{\alpha k} \text{dn}\big(\frac{\alpha}{k}(s - s_0), k\big) \end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\text{am}(u, k) = \varphi$ 是雅可比椭圆振幅。

类似地，当 $k^2 > 1$ (即 $|C| < 2\alpha^2$) 时，利用变换

$$F(\varphi, k) = \frac{1}{k} F\big(\arcsin(k \sin\varphi), \frac{1}{k}\big) \tag{19}$$

我们得到通解 (9) 可以改写为

$$s(\theta) = s_0 \pm \frac{1}{\alpha} F\big(\arcsin\big(k \sin\frac{\theta}{2}\big), \frac{1}{k}\big). \tag{20}$$

对式 (20) 求逆，我们得到 [4]

$$\theta(s) = \pm 2 \arcsin\big(\frac{1}{k} \text{sn}\big(\alpha(s - s_0), \frac{1}{k}\big)\big), \quad \frac{\text{d}\theta}{\text{d}s} = \pm \frac{2\alpha}{k} \text{cn}\big(\alpha(s - s_0), \frac{1}{k}\big) \tag{21}$$

因此，

$$\sin\theta = \pm \frac{2}{k} \text{sn}\big(\alpha(s - s_0), \frac{1}{k}\big) \text{dn}\big(\alpha(s - s_0), \frac{1}{k}\big)$$

$$\cos\theta \quad = \quad 1-\frac{2}{k^2}\,\mathrm{sn}^2\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big). \tag{22}$$

最后，对式 (3) 中的最后两个方程积分，并利用式 (8)，我们得到表示变形梁的欧拉弹性线上任意一点的坐标：

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \cos\theta\,\mathrm{d}s = s-s_0-\frac{2}{k^2}\int \mathrm{sn}^2\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big)\mathrm{d}s \\ &= x_0-s+s_0\pm\frac{2}{\alpha}E\big(\mathrm{am}\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big),\frac{1}{k}\big) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \int \sin\theta\,\mathrm{d}s = \pm\frac{2}{k}\int \mathrm{sn}\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big)\mathrm{dn}\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big)\mathrm{d}s \\ &= y_0\mp\frac{2}{\alpha k}\mathrm{cn}\big(\alpha(s-s_0),\frac{1}{k}\big). \end{aligned} \tag{24}$$

3 非局部弹性曲线的玩具微分模型

小尺度效应（例如非局部性）可通过对梁或纳米梁的正应力与应变之间的本构关系进行相应修改（采用积分形式或微分形式），与经典（局部）弹性理论相结合。根据 Eringen 方法（例如参见 [3]），我们可以通过以下一般应力-应变关系的积分形式，将所谓的应变驱动非局部性引入线性弹性理论：

$$\sigma_{ij}^{nl}(\vec{x})=\int k_\mu\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big)\sigma_{ij}^{l}(\vec{x}\,')\mathrm{d}V'=E\int k_\mu\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big)\varepsilon_{ij}(\vec{x}\,')\mathrm{d}V' \tag{25}$$

其中，$\sigma_{ij}^{nl}(\vec{x})$ 表示点 $\vec{x}$处的非局部应力，$\sigma_{ij}^{l}(\vec{x}\,')=E\varepsilon_{ij}(\vec{x}\,')$ 定义了参考点 $\vec{x}\,'$处的局部（线性）应力-应变关系，而$k_\mu\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big)$ 是一个衰减函数，表示梁或纳米梁中的长程相互作用。该核函数取决于尺度因子$\mu=\epsilon_0^2 l_i^2$，该因子被视为描述非局部程度的参数（其量纲为长度的平方）。一般情况下，它定义为材料参数 ϵ_0 和内部特征长度 l_i 的函数（例如，内部特征长度可理解为晶格参数、颗粒尺寸、碳-碳键之间的距离等） [8, 9]。

在 Eringen 非局部理论中，我们假设上述非局部核$k_\mu\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big)$ 是特定线性微分算子$\mathcal{L}_\mu$ 的格林函数，使得

$$\mathcal{L}_\mu k_\mu\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big)=\delta\big(|\vec{x}-\vec{x}\,'|\big). \tag{26}$$

上述微分算子最常见的选择是 $\mathcal{L}_\mu = 1 - \mu\nabla^2$，其中 ∇^2 是拉普拉斯算子。这意味着我们可以将式 (25) 给出的应力-应变本构关系的积分形式等价地改写为相应的微分形式（例如参见 [8, 9]）：

$$\mathcal{L}_\mu \sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij}^{nl} - \mu\nabla^2\sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij}^{l} = E\varepsilon_{ij}. \tag{27}$$

在本文中，我们考虑一个用于描述非局部欧拉弹性线的玩具微分模型。在该模型中，我们不使用关于空间变量 $\vec{x}(s)$（由弧长参数 s参数化）的拉普拉斯算子，即 $\nabla^2_{\vec{x}(s)}$，而是使用关于材料变量 s （即弧长参数本身）的拉普拉斯算子，即 ∇^2_s。

那么，在我们的情形中，非局部应力-应变关系具有如下形式

$$\sigma_{xx} - \mu\frac{\mathrm{d}^2\sigma_{xx}}{\mathrm{d}s^2} = E\varepsilon_{xx} \tag{28}$$

其中，在某点$P(s)$处计算得到的沿 x轴方向的法向非局部应力 σ_{xx}，其弧长参数为 s，不仅取决于该点 $P(s)$处的正应变 ε_{xx}，还取决于欧拉弹性线上所有其他点处的正应变值（换言之，这就是所谓的应变驱动的非局部性）。

将上述非局部本构关系 (28) 应用于欧拉-伯努利梁理论，会使弯矩-曲率关系 (4) 得到修正；对于我们的玩具微分模型，该关系现在可表示为

$$M - \mu\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}s^2} = -EI\kappa = -EI\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}. \tag{29}$$

由此可从 (2)-(3) 推导出

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = -\kappa N = F\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}. \tag{30}$$

将 (30) 代入 (29)，可得

$$M = -EI\left(1 - \mu\alpha^2\cos\theta\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \qquad \alpha^2 = \frac{F}{EI} \tag{31}$$

当非局部参数 μ 趋近于 0 时，该式可化简为 (5)。

对 (31) 关于弧长参数 s 求导，并再次利用 (2)-(3)，可得控制方程 (6) 的修正形式如下

$$\left(1 - \mu\alpha^2\cos\theta\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} + \mu\alpha^2\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = -\alpha^2\sin\theta. \tag{32}$$

如果我们定义

$$P(\theta) = 1 - \mu\alpha^2\cos\theta = 1 - \mu\alpha^2 + 2\mu\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{33}$$

那么 (32) 可改写为

$$P(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}+P'(\theta)\big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\big)^2=-\frac{1}{\mu}P'(\theta). \tag{34}$$

将式 (34) 左右两边乘以项 $2P(\theta)(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s)$ 后，上述关于函数 $\theta(s)$ 的非线性二阶常微分方程可进行一次积分。于是得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(P^2(\theta)\big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\big)^2\big)=-\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(P^2(\theta)\right) \tag{35}$$

可积分为

$$\big(1+\mu\big(\frac{d\theta}{ds}\big)^2\big)P^2(\theta)=D^2>0 \tag{36}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\pm\sqrt{\frac{1}{\mu}\big(\frac{D^2}{P^2(\theta)}-1\big)}=\pm\frac{K}{\sqrt{\mu}}\frac{\sqrt{\big(1-k_1\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\big(1-k_2\sin^2\frac{\theta}{2}\big)}}{1-k_3\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{37}$$

其中，D 是第一个积分常数，并且

$$k_1=\frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2-1+D},\quad k_2=\frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2-1-D},\quad k_3=\frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2-1},\quad K=\frac{k_3}{\sqrt{k_1k_2}}. \tag{38}$$

值得注意的是，尽管当非局部参数 μ 趋近于 0 时，式 (32) 很容易化简为式 (6)，但式 (37) 与式 (8) 之间的联系却不那么显而易见（因为需要除以 0）。

将式 (37) 代入式 (34)，还可以得到关于 $\theta(s)$ 的二阶导数的简洁表达式，即

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{D^2}{\mu}\frac{P'(\theta)}{P^3(\theta)}=\frac{D^2\alpha^2\sin\theta}{\left(\mu\alpha^2\cos\theta-1\right)^3}. \tag{39}$$

如果我们将（37）中的变量分离并对所得表达式进行积分，则

$$s(\theta)=\pm\frac{\sqrt{\mu}}{K}\int\frac{\big(1-k_3\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\big(1-k_1\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\big(1-k_2\sin^2\frac{\theta}{2}\big)}} \tag{40}$$

这也使我们得到变形弹性曲线坐标的相应表达式，即，

$$\begin{aligned}x(\theta)&=\int\cos\theta\,\mathrm{d}s(\theta)=s(\theta)\mp2\frac{\sqrt{\mu}}{K}\int\frac{\big(1-k_3\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\sin^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\big(1-k_1\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\big(1-k_2\sin^2\frac{\theta}{2}\big)}}\\ y(\theta)&=\int\sin\theta\,\mathrm{d}s(\theta)=\pm4\frac{\sqrt{\mu}}{K}\int\frac{\big(1-k_3\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\big(\sin\frac{\theta}{2}\big)}{\sqrt{\big(1-k_1\sin^2\frac{\theta}{2}\big)\big(1-k_2\sin^2\frac{\theta}{2}\big)}}.\end{aligned} \tag{41}$$

需要注意的是，式 (41) 中的第二个表达式很容易积分，即我们得到

$$y(\theta) = y_0 \mp 2\sqrt{\frac{\mu}{k_1 k_2}}\sqrt{\left(1 - k_1 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - k_2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \tag{42}$$

其中 y_0 是积分常数。

4 通过不完全椭圆积分进行隐式参数化

使用代换 $\tan(\theta/2) = t$，可得

$$\sec^2\frac{\theta}{2} = 1 + t^2, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{43}$$

因此，表达式 (40) 和 (41) 中的第一个表达式可改写为

$$\begin{aligned} s(t) &= \pm\frac{2\sqrt{\mu}}{KK'}\int \frac{Q_2(t)\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{P_4(t)}} \\ x(t) &= \pm\frac{2\sqrt{\mu}}{KK'}\int \frac{Q_4(t)\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2\sqrt{P_4(t)}} \end{aligned} \tag{44}$$

其中，多项式 $Q_2(t)$、$Q_4(t)$ 和 $P_4(t)$ 定义为

$$Q_2(t) = k_3' - t^2,\ Q_4(t) = k_3' - k_3 k_3' t^2 + t^4,\ P_4(t) = \left(t^2 - k_1'\right)\left(t^2 - k_2'\right) \tag{45}$$

系数为

$$\begin{aligned} k_1' &= \frac{1}{k_1 - 1} = \frac{\mu\alpha^2 - 1 + D}{\mu\alpha^2 + 1 - D}, & k_1 k_1' &= \frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2 + 1 - D} \\ k_2' &= \frac{1}{k_2 - 1} = \frac{\mu\alpha^2 - 1 - D}{\mu\alpha^2 + 1 + D}, & k_2 k_2' &= \frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2 + 1 + D} \\ k_3' &= \frac{1}{k_3 - 1} = \frac{\mu\alpha^2 - 1}{\mu\alpha^2 + 1}, & k_3 k_3' &= \frac{2\mu\alpha^2}{\mu\alpha^2 + 1} \\ K' &= \frac{k_3'}{\sqrt{k_1' k_2'}}, & \frac{1}{KK'} &= \frac{\mu\alpha^2 + 1}{\sqrt{(\mu\alpha^2+1)^2 - D^2}}. \end{aligned} \tag{46}$$

于是，表达式 (44) 可积分为

$$s\left(\theta\right) = s_0 \pm \frac{2\sqrt{\mu}}{KK'}\left(k_3 k_3' I_2\left(\theta\right) - I_1\left(\theta\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= s_0 \pm 2\sqrt{\mu}\,\frac{2\mu\alpha^2 I_2(\theta) - (\mu\alpha^2+1) I_1(\theta)}{\sqrt{(\mu\alpha^2+1)^2 - D^2}} \qquad (47)\\
x(\theta) &= x_0 - s(\theta) + s_0 \pm \frac{4\sqrt{\mu}}{KK'}\left(k_3 k_3' I_3(\theta) - I_2(\theta)\right)\\
&= x_0 - s(\theta) + s_0 \pm 4\sqrt{\mu}\,\frac{2\mu\alpha^2 I_3(\theta) - (\mu\alpha^2+1) I_2(\theta)}{\sqrt{(\mu\alpha^2+1)^2 - D^2}} \qquad (48)
\end{aligned}
$$

其中 s_0 和 x_0 是积分常数，且

$$
\begin{aligned}
I_1(\theta) &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P_4(t)}} = \sqrt{k_1 - 1}\, F(\varphi(\theta), k)\\
I_2(\theta) &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{P_4(t)}} = \sqrt{k_1 - 1}\, \Pi(n, \varphi(\theta), k)\\
I_3(\theta) &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2\sqrt{P_4(t)}} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\int \frac{\mathrm{d}t}{(\xi+t^2)\sqrt{P_4(t)}}\,\Bigg|_{\xi=1}\\
&= I_2(\theta) - \sqrt{k_1 - 1}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\Pi\Big(\frac{n}{\xi}, \varphi(\theta), k\Big)\Big|_{\xi=1}.
\end{aligned} \qquad (49)
$$

在上述表达式中，我们采用了不完全第三类椭圆积分的定义，即:

$$
\Pi(n, \varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\big(1 - n\sin^2\varphi\big)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \qquad (50)
$$

其中，对于我们的情况，雅可比椭圆振幅 $\varphi(\theta)$、椭圆模数 k 和特征参数 n 分别为

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\theta) = \arcsin\Big(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{k_2'}}\Big) = \arcsin\Big(\sqrt{\frac{\mu\alpha^2+1+D}{\mu\alpha^2-1-D}}\tan\frac{\theta}{2}\Big)\\
&k = \sqrt{\frac{k_2'}{k_1'}} = \sqrt{\frac{(\mu\alpha^2 - D)^2 - 1}{(\mu\alpha^2 + D)^2 - 1}}, \qquad n = -k_2' = \frac{1 - \mu\alpha^2 + D}{1 + \mu\alpha^2 + D}.
\end{aligned} \qquad (51)
$$

为了改写式（49）中的最后一个表达式，我们使用第三类不完全椭圆积分关于其特征参数的导数公式，即

$$
-\frac{\partial}{\partial \xi}\,\Pi\Big(\frac{n}{\xi}, \varphi, k\Big)\Big|_{\xi=1} = \frac{n}{2(n-1)(k^2-n)}\Big(\frac{n\sin 2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{2\big(n\sin^2\varphi - 1\big)}
$$

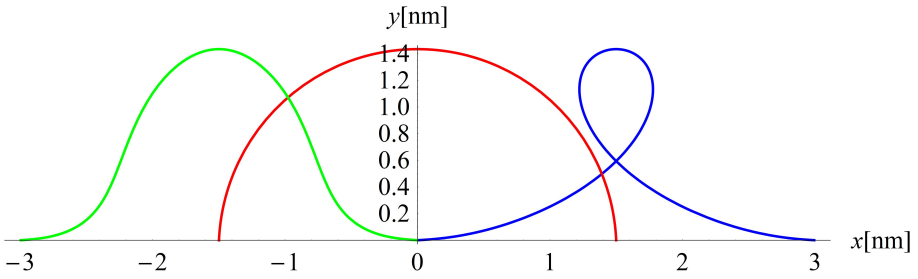

图2：由积分常数 $x_0 = y_0 = 0$, $D = 0.1$、非局部参数 $\mu = 2.25$ nm^2, 、力 $F = 500$ nN、杨氏模量 $E = 1000$ GPa 和惯性矩 $I = 0.0491$ nm^4, 定义的参数解 $(x(\theta)\ \ y(\theta))$ 的示例图，其由式 (58) 和 (42) 给出，其中绿色曲线: $-\pi/2 + \varphi(\theta)$，红色曲线：$\varphi(\theta)$，蓝色曲线： $\pi/2 - \varphi(\theta)$。

$$+\frac{k^2-n}{n}\,F\left(\varphi,k\right)+E\left(\varphi,k\right)+\frac{n^2-k^2}{n}\Pi\left(n,\varphi,k\right)\Big) \tag{52}$$

以及公式（46）和（51）之间的关系，即

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= -2(k_2'+1) = -2k_2k_2' \\ k^2-n &= \frac{k_2'}{k_1'}+k_2' = k_1k_2' \\ n^2-k^2 &= k_2'^2-\frac{k_2'}{k_1'} = \frac{k_2'}{k_1'}(k_1'k_2'-1) \end{aligned} \tag{53}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{n}{2(n-1)(k^2-n)} &= \frac{1}{2k_1k_2k_2'} \\ 1+\frac{n^2-k^2}{2(n-1)(k^2-n)} &= \frac{(2k_1k_2-1)k_1'k_2'+1}{2k_1k_2k_1'k_2'} \\ &= \frac{3+2(k_1'+k_2')+k_1'k_2'}{2k_1k_2k_1'k_2'} \end{aligned} \tag{54}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} I_3\left(\theta\right) &= -\frac{I_1\left(\theta\right)}{2k_2k_2'}+\frac{3+2\left(k_1'+k_2'\right)+k_1'k_2'}{2k_1k_2k_1'k_2'}\,I_2\left(\theta\right)+\frac{\sqrt{k_1-1}}{2k_1k_2k_2'}\,E(\varphi\left(\theta\right),k) \\ &+ \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{2k_1k_2\sqrt{k_1'k_2'}}\sqrt{\left(1-k_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1+k_2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{55}$$

考虑到式 (42)，我们可以将式 (55) 中的最后一项改写为

$$\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{k_1k_2k_1'k_2'}}\left(\mp\frac{y\left(\theta\right)-y_0}{4\sqrt{\mu}}\right) \tag{56}$$

因此，将 (55) 和 (56) 代入 (48) 后，我们得到

$$\begin{aligned} x\left(\theta\right) &= x_0-\left(y(\theta)-y_0\right)\tan\frac{\theta}{2}-s\left(\theta\right)+s_0\pm2\sqrt{\mu}\,\Big(\frac{E(\varphi\left(\theta\right),k)}{\sqrt{k_1k_2k_2'}} \\ &- \sqrt{\frac{k_1k_1'}{k_2k_2'}}\,I_1\left(\theta\right)+\Big(\frac{3+2\left(k_1'+k_2'\right)+k_1'k_2'}{\sqrt{k_1k_2k_1'k_2'}}-\frac{2}{KK'}\Big)I_2\left(\theta\right)\Big). \end{aligned} \tag{57}$$

最后，将 (49) 中前两个表达式代入 (47) 和 (57)，并化简，可通过不完全椭圆积分得到 $s(\theta)$ 和 $x(\theta)$ 的隐式参数化（所得通解的示例图见图 2），即

$$\begin{aligned} s\left(\theta\right) &= s_0\pm2\sqrt{\mu}\,\frac{2\mu\alpha^2\,\Pi\left(n,\varphi\left(\theta\right),k\right)-\left(1+\mu\alpha^2\right)F(\varphi\left(\theta\right),k)}{\sqrt{(\mu\alpha^2+D)^2-1}} \\ x\left(\theta\right) &= x_0-\left(y(\theta)-y_0\right)\tan\frac{\theta}{2} \\ &\quad\pm\frac{\sqrt{(\mu\alpha^2+D)^2-1}}{\sqrt{\mu}\alpha^2}E(\varphi\left(\theta\right),k)\mp\frac{2\sqrt{\mu}D\;F(\varphi\left(\theta\right),k)}{\sqrt{(\mu\alpha^2+D)^2-1}} \end{aligned} \tag{58}$$

其中，$y(\theta)$ 由表达式 (42) 给出。

5 最后评述

作为后续研究，我们计划将选定的边界条件（固支、简支等）应用于所得的变形梁非局部通解 (58) 和 (42)，以便针对相同类型的边值问题（BVP），比较欧拉弹性线的局部形式与非局部形式。

参考文献

[1] Djondjorov P.、Hadzhilazova M.、Mladenov I. 和 Vassilev V.，《欧拉弹性曲线的显式参数化》，《几何、积分与量子化》**9**（2008）175–186。DOI:10.7546/giq-9-2008-175-186[2] Djondjorov P.、Hadzhilazova M.、Mladenov I. 和 Vassilev V.，《关于从自由弹性曲线到受拉弹性曲线的过渡》，《几何、积分与量子化》**10** （2009）164–170。DOI:10.7546/giq-10-2009-164-170

[3] Eringen A.，《非局部弹性理论及其若干应用》，技术报告第**62**号，普林斯顿大学，普林斯顿，1984年。[4] Huo Y.-L.、Pei X.-S. 和 Li M.-Y.，《利用Jacobi椭圆函数进行平面曲梁的大变形分析》，《力学学报》**233**（2022）3497–3510。DOI:10.1007/s00707-022-03279-3[5]Manecka-Pada˙z A.、Jenczyk P.、P.echerski R. 和 Nykiel A.，《欧拉弹性曲线的实验研究：原位扫描电子显微镜纳米线屈曲后行为》，《波兰科学院技术科学通报》**70**（2022）e143648-1–6。DOI:10.24425/bpasts.2022.143648[6]Pulov V.、Hadzhilazova M. 和 Mladenov I.，《欧拉弹性线的新表征》，《几何、积分与量子化》**17** （2016）309–317。DOI:10.7546/giq-17-2016-309-317[7] Reddy J.，《梁的弯曲、屈曲和振动的非局部理论》，《国际工程科学杂志》**45** （2007）288–307。DOI:10.1016/j.ijengsci.2007.04.004[8] Reddy J. 和 Pang S.，《用于碳纳米管分析的梁非局部连续体理论》，《应用物理学杂志》**103** （2008）023511-1– 16。DOI:10.1063/1.2833431[9]Thongyothee C. 和 Chucheepsakul S.，《考虑非局部弹性和表面应力影响的未知长度纳米梁屈曲后行为》，《国际应用力学杂志》**7** （2015）1550042-1–26。DOI:10.1142/S1758825115500428