arXiv:2512.13772v1 [math.LO] 15 Dec 2025

线性序的广义和

´ ´ALVARO DIAZ RAMOS、GARRETT ERVIN 和 SAHARON SHELAH

Abstract. 我们研究线性序的广义和。这些二元运算以线性序 A 和 B为输入，并返回一个序 $A \oplus B$；该序可以分解为 A的一个同构副本与 B的一个副本交错而成。我们证明，除了通常和 $+$ 及其对偶之外，还存在丰富多样的结合和。其中最简单的这类和源于我们称为线性序的 *sum-generatingclasses* 的对象。这些类为每个线性序确定了由左半部和右半部组成的典范分解。我们研究这些类及其生成的和的结构性质和代数性质。

随后，我们将注意力转向线性序的各种子类上的交换和。为此，我们引入线性序的 *complicated class* 这一概念，并证明在这类对象上可以以非常灵活的方式构造和。利用这一构造，我们证明了缺乏通常和的结构性质的结合和确实存在。在此过程中，我们刻画了序数上的结合和与交换和。

Contents

1. 引言 2
2. 约定与预备知识 3
3. 线性序的和 4
3.1. 和的一些合理性质 8
3.2. 半标准和 11
3.3. 乘积双色着色 13
4. 和生成类 14
4.1. 滤过与筛和 19
4.2. 代数性质 20
4.3. 简单和的交换性 25
5. 线性序的良和 26
5.1. 良序上的良和 26
5.2. 有理数洗牌 33
5.3. 复杂类 36
6. 重新考察和的性质 38
6.1. 点追踪 38
6.2. 典范正则性 39
6.3. 表示群 40
参考文献 41

1. Introduction

两个线性序 A 和 B 的通常和 $A+B$ 是通过连接 A 和 B 得到的。这种运算类似于集合的不交并，因为 $A+B$ 可以在 $+$ 符号处切开，从而划分为一个与 A 同构的子序和一个与 B 同构的子序。若线性序类 LO 上的二元运算 $\oplus$ 与 $+$ 具有这一性质，即对于每个 $A, B \in LO$，序 $A \oplus B$ 都可以写成两个子序 A' 和 B' 的不交并 $A' \sqcup B'$，使得 $A' \cong A$ 且 $B' \cong B$，则称该运算为**良和**。本文旨在研究这类运算。

通常和还具有以下性质：

(i.)（正则性）若 $A \cong X$ 且 $B \cong Y$，则 $A + B \cong X + Y$；

(ii.)（结合律） $A + (B + C) \cong (A + B) + C$。

与通常和对偶的是逆序运算 $+^*$，其定义为 $A +^* B = B + A$。与通常和一样，它的对偶运算具有正则性和结合律。

尽管 $+$ 和 $+^*$ 是在线性序上直观自然的运算，但从作为余积的范畴意义而言，它们并不是和。特别地，这些运算并不交换：存在许多序对 A, B 使得 $A + B \ncong B + A$，因而也有 $B +^* A \ncong A +^* B$。人们可能会问，在 LO上的和中，$+$ 和 $+^*$ 是否具有自然的内在刻画。更具体地说，我们考虑以下问题：

(1.) $+$和 $+^*$ 是 LO上仅有的正则结合和吗？(2.) 如果不是，能否在 LO上的正则结合和中刻画出 $+$和 $+^*$？

事实证明，问题 (1.) 的答案在很强的意义上是否定的，而本文的主要目标之一，就是构造许多定义在 LO 上的正则结合和 $\oplus$，以及 LO 的自然子类上的正则结合和，它们不同于通常和及其对偶。

我们通过两种不同的方式来构造这类和。第一种方法是先在 LO 上定义一个全局方案，将每个线性序分解为凸块。为了对给定的一对序 A 和 B求和，每个单独的 A块都与一个相应的 B块按照 $+^*$的某种 $+$ 求和，然后将所得的序串接起来形成 $A \oplus B$。以这种方式定义的和的正则性和结合律将由该分解方案的某些典范性质推出。

最简单的方案是将每个线性序分解为单个凸块（即完全不进行分解）。相对于这种方案定义的和 $\oplus$ 具有如下性质：对于任意 A 和 B，要么 $A \oplus B = A + B$，要么 $A \oplus B = A +^* B$。一个自然的问题是，是否可以通过单个和实现这两种可能性；也就是说，对于某些输入序对 A 和 B，$\oplus$ 返回它们的通常和，而对于其他输入序对，则返回它们的对偶和。事实证明，答案是否定的：我们在定理 3.27 中证明，这类和中唯一的正则结合和是 $+$ 和 $+^*$。换言之，定理 3.27 表明，如果 $\oplus$ 是 LO 上的一个正则结合和，使得 $A \oplus B$ 始终可以分解为 凸 A 和 B的副本，那么 $\oplus$ 就是 $+$ 或 $+^*$ 之一。这可以视为对上述问题（2）的回答。

另一方面，也存在一些分解方案，能产生新颖的和，并且在这些方案下，每个序都被分解为至多两个凸块。这类方案会将每个线性序 A “从中间”切开，也就是说，将其分为一个初始段 A_L 和相应的末段 A_R，使得$A \cong A_L + A_R$。我们将重点讨论由我们称为线性序的**和生成类**所决定切口的情形；见定理 4.5。对于一个固定的和生成类 $\mathcal{C}$，相应的分解方案定义如下：令 A_L 为给定序 A中属于 $\mathcal{C}$的最长初始段，并令 A_R 为剩余的末段。然后，我们通过如下设定来定义相对于此方案的和

$$A \oplus B := (A_L \circ B_L) + (A_R \diamond B_R),$$

其中，$\circ$ 被一致地选为 $+$ 或 $+^*$，$\diamond$也同样如此。

和生成类的定义性质保证，以这种方式定义的和是正则且具有结合性的。反过来，我们将证明，如果一个两部分分解方案由上述意义下的序类 $\mathcal{C}$ 决定，并生成一个正则且具有结合性的和，那么 $\mathcal{C}$ 必定是和生成类。参见定理 4.9。

和生成类及其所确定的分解具有有趣的代数和结构性质，我们将在第 4.2 节中对此进行考察。在第 4.1 节中，我们迭代两部分构造，以获得由包含许多（甚至无限多个）部分的分解所确定的和。

我们构造和的第二种方法是归纳式的。与由和生成类产生的和不同，这种方法不依赖于全局结构分解理论，而是依赖于正在定义和的序类所具有的一种非结构性质。更确切地说，我们从一个具有以下性质的线性序类 K 开始：该类中每个线性序的基数均为固定的 λ，且任意两个序 $A, B \in K$ 都可以通过尽可能多的方式进行求和，即

$$|\{X \in K : X = A' \sqcup B', A' \cong A, B' \cong B\}/\cong| = 2^{\lambda}.$$

我们称这样的类为 K **复杂类**。在第 5.3 节中，我们展示了如何在复杂类 K 上归纳地构造和 $\oplus$，使其不仅具有正则性和结合性，而且还具有交换性。我们将这样的和称为**良和**；参见第 5 节。我们展示了如何利用这一构造，在某些非散序类上获得良和；参见定理 5.45、定理 5.46。

在我们的研究过程中，我们还考察了某些具有高度结构化性质的线性序类上的良和。在第 4.1 节中，我们展示了序数上的黑森堡和如何通过迭代的和生成类构造得到。在第 5.1 节中，我们研究了良序的良和，最终给出了两个序数可能的和的界；见定理 5.24。在第 5.2 节中，我们在可数有理数混洗类上构造了一个良和，它与论文中讨论的其他任何和都截然不同。

我们工作的高潮是第 6 节，我们在其中证明，存在一些正则结合和，它们缺少通常和的基本结构性质。为此，我们结合了关于序数上的良和、复杂类以及和生成类的滤链的研究成果。

2. Conventions and preliminaries

线性序 是一个有序对 $(X, <)$，由集合 X 和其上的严格全序 $<$ 构成。我们通常不特意提及序关系，而将 $(X, <)$ 记为 X。为表明序关系 $<$ 是集合 X 上的序关系，我们有时将其写作 $<_X$。

给定一个线性序 $(X, <)$，其**逆序** 为序 $(X, <^*)$，其中序关系 $<^*$ 定义为：当且仅当 $y < x$ 时成立，对所有 $x, y \in X$ 均如此。我们也用简写 X^* 表示这一序。

X 的**子序** 是一个集合 $Y \subseteq X$，并赋予从 X 继承的序。我们交替使用 X 的**区间** 和**凸子集** 这两个术语，指满足如下条件的子序 $I \subseteq X$：对于所有 $x, y, z \in X$，若 $x, y \in I$ 且 $x < z < y$，则 $z \in I$。

X 的一个**初始段** 是 X 的凸子集 L，并满足如下性质：若 $x < y$ 且 $y \in L$，则 $x \in L$。若集合 $R \subseteq X$ 是 X 的**末段**，则 $X \setminus R$ 是一个初始段；等价地，若 $x > y$ 且 $y \in R$，则 $x \in R$。

从线性序 X 到线性序 Y 的一个**嵌入** 是一个映射 $f : X \to Y$，满足对于所有 $x, y \in X$，$x < y$ 蕴含 $f(x) < f(y)$。我们也将嵌入称为**保序映射**。嵌入自动是单射的。一个**凸嵌入** 是一个嵌入 $f : X \to Y$，满足 $f[X]$ 在 Y 中是凸的。一个**同构** 是满射嵌入。我们写作 $f : X \xrightarrow{\sim} Y$，表示 f 是从 X 到 Y 的同构。

我们用 $X \preceq Y$ 表示存在从 X 到 Y 的嵌入，用 $X \preceq_c Y$ 表示存在从 X 到 Y 的凸嵌入，用 $X \cong Y$ 表示存在从 X 到 Y 的同构。我们用 $X \equiv Y$ 表示 $X \preceq Y$ 且 $Y \preceq X$，此时称 X 和 Y 是**等拟同构**的。一般而言，等拟同构序不一定同构。

序型是线性序的同构类。尽管本文始终讨论序而非序型，但我们通常只关心给定的序 X 在同构意义下的性质，偶尔也会将 X 与其序型混为一谈。

LO 表示所有线性序构成的类。我们强调， LO 中的元素是具体的线性序，而不是序型。我们将研究 LO上的各种运算，这些运算通常（但并非总是）在同构下保持不变，也就是说，同构的输入会产生同构的输出。这类运算也可以视为定义在序型上的运算。

良序是指满足以下条件的线性序 X： 每个非空子集 $Y \subseteq X$ 都有一个 $<_X$最小元。序数是指由集合隶属关系 $\in$良序的传递集。我们假定读者熟悉序数及其基本性质。对于序数 α 和 β，我们采用惯用记号 $\alpha < \beta$ 表示 $\alpha \in \beta$，并用 $\alpha \leq \beta$ 表示 $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$。对于序数，当且仅当 $\alpha \leqslant \beta$时有$\alpha \leq \beta$；当且仅当 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \not\leqslant \alpha$时有 $\alpha < \beta$。我们用 Ord 表示序数类，用 Lim 表示极限序数的子类。

A序列是 由序数 α 索引的集合 $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$。这种序列的长度 是 α .

照例，我们将有限序数与自然数等同起来： $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$，依此类推。我们用 ω 表示自然数集合 $\{0, 1, \ldots\}$，它也是最小无限序数。基数 是一个序数，且不与任何更小的序数存在双射。对于序数 α，我们用 $\aleph_\alpha$ 和 ω_α 来表示第 α 个无限基数。

设 X 是一个线性序，并且对每个 $x \in X$，固定一个线性序 A_x。序和$\Sigma_{x\in X} A_x$ 是有序对 $\{(x,\ a) : x \in X,\ a \in A_x\}$ 的集合，配备由字典序规则定义的序关系 $<$： 若 $x <_X y$，或 $x = y$ 且 $a <_{A_x} b$，则 $(x,\ a) < (y,\ b)$。直观地说，$\Sigma_{x\in X} A_x$ 是将每个点 $x \in X$ 替换为 A_x 的一个副本后得到的线性序。我们也将形如 $\Sigma_{x\in X} A_x$ 的序称为 X-和。

若存在一个线性序 Y，使得对每个 $x \in X$ 都有 $A_x = Y$，则将和 $\Sigma_{x\in X} Y$ 记作 $X \times Y$，并称此序为 X 与 Y 的字典序积。

若 A 和 B 是线性序，则 A 与 B 的和记作 $A + B$，是二元和 $\Sigma_{x\in 2} A_x$，其中 $A_0 = A$ 且 $A_1 = B$。直观地说， $A + B$ 是将 B 的一个副本放在 A 右侧所得的序。除同构外， $A + B$ 是唯一一个线性序，它有一个与 A 同构的初始段，其对应的末段与 B 同构。我们用 $+^*$ 表示对偶运算，其定义为 $A +^* B = B + A$。 $+$ 和 $+^*$ 合起来构成 LO 上的标准和。

这两个 和及其对偶运算在如下意义下是结合的：对所有 A、 B、 $C \in LO$，都有 e

$$\begin{aligned}(A + B) + C &\cong A + (B + C)\\ (A +^* B) +^* C &\cong A +^* (B +^* C).\end{aligned}$$

此外，这些运算具有类似和的性质：对于任意线性序 A和 B，和 $A + B$和 $A +^* B$都可以分解为两个子序，其中一个同构于 A，另一个同构于 B。在接下来的几节中，我们将研究线性序类 LO 及其子类 LO上的其他结合且类似和的二元运算 $\oplus$。

这两种标准和都不具有交换性：存在许多线性序 A和 B，使得 $A + B \ncong B + A$，因而 $B +^* A \ncong A +^* B$（即，运算 $+$和 $+^*$在同构意义下并不一致）。我们还将探讨在线性序类 LO 的子类上，是否存在结合且交换的类似和的运算。

3. 线性序的和

本节中，我们定义线性序的和 这一概念（定理 3.4）。在给出定义之前，我们先说明其范畴论方面的动机。我们假设读者对范畴论术语有基本了解，不过这仅用于本节的动机性讨论，对后文的大多数结果并无要求。

令 $\mathcal{C}_{LO}$ 表示这样一个范畴：其对象为线性序，态射为严格保序映射。

注 3.1。 由三歧性和保序条件可知，该范畴中的所有态射都是单射；若它们是满射，则为同构。

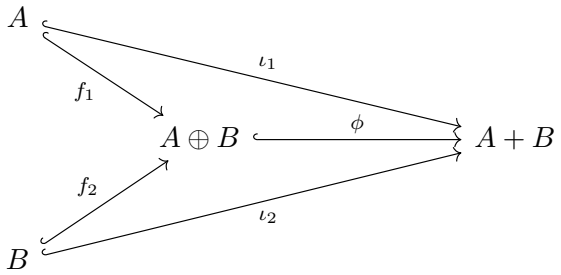
试图揭示这一范畴的性质时，一个自然的问题是：任何标准的范畴构造是否会出现。例如，我们可以问，是否存在一种自然的“相加”两个对象的概念，正如其他范畴中的余积所给出的那样。遗憾的是，情况并非如此。

定理 3.2。 $\mathcal{C}_{LO}$ 中不存在任何一对非空对象的余积。

为了证明这一定位理，我们依赖以下引理。设 A、 B 是两个非空线性序。

引理 3.3。 A 与 B 的任意余积都与 $A+B$ 同构（连同其相关嵌入）。

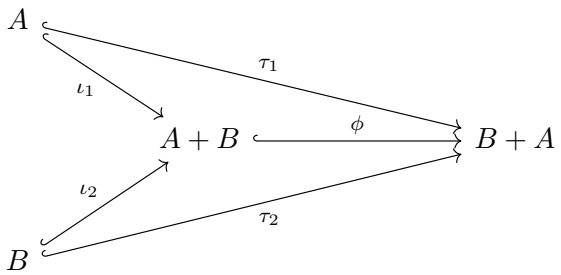
证明。 给定任意两个线性序 A、 B，设 $A \oplus B$ 是二者的余积，且 $A \overset{f_1}{\hookleftarrow}! \quad A \oplus B$、$A \overset{f_2}{\hookleftarrow}! \ A \oplus B$是相关态射。由于 $A,\ B$有态射指向它们的通常和 $A+B$，根据泛性质，存在唯一的态射 $A \oplus B \overset{\phi}{\hookleftarrow}! \quad A+B$ ，使得下图交换：



其中 $\iota_1,\ \iota_2$ 是通常的嵌入。

注意， ϕ必定是同构，因为对于任意 $x \in A+B$，要么 $x \in \iota_1(A)$，因此 $\phi(f_1(\iota_1^{-1}(x))) = x$；要么 $x \in \iota_2(B)$，且 $\phi(f_2(\iota_2^{-1}(x))) = x$。 □

3.2 的证明。令 $\iota_1, \iota_2, \tau_1, \tau_2$ 为通常的包含映射。根据引理 3.3，必定存在一个态射 ϕ ，使得下列图式交换



对于任意 $a \in A, b \in B$，必有

$$\iota_1(a) < \iota_2(b)$$

因此

$$\tau(a) = \phi(\iota_1(a)) < \phi(\iota_2(b)) = \tau_2(b)$$

这是错误的。 □

注意到引理 3.3 的证明可以原封不动地照搬，只需使用反向和 ($(A,\ B) \ \dot{+}! \quad B+A$)，而不是通常和，也可以证明这个定理。这会导致矛盾，因为通常和一般而言并不交换。

尽管这表明 $\mathcal{C}_{LO}$ 中不存在传统的范畴论的和概念，引理3.3仍指向一种可行的推广。

考虑在引理 3.3 的证明中可以替代通常和的所有运算。这些运算 $\oplus$ 满足：对于任意线性序 A和 B，都存在相关嵌入

$$A \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} A \oplus B,\ B \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} A \oplus B,$$

其像涵盖了所有的 $A \oplus B$。若进一步假设这些嵌入的像互不相交[1], ，则可得到和的另一种定义。

定义 3.4。 在 LO 上的一个和 $\oplus$ 是一条规则：给定两个线性序 A， B ，赋予一个新的线性序 $A \oplus B$ 及其相关态射

$$A \overset{e_A^{A\oplus B}}{\hookrightarrow} A \oplus B, B \overset{e_B^{A\oplus B}}{\hookrightarrow} A \oplus B,$$

使得对于任意态射 $1 \overset{p}{\leftarrow}!\quad A \oplus B$，恰有一个态射 $1 \overset{p_A}{\leftarrow}!\quad A$ 或 $1 \overset{p_B}{\leftarrow}!\quad B$，分别使得以下二者之一成立：

$$1 \xrightarrow{p_A} A \xrightarrow{e_A^{A\oplus B}} A \oplus B \qquad (p: 1 \to A \oplus B)$$

or

$$1 \xrightarrow{p_B} B \xrightarrow{e_B^{A\oplus B}} A \oplus B \qquad (p: 1 \to A \oplus B)$$

交换。

注 3.5： 为了在此定义中排除对非范畴论概念的任何引用，我们可以在以非递减映射为态射的非严格线性序范畴中进行定义。在这种情况下，单点序 1 可被视为该范畴中的终对象。

注 3.6： 和的一部分数据是相关态射 $e_A^{A\oplus B}$ 、 $e_B^{A\oplus B}$ ，就如同定义余积所需的数据的一部分，是其在任意给定实例下的相关态射一样。可以说，两个和 $\oplus_1$、 $\oplus_2$ 对于 A、 B 是同构的，当且仅当 $(A \oplus_1 B,\ e_A^{A\oplus_1 B},\ e_B^{A\oplus_1 B})$ 和 $(A \oplus_2 B,\ e_A^{A\oplus_2 B},\ e_B^{A\oplus_2 B})$ 在其对象为下列形式的图式的范畴中同构：

$$A \xrightarrow{f_A^C} C \xleftarrow{f_B^C} B$$

其中，两个分别以 C_1 和 C_2 为汇点的此类图式之间的态射，是使下图交换的态射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{LO}}(C_1, C_2)$：

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow^{f_A^{C_1}} & & \searrow^{f_A^{C_2}} & \\ & & C_1 & \xrightarrow{\varphi} & C_2 \\ & \nearrow_{f_B^{C_1}} & & \nearrow_{f_B^{C_2}} & \\ B & & & & \end{array}$$

[1]这一条件可以省略，从而得到 *collapsed sum*的定义。本文不考虑此类运算。

严格来说，如果对于所有线性序对，$\oplus_1$ 和 $\oplus_2$ 都同构，我们就称它们同构。不过，除非另有说明，我们称两个和同构，是指它们的基序始终同构，而不考虑相关嵌入。

现在我们给出和[2]的具体刻画。

命题 3.7. 任意和 $\oplus$ 都同构于一个和，其基集是不交并，即由被求和的序组成。

证明。 设 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 是两个线性序。

按如下方式定义 $A \sqcup B$ 上的序 $<^*$： $c <^* d$ 当且仅当以下条件之一成立：

(i) $c, d \in A$ 和 $c <_A d$; (ii) $c, d \in B$ 和 $c <_B d$; (iii) $c \in A, d \in B, e_A^{A\oplus B}(c) < e_B^{A\oplus B}(d)$; (iv) $d \in A, c \in B, e_B^{A\oplus B}(c) < e_A^{A\oplus B}(d)$。

与此和相关联的嵌入，就是到不交并中的包含映射。

设 $A \sqcup B \overset{\varphi}{\hookleftarrow}! \ A \oplus B$，使得对于任意 $c \in A \sqcup B$，若 $c \in A$, $\varphi(c) = e_A^{A\oplus B}(c)$，且若 $c \in B$,$\varphi(c) = e_B^{A\oplus B}(c)$。给定任意 $c \in A \oplus B$，令 $1 \overset{p}{\hookleftarrow}! \ A \oplus B$ 为选取 c 的映射。根据和的定义，不失一般性，我们可以假设只有一个态射 $1 \overset{p_A}{\hookleftarrow}! \ A$ 满足 $e_A^{A\oplus B}(p_A(0)) = p(0) = c$，那么 $\varphi(p_A(0)) = c$。因此，φ 是满射。

为了证明 $(A \sqcup B, <^*)$ 是线性序，我们检查以下公理：显然，$<^*$ 是反自反的，因为 $<_A, <_B$ 也是如此。若 $a <^* b, b <^* c$，则要么 a, b, c 全都属于 A 或 B，此时结论成立；要么还有其他六种情况需要检查。这些情况都类似，因此我们只讨论一种：若 $a, b \in A, c \in B$，则 $e_A^{A\oplus B}(a) < e_A^{A\oplus B}(b)$（因为 $e_A^{A\oplus B}$ 是一个态射），且 $e_A^{A\oplus B}(b) < e_B^{A\oplus B}(c)$，所以根据 $<$ 的传递性，$e_A^{A\oplus B}(a) < e_B^{A\oplus B}(c)$，因此 $a <^* c$。

最后，对于全序性，设 $b \not\leq^* a$，如果 a、b 属于同一个基序，我们便立即得证。不失一般性，假设 $a \in A$、$b \in B$，于是 $e_A^{A\oplus B}(a) \not<^* e_B^{A\oplus B}(b)$，我们需要证明 $e_A^{A\oplus B}(a) \neq e_B^{A\oplus B}(b)$。令 $1 \overset{p}{\hookleftarrow}! \ A \oplus B$ 为满足 $p(0) = e_A^{A\oplus B}(a)$ 的态射；由于满足 $p = e_A^{A\oplus B} \circ p_A$ 的态射 $1 \overset{p_A}{\hookleftarrow}! \ A$ 满足 $p_A(0) = a$，因此不可能有 $e_A^{A\oplus B}(a) = e_B^{A\oplus B}(b)$；否则，满足 $p = e_B^{A\oplus B} \circ p_B$ 的态射 $1 \overset{p_B}{\hookleftarrow}! \ B$（满足 $p_B(0) = b$）也会存在，但满足这些条件之一的态射恰好只有一个。既然我们已证明 $e_A^{A\oplus B}(a) \not<^* e_B^{A\oplus B}(b)$，便可得出 $e_B^{A\oplus B}(b) <^* e_A^{A\oplus B}(a)$，因此 $b <^* a$。

显然，φ 是一个态射，因为由 $a <_A b$ 和 $c <_B d$ 可知，$e_A^{A\oplus B}(a) < e_A^{A\oplus B}(b)$，且 $e_B^{A\oplus B}(c) < e_B^{A\oplus B}(d)$（分别成立）。它是满射，因此是一个同构。根据这个同构的定义，对于 A和 B，这些和是同构的。□

接下来要证明这个和的定义并非空洞，而不难看出，通常和反向和（$+$ 和 $+^*$）满足该定义。

和还有其他例子，其中许多都相当无聊。

例3.8。 考虑运算

$$A \oplus B = \begin{cases} B + A, \text{ if } A = \{0\} \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

这是一个非标准和的例子（即不同构于通常和或反向和的和）。

为了考察更有趣的和，我们通过抽象 $+$和 $+^*$的性质，提炼出和的一些合理性质。

[2]本节末尾将给出一种利用着色的替代刻画。

3.1. **和的一些合理性质**。 标准和最合理的两个性质是结合律和同构不变性。

定义 3.9. 若给定序 A、 B、 C，和 $\oplus$ 是结合的，当且仅当

$$A \oplus (B \oplus C) \cong (A \oplus B) \oplus C$$

定义 3.10. 若给定线性序 A、 A'、 B、 B'，满足 $A \cong A'$、 $B \cong B'$，则 $A \oplus B \cong A' \oplus B'$，和 $\oplus$ 称为正则的。

如上所述，标准和既是正则的，也是结合的。

例 3.11. 例3.8中的和既不结合，也不正则。我们有：

$$\{1\} \oplus \mathbb{Q} = \{1\} + \mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q} + \{0\} = \{0\} \oplus \mathbb{Q} \text{ (not regular);}$$

$$\{0\} \oplus (\{0\} \oplus \mathbb{Q}) = \{0\} + (\{0\} + \mathbb{Q}) \ncong (\{0\} + \{0\}) + \mathbb{Q} = (\{0\} \oplus \{0\}) \oplus \mathbb{Q} \text{ (not associative)}$$

（不满足结合律）。想到并非正则的和，实在令人头晕，因为通常和本身也是定义到同构为止的！如果你不认同，不妨试着定义一个非正则的结合和。

例3.12. 我们可以稍微调整前面的和，构造一个正则但不满足结合律的和。考虑

$$A \oplus B = \begin{cases} B + A, \text{ if } A \cong 1 \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

例 3.13. 一个更合理的正则但不满足结合律的和的例子是

$$A \oplus B = \begin{cases} n + A + B', \text{ if } B \cong n + B' \text{ for some } B' \text{ with no least element and } n \in \omega \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

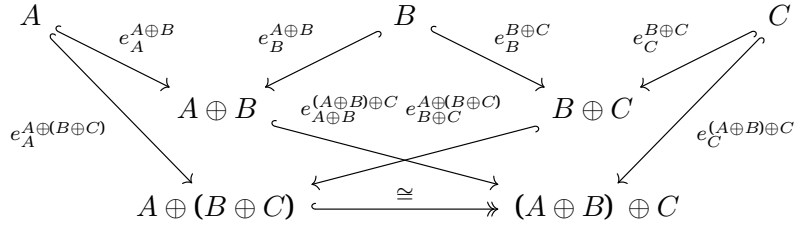
例如，取 $A = \mathbb{Q}$ 时，这不满足结合律：

$$(A \oplus \omega) \oplus n \cong n + (A + \omega) \ncong A + \omega \cong A \oplus (\omega \oplus n).$$

这里的问题在于， ω 会吸收 n。

本文最初的目标是在不涉及标准和具体结构的前提下，证明标准和的一个刻画。为此，我们提出了结合律的一种加强形式，称为追踪点。

定义 3.14。 如果对于任意三个线性序 A、 B、 C，都存在一个诱导同构，使得下图交换，则称和 $\oplus$ 跟踪点：



通常的和与反向和都是追踪点的和。追踪点的和在非常强的意义上具有结合性。

命题 3.15. 若 $\oplus$ 是一个追踪点的正则结合和，并且对于所有线性序A、 $A \oplus 1 \cong A + 1$ 和 $1 \oplus A \cong 1 + A$，则 $\oplus$ 同构于通常和。若 $A \oplus 1 \cong 1 + A$ 和 $1 \oplus A \cong A + 1$，则反向和也有类似的刻画。

证明。 考虑 A， $B \in LO$。若 B 有左端点，则 $B \cong 1 + B'$，因此

$$A \oplus B \cong A \oplus (1 + B') \cong A \oplus (1 \oplus B') \cong (A \oplus 1) \oplus B' \cong (A + 1) \oplus B' \cong A + B,$$

其中最后一步是通过点追踪得出的，因为 B' 中的所有元素都必须位于序 $A \oplus B$ 中$0 \in 1$ 的副本之后（这需要稍微进行一下图追逐）。

另一方面，如果 B 没有左端点，那么对于任意的 $b \in B$，若 $B_{<b} = \{x \in B \mid x < b\}$，$B_{\geq b} = \{x \in B \mid x \geq b\}$，则有

$$A \oplus B = A \oplus (B_{<b} + B_{\geq b}) \cong A \oplus (B_{<b} \oplus B_{\geq b}) \cong (A \oplus B_{<b}) \oplus B_{\geq b} \cong (A \oplus B_{<b}) + B_{\geq b}$$

因此， b 在 $A \oplus B$ 中位于 A 的所有元素之后；但是，由于 b 是任意的，这意味着$e_B^{A \oplus B}$ （B）中的所有元素都在 $A \oplus B$中位于$e_A^{A \oplus B}$ （A）之后，因此嵌入条件推出 $A \oplus B \cong A + B$。□

证明了这个定理之后，我们曾希望能够证明标准和是唯一的正则结合和。点追踪似乎是正则结合和普遍具有的性质，点的位置条件也是如此。

这两个假设通常都不成立；我们将在第 6 节重新讨论点追踪。现在，我们尝试打破后一个假设。为了尽量不偏离熟悉的结构，假设我们希望这个和尽可能接近通常和，但带有 $A \oplus 1 \cong 1 + A$，这会导向什么?

例 3.16。定义 $\oplus_0$ 为

$$A \oplus_0 B = \begin{cases} 1 + A + B', \text{ if } B \cong 1 + B' \text{ for some } B' \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

这个和是正则的，但不满足结合律，例如，

$$(\mathbb{Q} \oplus_0 \omega) \oplus_0 1 \cong 2 + \mathbb{Q} + \omega \ncong 1 + \mathbb{Q} + \omega \cong \mathbb{Q} \oplus_0 (\omega \oplus_0 1)$$

与例 3.13 一样，这里的问题在于， ω 可以在结合时吸收一个点。接下来我们将尝试缓解这个问题，并像处理例 3.13 中的有限序数那样处理 ω。

Let

$$A \oplus_1 B = \begin{cases} n + A + B', \text{ if } B \cong n + B' \text{ for some } B' \text{ with no least element and } n \in \omega \\ \omega + A + B', \text{ if } B \cong \omega + B' \text{ for some } B' \text{ with no least element} \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

但再次出现了结合律失效的情况：与一个更大的序数结合后，它又吸收了 ω （以及任何 n）：

$$(\mathbb{Q} \oplus_1 \omega \cdot \omega) \oplus_1 \omega = \omega + \mathbb{Q} + \omega \cdot \omega \ncong \mathbb{Q} + \omega \cdot \omega \cong \mathbb{Q} \oplus_1 (\omega \cdot \omega \oplus_1 \omega)$$

注意到这里的模式（无论我们将多大的序数 τ 移到左边，总能找到一个更大的序数，例如 $\tau \cdot \omega$，将其吸收，从而得到一个结合律的反例），于是我们令

$$A \oplus_2 B = \begin{cases} \tau + A + B', \text{ 如果 } B \cong \tau + B' \text{ 对 } B' \text{ 对 } \tau \in Ord \text{ 对} \\ A + B \end{cases}$$

于某个没有最小元的对象成立，则，否则

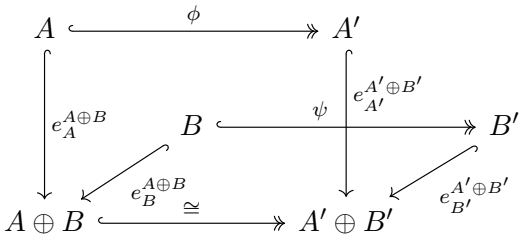
注意， B' 没有最小元这一条件对于消除歧义是必要的。

利用序数的末段仍是序数，以及序数对以序数为指标的通常和封闭这一事实，可以直接验证这个非标准和是正则且结合的。注意， $\oplus_2$ 也会追踪点。

从现在起，我们将 $\oplus_2$ 记作 $+_w$。

我们继续抽象掉标准和的合理性质，现在进一步加强正则性。

定义 3.17. 若给定序 A, A', B, B' 及同构$\phi: A \xrightarrow{\sim} A', \psi: B \xrightarrow{\sim} B'$，存在一个诱导同构使下图交换，则和 $\oplus$称为规范正则：



通常和与反向和都是规范正则的；事实上，$+_w$ 也是如此，因为良序在同构下保持不变。

不规范正则的和的例子则更为丰富多变。

例 3.18. 考虑

$$A \oplus B = \begin{cases} (-\infty, 0] + B + (0, \infty), \text{ if } A \cong \mathbb{R} \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

这个和是正则的，但不是规范正则的。注意，对于任意的 $B, \varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ 使得$x \mapsto x + 1$是一个序自同构，而 B 上的恒等映射也是如此。尽管如此，诱导映射 $\gamma: \mathbb{R} \oplus B \to \mathbb{R} \oplus B$ 甚至不是一个态射，因为对于任意的 $b \in B, 0 < b$ 属于 $\mathbb{R} \oplus B$，但$\gamma(0) = 1 > \gamma(b) = b$。

在某种意义上，非规范正则的和必然会以某种显眼的方式洗牌各点。自然会有人问，是否存在非标准的正则结合和。第 6 节将给出肯定的回答。

为了结束对基本性质的讨论，我们将和与标准和的接近程度形式化。

定义 3.19。 设 $\oplus$ 是一个和，线性序 X 是

(i) 右、左标准 （相对于 $\oplus$），如果对于每个序 $A, X \oplus A \cong X + A, A \oplus X \cong A + X$（分别如此）；(ii) 右*、左*标准 （相对于 $\oplus$），如果对于每个序 $A, X \oplus A \cong A + X, A \oplus X \cong X + A$（分别如此）；(iii) 标准，如果它总是右标准且左标准，或右*标准且左*标准。

命题 3.20。 如果 $\oplus$ 是正则且结合的，并且1 是（右、左、右*、左*）标准的，那么每个有限序都是（右、左、右*、左*）标准的。

证明。 根据命题 3.7 并考察基数，在有限序上，所有的和在同构意义下都与通常的和一致。

我们将证明所有有限序都是右标准的，其他情形的证明完全类似。令 n 为满足以下条件的最小值：对某个 A 有 $A \oplus n \ncong A + n$。如果 $n > 1$，那么 $A \oplus n \cong A \oplus (n - 1 \oplus \{n - 1\}) \cong (A \oplus (n - 1)) \oplus \{n - 1\} \cong (A + (n - 1)) \oplus \{n - 1\} \cong A + n$。但这与 n 的极小性矛盾，因此 n 必须为 1；然而根据假设，1 是右标准的。□

3.2. **半标准和**。

定义 3.21。 若对于任意序 A, B, 其像 $e_A^{A\oplus B}(A)$ 和 $e_B^{A\oplus B}(B)$ 在 $A\oplus B$ 中都是凸的，则称和 $\oplus$ 是半标准的 。

注 3.22。 等价地，若对于任意线性序 A, B, $\oplus$ 要么满足 $A\oplus B\cong A+B$，要么满足 $A\oplus B\cong B+A$，则称其为半标准。

我们将证明，正则、结合的半标准和就是标准和。为此，我们引入一个关键结果——区分引理。该引理的证明用到了 Lindenbaum [6]提出的一个重要定理。

定理 3.23 (基本定理)。 若 X, Y 是线性序， X 同构于 Y 的一个初始段，且 Y 同构于 X 的一个末段，则 $X\cong Y$。

这个定理可以看作是将 Schr¨oder–Bernstein 定理应用于线性序的一个版本。事实上，Schr¨oder–Bernstein 定理的证明所给出的 X 与 Y 之间的双射，实际上将是线性序之间的同构。

引理 3.24 (区分)。 给定任意一组线性序 $\mathfrak{C}$，存在一个线性序 $X_{\mathfrak{C}}$，使得对于 $\mathfrak{C}$ 的任意（可能为空的）有限和 A, B, C, D，以及任意同构$f\colon A+X_{\mathfrak{C}}+B\xrightarrow{\sim} C+X_{\mathfrak{C}}+D$, $f(X_{\mathfrak{C}})=X_{\mathfrak{C}}$, $f(A)=C$, $f(B)=D$。事实上， $X_{\mathfrak{C}}$ 只取决于 $\mathfrak{C}$ 中元素基数的上确界。

此外， $X_{\mathfrak{C}}$ 的任意非空真初始段 I 都可以延伸为一个更长且与其同构的初始段。

证明。 设 $\kappa=\max\{\aleph_0, \sup_{L\in\mathfrak{C}}|L|\}$。令 $X_{\mathfrak{C}}$ 为 $(2^\kappa, <_{\mathrm{lex}})$ 的子序，由那些不最终为常值的序列组成。注意， $X_{\mathfrak{C}}$ 没有端点且是 2^κ-稠密的，因为任意两点之间都有一个与它自身同构的副本。

设 A, B是由 $\mathfrak{C}$和 f的元素构成的有限和： $A+X_{\mathfrak{C}}+B\xrightarrow{\sim} C+X_{\mathfrak{C}}+D$是一个同构。由于 $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|\le\kappa<2^\kappa$，若 $f(X_{\mathfrak{C}})\cap D\neq\emptyset$，则由 $|D|\ge|f(X_{\mathfrak{C}})\cap D|=|f(X_{\mathfrak{C}})|=2^\kappa$可得矛盾，因为 $f(X_{\mathfrak{C}})\cap D$必定同构于 $X_{\mathfrak{C}}$的一个区间；类似地，若 $f(X_{\mathfrak{C}})\cap C\neq\emptyset$，因此 $f(X_{\mathfrak{C}})=X_{\mathfrak{C}}$。

设 $I\subseteq X_{\mathfrak{C}}$ 是一个非空的真初始段。

若 $r\in 2^{<\kappa}$，注意到 $I_r=\{\alpha\in X_{\mathfrak{C}}\mid \alpha\restriction\mathrm{dom}(r)=r\}\cong X_{\mathfrak{C}}$，通过同构 $g: X_{\mathfrak{C}}\xrightarrow{\sim} I_r$，使得 $g(\alpha)=s^\frown\alpha$。若 L_r, R_r 分别是小于和大于I_r中所有点的点所构成的片段，则

$$X_{\mathfrak{C}}\cong L_r+I_r+R_r.$$

根据基本定理，$I_r+R_r\cong X_{\mathfrak{C}}\cong L_r+I_r$。

由于（2^κ, $<_{\mathrm{lex}}$）是完备的，令 $\alpha\in 2^\kappa$ 为 I 的上确界。令 r, $s\in 2^{<\kappa}$ 满足$I_r<\alpha<I_s$；这总是可行的，因为 $\alpha\neq(0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots)$, $(1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots)$，已知 I 非空且严格。如果 M 是 I_r 和 I_s之间的段，

$$X_{\mathfrak{C}}\cong L_r+I_r+M+I_s+R_s,$$

因此根据上述内容， $X\cong X+M+X$。

迭代这个恒等映射，我们得到

$$X\cong L+\cdots+M_{-1}+X_{-1}+M_0+X_0+M_1+X_1+\cdots+R,$$

其中对任意 $i\in\mathbb{Z}$、 $M_i\cong M$ 和 $X_i\cong X$。此外，若 $h\colon X\xrightarrow{\sim} L+\cdots+M_{-1}+X_{-1}+M_0+X_0+M_1+X_1+\cdots+R$ 满足与 α 对应的切口属于 M_0。考虑这个自同构

$l\colon L+\cdots+M_{-1}+X_{-1}+M_0+X_0+M_1+X_1+\cdots+R\xrightarrow{\sim} L+\cdots+M_{-1}+X_{-1}+M_0+X_0+M_1+X_1+\cdots+R$使得 l 在 L 和 R上均为恒等映射，并且对所有 $i\in\mathbb{Z}$， $l(M_i)=M_{i+1}$ 和 $l(X_i)=X_{i+1}$。

令 $I' = (h^{-1} \circ l \circ h)(I)$。这是一个与 I 同构的初始段，而 I 比它更长。 □

注记 3.25。 实际上，在洗牌不易察觉的情形中，区分引理可以像点追踪的全局版本一样使用。

任何一致性次数较小的半标准和实际上都是完全标准的。这个结果将表征标准和：它们正是正则、结合且半标准的和。

引理 3.26。 假设 $\oplus$ 是一个正则、结合的半标准和，其序是左标准（左*标准），那么 $\oplus$ 就是通常的（逆序）和。

证明。 设 A 是左标准的，且 B、 C 任意，考虑 $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$。若 $W \in \{B, B \oplus C\}$,

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (W \oplus A) \cong X_{\mathfrak{C}} \oplus (W + A) \cong \begin{cases} X_{\mathfrak{C}} + W + A, \\ W + A + X_{\mathfrak{C}} \end{cases}$$

这必须同余于

$$(X_{\mathfrak{C}} \oplus W) \oplus A \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus W) + A \cong \begin{cases} X_{\mathfrak{C}} + W + A, \\ W + X_{\mathfrak{C}} + A \end{cases}$$

因此，这两者都必须等于 $X_{\mathfrak{C}} + W + A$，从而有 $X_{\mathfrak{C}} \oplus W \cong X_{\mathfrak{C}} + W$。利用这一点，我们证明 $B \oplus C \cong B + C$。

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (B \oplus C) \cong X_{\mathfrak{C}} + (B \oplus C) \cong \begin{cases} X_{\mathfrak{C}} + B + C, \\ X_{\mathfrak{C}} + C + B \end{cases}$$

and,

$$(X_{\mathfrak{C}} \oplus B) \oplus C \cong (X_{\mathfrak{C}} + B) \oplus C \cong \begin{cases} X_{\mathfrak{C}} + B + C, \\ C + X_{\mathfrak{C}} + B \end{cases}$$

唯一自洽的情形是这两者都与 $X_{\mathfrak{C}} + B + C$ 同构，因此我们有 $B \oplus C \cong B + C$。□

因此，为了证明任意正则、结合的半标准和都与通常和或反向和同构，我们可以利用必然存在相对于我们的和的非标准序这一事实，通过反证法进行证明。

定理 3.27。 如果 $\oplus$ 是一个正则、结合的半标准和，那么它与通常和或反向和之一同构。

证明。 设 X 是任意一个非空序。反设 $\oplus$ 不是标准的。根据引理 3.26，必然存在一个序 A，使得

$$A \oplus X \cong A + X \ncong X + A.$$

还必须存在一个序 B 使得

$$X \oplus B \cong B + X \ncong X + B.$$

令 $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$。我们断言以下两个恒等式成立：

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus A \cong X_{\mathfrak{C}} + A, \quad X_{\mathfrak{C}} \oplus (A + X) \cong X_{\mathfrak{C}} + A + X.$$

事实上，根据结合律，我们有

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (A \oplus X) \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus A) \oplus X.$$

由于 $A \oplus X \cong A + X$，左边的和有两种可能，右边的和有四种可能。对于左边，$X_{\mathfrak{C}} \oplus (A \oplus X)$ 要么是 $X_{\mathfrak{C}} + A + X$，要么是 $A + X + X_{\mathfrak{C}}$。无论哪种情况，$X_{\mathfrak{C}}$ 都会出现在和的一侧。这排除了右边其中两种可能，因为在这两种情况下，$X_{\mathfrak{C}}$ 都出现在中间。右边的和剩下两种可能：$X_{\mathfrak{C}} + A + X$ 和 $X + A + X_{\mathfrak{C}}$。

现在注意，在左侧的和与右侧的和之间，四种可能的对应方式中，唯一不产生矛盾的一种是两者都是 $X_{\mathfrak{C}} + A + X$（这里我们使用 $A + X \ncong X + A$）。由此可得

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (A + X) \cong X_{\mathfrak{C}} + A + X \quad \text{and} \quad X_{\mathfrak{C}} \oplus A \cong X_{\mathfrak{C}} + A,$$

如所声称的那样。

用类似的论证，我们可以证明

$$B \oplus X_{\mathfrak{C}} \cong X_{\mathfrak{C}} + B, \quad (B + X) \oplus X_{\mathfrak{C}} \cong X_{\mathfrak{C}} + B + X.$$

现在考虑这个和

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus A \oplus X \oplus B \oplus X_{\mathfrak{C}}.$$

证明的其余部分可以概括为以不同方式结合这个和，直到得到矛盾。下面是一种可能的方法：考虑，

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (A \oplus X \oplus B) \oplus X_{\mathfrak{C}} \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus A \oplus X) \oplus (B \oplus X_{\mathfrak{C}}).$$

对于左边的和，我们最终得到以下某一种形式的和：

$$X_{\mathfrak{C}} + (\cdots) + X_{\mathfrak{C}}, \quad X_{\mathfrak{C}} + X_{\mathfrak{C}} + (\cdots), \quad (\cdots) + X_{\mathfrak{C}} + X_{\mathfrak{C}}.$$

对于右边的和，利用上述结果，我们最终得到如下形式的和：

$$X_{\mathfrak{C}} + (\cdots) + X_{\mathfrak{C}} + (\cdots),$$

这在每种情况下都会导出一个矛盾。

□

在实现了最初刻画标准和的目标后，我们现在转而研究构造非标准正则结合和的不同方法及其性质。最终，我们将获得足够的工具来证明，第3.1节中的所有合理性质都无法由正则性和结合律推出。

3.3. **乘积双色着色**。作为引言的收尾，我们给出一种以更具体方式刻画和的替代方法。

给定一个和 $\oplus$，定义规则 $P_{\oplus}$，它接收两个线性序，并按如下方式在它们的乘积上输出一个双色着色：给定 $A, B \in LO$，令 $P_{\oplus}(A, B) = p_{A \oplus B} \colon A \times B \to \{0,1\}$，使得：

$$p_{A \oplus B}(a,b) = \begin{cases} 1, \text{ if } e_A^{A \oplus B}(a) < e_B^{A \oplus B}(b) \\ 0, \text{ else} \end{cases}$$

称这样的规则为该和的关联乘积双色着色。一般来说：

定义 3.28。乘积双色着色是一个规则 P，它接收两个线性序，并在它们的乘积上输出一个双色着色；对于给定的 $A, B \in LO$，若 $P(A, B) = p \colon A \times B \to \{0,1\}$，则对所有 $a, a' \in A, b, b' \in B$

(i) 若 $b < b'$，则 $p(a, b) \leq p(a, b')$；
(ii) 若 $a' < a$，则 $p(a, b) \leq p(a', b)$。

命题 3.29. 给定任意乘积双色着色 P，存在一个和 $\oplus_P$，其关联乘积双色着色为 P。

证明. 给定两个线性序 A, B，在不交并 $A \sqcup B$ 上定义 $<_{\oplus_P}$：令其分别遵循 A 和 B 上的序；若 $a \in A, b \in B$，则当且仅当对于 $p = P$，(A, B)，$p(a, b) = 1$ 时，令 $a <_{\oplus_P} b$；否则令 $b <_{\oplus_P} a$。令嵌入为不交并嵌入。

我们证明这确实定义了一个良定义的线性序。它是一个和这一点可由基序上的序关系得到保留立即推出。

显然，它是反自反且连通的。如果三个元素属于同一个序，传递性也显而易见。设 $a, a' \in A, b, b' \in B$:

若 $a' <_{\oplus_P} a, a <_{\oplus_P} b$，则由条件（ii），$1 = p(a, b) \leq p(a', b)$，因此 $p(a', b) = 1$ and$a' <_{\oplus_P} b$。另一种情况完全类似。若 $a' <_{\oplus_P} b, b <_{\oplus_P} a$，则 $p(a', b) = 1$and $p(a, b) = 0$，所以不可能有 $a \leq a'$，因此 $a' <_{\oplus_P} a$。

若 $b <_{\oplus_P} a, a <_{\oplus_P} b'$，则 $p(a, b) = 0, p(a, b') = 1$，因此根据条件 (i)，不可能有 $b' \leq b$，所以 $b <_{\oplus_P} b'$。类似地，若 $b <_{\oplus_P} b', b' <_{\oplus_P} a$，则 $p(a, b') = 0$，因此 $p(a, b) = 0$ 也成立，所以 $b <_{\oplus_P} a$。□

4. 和生成类

本节首先考察模拟 $+_w$ 结构的正则结合和。在定理 4.9 中，我们将证明，这些和正是由所谓的和生成类所产生的。在第 4.1 节中，我们将说明如何利用和生成类的滤子，得到具有类似黑森堡和性质的和。这些类因其代数性质而具有独立的研究价值，我们将在第 4.2 节中探讨这些性质。

例 4.1。 称线性序 B 是初始稠密的，如果它的任意初始段都包含一个稠密子序。这个和

$$A +_s B = \begin{cases} B_s + A + B', \text{ if } B \cong B_s + B' \text{ for some } B' \text{ initially dense and } B_s \text{ scattered} \\ A + B, \text{ else} \end{cases}$$

根据与 $+_w$ 相同的论证，它是正则且结合的。

此外，我们也可以将两个加项的初始段分别分离出来，再以不同方式组合。

例 4.2。 考虑正则结合和 $\oplus$，使得
$A \oplus B = \alpha + \beta + A' + B'$，如果 $A \cong \alpha + A'$，$B \cong \beta + B'$ 对于 α，β 最长的良序初始段。

关于 $+_w$ 的另一种变体如下。令 # 表示良序[3]上的黑森堡和。

例 4.3。 给定线性序 A、B，使得 A、$B \cong \gamma + A'$、$\tau + B'$ 对于 A'、B' 没有最小元，且 γ、$\tau \in Ord$,

$$A +_h B = \tau \# \gamma + A' + B'$$

是正则结合和。

诸如良序和散乱序之类的类，通过分离最长初始段来产生和，具有很强的通用性，可以由它们构造出各种不同的和。在本节中，我们将刻画这类序。

我们首先刻画产生诸如 $+_s$ 和 $+_w$ 这样的和的序类 $\mathcal{C}$，也就是说，刻画如下形式的正则结合和

[3]有关这一运算的详细引言，请参阅第 5.1 节

$$A \oplus_{\mathcal{C}} B = \begin{cases} \beta + A + B', \text{ if } B \cong \beta + B' \text{ for the longest } \beta \in \mathcal{C} \\ A + B, \text{ else} \end{cases} \tag{1}$$

备注 4.4。请注意，要使这种形式的和定义良好，其含义之一是：每个线性序 B 都必须在 $\mathcal{C}$ 中有一个（可能为空的）最长初始段。

以下定义将给出我们的刻画。

定义 4.5。线性序的一个类 $\mathcal{C}$ 若满足以下条件，则称为左和生成（即左 *SGC*）：

(i) $\mathcal{C}$ 在同构下封闭；(ii) $A + B \in \mathcal{C}$ 蕴含 $B \in \mathcal{C}$；(iii) 若对所有 $\alpha < \beta$，都有 $A_\alpha \in \mathcal{C}$，则 $\sum_{\alpha<\beta} A_\alpha \in \mathcal{C}$。

当然，也有一个相应的右侧定义。

定义 4.6。线性序的一个类 $\mathcal{C}$ 若满足以下条件，则称为右和生成（即右 *SGC*）：

(i) $\mathcal{C}$ 在同构下封闭；(ii) $A + B \in \mathcal{C}$ 蕴含 $A \in \mathcal{C}$；(iii) 若对所有 $\alpha < \beta$均有 $A_\alpha \in \mathcal{C}$，则 $\sum_{\alpha<\beta^*} A_\alpha \in \mathcal{C}$。

注4.7。给定一个左 SGC $\mathcal{C}$，存在一个互补右和生成类 $\mathcal{C}^\perp$，由 $A \in \mathcal{C}^\perp$定义，当且仅当 A 的每个非空初始段都不属于 $\mathcal{C}$。同样，我们也可以通过使用末段来定义右和生成类上的补运算。

对于任意 SGC $\mathcal{C}$，补运算的表现符合预期，即 $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$。考虑 $\mathcal{C}$ 为左和生成类的情形，此时 $A \in (\mathcal{C}^\perp)^\perp$ 当且仅当 A 没有属于 $\mathcal{C}^\perp$ 的非空末段，当且仅当 A 的每个非空末段都有一个属于 $\mathcal{C}$的非空初始段。利用对序数和及末段的封闭性，我们得到 $A \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $A \in (\mathcal{C}^\perp)^\perp$。右和生成类的情形完全类似。

我们也可以给出一个等价的 SGC 定义，这将有助于证明其主要刻画。

命题 4.8。若 $\mathcal{C}$ 满足定义 *4.5* 中的条件 *(i)* 和 *(ii)*，则以下各项等价：

(1) $\mathcal{C}$ 是左 *SGC*；(2) (i) 对于任意的 A、$B \in \mathcal{C}$、$A + B \in \mathcal{C}$；(ii) 若 $A_0 \preceq A_1 \preceq \ldots$ 是由 $\mathcal{C}$ 中元素构成的任意长度的序列，且对于任意嵌入 φ_α^β：$A_\alpha \hookrightarrow_! A_\beta$, $\varphi_\alpha^\beta(A_\alpha)$ 都是 A_β 的初始段，则该序列的直接极限属于 $\mathcal{C}$（对右极限封闭）。

对于右 *SGC*，关于末段的极限也有类似的等价关系（对左极限封闭）[4]。

证明。($\Rightarrow$) 对于 2.(i)，考虑一个长度为 $\beta = 2$ 的序列，并使用定义 4.5 中的 (iii)。2.(ii) 可由对元素序列长度的归纳法得到。

基例是显然的。如果序列的长度为 $\alpha + 1$，那么极限为 $A_\alpha \in \mathcal{C}$。如果序列的长度为 $\lambda \in Lim - \{0\}$，对于任意 $\alpha < \lambda$，定义

$$B_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} \varphi_\beta^\alpha(A_\beta),$$

[4]本节我们将重点讨论左和生成类；对于右和生成类，证明和构造完全类似。

根据条件（ii），这些序在 $\mathcal{C}$ 中。注意到

$$\lim_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \sum_{\alpha<\lambda} B_\alpha.$$

(⇐) 由归纳法可得。基例同样显然，后继步骤则由 2.(i) 与归纳假设推出。若 $\lambda \in Lim-0$，令 A'_α 为部分和序列

$$A'_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} A_\beta$$

其嵌 入映射就是包含映射。取它们的极限，即得到完全和 . □

最后，我们来到这一刻画——赋予 SGC 其名称的定理。

定理 4.9。 类 $\mathcal{C}$ 是左和生成的，当且仅当 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 是形如(1)的正则结合和。

证明。 (⇒) 首先，我们证明 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 定义良好。

给定任意线性序 B，如果 B 在 $\mathcal{C}$中没有初始段，则结论成立；否则，令

$$I = \{\beta \in \mathcal{P}(B) \mid \beta \text{ is an initial segment of } B, \beta \in \mathcal{C}\},$$

那么根据条件 2.(ii)， I 的并集属于 $\mathcal{C}$，并且是 B 在 $\mathcal{C}$中的最大初始段。形式上，任取 $A_0 \in \beta$，并归纳地，给定 A_α，令 $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \in I$ （如果 I中存在这样的元素）。在极限阶段 λ，令 $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$。这便得到一个形如 2.(ii) 中的序列 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$，其直接极限为 $\bigcup I$。

根据条件 (i)，该和是正则的。这很容易验证，例如，设 $f\colon\ B\ !\ \ C$ 是一个同构；若将 B 分解为 $\beta + B'$，并将 C 分解为 $\gamma + C'$，我们断言 $f(\beta) = \gamma$。显然，根据条件 (i)， $f(\beta) \in \mathcal{C}$，因此 $f(\beta) \subseteq \gamma$；但 $f^{-1}(\gamma) \in \mathcal{C}$且也是一个初始段，所以 $f^{-1}(\gamma) \subseteq \beta$，因此$\gamma \subseteq f(\beta)$，从而 $f(B') = C'$。

关于结合律，设 $A \cong \alpha + A'$, $B \cong \beta + B'$, $C \cong \gamma + C'$:

$$(A \oplus_{\mathcal{C}} B) \oplus_{\mathcal{C}} C \cong (\beta + \alpha + A' + B') \oplus_{\mathcal{C}} C \cong \gamma + \beta + \alpha + A' + B' + C' \tag{2}$$

此外:

$$A \oplus_{\mathcal{C}} (B \oplus_{\mathcal{C}} C) \cong A \oplus_{\mathcal{C}} (\gamma + \beta + B' + C') \tag{3}$$

现在，我们必须验证 $\gamma + \beta + B' + C'$ 的最长初始段确实是 $\gamma + \beta$.$\gamma + \beta \in \mathcal{C}$，因此最长初始段必须包含 $\gamma + \beta$。设它为 $\gamma + \beta + \theta_B + \theta_C$，其中 θ_B,θ_C 分别是 B' 和 C' 的片段，并且 θ_B 和 θ_C 都允许为空序。注意， θ_C 必须确实为空，因为根据条件（ii），$(\gamma + \beta + \theta_B) + \theta_C \in \mathcal{C}$ 意味着 $\theta_C \in \mathcal{C}$。但我们可以再次对 $(\gamma + \beta) + \theta_B$ 应用条件（ii），得到 $\theta_B \in \mathcal{C}$，因此它也必须为空。

因此 (2) ≅ (3)。

(⇐) 对于这一方向，我们需要某种方法来追踪 B 的每个段在和中对应到哪里。我们使用区分引理。

首先证明 (i) 对 $\mathcal{C}$ 成立。设 $\beta \in \mathcal{C}, \beta \cong \beta'$，并令 $\mathfrak{C} = (\{\beta\} \cup \mathcal{P}(\beta')) - \{\emptyset\}$ （其中子集按子序排列），从而得到引理 3.24 中的 $X_{\mathfrak{C}}$。由正则性，存在一个同构 $f\colon X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta \xrightarrow{\sim}! \ X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta'$；又由于 $X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta = \beta + X_{\mathfrak{C}}$, $X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta' \cong \varepsilon + X_{\mathfrak{C}} + \delta$，其中 ε 是 β' 在 $\mathcal{C}$ 中的最长初始段，且 $\beta' \cong \varepsilon + \delta$。由区分引理， $f(\delta) = \emptyset$ 且 $f(\varepsilon) \cong \beta$，因此 $\beta' = \varepsilon$，并且我们必须有 $\beta' \in \mathcal{C}$，才能使 $X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta' = \beta' + X_{\mathfrak{C}}$。

2.(ii) 由 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 的定义良好性可得。设 $A_0 \preceq A_1 \preceq \ldots$ 是 $\mathcal{C}$ 中一列具有 2.(ii) 所述类型的元素，考虑其直接极限 A。每个 A_i 都与一个初始段同构

A，因此存在 A 的一列共尾初始段，它们都属于 $\mathcal{C}$。于是，为了使 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 定义良好，我们必须有 A 本身属于 $\mathcal{C}$。

2.(i) 需要稍微调整一下符号。

设 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$，令 $\mathfrak{C} = (\mathcal{P}(\alpha) \cup \mathcal{P}(\beta)) - \{\emptyset\}$。

$$\alpha + \beta + X_{\mathfrak{C}} = (X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta) \oplus_{\mathcal{C}} \alpha \cong X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\beta \oplus_{\mathcal{C}} \alpha) = X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\alpha + \beta) \cong \varepsilon + X_{\mathfrak{C}} + \delta$$

其中，$\varepsilon + \delta \cong \alpha + \beta$($\varepsilon$ 是 $\mathcal{C}$ 中 $\alpha + \beta$ 的最长初始段。由区分引理，$\delta = \emptyset$ 和 $\alpha + \beta \cong \epsilon \in \mathcal{C}$，因此由 (i) 得 $\alpha + \beta \in \mathcal{C}$。

对于 (ii)，设 $\alpha + \beta \in \mathcal{C}$。令 $\bar{\mathfrak{C}} = (\mathcal{P}(\alpha) \cup \mathcal{P}(\beta)) - \{\emptyset\}$，我们要证明 $\beta \in \mathcal{C}$。一个[S]假设 $\alpha \in \mathcal{C}$，那么如果 $\beta \cong \bar{\beta} + \beta'$，其中 $\bar{\beta}$ 是 $\mathcal{C}$中 β 的最长初始段，

$$\alpha + \bar{\beta} + X_{\mathfrak{C}} + \beta' \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} \beta) \oplus_{\mathcal{C}} \alpha \cong X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\beta \oplus_{\mathcal{C}} \alpha) = X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\alpha + \beta) = \alpha + \beta + X_{\mathfrak{C}}$$

[¯]因此，$\beta' = \emptyset$ 和 $\beta = \bar{\beta} \in \mathcal{C}$。

若 $\alpha \notin \mathcal{C}$，考虑其在 $\mathcal{C}$中的最长初始段，记作 $\alpha \cong \bar{\alpha} + \alpha'$。根据上述 $\alpha' + \beta \in \mathcal{C}$，因此[¯]我们可以假设 $\mathcal{C}$ 中不含 α 的任何初始段。再设$\beta \cong \bar{\beta} + \beta'$ 是任意一个满足[¯]$\beta \in \mathcal{C}$ 的分解，但 $\mathcal{C}$中不含 β' 的任何初始段，则

$$\alpha + \beta + X_{\mathfrak{C}} \cong X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} ((\alpha + \bar{\beta}) \oplus_{\mathcal{C}} \beta') \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\alpha + \bar{\beta})) \oplus_{\mathcal{C}} \beta' \cong (X_{\mathfrak{C}} \oplus_{\mathcal{C}} (\alpha + \bar{\beta})) + \beta'$$

[¯]这说明，由于 β' 将始终位于 $X_{\mathfrak{C}}$的右侧，我们必有 $\beta' = \emptyset$，因此 $\beta = \bar{\beta} \in \mathcal{C}$，结论得证。□

注4.10。与（1）中给出的和不同，另一种和取一个右 SGC $\mathcal{C}$，并分离出右侧加项的最长末段。上述刻画同样成立。

注意，这个和与左 SGC $\mathcal{C}^{\perp}$ 所得到的 (1) 相同。

(1) 中的和称为由 $\mathcal{C}$ 生成的简单和。

简单和可以生成各种不同的非标准和。设 L 是任意非空线性序，令 $\mathcal{C} = \langle L \rangle$ 为由 L 生成的左 SGC。由 $\mathcal{C}$ 生成的简单和将是一个非标准的正则结合和。

标准和也是简单和的例子。通常和是由 $\{\emptyset\}$ 生成的简单和，而反向和则由 LO 生成。

简单和具有非常良好的性质；我们将在 4.2 中证明，它们都是规范正则的。它们还会在正规嵌入下追踪点。根据点追踪的定义，这一点可以直接得出，因为

$$A \oplus (B \oplus C) \cong C_L + B_L + A + B_R + C_R \cong (A \oplus B) \oplus C,$$

而 $A \oplus B = B_L + A + B_R$ 和 $B \oplus C = C_L + B + C_R$。诱导同构将是上文给出的两个同构的复合，其中每个加项都映射到结果中相应的截段。

如前所述，SGC 相当灵活；事实上，它们使我们能够刻画定理 4.3 中形式的和。

定义 4.11。给定一个序类 C，若 $\oplus$ 是定义在 C 内且良定义的，并且可以扩张为一个（全局）和[5]，则称 $\oplus$ 为 C 上的和。

结合律和正则性等性质在这一受限情形下仍具有通常的含义。

每当我们考虑在 C 上的正则和 $\oplus$ 时，都假设 C 对同构封闭；同样，若 $\oplus$ 是 C 上的结合和，则要求其输出属于 C。

[5]给定 C 上的任意一个和，我们可以将其扩张为全局和，方法是在其定义域之外令其与通常和完全相同。话虽如此，这种扩张未必保留该限制的任何性质。

命题 4.12. 若 $\mathcal{C}$ 是左 *SGC*，且 $\oplus'$ 是 $\mathcal{C}$ 上的正则结合和，则由下式定义的 LO 上的和 $\oplus$

$$A \oplus B = A_L \oplus' B_L + A_R + B_R,$$

其中， A_L 和 B_L 分别是属于 $\mathcal{C}$的 A 和 B 的最长初始段，是一个结合的正则和。

这一命题的证明并不困难，尤其是考虑到定理 4.9 证明的开头。我们还可以得到一个逆命题。

定理 4.13。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个对同构封闭的线性序类，使得 at

(1) 每个线性序 A 在 $\mathcal{C}$中都有最长初始段 A_L ，并且(2) 命题 *4.12* 中与 $\oplus' = +$ 对应的和 $\oplus$ 满足结合律。那么，类 $\mathcal{C}$ 是一个左 *SGC*。

证明。 我们需要证明 $\mathcal{C}$ 对末段、和及右极限封闭。如定理 4.9 所述，条件 (1) 蕴含它对右极限封闭。

为证明对和封闭，固定 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}$，并假设结论不成立以导出矛盾。令 $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(\alpha) \cup \mathcal{P}(\beta)$，并令 $X_{\mathfrak{C}}$ 如区分引理所述。

如果存在 $X_{\mathfrak{C}}$ 的非空初始段 I 使得 $I \in \mathcal{C}$，那么区分引理的最终结论给出一列 $X_{\mathfrak{C}}$ 的初始段，它们与 I 同构，且构成共尾序列。由于 $\mathcal{C}$ 对右极限封闭，因此可得 $X_{\mathfrak{C}} \in \mathcal{C}$。于是，要么 $X_{\mathfrak{C}} \in \mathcal{C}$ ，要么 $X_{\mathfrak{C}}$ 的任何非空初始段都不属于 $\mathcal{C}$。我们依次讨论这两种情况。

首先，假设 $X_{\mathfrak{C}} \in \mathcal{C}$。由于 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}$，我们有 $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$。由于 $\alpha + \beta \notin \mathcal{C}$ ，我们有$\alpha+\beta = A+B$，其中 A 是属于 $\mathcal{C}$ 的 $\alpha+\beta$ 的极大初始段，而 B 非空。一方面，我们有

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus X_{\mathfrak{C}} = (\alpha + \beta) \oplus X_{\mathfrak{C}} = A + X_{\mathfrak{C}} + B,$$

而另一方

$$\alpha \oplus (\beta \oplus X_{\mathfrak{C}}) = \alpha \oplus (\beta + X_{\mathfrak{C}}) = \alpha + \beta + X_{\mathfrak{C}}.$$

根据结合律，我们有 $A+X_{\mathfrak{C}}+B \cong \alpha+\beta+X_{\mathfrak{C}}$，这与区分引理矛盾。现在，假设 $X_{\mathfrak{C}}$ 的任何非空初始段都不属于 $\mathcal{C}$。注意，根据 $\oplus$的定义，我们有 $X_{\mathfrak{C}} \oplus \alpha = \alpha + X_{\mathfrak{C}} = \alpha \oplus X_{\mathfrak{C}}$。在结合律的一种用法中

$$X_{\mathfrak{C}} \oplus (\alpha \oplus \beta) = X_{\mathfrak{C}} \oplus (\alpha + \beta) = A + X_{\mathfrak{C}} + B,$$

而在另一种用法中

$$(X_{\mathfrak{C}} \oplus \alpha) \oplus \beta = (\alpha \oplus X_{\mathfrak{C}}) \oplus \beta = \alpha \oplus (\beta + X_{\mathfrak{C}}) = \alpha + \beta + X_{\mathfrak{C}}.$$

再次由结合律得到矛盾。因此， $\mathcal{C}$ 在和运算下封闭。

为了证明对末段封闭，假设 $\alpha \in \mathcal{C}$ 且 $\alpha \cong \bar{\alpha}+\alpha'$。我们要证明 $\alpha' \in \mathcal{C}$。反设此结论不成立，即 $\alpha' = A + B$，其中 A 是α' 在 $\mathcal{C}$ 中的极大初始段，且 B 非空。由于 $\mathcal{C}$ 在和运算下封闭，我们必有： B 没有任何非空初始段 B' 属于 $\mathcal{C}$。根据 $\oplus$ 的定义可得 $(\bar{\alpha} + A) \oplus B = \bar{\alpha} + A + B$，即 $\alpha \cong (\bar{\alpha} + A) \oplus B$。

设 $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(\alpha)$，并按上述方式定义 $X_{\mathfrak{C}}$ 。我们再次分别讨论两种可能的情形 s.

首先假设 $X_{\mathfrak{C}} \in \mathcal{C}$。我们有

$$((\bar{\alpha} + A) \oplus B) \oplus X_{\mathfrak{C}} \cong \alpha \oplus X_{\mathfrak{C}} = \alpha + X_{\mathfrak{C}},$$

并且

$$(\bar{\alpha} + A) \oplus (B \oplus X_{\mathfrak{C}}) = (\bar{\alpha} + A) \oplus (X_{\mathfrak{C}} + B).$$

假设 $X_{\mathfrak{C}}+B$ 分解为 $C+D$，其中 C 是 $\mathcal{C}$中 $X_{\mathfrak{C}}+B$ 的极大初始段。由于 $X_{\mathfrak{C}}\in\mathcal{C}$， $X_{\mathfrak{C}}$ 是 C的初始段。因此，无论 $(\bar{\alpha}+A)$ 如何分解， $X_{\mathfrak{C}}$都会作为一个非末段出现在和 $(\bar{\alpha}+A)\oplus(X_{\mathfrak{C}}+B)$ 中。由于我们必定有

$$\alpha+X_{\mathfrak{C}}\cong(\bar{\alpha}+A)\oplus(X_{\mathfrak{C}}+B),$$

像之前一样，我们得到矛盾。

现在假设 $X_{\mathfrak{C}}$ 没有初始段属于 $\mathcal{C}$，那么

$$X_{\mathfrak{C}}\oplus((\bar{\alpha}+A)\oplus B)\cong X_{\mathfrak{C}}\oplus\alpha=\alpha+X_{\mathfrak{C}}.$$

另一方面，我们有

$$(X_{\mathfrak{C}}\oplus(\bar{\alpha}+A))\oplus B\cong(X_{\mathfrak{C}}\oplus(\bar{\alpha}+A))+B.$$

因此，根据结合律， B 作为非空末段出现在 $\alpha+X_{\mathfrak{C}}$中，这又导致矛盾。

因此， $\mathcal{C}$ 对末段封闭，我们就完成了。 □

4.1. 滤过与筛取和。 到目前为止，我们已展示如何构造本节引言中给出的两个和。我们该如何理解 $+_h$ ——黑森堡和的全局扩展?

命题 4.12 给出了部分答案，但一般而言，我们如何在和生成类上构造和? 理想情况下，我们希望找到一种方法，利用和所基于的和生成类的结构来定义类似黑森堡和 (#) 的和。为此，我们将使用和生成类的滤链。

设 $\cdots\subseteq\mathcal{C}_2\subseteq\mathcal{C}_1\subseteq\mathcal{C}_0$ 是由左和生成类组成的递减滤过，其序数长度可能无界。给定某个序 L，对所有 $\alpha\in Ord$，令 L'_α 为 $\mathcal{C}_\alpha$ 中 L 的最长初始段。令 $L_\alpha=L'_\alpha-L'_{\alpha+1}$ 并令 $\hat{}\,\mathcal{C}_\alpha=\{L_\alpha\mid L\in LO\}$。

Let[6]

$$A\oplus B=\left(\sum_{\alpha\in Ord^*}A_\alpha\oplus_\alpha B_\alpha\right)+A_R+B_R \tag{4}$$

其中 A_R、 B_R 分别是 $\mathcal{C}_0^\perp$中的最长末段，并且对于所有 α， $\oplus_\alpha$ 都是和。

例 4.14。 如果对于所有 α，令 $\oplus_\alpha=+$ 和 $\mathcal{C}_\alpha=\langle\omega^\alpha\rangle$，则所得的全局和将是 $+_h$.

一般来说，我们将构造这类和的过程称为筛取，而式（4）中的和是由 $\{(\mathcal{C}_\alpha,\ \oplus_\alpha)\}_{\alpha\in Ord}$生成的筛取和。当构造不满足 3.1 中和的合理性质的全局和时，这一方法至关重要，因此我们将为此对其作进一步阐述。

考虑序 A、 B、 C，如果 $\oplus$如式（4）所示，

$$(A\oplus B)\oplus C=\left(\left(\sum_{\alpha\in Ord^*}A_\alpha\oplus_\alpha B_\alpha\right)+A_R+B_R\right)\oplus C.$$

我们希望证明这与.....同构

$$\left(\sum_{\alpha\in Ord^*}\left(\sum_{\alpha\in Ord^*}A_\alpha\oplus_\alpha B_\alpha\right)\ \oplus_\alpha C_\alpha\right)+A_R+B_R+C_R,$$

换句话说， $\sum_{\alpha\in Ord^*}A_\alpha\oplus_\alpha B_\alpha\in\mathcal{C}$。在这种情况下，要证明结合律，我们只需

[6]虽然不能对 Ord^* 求和，但对于任意给定的序 L，都存在一个 $\alpha\in Ord$，使得对所有 $\beta\geq\alpha$，$L_\beta=\emptyset$ $\sum_{\alpha\in Ord^*}L_\alpha$ $\sum_{\beta\in\alpha^*}L_\beta$ 。我们用 来简写 。

$$(A \oplus B)_\beta = \left(\sum_{\alpha \in Ord^*} A_\alpha \oplus_\alpha B_\alpha \right)_\beta = A_\beta \oplus_\beta B_\beta.$$

我们称满足上述所有性质的筛分方案 $\{(\mathcal{C}_\alpha, \oplus_\alpha)\}_{\alpha \in Ord}$ （其关联的和满足这些性质）为有效的。

在第4节中，我们将把筛取作为一种从和生成类中分离出基数的方法。具体而言，我们将利用第3节得到一种在特定基数上构造和的方法，并且需要某种方式将这些不同的和连接起来。给定一个和生成类 $\mathcal{C}$，我们将考虑递减滤过

$$\mathcal{C}_\alpha^{card} = \{L \in \mathcal{C} \mid L \text{ has no final segment of cardinality} < \aleph_\alpha\}.$$

此外，我们将研究与 $\mathcal{W}$具有相似结构的和生成类。考虑一个由有限集 $S = \{L_1, \dots, L_n\}$生成的和生成类 $\mathcal{C}$ ，它在同构意义下对非空末段封闭，且其元素的基数都相同[7]。在这种情况下， $\mathcal{C}$ 将仅由 $S \cup \{\emptyset\}$中各序的所有以序数为指标的和组成。

应用基数滤过，注意到对于所有满足 $|L_1| > \aleph_\alpha$的 α ，$\hat{}\mathcal{C}_\alpha^{card} = \{\emptyset\}$ 都成立；随后，它将由 S 中各序的和组成，这些和以基数为 $\aleph_\alpha$ 且没有更小基数末段的序数为指标。在后一种情况下，$\hat{}\mathcal{C}_\alpha^{card}$的非空元素的基数为$\aleph_\alpha$。

Whet其方案 $\{(\mathcal{C}_\alpha^{card}, \oplus_\alpha)\}_{\alpha \in Ord}$ 是否有效，取决于和 $\oplus$ 的选择 α.

命题4.15. 在上述设定中，如果和 $\oplus_\alpha$ 是 $\hat{}\mathcal{C}_\alpha^{card}$ 上的和，那么 $\{(\mathcal{C}_\alpha^{card}, \oplus_\alpha)\}_{\alpha \in Ord}$ 将是一个有效的滤过。

证明. 不失一般性，我们只需考虑 $\mathcal{C}$ 中序的和。设 A， $B \in \mathcal{C}$，和 $\sum_{\alpha \in Ord^*} A_\alpha \oplus_\alpha B_\alpha \in \mathcal{C}$ 仍属于 $\mathcal{C}$，因为它也是 S 中元素的一个以序数为指标的和。

对 β 作归纳法，若 $\aleph_\beta < |L_1|$，则

$$(A \oplus B)_\beta = \emptyset = A_\beta \oplus_\beta B_\beta.$$

若 $|L_1| = \aleph_\beta$，则 $(A \oplus B)^\beta$ 将是 $A \oplus B$ 的一个由小于 $\aleph_\beta$ 的序数索引的末段，因为每个 $\oplus_\alpha$ 都仍包含在每个 $\hat{}\mathcal{C}_\alpha^{card}$ 中。根据定义，这就只是 $A_\beta \oplus_\beta B_\beta$，因为 $A_\beta \oplus_\beta B_\beta \subseteq (A \oplus B)^\beta$；等号成立是因为 $A_{\beta+1} \oplus_{\beta+1} B_{\beta+1}$ 的任何末段的基数至少为 $\aleph_\beta^+$ ，所以它不可能是 $\hat{}\mathcal{C}_\beta^{card}$ 中某个元素的初始段。

如果这对所有 $\delta < \beta$ 都成立，请注意，由于其基数为 $\aleph_\beta$， $A_\beta \oplus_\beta B_\beta$ 不可能属于 $\mathcal{C}_{\beta+1}^{card}$，因此它必须是 $(A \oplus B)^\beta$ 的一个末段。但是，由于 $A_{\beta+1} \oplus_{\beta+1} B_{\beta+1} \in \hat{}\mathcal{C}_{\beta+1}^{card}$，它必定就是整个 $(A \oplus B)^\beta$。□

4.2. **代数性质**。 研究 SGC 本身将会很有成效，因为事实证明它具有有趣的代数性质。

为了阐明我们研究的动机，我们不妨先质疑左 SGC 本身的定义，尤其是条件（ii）。对于每个左 SGC $\mathcal{C}$，是否实际上都有 A， $B \in \mathcal{C}$，从而 $A+B \in \mathcal{C}$ 成立?

例 4.16。 考虑 $\mathcal{C} = \{L \in LO \mid L$ 没有最大元素 $\}$。 $\mathcal{C}$ 显然在同构下封闭，并满足条件（ii）。不含右端点的线性序的和不会有右端点，因此条件（iii）也得到满足。

话虽如此，例如， $1 + \mathbb{Q} \in \mathcal{C}$，尽管 $1 \notin \mathcal{C}$。

注意到，这个类似乎在以下意义上与良序类对偶：给定任意线性序 A，为了找到分解 $A \cong A_L + A_R$，其中 A_L 是最长初始

[7]如果其中一个序有最大元，那么 $\mathcal{C} = \mathcal{W}$。

段，在 $\mathcal{C}$ 中， A_R 是 A 的初始段，我们必须找到一个末段 A_R，使得它的每个初始段都有一个最大点；换句话说，使得 $(A_R)^*$ 的每个末段都有一个最小点，这意味着 $(A_R)^*$ 是良序。因此，我们必须找到分解 $A^* \cong \alpha + A$，其中 α 是与某个序数同构的最长初始段。 $\alpha^* \cong A_R$ 和 $A^* \cong A_L$ 在这个分解中。

让我们明确阐述对偶性的这一概念。

定义 4.17。 给定一个左 SGC $\mathcal{C}$，将其对偶类 $\mathcal{C}^*$ 定义为所有满足以下条件的序 L所构成的类： L^* 在 $\mathcal{C}$中没有初始段。

备注 4.18。 如果 $\mathcal{W}$ 是良序类，如上所示，则有

$$\mathcal{W}^* = \{L \in LO \mid L \text{ has no maximal element}\}.$$

命题 4.19。 对于任意左 *SGC* $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}^*$ 也是左 *SGC*。

证明。 由于 $\mathcal{C}$ 在同构下封闭， $\mathcal{C}^*$ 也同样如此。

设 $A + B \in \mathcal{C}^*$，则 $(A + B)^* = B^* + A^*$ 在 $\mathcal{C}$ 中没有初始段，因此特别地， B^* 在 $\mathcal{C}$ 中没有初始段，所以 $B \in \mathcal{C}^*$。如果 $A, B \in \mathcal{C}^*$，那么由于 $(A + B)^* = B^* + A^*$，如果 $(A + B)^*$ 在 $\mathcal{C}$ 中有一个初始段，它必定具有 $B^* + A^*$ 的形式，其中 A 是 A 的某个非空末段，但根据 (ii)，我们必须有 $A^* \in \mathcal{C}$，这与 A^* 在 $\mathcal{C}$中没有初始段相矛盾。

给定 $\mathcal{C}^*$ 中元素的任意递增序列 $A_0 \preceq A_1 \preceq \ldots$，令 A 为其直接极限。如果 A^*在 $\mathcal{C}$ 中有某个初始段，那么 $A^* \cong A^* + A^*$，其中 $A^* \in \mathcal{C}$，但此时对某个 $\alpha \in Ord$， $A^*_\alpha \cong A^* + A^*$，其中 $A^* \cong R^* + A^*$（即 $A \cong A + A + R$），所以 $A^* \in \mathcal{C}$，这与 $A^*_\alpha \in \mathcal{C}^*$相矛盾。□

请注意，在这个证明中，我们从未用到 $\mathcal{C}$ 对极限封闭这一事实，只需要条件 (i)、(ii) 和 2.(i)。因此，只需一个满足条件 (i)、(ii) 和 2.(i) 的类，其对偶便是左和生成的。

不过，这种现象并不限于对偶运算。要证明 $\mathcal{C}^\perp$ 是和生成的，同样只需要 $\mathcal{C}$ 满足 (i)、(ii) 和 2.(i)。

例 4.20. 设 $\mathcal{C} = \{A \mid A \cong A' + \mathbb{Q}$ 对某个 $A' \in LO\}$成立。

$\mathcal{C}$ 满足 (i)、(ii) 和 2.(i)，但不满足 2.(ii)，因为例如，我们可以考虑对所有 $\alpha \in \omega_1$ 的序列 $A_\alpha = \alpha \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q} + \cdots + \mathbb{Q}$。这个序列属于 2.(ii) 中的类型，其右极限是 $\omega_1 \times \mathbb{Q}$，但这个序没有 $\mathbb{Q}$ 的最后一个副本，因此它不可能属于 $\mathcal{C}$。

尽管如此，根据命题 4.19， $\mathcal{C}^*$ 是左和生成的。

$A \in \mathcal{C}^*$ 当且仅当 A^* 没有以 $\mathbb{Q}$ 的同构副本为终点的初始段，当且仅当 A 不能凸嵌入 $\mathbb{Q}$。不依赖于我们的命题，很容易看出这个类确实是左和生成的（事实上，它也是右和生成的）。注意，这个类不同于用于生成 $+_s$ 的类，例如 $\mathbb{R} \in \mathcal{C}^*$，尽管实数并非散乱序。

例 4.21。 考虑 $\mathcal{S}$，即散乱序的类。它既是左 SGC，也是右 SGC（事实上，它是所有既是左 SGC 又是右 SGC 且包含 1[8]的类的交集）。注意 * 和 $^\perp$ 在 $\mathcal{S}$ 上（作为左 SGC）的表现：

- $A \in \mathcal{S}^*$ 当且仅当 A 的每个非空末段都嵌入 $\mathbb{Q}$，而
- $A \in \mathcal{S}^\perp$ 当且仅当 A 的每个非空初始段都嵌入 $\mathbb{Q}$。

如果我们将这些运算应用于它，并将其视为右 SGC，那么结果就会翻转。此外，请注意，$\mathcal{S}$ 既是左 SGC，也是右 SGC，而 $\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{S}^\perp$ 则只属于其中一种。

一种适用于所有 SGC、无论其为左 SGC 还是右 SGC 的一元求逆算子是逆。

[8]这是应用豪斯多夫的刻画 [3]得出的。

定义 4.22. 给定一个（左或右）SGC $\mathcal{C}$，其逆 $\mathcal{C}^{-1}$ 是一个（右或左）SGC，其中所有元素都是 $\mathcal{C}^9$ 中元素的逆。

注记 4.23。 注意，对于任意和生成类 $\mathcal{C}$，$(\mathcal{C}^*)^\perp = \mathcal{C}^{-1}$。

对于散乱序的情形，我们有 $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}$。

给定 $\mathcal{C}$ 一个和生成类，是否有 $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$? 我们当然知道，若 $\mathcal{C}$ 满足 (i)、(ii) 和 2.(i)，但不满足 2.(ii)，则此结论不成立，因为在这种情况下， $\mathcal{C}^{**}$ 将是和生成的，尽管 $\mathcal{C}$ 不是。

命题 4.24。 若 $\mathcal{C}$ 是右和生成的，则 $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$。

证明。 $A \in \mathcal{C}^{**}$ 当且仅当 A^* 没有初始段属于 $\mathcal{C}^*$，当且仅当对于 A^*的每个初始段 B^*， $B^{**} = B$ 在 $\mathcal{C}$ 中有一个初始段，当且仅当 A的每个末段 B 都在 $\mathcal{C}$中有一个初始段。

设 $A \in \mathcal{C}^{**}$。我们在 $\mathcal{C}$ 中构造一个线性序的递增序列，其直接极限为 A。将 A 视为自身的末段，令 A_0 为它的一个属于 $\mathcal{C}$ 的初始段。通过归纳法，¯若 A_α 不是 A，令 B 为 A 的一个末段，使得 $A_\alpha + B \cong A$，令 $A_{\alpha+1} = A_\alpha + B$，其中 $\lrcorner B$ 是 B 在 $\mathcal{C}$ 中的一个初始段。若 λ 是极限序数，且我们已对所有 $\alpha < \lambda$ 构造出 A_α，则令 A_λ 为它们的直接极限。由于我们不允许将可数 $\emptyset$ 视为线性序，该构造最终必然停止。 $A = \lim\!-!\ A_\alpha \in \mathcal{C}$。

¯若 $A \in \mathcal{C}$，给定任意分解 $A = A + A'$， $A' \in \mathcal{C}$，因此 $A \in \mathcal{C}^{**}$。 □

该命题与前一个恒等映射结合，还表明 $^{-1}$ 和 $^\perp$ 在任意和生成类上可交换。事实上， *、$^\perp$ 和 $^{-1}$ 都必须可交换，因为很容易看出， $^{-1}$ 也必须满足 $(\mathcal{C}^{-1})^{-1} = \mathcal{C}$。

上述证明还表明，如果 $\mathcal{C}$ 满足 (i)、(ii) 和 2.(i)，那么 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{**}$。事实上，它将是包含 $\mathcal{C}$ 的最小左和生成类。这可由上述证明的第一部分轻易看出：对于任意 $A \in \mathcal{C}^{**}$，我们构造了一个由 $\mathcal{C}$ 中元素组成的序列，其右极限为 A；而任何左和生成类都必须对右极限封闭。

两个和生成类的交集也将是一个和生成类，我们将 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的交集记为 $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$。不过，并集不一定是 SGC，因为它未必对和或右极限封闭。包含任意两个和生成类的最小和生成类是什么?

注意，我们可以用显而易见的方式将两个和生成类相加：令 $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ 为包含 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 且对有限和及同构封闭的最小类。显然，这是满足 (i)、(ii) 和 2.(i) 且同时包含 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的最小类。令 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^{**}$；根据命题 4.24 后的说明，这是同时包含 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的最小和生成类。 $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ 中的任意元素都是由形如 $A + B$ 或 $B + A$ 的序构成的良序和，其中 $A \in \mathcal{A}$ 且 $B \in \mathcal{B}$。定义 $\mathcal{A} + \mathcal{B} = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^{**}$ 对右 SGC 也同样适用。

此外， $+$和 $\cdot$ 是交换、结合的运算；对于任意和生成类 $\mathcal{C}$，它们证明了其所有子和生成类在 $\subseteq$ 下构成一个有界格。

采用布尔代数记号，令 $\mathbf{1} := LO$，$\mathbf{0} := \{\emptyset\}$。

给定任意和生成类 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，以下恒等式成立：

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{1} = \mathcal{A},\ \mathcal{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},\ \mathcal{A} + \mathbf{0} = \mathcal{A}, \text{ and } \mathcal{A} + \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

注 4.25. 一般而言， * 和 $^{-1}$在这些运算下的表现并不如人所愿。例如， $\mathcal{W} \cdot \mathcal{W}^*$ 是与非零极限序数同构的良序类，而 $\mathcal{W}$ 和$\mathcal{W}^{-1}$ 具有不同的手性。但即使这并不构成问题，例如对于散乱序的情形，$\mathcal{S} \cdot \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}$。

另一方面， $^\perp$ 的表现越来越好。如果 $\mathcal{C}$ 是任意一个和生成类，

[9]如果 $(A, <_A)$ 是一个线性序，那么它的 $inverse$ 是序 $(A, <_A^*)$，其中 $a <_A^* b$ 当且仅当 $b <_A a$。与 * 和 $^\perp$不同，证明 $^{-1}$ 输出一个 SGC 时，确实要求输入满足 SGC 的所有条件。

$$\mathcal{C}\cdot\mathcal{C}^{\perp}=\mathbf{0},\ \mathcal{C}\oplus\mathcal{C}^{\perp}=\mathbf{1}.$$

后一个事实源于这样的观察：任意线性序都可以分解为它在 $\mathcal{C}$ 中的最长初始（或终末）段，再加上 $\mathcal{C}^{\perp}$ 中的一个元素。

一般而言，根据定义 $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^{\perp}=\mathbf{0}$。

尽管 wh at one might expect，这些运算并不彼此分配。尽管

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})\text{ and }\mathcal{A}+(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})\subseteq(\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot(\mathcal{A}+\mathcal{C})$$

是显然的，但对于相反方向的包含映射，我们有反例。

如果我们令 $\mathcal{A}=\langle 1\rangle^{*}$ （不含最大元的线性序类）、 $\mathcal{B}=\langle 1\rangle$ （良序类）以及 $\mathcal{C}=\langle\mathbb{Q}\rangle$。注意，$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\cdot\langle 1,\ \mathbb{Q}\rangle$ 且 $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\langle\omega,\ \mathbb{Q}\rangle$，但 $2+\mathbb{Q}\in\mathcal{A}\cdot\langle 1,\ \mathbb{Q}\rangle$，尽管它不属于 $\langle\omega,\ \mathbb{Q}\rangle$。

在另一种情况下，令 $\mathcal{A}=\langle\mathbb{Q}\rangle$、 $\mathcal{B}=\mathcal{S}$、 $\mathcal{C}=\langle\omega\rangle$[10]。

$$\mathcal{A}+(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})=\langle\mathbb{Q},\omega\rangle\neq\mathcal{S}=(\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot(\mathcal{A}+\mathcal{C}).$$

因此，我们无法通过这些运算在 SGC 上得到布尔代数。

话虽如此，逆运算与子类关系的配合确实很好。设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$，则 $\mathcal{B}^{*}\subseteq\mathcal{A}^{*}$ 和 $\mathcal{B}^{\perp}\subseteq\mathcal{A}^{\perp}$，而 $\mathcal{A}^{-1}\subseteq\mathcal{B}^{-1}$。

尽管 SGC 的子和生成类所成的格与向量空间的子空间格在代数上相似，前一个格却不是模格。考虑 $\mathcal{A}=\langle\omega\rangle$、 $\mathcal{B}=\mathcal{S}$ 和$\mathcal{C}=\langle 1\rangle^{*}$。尽管如此， $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$和 $\mathbb{Z}\cong\omega^{*}+\omega\in(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}$，尽管 $\omega^{*}+\omega\notin\mathcal{A}\oplus(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$。

作为对和生成子类的格结构讨论的总结，我们在 $\langle 1\rangle$ 的情形下完整刻画了这个格，展示了良序类作为和生成类所具有的一个有趣的代数事实。

定义 4.26。 若一个和生成类 $\mathcal{C}$ 由单个元素生成（即存在一个 $A\in\mathcal{C}$ 使得 $\langle A\rangle=\mathcal{C}$），则称其为主 的。

定理 4.27。 每个 $\mathcal{W}$ 的和生成子类 $\mathcal{C}$ 都是主的。事实上， $\mathcal{C}$ 由一个加法不可分序数生成。

证明。 设 $\alpha\in\mathcal{C}$ 为该类中的最小序数。根据康托尔标准形、加法不可分序数的右加法不可分性（两者均已在 5.1 中证明）以及和生成类的性质 (ii)，$\alpha=\omega^{\gamma}$ 对某个 $\gamma\in Ord$成立。

注意，对于任意 $\beta>\gamma$、 $\omega^{\beta}\in\langle\alpha\rangle$，由于 $\omega^{\beta}=\omega^{\gamma}\cdot\omega^{\delta}$ 是将由 ω^{δ} 索引的 ω^{γ} 相加所得的结果，其中 δ 满足 $\gamma+\delta=\beta$ （见 [5]的引理 2.25）。

如果 $\epsilon\in\mathcal{C}$，那么其康托尔范式中的每个 ω^{β} 都大于 α，因为由 (ii) 应用一次可知，次数最小的 ω^{β} 必须属于 $\mathcal{C}$。因此，根据对求和封闭，我们必须有 ϵ 全部属于 $\langle\alpha\rangle$。□

笑话 4.28。 Ord是一个主理想整环。

$\langle 1\rangle$的子SGC格将是线性有序的，并由类 $\langle\omega^{\alpha}\rangle$ 组成。我们有，$\langle\omega^{\alpha}\rangle\subseteq\langle\omega^{\beta}\rangle$ 当且仅当 $\beta\leq\alpha$。因此，我们已经证明该格实际上同构于（$Ord\cup\{\infty\}$， $\leq^{*}$）。

[10] $\mathcal{C}$ （在序型意义下）就是极限序数类。

$$\begin{array}{cc} \langle 1\rangle & 0 \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \langle \omega\rangle & 1 \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \langle \omega^2\rangle & 2 \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \vdots & \vdots \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \langle \varepsilon_0\rangle & \varepsilon_0 \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \vdots & \vdots \\ |\cup & \big|^*_\vee \\ \{0\} & \infty \end{array}$$

此外，$\langle \omega^\alpha\rangle + \langle \omega^\beta\rangle = \langle \omega^{\min(\alpha,\beta)}\rangle$，而 $\langle \omega^\alpha\rangle \cdot \langle \omega^\beta\rangle = \langle \omega^{\max(\alpha,\beta)}\rangle$，因此这些运算将在序数的子类上满足分配律。

主 SGC 的另一个有趣实例是 $\langle 1,\ \mathbb{Q}\rangle = \langle \mathbb{Q}+1\rangle$。我们可以通过简单地将其从 $\mathbb{Q}+1$ 中剥离出来，在 $\langle \mathbb{Q}+1\rangle$ 中得到 1；还可以通过取可数和得到 $\omega \times (\mathbb{Q}+1)$，而 $\mathbb{Q}$ 是一个无端点的可数稠密线性序，因此同构于 $\mathbb{Q}$。这个完整的类不会拥有与良序相同的性质，因为它包含诸如 $\langle \omega,\ \mathbb{Q}\rangle$ 这样的并非主 SGC 的子类[11]。

既然我们关注线性序的和，那么让我们再考虑 SGC 之间的一种二元运算，它将使我们能够引入一个重要概念。

定义 4.29。给定两个序 A 和 B，C 是 A 和 B 的和的一个实例，如果存在某个和 $\oplus$ 使得 $A \oplus B = C$。等价地，如果存在不相交的子序 A'，$B' \subseteq C$ 使得 $A' \cup B' = C$ 且 $A \cong A'$，$B \cong B'$，那么 C 是 A 和 B 的和的一个实例。

定义 4.30. 给定两个手性相同的 SGC $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，它们的交错和 $\mathcal{A} \boxplus \mathcal{B}$ 是一个手性相同的 SGC，由 $\mathcal{A}$ 的元素与 $\mathcal{B}$的元素所构成的和的所有实例组成。

例 4.31. 若 $\alpha, \beta \in Ord$, $\langle \omega^\alpha\rangle \boxplus \langle \omega^\beta\rangle = \langle \omega^{\max(\alpha,\beta)}\rangle$. 这是因为两个良序的和的任何实例仍是良序，再结合定理 5.24 中给出的两个序数之和的实例的界。

交错和也可能产生相当难以处理的结果，例如，$\langle \mathbb{Q}\rangle \boxplus \langle \mathbb{Q}\rangle$ 包含 $\mathbb{Q}$(1,2)——有理数集，被划分成两个稠密序，其中一个序中的每个点都被替换为 2。下一节中，我们将进一步讨论这类序，以及它们如何作为 $\mathbb{Q}$ 与自身之和的实例而得到。

我们以进一步讨论由$^\perp$生成的序的分解来结束本节。

定理 4.32 (刚性)。给定一个左 *SGC* $\mathcal{C}$，每个线性序 A 都可以唯一地分解为 $A \cong A_L + A_R$，其中 $A_L \in \mathcal{C}$ 且 $A_R \in \mathcal{C}^\perp$。

该分解在同构下保持不变：若 $f:\ A \xrightarrow{\sim} B$，则 $B_L = f(A_L)$ 以及$B_R = f(A_R)$。

[11]如果它等于某个 $\langle A\rangle$，那么$A \cong B + \omega$，因为它必须有一个与某个序数同构的末段，才能生成 ω（通过对非良序对象取极限无法得到良序；得到良序的唯一办法是将其剥离出来，或对良序取极限），但它不能是有限的，否则我们就能生成所有序数（$\langle 1\rangle$），所以它本身必定是 ω。话虽如此，ω 并不稠密，因此 $B + \omega$ 的任何极限也不会稠密，所以我们无法生成 $\mathbb{Q}$。

证明。令 A_L 为 $\mathcal{C}$ 中 A 的最长初始段，并令 A_R 为相应的末段，即可得到其存在性。

如果我们证明了唯一性，就能立即根据定理 4.9 正向证明的论证，得到同构下的保留性。

设 $A_L + A_R \cong A \cong A'_L + A'_R$，其中 $A'_L \in \mathcal{C}$、$A'_R \in \mathcal{C}^*$。令 $g\colon A'_L + A'_R \xrightarrow{\sim}! A_L + A_R$。$g(A'_L) \cap A_R$是 $g(A'_L) \cong A'_L$的末段，因此属于 $\mathcal{C}$；它同时也是 A'_R的初始段，故也必定属于 $\mathcal{C}^\perp$，所以它必为空。同理，$g(A'_R) \cap A_L$ 也必为空。因此，$g(A'_L) \subseteq A_L$ 且 $g(A'_R) \subseteq A_R$；由于该映射是满射，这些必为等式。□

推论 4.33。简单和是规范正则的。

我们称刚性定理中的分解 $A = A_L + A_R$ 为 A 的 $\mathcal{C}$-分解。我们还称 $\mathcal{C}$ 确定了 A 中的切口 $A_L + A_R$。

根据唯一性，给定 $A \in \mathcal{C}$ 和 $B \in \mathcal{C}^\perp$ 后，和 $A + B$ 是其自身的 $\mathcal{C}$-分解。特别地，如果 A 和 B 都非空，则这样的和既不属于 $\mathcal{C}$，也不属于 $\mathcal{C}^\perp$。如果 A' 是 A 的末段，而 B' 是 B 的初始段，那么 $A' \in \mathcal{C}$ 和 $B' \in \mathcal{C}^\perp$，因此 $A' + B'$ 也是一个 $\mathcal{C}$-分解。从这个意义上说，由 $\mathcal{C}$ 确定的切口在围绕该切口“放大观察”时保持不变。

命题 4.34。如果 $A \in \mathcal{C}$ 和 $B \in \mathcal{C}^\perp$，那么 $B + A$ 属于 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C}^\perp$。

证明。假设并非如此。于是，对于某个非空的 $\alpha \in \mathcal{C}$ 和 $\beta \in \mathcal{C}^\perp$，$\alpha + \beta \cong B + A$ 的 $\mathcal{C}$-分解为 $f\colon \alpha + \beta \xrightarrow{\sim}! B + A$ 见证了这一分解。我们不可能有 $f(\alpha) \in \mathcal{C}$ 是 $B \in \mathcal{C}^\perp$ 的初始段，因此 $f(\alpha)$ 必定包含 B 作为初始段。这意味着 $f(\beta) \in \mathcal{C}^\perp$ 是 $A \in \mathcal{C}$ 的末段，这与 $f(\beta) \neq \emptyset$ 矛盾。□

推论 4.35. 设 A 和 B 是分别具有 $\mathcal{C}$-分解 $A = A_L + A_R$ 和 $B = B_L + B_R$ 的序。那么，$A + B$ 的 $\mathcal{C}$-分解要么是 $(A_L + A_R + B_L) + B_R$，要么是$A_L + (A_R + B_L + B_R)$。

证明。根据命题 4.34，我们有 $A_R + B_L \in \mathcal{C}$ 或 $A_R + B_L \in \mathcal{C}^\perp$成立。在第一种情况下，$A+B$的 $\mathcal{C}$-分解为 $(A_L + A_R + B_L) + B_R$；在第二种情况下，则为 $A_L + (A_R + B_L + B_R)$。□

命题 4.34 对初始段和末段的直接极限也有类似结论。

命题 4.36. 设 $\mathcal{C}$ 是一个右 *SGC*，则

(i) 如果 A 是 $\mathcal{C}$中各序的右极限，那么 A 属于 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C}^\perp$；对偶地，(ii) 如果 B 是 $\mathcal{C}^\perp$中各序的左极限，那么 B 属于 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C}^\perp$。

证明。我们考虑第一种情况，第二种情况的证明与此对称。

设 $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$，其中 $A_\alpha \in \mathcal{C}$，并且若 $\alpha < \beta$，则 A_α 是 A_β的初始段。不失一般性，我们可以假设 λ 是正则基数；若不是，则考虑一个右极限相同、长度为 $\mathrm{cf}(\lambda)$ 的序列。

设 $A \cong A_L + A_R$是其 $\mathcal{C}^\perp$-分解。若 A_L，$A_R \neq \emptyset$，则对任意足够大的 α，A_L 都将是 A_α的真初始段，因此 $A_L \in \mathcal{C}$，这与 $A_L \neq \emptyset$矛盾。□

4.3. **简单和的交换性**。

定义 4.37. 若对任意序 A，B，和 $\oplus$ 是交换的，

$$A \oplus B \cong B \oplus A.$$

下一节将专门讨论交换性，这是我们将要考察的最后一种新代数性质。为了强调这一概念在我们研究中的新颖性，我们证明没有简单和是交换的。

定理 4.38。若 $\mathcal{C}$ 是左 *SGC*，则 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 不是交换的。

我们已经建立了足够多的工具，可以用多种方式来证明这个定理。事实上，在阅读我们的证明之前，我们鼓励读者尝试用自己认为合适的方式完成证明。

使用区分引理的证明相当高效，但我们选择采用一种适用于任何在同构下封闭且包含 $\mathbf{1}$、ω、ω^*、$\omega+1$ 和 $(\omega+1)^*$ 的子类的方法。

证明。 假设 $\oplus_{\mathcal{C}}$ 是交换的。

根据刚性定理，要么 $1\in\mathcal{C}$，要么 $1\in\mathcal{C}^{\perp}$。先假设前者。由对序数和的封闭性可得 $\omega\in\mathcal{C}$，因此

$$\omega+1=1\oplus_{\mathcal{C}}\omega\cong\omega\oplus_{\mathcal{C}}1=1+\omega\cong\omega,$$

这就产生了矛盾。若 $1\in\mathcal{C}^{\perp}$，则同理可得 $\omega^*\in\mathcal{C}$，但是

$$\omega^*\oplus_{\mathcal{C}}1=\omega^*+1\cong\omega^*\ncong(\omega+1)^*\cong1+\omega^*\cong1\oplus_{\mathcal{C}}\omega^*.$$

□

5. Good sums of linear orders

回顾一下，我们最初关于线性序类没有余积的定理，可以通过引理 3.3 得到证明，只需注意到通常和一般并不具有交换性。从代数视角来看，LO 中余积不存在，可以看作是候选余积（和）缺乏交换性的结果。鉴于我们最初的动机之一是在线性序的框架下推广余积，因此考虑交换和，即从代数视角来看最类似于余积的和，是很自然的。将交换性与我们此前提出的合理性质结合起来，就得到如下定义。

定义5.1。 如果一个线性序类 C 上的和在 C 上具有正则性、结合律和交换性，则称其在 C 上是良好的。

如果 C 上存在一个良和，我们就称 C 是良好的。

本节将专门研究不同序类上的良好和。我们将首先研究并刻画序数及其直接扩张上的良好和，以此说明在高度结构化的语境中如何定义良好和。随后，我们将开始讨论如何在非结构化的语境中定义良好和，从而引出复杂类这一概念，即其中定义和的自由度达到最大的序类。最终，我们将在第 6 节中证明，对 LO 的子类上的良好和的研究，可以与我们关于 SGC 的工作结合起来，从而说明我们在第 3.1 节中考察的和的原始性质，与正则性和结合律彼此独立。

5.1. 良序上的良和。

我们首先证明良序类是良好的。只考虑序型时，我们将用与某个良序同构的唯一序数来指代该良序。

良序类（散乱序类也有这一性质）的一个重要性质是，它在任意形式的和下封闭。因此，在定义新的和时，我们有很大的自由度，因为定义和时无需担心会离开 $\mathcal{W}$。

为了在序数上定义第一个良和，我们需要建立序数类的基本结构理论。其中最重要的结构理论是康托尔范式定理。

定理5.2 (康托尔标准形 [1])。 任何非零序数 α 都可以唯一表示为

$$\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot k_1+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot k_n$$

其中 $n>1$、$\alpha\geq\beta_1>\cdots>\beta_n$，且对于所有 $i\in\{1,\dots,n\}$、$0<k_i<\omega$。

注 5.3。 从序理论的角度来看，Cantor 标准形很有趣，因为它将任意良序唯一地分解为加法不可分解的良序。正如我们将在本节中看到的，标准形使得在 Ord 上定义良好和变得容易得多。

定义 5.4。 如果对于任意 $A \cong B + C$，都有 $A \preceq B$ 或 $A \preceq C$（等价地， $A \equiv B$ 或 $A \equiv C$），则称线性序 A 是加法不可分解 （AI）的。

这些加项还满足一种更强的不可分解性。

定义 5.5。 如果 A 是由 B 和 C的和的一个实例，则 $A \equiv B$ 或 $A \equiv C$，那么称线性序 A 是强不可分解 的。

以下两个命题是关于序数的众所周知的事实；证明见 [7]。首先，回顾一下，在序数类上， $\preceq$ 与 $\leq$重合， $\equiv$ 与 $=$ 重合。

命题 5.6。 以下两个陈述对所有 α、 $\beta \in Ord$都成立：

(i) $\alpha \preceq \beta$ 当且仅当 $\alpha \leq \beta$;
(ii) $\alpha \equiv \beta$ 当且仅当 $\alpha = \beta$。

我们还可以给出加法不可分序数的具体刻画。

定理 *5.7. </style}*非零序数 α 是加法不可分序数，当且仅当它具有形式 ω^β，其中 $\beta \in Ord$。

事实证明，对于良序，这两种不可分解性概念是一致的，因此本命题也刻画了强不可分解序。

命题 5.8. 非零序数 α 是加法不可分序数，当且仅当它是强不可分解的。

在本节末尾，我们将展示如何根据我们对两个序数之和的各个实例所得的界，推导出这一众所周知的事实的证明。

由康托尔范式给出的强不可分解序分解，解释了序数和理论中许多出乎意料的优良性质。

例如，若要估计两个无限良序的和有多少个非同构实例，朴素的方法会得出可能的序有无穷多个。由于康托尔范式，实际数量却是有限的。

定理 5.9. 对于任意序数 α、 β， α 与 β的和只有有限多个实例（相差同构的实例视为相同）。

Th这并不难证明，但 [8] 中的定理 1.38 给出了一个漂亮的双射证明 .

我们将利用黑森堡和证明 $\mathcal{W}$ 是一个良类。这是序数上的一种交换和，由 Gerhard Hessenberg 首先于 1906 [4]，研究；它也称为自然和，这个名称恰当地体现了它在各种情境中的广泛应用。

定义 5.10。 给定任意两个序数 α， β，设它们展开后的康托尔标准形为

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_n}$$

and

$$\beta = \omega^{\gamma_1} + \cdots + \omega^{\gamma_m}.$$

α 与 β 的黑森堡和是序数

$$\alpha \# \beta = \omega^{\delta_1} + \cdots + \omega^{\delta_{n+m}},$$

wh这里 $\delta_1 \leq \cdots \leq \delta_{n+m}$是 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$的一个非递减枚举 .

黑森堡和显然是我们意义上的和。此外，很容易看出它具有交换性和结合性，因此是良好的。虽然这个定义颇具构造性，但定义这种和还有一种更自然的方式（我们将在后续截段中进一步探讨）。

Prop命题 5.11. 若 $\alpha \in Ord$ 是 β、$\gamma \in Ord$的一个和实例，则 $\alpha \leq \beta\#\gamma$.

这一广为流传的结果背后的直觉是，黑森堡和为我们提供了唯一一种能够将两个序数结合起来而不发生任何吸收的方式。

为证明这一点，我们考察 $[2]$[12] 中给出的 Carruth 自然和公理。

定义 5.12.（Carruth）二元运算 $\oplus$：$Ord \times Ord \to Ord$ 是自然序数运算，当且仅当对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in Ord$

(1) $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$；(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$；(3) $\alpha \oplus 0 = \alpha$；

(4) $\gamma \oplus \alpha > \gamma \oplus \beta$ 当且仅当 $\alpha > \beta$。

注记 5.13。正如 Carruth 指出的，黑森堡和是唯一满足以下条件的自然序数运算：对于任意序数 $\alpha \geq \beta$ 和 $m,\ n < \omega$

$$\omega^\alpha \cdot m + \omega^\beta \cdot n = \omega^\alpha \cdot m \oplus \omega^\beta \cdot n$$

例 5.14。考虑如下定义的运算 $\oplus$，它是一个非和的自然序数运算：

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} \alpha, \text{ if } \beta = 0 \\ \beta, \text{ if } \alpha = 0 \\ \alpha\#\beta\#1, \text{ if } \alpha, \beta \neq 0 \end{cases}$$

虽然它满足 Carruth 公理的所有条件，但它不是一个和，例如，$1 \oplus 1 = 3$。

定理 5.15。设 $\oplus$ 是一个自然序数运算。若 γ 是两个序数 α, β之和的一个实例，则 $\gamma \leq \alpha \oplus \beta$。

证明。对 (α, β) 使用归纳法。对于 $\alpha = 0$ 和任意 β，该命题成立。对于 $\beta = 0$ 和任意 α，该命题也成立。设对于所有满足 $\delta \leq \alpha$ 和 $\varepsilon \leq \beta$ 且至少一个不等式为严格不等式的序对 (δ, ε)，该命题均成立。我们证明该命题对 (α, β) 也成立。

令 $\gamma = \gamma_\alpha \cup \gamma_\beta$ 为见证，证明 γ 是 α 与 β 的和的一个实例。假设 $\gamma > \alpha \oplus \beta$，并令 $\text{tp}(\gamma_\alpha \cap \alpha \oplus \beta) = \gamma'_\alpha$ 且 $\text{tp}(\gamma_\beta \cap \alpha \oplus \beta) = \gamma'_\beta$（将 $\alpha \oplus \beta$ 视为 γ 的初始段），使得 $\alpha \oplus \beta$ 是 γ'_α 与 γ'_β 的和的一个实例。如果 $\gamma'_\alpha < \alpha$ 或 $\gamma'_\beta < \beta$，那么由归纳法可得 $\alpha \oplus \beta \leq \gamma'_\alpha \oplus \gamma'_\beta$，这与定理 5.12 中的 (4) 矛盾。因此 $\gamma'_\alpha = \alpha$ 且 $\gamma'_\beta = \beta$。但由于 $\alpha \oplus \beta$ 是 γ 的真初始段，γ'_α 要么嵌入 γ_α 的真初始段（该段与 α 同构），要么 γ'_β 嵌入 γ_β 的真初始段（与 β 同构），两种情况都导致矛盾。□

当 $\oplus$ 是黑森堡和时，该定理为命题 5.11 给出了证明。另一方面，由于黑森堡和也是我们所定义意义下的和，我们还可以得到：

Coro推论 5.16. 设 α、β 是任意序数，则对于任意自然序数运算 $\oplus$，

$$\alpha\#\beta \leq \alpha \oplus \beta$$

因此，定理 5.15 还告诉我们，黑森堡和是唯一一种自然序数运算的和。我们可能会想知道，能否利用这一结果证明黑森堡和是 Ord 上的唯一良和。当然，如果定义 5.12 的条件 (4) 对所有良和都成立，就可以得到这一刻画。

[12]注意，一个和 在 Carruth 意义下，它只是序数上的一种二元运算；不必是我们所说的和 .

情况并非如此，事实上， Ord 上存在许多不同的良好和。实际上，其中一种和将给出命题 5.11 所缺少的下界。

为了说明这些新的和类为何重要，我们先来问：对于 $\gamma = \omega^\alpha$ 和 $\delta = \omega^\beta$，和有多少种可能的实例?

若 $\alpha = \beta$，则有两种。第一种是通常和，此时我们得到一个与 $\omega^\alpha \cdot 2$ 同构的序。第二种是将这些序拆分成无限多个部分，从而得到一个序 $A = \omega^\alpha \sqcup \omega^\alpha$，其中 $<_A$ 定义如下:

$$(\varepsilon, i) < (\zeta, j) \text{ iff } \begin{cases} \varepsilon < \zeta, \text{ or} \\ \varepsilon = \zeta \text{ and } i < j \end{cases}$$

这个序与 $2 \cdot \omega^\alpha = \omega^\alpha$ 同构。从直观上看，我们取 δ 的任意一个元素，将它紧接着放在 γ 中对应的元素之后，以最大程度地交织 γ 和 δ。

另一方面，若 $\beta < \alpha$，则唯一的可能性是 $\omega^\alpha + \omega^\beta$ 和 ω^α。

一般而言，若有 $\omega^\alpha \cdot k_1$ 和 $\omega^\alpha \cdot k_2$，且 $k_1 \leq k_2$，我们可以将 $\omega^\alpha \cdot k_1$ 逐点洗牌进 $\omega^\alpha \cdot k_2$ 中与 $\omega^\alpha \cdot k_1$ 同构的初始段，从而得到一个等于 $\omega^\alpha \cdot k_2$ 的和实例。这是合并这两个元素最有效的方式。否则，我们可以选择最大程度洗牌进去的部分有多大，由此得出唯一可能的和是 $\omega^\alpha \cdot (k_2 + i)$，其中 $i < k_1$。

利用形如 ω^α 的序数对自身的吸收性质以及康托尔范式，我们可以如下定义一种新的良和。

定义 5.17。若 $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} \cdot k_i + k$ 且 $\beta = \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} \cdot m_i + m$，其中 $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n > 0$，则将 α 与 β 的 **最小公倍数和** 定义为

$$\alpha +_{lcm} \beta = \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} \cdot \max\{k_i, m_i\} + k + m$$

注 5.18。这个和不是自然序数运算，因为它不满足定理 5.12 的条件 (4)。有两种方式可以看出这一点:

- 直接注意到 $\omega \cdot 3 +_{lcm} \omega \cdot 2 = \omega \cdot 3 = \omega \cdot 3 +_{lcm} \omega$，尽管 $\omega \cdot 2 > \omega$；- 或者利用推论 5.16，因为例如 $\omega \cdot 3 +_{lcm} \omega \cdot 2 = \omega \cdot 3 < \omega \cdot 5 = \omega \cdot 3 \# \omega \cdot 2$.

尽管如此，要证明它是一个良和并不难。

通过改变 $+_{lcm}$ 的定义，我们可以在 Ord 上构造无穷多个彼此非同构的良和。例如，对于任意序数 α，我们可以规定，和 $\oplus_\alpha$ 在所有 ω^γ 处都像黑森堡和那样运作（即将系数相加），但在某些 ω^α 处取系数的最大值。这些和实际上是例 4.14 中筛取和的变体，其中每个 $\oplus_\alpha$ 要么是通常和，要么是交错合并这两个序的和。

这些和的吸收效率不够高，无法达到我们所需的下界。具体来说，例如给定 $\omega^3 \cdot 2 + \omega$ 和 $\omega^3 \cdot 3 + \omega^2$，我们希望我们的和能够以尽可能高效的方式动态地合并这些 ω^3，也就是像最小公倍数和那样，同时还能够将 ω 吸收到 ω^2 中，从而得到 $\omega^3 \cdot 3 + \omega^2$。

这是通过以下和实现的。

定义 5.19。序数 $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} \cdot k_i$ 和 $\beta = \sum_{i=1}^m \omega^{\delta_i} \cdot l_i$（以康托尔范式表示）的 **动态和** 归纳定义如下:

(i) $\alpha * 0 = 0 * \alpha = \alpha$;
(ii) If $\gamma_1 > \delta_1$, then $\alpha * \beta = \beta * \alpha = \alpha$;
(iii) If $\gamma_1 = \delta_1 \neq 0$, then $\alpha * \beta = \beta * \alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot \max\{k_1, l_1\} + (\sum_{2<i<n} \omega^{\gamma_i} \cdot k_i * \sum_{2<i<n} \omega^{\delta_i} \cdot l_i)$.
If $\gamma_1 = \delta_1 = 0$, let $\alpha * \beta = k_1 + l_1$.

命题 5.20。 $*$ 是 上的良和。

证明。 这是一个和，可由前面对无限序数洗牌的描述得出。交换性可用归纳法证明，也可由定义直接得出。

对于结合律，给定 $\alpha, \beta, \delta \in Ord$，如果其中任一个的次数大于其余各项，那么无论如何安排结合顺序，结果都是该序数。接下来，考察最长的连续 ω^γ 链，其中所有序数的系数都非零，并注意到，整个和的结果会针对这些元素中的每一个，取三个序数的系数中的最大值；这一过程满足结合律。链在何处终止，康托尔范式中的下一个元素就必定在次数上存在差异，因此，我们只需考虑次数相同且最大的两个片段的 $*$ 和，或者取次数最大的那个片段。□

但这个和仍不是极小的。例如，将 $\alpha = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2$与 $\beta = \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4$相加时，我们会得到 $\alpha * \beta = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 4$，尽管我们本可以将所有 β 吸收到 $\omega^2 \cdot 3$ 中，从而省去末尾的 $\omega \cdot 4$（这等于 $\omega^2 \cdot 2 + \omega^2$，因此我们可以把这些 $\omega^2 \cdot 2$ 合并起来，并将 $\omega \cdot 4$ 放在 ω^2 前面，使其被吸收）。加入这一修改后，便得到真正的下界和。

定义 5.21. 如果 $\alpha, \beta \in Ord$，设 $\alpha = \omega \cdot \alpha' + n_\alpha$ 和 $\beta = \omega \cdot \beta' + n_\beta$，定义最小和 为

$$\alpha +_{min} \beta = \begin{cases} \max\{\alpha, \beta\}, \text{ if } \alpha' \neq \beta', \\ \alpha + n_\beta, \text{ else} \end{cases}$$

这也是良和的另一个例子。

命题 5.22. $+_{min}$ 是 Ord上的良和。

证明。 如果 $\alpha' \neq \beta'$，不失一般性，设 $\alpha' < \beta'$，且 $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$。否则，我们可以将 $\omega \cdot \beta'$ 洗牌进$\omega \cdot \alpha'$，并将有限系数相加。这证明了 $+_{min}$ 是一个和。

根据定义，它是交换的。

假设我们要加上 $\alpha \geq \beta \geq \delta$。我们有三种方法可以做到:

$$(\alpha +_{min} \beta) +_{min} \delta, \ (\alpha +_{min} \delta) +_{min} \beta, \ (\beta +_{min} \delta) +_{min} \alpha$$

结合律有三种重要情形需要考虑:

(1) $\alpha' > \beta'$，此时和为 α；(2) $\alpha' = \beta' = \delta'$，那么三种结合方式的结果都等于 $\alpha + n_\beta + n_\delta$；(3) $\alpha' = \beta' > \delta'$，此时所有的和都为 $\alpha + n_\beta$。

□

注 5.23. 注意，这个和的行为与基数上的基数和相同。

最后，我们得到了命题 5.11 中缺少的上界。

定理 5.24. 设 $\gamma \in Ord$ 是 $\alpha, \beta \in Ord$ 的一个和的实例，则

$$\alpha +_{min} \beta \leq \gamma \leq \alpha \# \beta$$

证明. 上界已由命题 5.11 给出。

首先，令 $\alpha = \omega \cdot \alpha' + n_\alpha$、 $\beta = \omega \cdot \beta' + n_\beta$ 和 $\delta = \omega \cdot \delta' + n_\delta$ 为任意序数。我们证明 t

$$(\alpha +_{min} \beta) + \delta \geq \alpha +_{min} (\beta + \delta).$$

需要考虑三种情形:

(1) 如果 $\alpha' > \beta'$，那么 $(\alpha +_{min} \beta) + \delta = \alpha + \delta$；并且要么 $\delta' > \beta'$，因此 $\beta + \delta = \delta$，且等号成立；要么 $\delta' \leq \beta'$，此时要么 $\beta' + \delta' > \alpha'$，因此 $\alpha +_{min} (\beta + \delta) = \beta + \delta \leq \alpha + \delta$；要么 $\beta' + \delta' < \alpha'$，因此 $\alpha +_{min} (\beta + \delta) = \alpha$；要么 $\beta' + \delta' = \alpha'$，因此 $\alpha +_{min} (\beta + \delta) = \alpha + n_\beta + n_\delta < \alpha + \delta$；因为如果 $\delta < \omega$，那么 $\delta' = 0$ 且 $\beta' + \delta' = \beta' = \alpha'$，这就产生矛盾。

(2) 如果 $\alpha' < \beta'$，那么 $(\alpha +_{min} \beta) + \delta = \beta + \delta = \alpha +_{min} (\beta + \delta)$。
(3) 如果 $\alpha' = \beta'$，那么要么 $\delta \geq \omega$ 且 $\beta' + \delta' > \alpha'$，因此

$$(\alpha +_{min} \beta) + \delta = \alpha + n_\beta + \delta = \alpha + \delta = \beta + \delta = \alpha +_{min} (\beta + \delta)$$

或 $\delta < \omega$ 和

$$(\alpha +_{min} \beta) + \delta = \alpha + n_\beta + n_\delta = \alpha +_{min} (\beta + \delta)$$

利用这个不等式，我们得到，对于任意 α，β，γ，$\delta \in Ord$

$$(\alpha +_{min} \beta) + \gamma + \delta = ((\alpha +_{min} \beta) + \gamma) + \delta \geq ((\alpha + \gamma) +_{min} \beta) + \delta \geq (\beta + \delta) +_{min} (\alpha + \gamma)$$

回到我们最初的 设置：由于 γ 是 α 和 β的和的一个实例，以下分解

$$\gamma = \sum_{\varepsilon<\delta}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon),\ \alpha = \sum_{\varepsilon<\delta}\alpha_\varepsilon,\ \beta = \sum_{\varepsilon<\delta}\beta_\varepsilon$$

存在；不失一般性，我们可以假设 $\alpha_0 \neq 0$。对 $\nu \leq \delta$应用归纳法，我们
证明

$$\sum_{\varepsilon<\nu}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) \geq \sum_{\varepsilon<\nu}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\nu}\beta_\varepsilon$$

基例显然成立。如果它对 ϕ 成立，那么对 $\nu = \phi + 1$

$$\sum_{\varepsilon<\nu}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon<\phi}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) + (\alpha_\nu + \beta_\nu) \geq (\sum_{\varepsilon<\phi}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\phi}\beta_\varepsilon) + (\alpha_\nu + \beta_\nu) \geq \sum_{\varepsilon<\nu}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\nu}\beta_\varepsilon$$

（最后一步使用该不等式）。
如果 $\nu \in Lim$，那么

$$\sum_{\varepsilon<\nu}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) = \lim_{\phi<\nu}\sum_{\varepsilon<\phi}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) \geq \lim_{\phi<\nu}(\sum_{\varepsilon<\phi}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\phi}\beta_\varepsilon)$$

因此这次我们必须证明

$$\lim_{\phi<\nu}(\sum_{\varepsilon<\phi}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\phi}\beta_\varepsilon) \geq \sum_{\varepsilon<\nu}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\nu}\beta_\varepsilon$$

假设这不成立，那么必有

$$\sum_{\varepsilon<\nu}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\nu}\beta_\varepsilon > \lim_{\phi<\nu}(\sum_{\varepsilon<\phi}\alpha_\varepsilon +_{min} \sum_{\varepsilon<\phi}\beta_\varepsilon) \geq \begin{cases} \lim_{\phi<\nu}\sum_{\varepsilon<\phi}\alpha_\varepsilon = \sum_{\varepsilon<\nu}\alpha_\varepsilon, \\ \lim_{\phi<\nu}\sum_{\varepsilon<\phi}\beta_\varepsilon = \sum_{\varepsilon<\nu}\beta_\varepsilon \end{cases}$$

但这样一来，左边就不可能是被加项中的最大值，因此根据定义，两个被加项都必须是后继序数。但这样就与归纳假设矛盾，因为存在某个序数 $\mu < \nu$，使得对所有 $\varepsilon > \mu$，α_ε 和 β_ε 都为 0。□

这个结果相当引人注目：我们用不仅是和，而且满足结合律和交换律的界，来限制那些可能是也可能不是某种合理（例如满足结合律）的和的结果。

最后，我们利用这些界来证明强不可分解序数的刻画。

命题 *5.8* 的证明。我们需要证明，对于任意的 γ， ω^γ 都是强不可分解的。 $\gamma = 0$ 的情形显然成立，因此假设 $\gamma > 0$。

设 ω^γ 是 α 与 β 的和的一个实例。不妨设，若 $\omega \leq \omega^\delta \cdot m + \cdots = \alpha \leq \beta = \omega^\delta \cdot n + \ldots$，则

$$\omega^\delta \cdot n + \cdots = \alpha +_{min} \beta \leq \omega^\gamma \leq \alpha \# \beta = \omega^\delta \cdot (m+n) + \ldots,$$

因此 $\omega^\delta \leq \omega^\gamma$，假设这不是等式，则

$$\alpha \# \beta = \omega^\delta \cdot (n+m) + \cdots < \omega^\delta \cdot (n+m+1) < \omega^{\delta+1} \leq \omega^\gamma \leq \alpha \# \beta,$$

矛盾。因此 $\delta = \gamma$，并且根据命题 5.6， $\omega^\gamma \preceq \beta$。事实上，我们必须有 $\omega^\gamma = \beta$，否则 $\omega^\gamma < \beta \leq \alpha +_{min} \beta$。 □

为了结束本节，我们证明，基于前文对吸收如何发生的讨论而形成的关于黑森堡和的一种直观刻画并不成立。为此，我们构造一个新的和。

定义 5.25。给定某个基数 κ，我们称类 C 上的和 $\oplus$ 将被加项分解为 $< \kappa$部分，如果对于任意 A， $B \in C$，都可以找到相应的和嵌入 $e_A^{A\oplus B}$ 和 $e_B^{A\oplus B}$，使得 $e_A^{A\oplus B}(A)$ 和 $e_B^{A\oplus B}(B)$ 都构成 $A \oplus B$ 中的 $< \kappa$ 个互不相交的凸块。

如果 $\kappa = \aleph_0$，我们称 $\oplus$ 有限地分解加项。

我们用来定义最小公倍数和及其所有变体的序数交错排列方法，不能有限地分解加项。尽管如此，黑森堡和总能有限地分解加项。鉴于 Carruth 对自然序数运算的刻画以及我们对交错排列的讨论，人们或许会预期它是唯一能如此分解加项的自然和。

例 5.26。给定序数 $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} \cdot k_i$ 和 $\beta = \sum_{i=1}^m \omega^{\delta_i} \cdot l_i$（以康托尔范式表示），递归定义 $\oplus$ 如下：

(i) $\alpha \oplus 0 = 0 \oplus \alpha = \alpha$；(ii) 若 $\gamma_1 > \delta_1$，则 $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \alpha$；(iii) 若 $\gamma_1 = \delta_1$，则 $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot (k_1 + l_1) + (\sum_{2<i<n} \omega^{\gamma_i} \cdot k_i \oplus \sum_{2<i<n} \omega^{\delta_i} \cdot l_i)$。

这个和是良和，并且将被加项有限地拆分，但它不是自然序数运算，例如 $\omega \oplus 1 = \omega \oplus 2$。

5.1.1. 良序的良扩张。为消除人们对序数是否作为良类具有特殊性或唯一性的任何疑虑，我们给出它们的一个良扩张。

考虑所有不能嵌入 $\mathbb{Z}$ 的序所构成的类。这个序型类的一个具体刻画是

$$WO + WO^* = \{\alpha + \beta^* \mid \alpha, \beta \in Ord\}.$$

设 $\tilde{\oplus}$ 是你最喜欢的定义在序数上的良和，将其扩张 $\oplus$ 定义到整个 $WO + WO^*$ 上如下：

$$(\alpha_1 + \beta_1^*) \oplus (\alpha_2 + \beta_2^*) = (\alpha_1' \tilde{\oplus} \alpha_2') + (n_1 + n_2) + (\beta_1'^* \tilde{\oplus}^{-1} \beta_2'^*),$$

其中 α_1'， α_2'， β_1'， $\beta_2' \in Lim$，且对于 $i \in \{1,2\}$， $\alpha_i + \beta_i^* = \alpha_i' + n_i + \beta_i'^*$.

注5.27。给定任意一个和 $\oplus$，我们可以定义与之对应的和 $\oplus^{-1}$，令 $A \oplus^{-1} B = (B^* \oplus A^*)^*$。如果 $\oplus$ 是良序上的结合和或交换和，那么 $\oplus^{-1}$ 也将是逆良序上的结合和或交换和。一般而言，如果 $\oplus$ 是全局和，那么 $\oplus^{-1}$ 将保留其性质。

由于 $\tilde{\oplus}$ 是良类，根据两个极限序数之和的任何实例都不可能是非极限序数， $\oplus$ 也同样是良类。

5.2. **有理数洗牌**。 $\mathcal{W}$ 作为良类的例子依赖于由康托尔标准形[13]所提供的分解结构理论。我们希望再给出一个具有具体良和的良类例子，其定义依赖于结构理论的另一部分：Cantor 对不带端点的可数稠密线性序的辨识。

定理 5.28。 任何没有端点的可数稠密线性序都与 $\mathbb{Q}$同构。

证明。 这可由著名的来回构造得出。 □

用一个非常类似的论证，我们可以得到 Skolem 给出的推广。

定理 5.29。 固定一些 k, $1 \leq k \leq \omega$。设 X, Y 是没有端点的可数稠密线性序（ $\mathbb{Q}$的两个副本）。固定一个划分 $X = \bigcup_{i<k} X_i$ ，使得每个 X_i 在 X中稠密， $Y = \bigcup_{i<k} Y_i$也类似。存在一个同构 f： $X \,!\, Y$，使得对于每个 $i < k$，都有 $f(X_i) = Y_i$。

要构造我们的类，先取一个分解 $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Q}$，其中每个 $\mathbb{Q}_n$ 在$\mathbb{Q}$ 中稠密（例如，取所有既约形式的分母为p_{n+1}^k的有理数，其中 p_i是 i^{th} 素数，且 $k \in \{1, 2, \dots\}$）。

对于每个 n，固定一个非空[14] 序 I_n，并令 $\mathbb{Q}(I_n)$ 为由 I_n洗牌得到的序，即˜将 $\mathbb{Q}$ 中包含于 $\mathbb{Q}_n$ 的每个点替换为 I_n所得的序。令 $\mathfrak{S}$ 为所有由 I_n洗牌得到的序的类。利用 Skolem 定理，我们可以证明，原来的稠密划分不会影响这些替换的序型。

一般来说，我们希望良和 $+_{\tilde{\mathfrak{S}}}$ 满足

$$\mathbb{Q}(I_n) +_{\tilde{\mathfrak{S}}} \mathbb{Q}(J_n) = \mathbb{Q}(I_n, J_n),$$

其中 $\mathbb{Q}(I_n,\ J_n)$ 是由以下对象洗牌得到的序

$$K_n = \begin{cases} I_m, \text{ if } n = 2m \\ J_m, \text{ if } n = 2m+1 \end{cases}$$

˜我们需要一种方法，以便给定一个序时，能够判断它是否属于 $\mathfrak{S}$；此外，我们还需要能够识别用于构造它的序 I_n 。如何做到这一点并不明确，因为同一个序可能有多个等价表示，例如，$\mathbb{Q}(1) \cong \mathbb{Q}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}(1,\ \mathbb{Q})$。要提取典型代表元，我们需要避免自指。

回忆一下， $\preceq_c$ 表示凸嵌入于。每当我们写作 $[\{x, y\}]$ 或 $(\{x, y\})$ 时，指的是从 x 到 y 或从 y 到 x的区间，具体取决于 $x \leq y$ 还是 $y \leq x$。

定义 5.30. 给定一个线性序 X，定义其自指的凝缩为等价关系 $\sim_X$，使得对于任意 $x,\ y \in X$，

$$x \sim_X y \text{ iff } X \not\preceq_c [\{x, y\}].$$

˜**引理 5.31.** 对于任意 $X \in \mathfrak{S},\ \sim_X$ 是一个凝缩。

证明。 根据定义，对称性成立；由于 $X \ncong 0,\ 1$，自反性成立。凸性也显而易见。

关于传递性，注意如果 $x \sim_X y \sim_X z$，那么如果 $X \preceq_c [\{x, z\}]$，令 X' 为 $[\{x, z\}]$内 X 的副本。如果 $y \in [\{x, z\}]$，那么 $y \in X'$，因此如果 $X = \mathbb{Q}$ （ I_n），且 y 所落入的稠密段对应于有理数 q，那么集合 $(q,\ \infty)(I_n)$，$(-\infty,\ q)(I_n) \cong \mathbb{Q}(I_n)$[15]，，由此我们得到与 $X \not\preceq_c [\{x, y\}]$矛盾的结论。否则，情况就简单一些，因为 $[\{x, y\}]$ 或$[\{y, z\}]$ 中必有一个包含 $[\{x, z\}]$。□

[13]这也取决于在良序中定义新和时所具有的自由度，因为该类对任意和封闭。[14]我们可以忽略所有空序。如果你想只使用有限个序，只需重复使用它们。[15]这里，我们按照原划分在这些区间上的限制进行替换。

为避免识别洗牌结构时出现问题，我们称稠密有理洗牌L 是可接受的，如果 $L/\sim_L$ 是可数的。

正如预期，我们将把凝缩给出的序作为可容许洗牌的典范洗牌序。由任意洗牌的齐性可知，这些凝缩类确实在凝缩中稠密。因此， $L/\sim_L$ 是一个无端点的可数稠密线性序（洗牌的任何末段都能将整个序凸嵌入其中），故与 $\mathbb{Q}$同构。

利用洗牌的这些典范表示，我们可以正式定义 $+_{\tilde{\mathfrak{S}}}$.

定义 5.32。若 S_1， S_2 是两个可容许洗牌，并分别具有来自自指凝缩的两个表示 $\mathbb{Q}(I_n)$ $\mathbb{Q}(J_m)$，令

$$S_1 +_{\tilde{\mathfrak{S}}} S_2 \cong \mathbb{Q}(I_n, J_m).$$

这个和显然是正则且交换的；要证明结合律，我们需要证明关于该表示的和产生一个可容许洗牌，并且结合律确实成立。可以证明，只有考虑可数洗牌（而不只是可容许洗牌）时，这才有可能。

˜**定义 5.33**。设 $\mathfrak{S}$ 为 $\mathfrak{S}$中所有可数元素构成的类， $+_{\mathfrak{S}}$ 为 $+_{\tilde{\mathfrak{S}}}$在 $\mathfrak{S}$上的限制。

从现在起，我们只考虑 $\mathfrak{S}$中的交错排列。

显然， $\mathfrak{S}$的每个元素都是可容许的，任意两个可数洗牌的和仍是可数洗牌，因此也是可容许的。为证明结合律，我们需要进一步了解自指凝缩所产生的交错排列序。

定义 5.34。若两个可数线性序列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 和 $\{J_m\}_{m\in\omega}$ 满足：对于每个 $n \in \omega$，都存在一个 $m \in \omega$ 使得 $J_m \cong I_n$；反过来，若 $m \in \omega$，则存在一个$n \in \omega$ 使得 $I_n \cong J_m$，就称它们等价。

注意，若 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 和 $\{J_m\}_{m\in\omega}$ 等价，则 $\mathbb{Q}(I_n) \cong \mathbb{Q}(J_n)$。

我们抽象出由自指凝缩产生的替换序的关键性质。

定义5.35. 可数线性序的一个集合 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 称为极小的，当且仅当对所有 $n \in \omega$,$\mathbb{Q}_n(I_n) \not\preceq_c I_n$。

极小序（在等价意义下）可以刻画为那些来自自指凝缩的序。

命题5.36. 若 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 和 $\{J_m\}_{m\in\omega}$ 是极小的，且 $\mathbb{Q}(I_n) \cong \mathbb{Q}(J_m)$，则 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 和$\{J_m\}_{m\in\omega}$ 等价。

证明. 固定一个同构 $f : \mathbb{Q}(I_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(J_m)$。由交错排列的稠密性可知， $\mathbb{Q}(I_n)$中的任一区间 I 若与多个替换序 I_n 相交，就包含$\mathbb{Q}(I_n)$的一个凸副本；对于 $\mathbb{Q}(J_m)$中的任一区间 J，若它与多个 J_m相交，情况也相同。

对于任意 I_n，这意味着对于某个 $m \in \omega$， $f(I_n) \subseteq J_m$。我们必须有等号成立；否则，对于另一个 $n' \in \omega$, $f(I_{n'}) \cap J_m \neq \emptyset$，这就意味着 $\mathbb{Q}(J_m) \cong \mathbb{Q}(I_n) \preceq_c J_m$。因此， $I_n \cong J_m$。对称地，对于任意 J_m，存在一个 I_n，使得 $I_n \cong J_m$。所以，这些列表是对称的。□

了解洗牌的极小表示与非极小表示之间的关系会很有用。

命题 5.37。假设 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 是一个极小列表，而 $\{J_m\}_{m\in\omega}$ 是满足 $\mathbb{Q}(I_n) \cong \mathbb{Q}(J_n)$ 的任意另一个列表。对于每个 $m \in \omega$，以下情况恰有一种成立：

(i) J_m 同构于列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 中的一个序，(ii) $\mathbb{Q}$ $(I_n) \preceq_c J_m$。

此外，在情形 *(ii)* 中，我们有 $J_m \cong L + \mathbb{Q}(I_n) + R$，其中 L 或者同构于列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 中的一个序，或者为空；同样，R 同构于列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 中的一个序，或者为空。

证明。固定 $m \in \omega$，并假设 J_m 不同构于列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$中的任何一个序。

我们首先证明 J_m 凸嵌入 $\mathbb{Q}(I_n)$。假设并非如此。若 $f : \mathbb{Q}(J_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(I_n)$，那么如同前一个命题中一样，我们必有 $f(J_m) \subseteq I_n$ 对于某个 $n \in \omega$。根据假设，这个包含必须是严格的。然而，由于稠密性，存在另一个 $m' \in \omega$，使得 $f(J_{m'}) \cap I_n \neq \emptyset$。令$q,\ r \in \mathbb{Q}$ 为由这些序替换的有理数，那么

$$\mathbb{Q}(I_n) \cong \mathbb{Q}(J_m) \cong (\{q, r\})(J_m) \subseteq I_n,$$

这与 I_n的极小性矛盾。

为了证明 $J_m \cong L+\mathbb{Q}(I_n)+R$，需要根据是否存在极小和最大有理数 q，以及是否存在与之关联的替换序 $I_{n'}$ 使得 $J_m \cap I_{n'} \neq \emptyset$，检查四种情况。我们处理存在这样的极小 q、但不存在最大有理数的情形。

设 $q \in \mathbb{Q}$ 为这样的有理数中的极小者，并称 I_{n_q} 为其对应的替换序。必有 I_{n_q} 完全包含在 J_m中，否则它会与某个其他 $J_{m'}$相交，从而嵌入$\mathbb{Q}(I_n)$。因此，I_{n_q} 是 J_m的一个初始段。

设 $r \in \mathbb{R}$ 为所有其对应的替换序 $I_{n'}$ 与J_m相交的有理数的上确界。这个数存在，否则 J_m 将是 $\mathbb{Q}(J_m)$的一个末段。由此可得 $J_m \cong I_{n_q} + (q,\ r)(I_n)$，从而证明了此情形下的表示。□

在此命题的情形 (ii.) 中，我们可以将 J_m 看作是用列表 $\{I_n\}$ 中的序替换 $\mathbb{Q}$、$1 + \mathbb{Q}$、$\mathbb{Q} + 1$ 或$1 + \mathbb{Q} + 1$ 之一，并且这些序在替换中都稠密地出现。替换 **1** 的序可以从列表中任意选取。我们将此类序称为列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$的**扩展洗牌**。

命题 5.38。设 $\{I_n\}_{n\in\omega}$ 是一个极小列表，且 $\mathbb{Q}(J_m)$ 是一个洗牌，使得对每个 $m \in \omega$，以下条件之一成立：

(i) J_m 与列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$中的某个序同构，(ii) J_m 是列表 $\{I_n\}_{n\in\omega}$的一个扩展洗牌。

进一步假设，至少对一个 $m \in \omega$，条件 (*ii*) 成立。那么 $\mathbb{Q}(J_m) \cong \mathbb{Q}(I_n)$。

在证明这个命题之前，先简要讨论迭代替换会很有帮助。

若 Q 是某个线性序，并且存在一个序的指标序列 $\{I_q\}_{q\in Q}$，我们可以构造一个新的序 $Q[I_q] = \sum_{q\in\mathbb{Q}} I_q$，称为的替换为 $\{I_q\}_{q\in Q}$，其中 $q \in Q$中的每个点都替换为与之对应的单点序 I_q。我们的洗牌只不过是这种操作的一个特例：在这种情况下，我们用序列 $\{I_q\}_{q\in\mathbb{Q}}$ 进行替换，使得对任意 $r \in \mathbb{Q}$，$\{q \in \mathbb{Q} \mid I_q \cong I_r\}$ 在 $\mathbb{Q}$中稠密。讨论洗牌时，我们也可以考虑它作为替换的对应具体表示。

假设 Q 是一个线性序，且 $Q[I_q]$ 是一个替换。若依次将每个 I_q 替换为$M_q[A_{(q,m)}]$，则有 $Q[I_q] = Q[M_q[A_{(q,m)}]]$。这个序自然同构于用序 $A_{(q,m)}$替换 $Q[M_q]$ 所得的序，即有 $Q[M_q[A_{(q,m)}]] \cong Q[M_q][A_{(q,m)}]$。

还可以注意到，若 $\mathbb{Q}[M_q]$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个替换，且对每个 $q \in \mathbb{Q}$，都有 M_q同构于**1**、$\mathbb{Q}$、$1 + \mathbb{Q}$、$\mathbb{Q} + 1$或 $1 + \mathbb{Q} + 1$中的某一个，那么 $\mathbb{Q}[M_q] \cong \mathbb{Q}$，因为这个序是可数、稠密且没有端点的。

证明。考虑序列 $\{J_q\}_{q\in\mathbb{Q}}$，使得对任意 $q \in \mathbb{Q}$，J_q 都是 J_n，即在 $\mathbb{Q}(J_n)$中用 q 替换的序。因此，$\mathbb{Q}(J_n) = \mathbb{Q}[J_q]$。

根据假设，我们可以将每个 J_q写成替换 $M_q[I_{(q,m)}]$，其中 M_q是 $\mathbf{1}, \mathbb{Q}, 1 + \mathbb{Q}, \mathbb{Q} + 1$ 或 $1 + \mathbb{Q} + 1$之一。每个 $I_{(q,m)}$ 都与某个 I_n同构；当 $M_q \neq 1$时，每个 I_n都会作为 $I_{(q,m)}$ 在替换 $M_q[I_{(q,m)}]$中稠密地出现。我们可以将 $\mathbb{Q}[J_q] = \mathbb{Q}[M_q[I_{(q,m)}]]$

视为 $\mathbb{Q}[M_q] \cong \mathbb{Q}$的替换 $\mathbb{Q}[M_q][I_{(q,m)}]$ 。因此，要证明 $\mathbb{Q}(J_m) \cong \mathbb{Q}(I_n)$，只需验证每个 I_n 都会作为 $I_{(q,m)}$ 在替换 $\mathbb{Q}[M_q][I_{(q,m)}]$中稠密地出现。

固定 $n \in \omega$。根据假设，至少存在一个 $m \in \omega$，使得 J_m 是$\{I_n\}_{n\in\omega}$的扩展洗牌，并且存在稠密多个 q，使得 $J_q \cong J_m$。因此，存在稠密多个 q，使得 $M_q \neq 1$。固定 $\mathbb{Q}[M_q]$中的 $a < c$。我们断言存在 b，满足 $a < b < c$，使得 $I_b = I_n$。如果a，$c \in M_q$ 对某个 q成立，那么由于 I_n 在替换 $M_q[I_{(q,m)}]$中作为 $I_{(q,m)}$ 稠密地出现，因此在 M_q中存在这样一个 b。而如果 $a \in M_q$ 且对某个 $q < r$有 $c \in M_r$，那么由于存在 t，使得$q < t < r$，且有 $M_t \neq 1$，因此存在这样一个 $b \in M_t$。证毕。□

我们终于可以证明 $+_{\mathfrak{S}}$的结合律了。

引理 5.39. 假设 $X \cong \mathbb{Q}(I_n)$ 和 $Y \cong \mathbb{Q}(J_n)$ 分别是 X 和 Y作为洗牌的极小表示。那么，$\mathbb{Q}(I_n, J_n)$ 是 $X +_{\mathfrak{S}} Y$的一个极小表示。

证明。反设不然。那么，不失一般性，假设对于某个 $m \in \omega$, $\mathbb{Q}(I_n, J_n) \preceq_c J_m$。如果 $\mathbb{Q}(K_l) \cong \mathbb{Q}(I_n, J_n)$ 是一个极小表示，根据命题 5.37，$J_m \cong L + \mathbb{Q}(I_n, J_n) + R$，其中 L, R 可以是 K_l中的任意一个，也可以为空。由于对于任何其他凸嵌入 $\mathbb{Q}(I_n, J_n)$的 $J_{m'}$，这一点都成立；而且，如果 $J_{m'}$ 不凸嵌入该和，那么根据命题 5.37，它必定同构于某个 K_l，因此我们恰好处于命题 5.38的情形。因此，$\mathbb{Q}(J_n) \cong \mathbb{Q}(I_n, J_n)$，但这与 $\{J_n\}_{n\in\omega}$的极小性矛盾，因为这样我们就有$\mathbb{Q}(I_n, J_n) \cong \mathbb{Q}(J_n) \preceq_c J_m$。□

这立即给出了结合律，因为

$$\mathbb{Q}(I_n) +_{\mathfrak{S}} (\mathbb{Q}(J_n) +_{\mathfrak{S}} \mathbb{Q}(K_n)) \cong \mathbb{Q}(I_n, J_n, K_n) \cong (\mathbb{Q}(I_n) +_{\mathfrak{S}} \mathbb{Q}(J_n)) +_{\mathfrak{S}} \mathbb{Q}(K_n).$$

因此，我们已经证明，可数稠密有理洗牌构成一个良类。

5.3. **复杂类**。本节将给出一个充分条件，使任意序类成为良类。与迄今考虑的和不同，由这一结果得到的和并不依赖于所考虑类的任何良好结构性质，而是依赖于它们缺乏结构。这种方法极其灵活，几乎不受限制地生成和；唯一潜在的缺点是需要依赖选择公理。

设 $LO_\lambda = \{L \in LO \mid |L| = \lambda\}$。

定义 5.40。若一个类 $K_\lambda \subseteq LO_\lambda$ 对任意两个 A，$B \in K_\lambda$，都存在 2^λ 个非同构实例，它们是 A 与 B 的和，则称该类为复杂的。

注5.41。这类可以被视为和饱和的：类中两个元素的和的可能实例数达到最大值，同时仍不脱离该类。

Re标记 5.42。 由定理 5.9 可知，复杂类不可能包含两个良序。

在提出复杂类的和存在性主张之前，我们需要为所有序型组成的类选取一类典范代表元。令 $\mathcal{LO}_\kappa$ 为 $\{L \in LO \mid L$ 中所有序型的一组互不相同的代表元，其论域为 $\kappa \in$ 实数$\}$

对于任意线性序类 $\mathcal{C}$，令

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{LO}_\lambda.$$

这个集合的基数至多为 2^{λ}[16]。

定理 5.43。 给定 $K_\lambda \subseteq LO_\lambda$ 及其任意子类 $E \subseteq K_\lambda$，使得 $K_\lambda - E$ 是复杂类，并且在 E 上存在良和 $\oplus_E$。若 K_λ 上的 $<_\lambda$ 是良序，则存在一个在 K_λ 上、扩张 $\oplus_E$ 的良和 $\oplus$。

[16]在 λ 上的任意线性序都只是 $\lambda \times \lambda$ 的一个子集，因此可以赋予 λ 的线性序至多有 $|\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = 2^\lambda$ 个。

证明。令 $\langle L_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\rangle$ 为由 $<_\lambda$ 提供的 K_λ 的枚举，并令 $\mathcal{B}_E$ 由 $<_\lambda$ 为 E 中各类型的代表元所指定的序数组成。

对 α 进行归纳法，定义 $(\mathcal{U}_\alpha,\ \oplus_\alpha)$，使得：

(a) $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \alpha \cup \mathcal{B}_E$；(b) 如果 $\beta < \alpha$，则 $\mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}_\alpha \cap (\beta \cup \mathcal{B}_E)$；(c) 对所有 $n < \omega$ 和 $\langle \beta_0, \ldots, \beta_n\rangle \in {}^{n+1}(\alpha \cup \mathcal{B}_E)$，我们定义 $\oplus_\alpha\langle L_{\beta_l} \mid l \le n\rangle$（一个定义在序列上且输出取自 K_λ 的和），并具有以下性质：

- $\bullet_1$ $\oplus_\alpha(\langle L_\beta\rangle) = L_\beta$，如果 $\beta \in \alpha \cup \mathcal{B}_E$；
- $\bullet_2$ 如果 $\beta < \alpha$，则 $\oplus_\beta = \oplus_\alpha \restriction \{\langle L_{\beta_l} \mid l \le n\rangle \mid \langle \beta_l \mid l \le n\rangle \in {}^{n+1}(\beta \cup \mathcal{B}_E)\}$；
- $\bullet_3$ 对于所有 $l \le m$、n，若 β_l、$\gamma_l \in \mathcal{U}_\alpha \cap \alpha$ 且 $\oplus_\alpha\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_{\beta_n}\rangle \cong \oplus_\alpha\langle L_{\gamma_0}, \ldots, L_{\gamma_m}\rangle$，则 $n = m$ 和 $\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_{\beta_n}\rangle$ 是 $\langle L_{\gamma_0}, \ldots, L_{\gamma_m}\rangle$ 的一个排列。同样，若 δ、$\varepsilon \in \mathcal{B}_E$ 且 $\oplus_\alpha\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_\delta \ldots, L_{\beta_n}\rangle \cong \oplus_\alpha\langle L_{\gamma_0}, \ldots, L_\varepsilon, \ldots, L_{\gamma_m}\rangle$，则 $n = m$、$\delta = \varepsilon$ 和 $\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_\delta \ldots, L_{\beta_n}\rangle$ 是 $\langle L_{\gamma_0}, \ldots, L_\varepsilon, \ldots, L_{\gamma_m}\rangle$ 的一个排列。包含有理数集的元素的序列之和永不同构于实数的元素之一；
- $\bullet_4$ 若 $\gamma \in (\alpha \cup \mathcal{B}_E)$，则对于某些 $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \mathcal{U}_\alpha$，$L_\gamma \cong \oplus_\alpha\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_{\beta_n}\rangle$，其中至多一个索引属于 $\mathcal{B}_E$；
- $\bullet_5$ 对于任意 $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \alpha$，若 $\sigma \in S_{n+1}$，

$$\oplus_\alpha\langle L_{\beta_0}, \ldots, L_{\beta_n}\rangle \cong \oplus_\alpha\langle L_{\beta_{\sigma(0)}}, \ldots, L_{\beta_{\sigma(n)}}\rangle.$$

令 $\mathcal{U}_0 = \mathcal{B}_E$，$\oplus_0 = \oplus_E$。

对于 $\alpha+1$，令 $\mathcal{U}_{\alpha+1} = \mathcal{U}_\alpha$：如果 L_α 属于 $\oplus_\alpha$ 的值域，则令其为 $\mathcal{U}_{\alpha+1} = \mathcal{U}_\alpha$；否则令其为 $\mathcal{U}_\alpha \cup \{\alpha\}$。为满足条件 (c).2，令 $\oplus_{\alpha+1} \restriction \{\langle L_{\beta_l} \mid l \le n\rangle \mid \langle \beta_l \mid l \le n\rangle \in {}^{n+1}(\alpha \cup \mathcal{B}_E)\} = \oplus_\alpha$。如果 L_α 属于 $\oplus_\alpha$ 的值域，则通过添加任意包含 L_α 的元组，使 $\oplus_{\alpha+1}$ 与 $\oplus_\alpha$ 保持一致，就像 $\oplus_\alpha$ 会做的那样；具体做法是，将 $\{L_\beta \mid \beta \in \mathcal{U}_\alpha\}$ 中作为序的元组之和的所有 L_α 实例展开。

如果新序不在值域中，就按字典序枚举 $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ 中至多有一个元素属于 $\mathcal{B}_E$[17] 的所有无序元组（允许重复），并优先枚举较短的元组。归纳地，在这些元组上定义我们的和。对于长度为 1 的元组，遵循 (c).1。给定一个长度为 > 1 的元组，如果其中有 α，就使用归纳假设将该元组不断缩并，直至长度为 2；并令该元组的和为任意一个 L_γ，使得对于 $\gamma > \alpha$，L_γ 是所考虑的两个序的和的一个实例，且迄今不在 $\oplus_\alpha$ 或 $\oplus_{\alpha+1}$ 的值域中（由于假设 $K_\lambda - E$ 是复杂的，我们不会用尽这些实例）。注意，α 包含于 $\mathcal{U}_{\alpha+1}$，这保证了 (c).4 得以满足。由于我们规定映射到的新序对每个无序元组都是唯一的，(c).3 得以满足。

对于极限阶段，令 $\mathcal{U}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{U}_\alpha$，并取 $\oplus_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \oplus_\alpha$。

将运算 $\oplus = \bigcup_{\alpha<2^\lambda} \oplus_\alpha$ 限制在序对上，并通过遵循正则性将其扩展到所有 K_λ，这是一个良和。□

注 5.44。如果令 $E = \emptyset$，则要求我们拥有一个良子类 E 并不构成限制；我们得到 K_λ 成为良类的一个充分条件。不过，正如我们将看到的那样，允许扩张为我们提供了极大的灵活性。

但是，复杂类一般真的存在吗？

例 5.45。令 $B_{\aleph_0}$ 为所有以 $\mathbb{Q}$ 作为凸子序的可数序组成的类 .

我们在这里需要证明的只是，有 $2^{\aleph_0}$ 种在仍属于这一类的前提下将 $\mathbb{Q}$ 与自身组合的方法。关键在于证明我们可以将任意无限二进制序列表示为和的一个实例。首先，我们证明可以将 $\mathbb{Q}$ 与自身组合，从而得到任意

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(2), \mathbb{Q}(1,2)$$

[17] 根据 (c).3 和 (c).5，我们可以考虑无序元组。如果某个索引不在 $\mathcal{U}_\alpha$ 中，则使用 (c).4 将其展开为 $\mathcal{U}_\alpha$ 中的元组。使用 $\oplus_0 = \oplus_E$ 合并 $\mathcal{B}_E$ 的元素。

实际上，我们将用它们来编码二进制序列，其中 $\mathbb{Q}$ 充当间隔符， $\mathbb{Q}(2)$表示0，而 $\mathbb{Q}(1，2)$表示1。

注意，这些序的任意 ω-和本身都是两个有理数副本之和的一个实例。首先，我们展示如何将所有这些序分解为两个有理数副本，即它们作为其和的一个实例的“红色”副本和“蓝色”副本。对于 $\mathbb{Q}$，令红色副本为 $(-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}$，蓝色副本为 $(\pi, \infty) \cap \mathbb{Q}$。对于 $\mathbb{Q}(2)$，令红色副本为所有后继元，蓝色副本为所有前驱元。最后，对于 $\mathbb{Q}(1,2)$，将所有前驱元以及没有前驱元或后继元的点视为红色点，并将所有后继元的集合视为蓝色点。给定这些序的一个 ω-和，注意，所有红色序的和以及所有蓝色序的和仍然是不带端点的可数稠密线序，因此同构于有理数，所以该和是两个有理数副本之和的一个实例。

由于我们可以用 $B_{\aleph_0}$ 中的两个元素编码任意可数二进制序列，因此这个类是复杂的。

例 5.46. 考虑 $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}，\ \mathbb{Q}(1，\ 2) + \mathbb{Q}，\ \mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q} \rangle$。

这个类是.....的闭包

$$\{\mathbb{Q}, 1+\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1,2)+\mathbb{Q}, 1+\mathbb{Q}(1,2)+\mathbb{Q}, 2+\mathbb{Q}(1,2)+\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}, 1+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}, 2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}\}$$

因此不难看出，采用与例 5.45 类似的方法，我们可以将长度为 κ 的二进制序列编码为由 $\mathcal{Q}_\kappa$ 中任意两个元素构成的和的实例。因此， $\mathcal{Q}_\kappa$ 是 κ-复杂的。

定义 5.47。 如果对于每个 $\lambda \in Card$，线性序类 K 都满足 K_λ 是复杂的，则称该类为复杂的 .

$\mathcal{Q}$是 我们第一个基数为任意（无限）基数的复杂序的例子 y.

6. Revisiting the properties of sums

在建立了构造新和的稳健理论之后，我们现在可以重新审视和的两个原始性质：点追踪和典范正则性。我们将证明，这两者都不能从正则性与结合律推出。为了展示我们构造和的方法具有灵活性，我们还将考察是否存在任何全局和能够表示一个非平凡群，并证明到目前为止我们考察过的结构化和都无法做到这一点，同时构造一个表示 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的和。

本节的指导性启发式是：每当存在一种合理的和的性质，而该性质并不决定刚性结构（比较点追踪和交换性这类性质与半标准性），结构化和与非结构化和之间就会出现二分。结构化和包括由序数良和构成且有限地拆分加项的和，以及简单和；非结构化和则包括由复杂类构造的和。

6.1. 点追踪。

回顾一下，定义 3.14 中原有的点追踪条件保证，结合律由一个同构来见证；该同构确保结合律两种情形中被加项之间的联合序相同。这是一种内在的局部性质；当我们的和的整体结构良好时，证明这一点很直接。

命题 6.1。 简单和追踪点。

证明。 诱导的 $f\colon (A \oplus B) \oplus C \xrightarrow{\sim} A \oplus (B \oplus C)$ 同构将只是通常用于见证.....的同构的复合

$$(A \oplus B) \oplus C \cong C_L + B_L + A + B_R + C_R \cong A \oplus (B \oplus C).$$

利用以下事实，逐步检查交换图，验证这一点：

$$A \oplus B \cong B_L + A + B_R,\ B \oplus C = C_L + B + C_R.$$

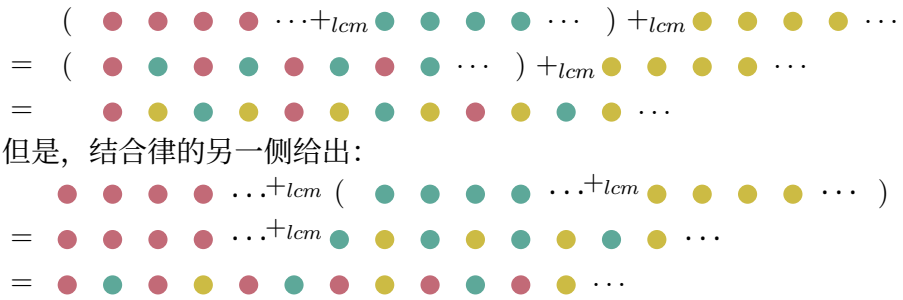
□

话虽如此，对于那些更彻底地洗牌点的和，这种做法可能会失效。

令 $+_{lcm}$ 表示最小公倍数和的全局扩展（最小值或动力和同样适用），注意

$$\omega +_{lcm} (\omega +_{lcm} \omega) \cong (\omega +_{lcm} \omega) +_{lcm} \omega$$

这是点追踪的一个反例。通过使用与该和相关联的标准嵌入，我们可以直观地证明这一点：



但是，结合律的另一侧给出：

正如我们所见，这个和的最大洗牌使得：右侧两个序中，分别位于 ω 的各个副本中相同位置的任意两个点，在结合律的不同情形下，其彼此之间的序会发生翻转。这与点追踪同构的存在相矛盾。

6.2. **典范正则性**。 作为刚性定理的直接推论，每个简单和都是规范正则的（和生成分量在同构下是刚性的）。

根据前面的例子（例 3.18），我们知道存在正则和并非典范正则；鉴于并非典范正则的正则和必定会以较低的稳健性交错排列其加项，我们或许可以预期每个正则结合和都是典范正则的。

运用复杂类方法，我们证明这种直觉是错误的

首先定义 $\oplus_E$在 $E = \{2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}\}$，令 $\oplus_E$交换、正则，并满足

$$(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E \mathbb{Q} = 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$
$$(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E (2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) = 2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$
$$(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E (1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) = 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$
$$(1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E \mathbb{Q} = 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$
$$(1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E (1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) = 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q} \oplus_E \mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

这是一个可能的和的输出集合，它使 $\oplus_E$ 在 E 上结合。

请注意，安排

$$(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}) \oplus_E \mathbb{Q} = 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$$

唯一的方法是将右侧加项 $\mathbb{Q}$ 至少拆分为两部分，把形如 $(-\infty, x)$ 的一部分放在 2 中 0 和 1 之间，同时让某个段 (x, y) 紧接在 $1 \in 2$ 的右侧。这里，x 必须是无理数，而 y 必须是无理数或 ∞。

采用定义 5 中的记号，令 $\psi\colon \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ 满足 $q \mapsto q+1$，并令 $\phi\colon 2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} 2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$ 为恒等映射。假设这个和是规范正则的；若 $f\colon 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} 1+\mathbb{Q}+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$ 是诱导的自同构，且 $q_x \in (x-1, x)$，而

$$e_{\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(q_x) < e_{1+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(1)$$

其中，1 表示 $2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}$ 左侧的 $1 \in 2$。如上所示，

$$f(e_{\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(q_x)) = e_{\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(q_x+1) > e_{1+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(1) = f(e_{1+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q}}^{(2+\mathbb{Q}(2)+\mathbb{Q})\oplus_E\mathbb{Q}}(1)).$$

这与 f 是保序的这一点相矛盾。

首先使用复杂类构造，将$\oplus_E$ 扩展为定义在整个 $\mathcal{Q}_{\aleph_0}$上的和 $\oplus_0$ ，从而将这个和扩展为全局和。注意到 $\mathcal{Q}_{\aleph_0} = \hat{}\mathcal{Q}_0^{card}$，使用基数筛选方案$\{(\mathcal{Q}_\alpha^{card}, \oplus_\alpha)\}_{\alpha\in Ord}$，其中 $\oplus_\alpha = +$ 对于 $\alpha > 0$成立。 $\mathcal{Q}$ 由一组有限的可数序生成，并且对非空末段封闭，因此这个滤过将是有效的，所得的筛取和 $\oplus$ 将是正则的、结合的，并将扩展 $\oplus_E$，所以它不会是规范正则的。

回顾一下：我们必须破坏典范正则性这一局部性质。为此，我们首先明确写下典范正则性失效的一个具体例子，随后围绕它在一个小集合上构造了一个良和。这为我们提供了足够的一致性，使得我们能够将这个和（使用复杂类构造）扩展到一个大型复杂类中可数序的子类。利用这样一个事实：这个复杂类很理想，因为它同时也是一个和生成类（SGC），并且相对于其对应的基数滤过具有良好的性质，我们使用筛取将这个定义在可数序子类上的和扩展为全局和。

6.3. **表示群**。令 $\mathcal{LO}$ 为序型类。

定义 6.2。给定一个群 $(G,\cdot)$，若存在一个单射 $\phi: G \to \mathcal{LO}$ ，使得对任意$g,h\in G$，都有同构不变二元运算 $\star: \mathcal{LO}\times\mathcal{LO} \to \mathcal{LO}$ 表示 G ，

$$\phi(g\cdot h) = \phi(g)\star\phi(h).$$

若存在 某个群 $(G,\cdot)$，使得 $\star$表示 G，我们就说 $(\mathcal{LO},\star)$ 表示一个群 .

到目前为止，我们考虑过的所有结构化和都不能表示任何非平凡群。

命题 6.3。如果 $\oplus$ 是一个简单和，那么在$(\mathcal{LO},\oplus)$ 中能表示的唯一群是平凡群。

证明。设 $\phi: G \to \mathcal{LO}$ 是群（G，$\cdot$）的一个表示，并设 $e\in G$ 为恒等映射，$a\in G$ 为任意元素。由于

$$\phi(e)_L + \phi(a) + \phi(e)_R = \phi(a)\oplus\phi(e) = \phi(a\cdot e) = \phi(a),$$

根据刚性定理，我们必须有 $\phi(e)_L + \phi(a)_L = \phi(a)_L$。类似地，

$$\phi(e) = \phi(a\cdot a^{-1}) = \phi(a)\oplus\phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1})_L + \phi(a) + \phi(a^{-1})_R,$$

因此 $\phi(e)_L = \phi(a^{-1})_L + \phi(a)_L$。根据基本定理， $\phi(e)_L = \phi(a)_L$。

完全相同的过程可以用来证明 $\phi(a)_R = \phi(a)_R$，从而 $\phi(e) = \phi(a)$，所以$e = a$。由于 a 是任意的，这表明 G 是平凡的。□

利用我们在 5.1 中找到的序数和的界的简单应用，对于序数上的和，给定在（Ord， $\oplus$）中表示和的类似定义，我们也可以排除这种情况。

命题 6.4。给定一个和 $\oplus$，能够在（Ord， $\oplus$）中表示的唯一群是平凡群。

证明。对于任意两个序数 α， β, $\alpha\oplus\beta \geq \alpha +_{min} \beta \geq \max\{\alpha,\beta\}$。

如果 ε 表示单位元， α 表示某个非平凡元素，而 α^{-1} 表示它的逆，那么

$$\alpha = \varepsilon\oplus\alpha \geq \max\{\varepsilon,\alpha\}$$
$$\alpha^{-1} = \varepsilon\oplus\alpha^{-1} \geq \max\{\varepsilon,\alpha^{-1}\}.$$

因此， α， $\alpha^{-1} > \varepsilon$，但是

$$\varepsilon = \alpha \oplus \alpha^{-1} \geq \max\{\alpha, \alpha^{-1}\}$$

一个矛盾。 □

此时，我们似乎已经穷尽了平常会用的大多数合理的和；它们实在太僵化了！

话虽如此，既然注意到表示一个非平凡群是局部性质，我们就可以利用更灵活的复杂类来“强制”得到一个非平凡群的表示。

在 $\mathcal{Q}$ 中，令我们的基集为 $E = \{\mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(1,\ 2) + \mathbb{Q}\}$。定义 $\oplus_E$ 在 E 上的和为

$$(\mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}) \oplus_E (\mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}$$
$$(\mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}) \oplus_E (\mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}) = (\mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}) \oplus_E (\mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}$$
$$(\mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}) \oplus_E (\mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q}.$$

不难验证，这些解都是所给序对之和的实例，并且 $\oplus_E$ 是 E 上的良和（这只是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的乘法表）。按照我们构造典范正则性失败例子的相同步骤，将 $\oplus_E$ 扩展为一个全局和 $\oplus$。

映射 $\phi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathcal{LO}$ 使得

$$\phi([0]) = \mathbb{Q}(2) + \mathbb{Q},\ \phi([1]) = \mathbb{Q}(1,2) + \mathbb{Q}$$

是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在（$\mathcal{LO}, \oplus$）中的表示。

References

[1] G.Cantor.关于超限集合论基础的贡献 ¨关于超限集合论基础的贡献 ¨关于超限集合论基础的贡献。第一篇（第一篇文章）.1.Teub- ner，1895年。[2] Philip W Carruth。“序数算术及其在有序阿贝尔群理论中的应用”。载于：《美国数学会通报》48.4（1942年），第262–271页。[3] F. Hausdorff。“有序集合理论基础。（文中附1幅图）”。载于：《数学年刊》65（1908年），第435–505页。[4] G. Hessenberg。集合论基本概念。《Fries学派论文集》。Vanden- hoeck & Ruprecht，1906年。[5] T. Jech。集合论。Springer，2014年。[6] A. Lindenbaum 和 A. Tarski。关于集合论研究的通信 ´集合论。1926年。[7] J.G. Rosenstein。线性序。《纯粹与应用数学》。Academic Press，1982年。[8] G. H. Toulmin。“《序数洗牌与超限维数》”。载于：《伦敦数学会会刊》（1954年），第177–195页。

(D´ıaz Ramos) Department of Mathematics, Stanford University
Email address: aldr@stanford.edu

(Ervin) Division of Physics, Mathematics, and Astronomy, California Institute of Technology
Email address: gervin@caltech.edu

(Shelah) Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem
Email address: shelah@math.huji.ac.il