arXiv:2512.13865v1 [math.DS] 15 Dec 2025

齐性动力系统之外的测度刚性

Simion Filip *

2025年10月

摘要。我们介绍近期的一些研究成果，它们将动力系统中的若干测度刚性和拓扑刚性结果，从李群作用下的齐性情形推广到了相当一般的流形。

1 引言。对于大多数动力系统而言，轨道及其统计行为（即不变测度）的分类都是难以处理的问题。不过，也存在一些有趣的动力系统，其分类是可能的，或至少已有相应猜想；我们称这类系统具有“刚性”。最早的例子之一是 Kronecker 定理：对于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的无理平移，每个轨道都是稠密的；而 Weyl 定理则保证，该轨道实际上相对于勒贝格测度等分布。

这一结论已推广至李群的齐性空间上的动力系统，详情将在下文回顾。本文介绍了将其推广至一般流形上某些类别的动力系统的研究成果，而不要求任何齐性。

齐性动力系统中的刚性。 Kronecker 定理和 Weyl 定理的证明几乎可以原封不动地推广到紧阿贝尔群（或者说，任何紧群）上的平移作用，不过此时轨道闭包由闭子群的陪集给出。已知具有类似结果的下一类系统，是李群有限体积商空间上的幺幂流——这就是 Raghunathan猜想，由 Ratner 完全证明，Margulis、Dani–Margulis 和 Margulis–Tomanov 也作出了重要贡献。幺幂元素带来的额外不变性是许多刚性结果的关键；正如下文将要看到的，即使一开始并未假设存在这种不变性，它也会出现在所有具有某种双曲性的系统中。刚性的另一来源是李群的高秩特征，这体现在 Margulis超刚性、Zimmer纲领（参见 Brown 和 Fisher 关于最新进展的报告）以及阿贝尔作用的刚性中（参见 Lindestrauss 的报告）。然而，这类刚性背后的基本机制与本文讨论的机制风格迥异。

随机游走的刚性。 Benoist–Quint 的工作取得了重大进展 [4, 5], ： 他们获得了类似于 Ratner 定理的轨道闭包与测度刚性结果，但研究对象是李群上的随机游走。关键在于，动力系统可以完全由双曲元素生成，但最终却沿幺幂方向获得了额外不变性。这一结果被 Eskin–Mirzakhani–Mohammadi [25, 24]推广到 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ 对平移曲面分层的作用，并被 Brown–Rodriguez Hertz [9] 推广到实二维曲面上的随机游走；关于复二维情形，另见 Cantat–Dujardin [11] ；关于齐性随机游走，另见 Eskin– Lindenstrauss [23] 。

一般情形。 本文的主题是：可以将上述某些刚性结果推广到相当一般的情形。一类例子来自由光滑流形的微分同胚生成的随机游走，另一类则来自一般的单参数光滑映射（离散时间或连续时间），这些映射具有某种初始正则性，这种正则性由“广义 u-Gibbs 态”（定义 4.6）这一概念加以刻画。已知这两种情形之间存在类比关系。

下面的主要技术结果——定理 5.2——表明，相关的平稳测度或不变测度必须具有额外不变性，除非其稳定支撑集与不稳定支撑集满足一种自然的“联合可积性”条件。在能够进一步控制双曲性的情形下，例如通过一致扩张这一概念，这些信息可用于推导测度的更多性质。

本文可作为作者与 Brown、Eskin 和 Rodriguez Hertz 合作研究成果及相关技术的导论 [8]。文中还介绍了一项关于全测地

*芝加哥大学（sfilip@math.uchicago.edu），修订于 2025 年 12 月 17 日

版权 © 20XX SIAM。未经授权，禁止转载本文。

流形的启发性刚性结果；该结果是作者与 Fisher 和 Lowe 合作，在具有可变负截面曲率的解析黎曼流形上获得的 [33]。

内容概览。 我们将在第 2 节介绍一些基本记号以及三个易于表述的结果。接下来，在第 3 节中，我们将介绍光滑动力学的背景知识，例如稳定/不稳定流形，以及熵理论。第 4 节将介绍标准形这一关键概念。它使我们能够描述沿稳定或不稳定流形的条件测度的幂零不变性。相关的线性化余循环除其他诸多用途之外，还被用于追踪具有额外不变性的几何对象的发散情况。随后，我们将在第 5 节陈述主要技术结果，并说明证明所涉及的一些要素。最后，在第 6 节中，我们将讨论一些由本文所述结果引发的自然问题。

2 背景与结果。 我们将在 § 2.1 中介绍所研究动力系统的背景和一些记号。在 § 2.2 中，我们将介绍三个促成更具技术性的主定理的结果。

2.1 设置：流形、流、随机游走。

基本假设。 设 Q 是一个流形，并用 Diff(Q) 表示 Q 上微分同胚所构成的群。稍后我们可以、也将专门讨论保持 Q 上额外结构的微分同胚，例如保持光滑体积测度、辛形式、实解析或复解析结构等的微分同胚。这里还要指出，Q 不必是紧的，甚至可能相对于自然给定的黎曼度量并不完备：例如，它可能是某个奇异代数簇的光滑轨迹，比如曲面群表示的特征簇。

我们的主要结果定理 5.2 适用于具有某种双曲性的流形上的流。为使记号简洁，以下我们将在最便于表述的情形下陈述结果。随机游走与流／群作用情形之间可以相互转换，但本文有时会省略这些转换。

随机游走。假设 μ是 Diff(Q) 上的概率测度；关于 Q 和μ 的精确技术假设详见 [8, §2]。一个典型例子来自离散群 Γ 在 Q上的作用：令 μ 为 Γ的生成元赋予非零概率，并考虑由此产生的 Q上的随机游走。R

接下来回顾一下，Q 上的概率测度 ν称为 μ-平稳的，如果 $\nu = \mu * \nu$，其中

$$\mu * \nu := \int_{\mathrm{Diff}(Q)} f_*\nu \, d\mu(f) \text{ and } f_*\nu(A) := \nu\left(f^{-1}(A)\right).$$

卷积 $\mu * \mu$ 的定义类似，它仍然给出 Diff(Q) 上的一个概率测度；我们用 μ^{*n} 表示其 n次卷积幂。我们将讨论范围限制在遍历平稳测度上，也就是不能表示为其他平稳测度的非平凡凸组合的测度。还要回顾一下，Krylov–Bogolyubov论证表明，平稳测度总是存在的（当 Q紧致时）。

测度刚性的一个初步表现是，测度不仅是平稳的，而且在 μ支撑集中的元素作用下不变。例如，中三分之一康托集上的均匀测度在映射 $x \mapsto x/3$ 和 $x \mapsto (x+2)/3$ 的作用下是平稳的（每个映射的概率均为 $1/2$），但它在这两个映射中的任何一个作用下都不是不变的。

流。 我们还将考虑作用于 Q 的光滑一参数流 $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，其中 $t \mapsto g_t$ 是从 $(\mathbb{R}, +)$ 到 Diff(Q) 的群同态。在这种情况下，若对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $(g_t)_*\nu = \nu$，则 ν 是 g_t-不变的；遍历性的定义与随机游走情形类似。

悬挂与斜积。 一种一般性的构造使我们能够在需要时改变设置。

离散到连续。 首先，给定一个光滑微分同胚 $f \in \mathrm{Diff}(Q)$，我们可以考虑悬挂空间 $Q' := (Q \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 作用由 $(x, t) \mapsto (f(x)\ t + 1)$ 生成，并定义流 $g_t(x, s) := (x, s + t)$。这将离散时间的例子转化为连续时间的例子。

更一般地，若 Γ 是李群 G 中的一个格，且 Γ 作用于流形 Q 上，我们可以考虑悬挂空间 $Q' := \Gamma\backslash G \times Q$，其中 Γ 通过 $\gamma \cdot (g, x) := (\gamma g, \gamma x)$ 对角作用。于是，我们在 Q' 上得到一个 G- 作用，它通过在第一个因子上右乘法实现；取一参数子群 $g_t \subset G$，即可在 Q' 上得到流。上述设定的一个有用且非平凡的例子是令 Γ 为自由群，它作为格嵌入于 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中。伯努利移位。最后，我们可以考虑伯努利移位上的悬挂。令 $B^+ := (\mathrm{Diff}(Q))^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，并令$F$: $B^+ \to B^+$ 为左移位映射；测度 $\widehat{\mu}^+ := \mu^{\otimes\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 是 F-不变且遍历的。我们将用 $b = (b_0, b_1, \ldots)$ 表示 B^+ 的元素。接下来可以考虑空间 $\widehat{Q}^+ := Q \times B^+$，其斜积映射为 $\widehat{F}(q, b) := (b_0(q)\ F(b))$，测度为 $\widehat{\nu}^+ := \widehat{\mu}^+ \otimes \nu$；当且仅当 ν 是 μ-平稳测度时，该测度才是 F-不变的。

版权所有 © 20XX SIAM。未经许可，禁止转载本文。

还可以考虑 $B := \mathrm{Diff}(Q)^{\mathbb{Z}}$ 及其相关的 $\widehat{Q}$，其移位和斜积映射的定义方式相同。鞅收敛定理构造出一个与 μ-平稳测度 ν相关的自然测度 $\hat{\nu}$。对于 $b \in B$，我们将用 $b_{\geq 0} \in B^+$ 表示其指标属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的分量。此外，对于$b = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$，我们将用 $b^{\circ n} := b_n \circ \cdots \circ b_0$ 表示复合微分同胚。关于这些构造的更多内容，参见 [8, §2]。

2.2 若干示例定理。我们先介绍几个初等命题，尽管如此，证明它们仍需要用到我们的主要技术结果。下文定义 2.3 将明确陈述这些命题中的一项方便假设，即“一致扩张”和“一致间隙”：

定理2.1（有限或一致）假设 Q 是紧的，且 μ 在 $\mathrm{Diff}(Q)$ 中的支撑集是有限的，并且每个元素都保持某个固定的光滑体积形式。此外，假设 μ 是一致扩张的，并且对每个 $d \in \{1, \ldots, \dim(Q) - 1\}$，都有一致间隙。那么，当每个遍历的 μ-平稳测度在 Q 上要么是有限支撑的，要么就是光滑体积测度。

当 $Q = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 和 μ 支撑在$\mathbf{SL}_d(\mathbb{Z})$ 中的元素上时，Bourgain–Furman–Lindenstrauss–Mozes [6] 采用傅里叶分析技术处理了这一情形，而 Benoist–Quint [4] 使用了与我们工作更为接近的方法。

定理2.2（刚性）。假设 Q 是紧的，并且 μ 在 $\mathrm{Diff}(Q)$ 上的支撑集是有限的。设 ν 是一个 μ-平稳测度，并满足以下性质：对于任意由 μ 的支撑集中的元素保持不变的、 ν-几乎处处定义的子丛 $S \subseteq TQ$，其李雅普诺夫指数之和均为非负。

那么 ν 是 μ-不变的。

上述关于 μ 的有限支撑假设是技术性的；一旦扭积熵理论中的额外工具可用，应当很容易将其去除。从技术上讲，$\mathrm{Diff}(Q)$ 上连续测度的熵是无穷的，这阻碍了某些熵计算，例如 § 5.3 中的计算，但这并非本质问题。

对于每个 μ-平稳测度，关于李雅普诺夫指数的定理 2.2 中的假设在我们具有如下定义中的一致扩张时成立：

定义 2.3（一致扩张与一致间隙）。对于 $d \in \{1, \ldots, \dim(Q) - 1\}$，定义 $\mathrm{Gr}_d(TQ)$ 为切丛 TQ 中的 d 维平面所构成的格拉斯曼丛。将一个 d 维平面 $P \in \mathrm{Gr}_d(T_qQ)$ 与一个向量 $\xi_P \in \Lambda^d(T_qQ)$ 进行对应，并定义

$$\sigma(\xi, N) := \int_{\mathrm{Diff}(Q)} \log \left(\frac{\left\| D_q f^N(\xi) \right\|}{\|\xi\|} \right) d\mu^{*N}(f).$$

测度 μ 在维数 d 上一致扩张，当且仅当存在 $N \geq 1$ 和 $c > 0$，使得对每个$P \in \mathrm{Gr}_d(TQ)$，都有

$$\sigma(\xi_P, N) \geq c.$$

类似地，μ 在维数 d 上具有一致间隙，当且仅当存在 $N \geq 1$ 和 $c > 0$，以及 $\delta_d \in \{\pm 1\}$，使得对每个 $P_i \in \mathrm{Gr}^{d+i}(TQ)$，对于 $i \in \{0, 1\}$ 且满足 $P_0 \subset P_1$，都有

$$\delta_d \cdot (\sigma(\xi_{P_1}, N) - \sigma(\xi_{P_0}, N)) \geq c.$$

非正式地说，一致扩张表示每个 d-平面在平均意义上都会扩张，而一致间隙表示第 d 个李雅普诺夫指数（见 § 3.1）与零之间始终存在间隔。可以验证，只要两个黎曼度量在一个一致常数范围内彼此可比，这些性质就与黎曼度量的选择无关。我们还可以将定义扩展为仅针对动力系统下不变的某一类子空间，例如辛动力系统中的各向同性子空间，或全纯动力系统中的复子空间。

现在我们讨论另一个将刚性结果从齐性情形推广到非齐性情形的结果，该结果由我们与 D. Fisher 和 B. Lowe 共同获得 [33]:

定理2.4（全测地刚性）。设 M 是一个具有严格负截面曲率的紧实实解析黎曼流形，且维数$(M) \geq 3$。如果 M 包含无穷多个彼此不同的浸入的闭全测地超曲面，那么 M 具有常负曲率。

在齐性情形下，Bader–Fisher–Miller–Stover [2]一般而言，以及 Margulis–Mohammadi [48] 对于$n = 3$ 证明，具有无限多个全测地超曲面的有限体积常负曲率流形必定是算术的。我们将在下文 § 6.3 讨论这方面的一些预期。

版权所有 © 20XX SIAM。禁止未经授权复制本文。

我们还指出， [8] 中的主要结果被用于此处，以推导 [24] 在$\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$作用于平移曲面分层乘积这一情形下的推广。

光滑动力学中的工具。 为了提供更多背景并介绍一些证明思路，我们先回顾光滑动力系统理论中的一些基本结果。

3.1 李雅普诺夫指数。

余循环。 一般而言，设我们有一个空间 Q ，其上有一个群或半群 Γ的作用。 Γ-作用上的余循环 由一个向量丛 $E \to Q$ 以及将 Γ-作用提升到 E 上的向量丛自同构构成。具体来说，对于每个 $\gamma \in \Gamma$ ，以及每个 $q \in Q$ ，我们都有一个线性映射 $\gamma_E\colon E(q) \to E(\gamma q)$；它关于 q 的正则性与向量丛 E相同，并满足群元素乘积所要求的自然相容条件。关于光滑余循环和可测余循环的基本例子，见下文 § 3.4。

关于余循环渐近行为的基本结果是 Oseledets乘法遍历定理（MET）：

定理 3.1（MET）。设 $f\colon Q \to Q$ 是一个可逆可测变换，它保持遍历概率测度 ν。设 $E \to Q$ 是 f 上的一个协循环，配备可测范数 $\|\cdot\|$，并满足可积性条件 $\int_Q \log^+\left(\|f_E\|, \left\|f_E^{-1}\right\|\right)\, d\nu < \infty$。

于是存在数 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$（李雅普诺夫指数）以及一个可测的 f_E-不变分裂 $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$，使得对于 ν-几乎处处的 $q \in Q$ 和每个非零 $v \in E_i(q)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|f_E^{\circ n}(v)\| = \lambda_i.$$

需要强调的是，即使 E 是光滑向量丛，奥塞莱德茨分裂一般也只是可测的。**喷丛**。 回顾一下， Q 是一个光滑流形，特别地，它具有切丛 TQ ；对于任何由微分同胚群作用所诱导的作用，该切丛都成为一个协循环。更一般地，重要的是要考虑向量丛 J^rQ ，它由 Q 上函数的 r-喷射构成，以及相关的主丛 F^rQ ，它由 Q 上图的 r-喷射构成： F^rQ 在 $q \in Q$ 处的纤维由局部微分同胚 $\phi\colon (\mathbb{R}^{\dim(Q)}, 0) \to (Q, q)$ 的等价类组成，其中两个这样的映射等价，当且仅当它们的泰勒展开在 r 阶及以下相同。

虽然 J^rQ 的李雅普诺夫谱由 TQ的李雅普诺夫谱决定，但丛 J^rQ 很重要，因为它编码了关于动力系统的高阶信息。这在正规形理论中尤其重要，见下文文第 4 节。

3.2 不变流形。我们继续研究流形 Q 和保持遍历概率测度 ν的微分同胚 $f \in \mathrm{Diff}(Q)$（或流 g_t）；对于随机游走，则研究一列微分同胚$f_n \in \mathrm{Diff}(Q)$，它们按概率律 μ 独立随机选取，并配有一个 μ-平稳测度 ν。我们用 $f^{\circ n}$ 表示 f的第n次迭代；对于随机游走，则用 $f^{\circ n} := f_{n-1} \circ \cdots \circ f_0$表示。切丛 TQ 的李雅普诺夫指数是动力系统的重要不变量，我们假设其中至少有一些非零。于是，我们可以将切丛（可测地）分解为稳定、非稳定和中心子丛

$$TQ = W^s \oplus W^0 \oplus W^u$$

其中， W^s（分别为 W^u）是对应于负（分别为正）李雅普诺夫指数的奥塞莱茨子空间之和，而 W^0 对应于零指数。为简单起见，下面我们描述稳定方向上的结构；在时间反演下，不稳定方向上也有类似的结论。

稳定流形。 在适当的技术假设下，对于 ν-几乎每个 $q \in Q$，稳定子丛 W^s 都可积为一族可测的（局部）稳定流形：

$$\mathcal{W}^s[q] = \left\{x \in Q\colon d_Q(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(q)) \le C(x)e^{-\varepsilon n}\right\}$$

for 任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 以及某个 $C(x) > 0$。这族流形在动力系统作用下是等变的 cs.

ˆ 在随机游走情形下，在空间 $\hat{Q} = Q \times B$上，我们同时有“组合”局部稳定

$$\mathfrak{W}^s_1[q, b] := \{(q, b') \in \hat{Q}\colon b'_{\ge 0} = b_{\ge 0}\}$$

以及“光滑”的稳定划分：

$$\mathcal{W}^s[q, b] := \{(q', b) \in \hat{Q}\colon d_Q(b^{\circ n}(q), b^{\circ n}(q') \le C(q', b)e^{-\varepsilon n})\}.$$

版权所有 © 20XX SIAM 未经许可，禁止转载本文

注意到， $\mathfrak{W}_1^s$ 是 B上一个类似可测划分的拉回，可用于计算移位下 $\left(B, \mu^{\otimes \mathbb{Z}}\right)$ 的熵。当 μ 为原子型时，这等于 $H(\mu)$。为便于后续讨论，我们在此指出

$$h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}; \mathfrak{W}_1^s\right) \leq H(\mu) \tag{3.1}$$

利用詹森不等式以及相对于可测划分的熵的定义；当且仅当 ν 是 μ-不变时，等号成立。

中心稳定流形。 对于丛 $W^{cs} := W^s \oplus W^0$，情况则更为微妙。一般而言，不一定存在一族与 W^{cs}相切、且在所有时刻都与动力系统等变的流形。存在的是一个与 W^{cs}相切、并与动力系统等变的流形形式芽。我们可以选择该形式芽的一个光滑代表元，也可以固定一个任意高的正则性类 C^r ，并构造一族在动力系统下不变、但仅在有限时间内不变的 C^r-流形。这两种概念对主要结果的证明都很有用。

3.3 条件测度。 可以沿不稳定流形分解测度 ν ，从而得到一族条件测度 $\nu^u[q]$ ；对于 ν-几乎每个 $q \in Q$，这些条件测度都支撑在 $\mathcal{W}^u[q]$ 上。为此，需要引入一个从属于稳定流形的 Q 的可测划分，以及Rokhlin分解定理。下面引入相关记号并回顾这一构造，因为稍后在§ 4.3讨论广义 u-Gibbs 态时会用到；细节另见 [8, A.5] 。

存在一个对 (Q, ν) 的可测划分，记作 $\mathfrak{B}_0$，它从属于不稳定叶层，即对于 ν-几乎处处的 $q \in Q$ ，原子 $\mathfrak{B}_0[q]$ 包含于 $\mathcal{W}^u[q]$ 中，并包含 q的一个开邻域。此外， $\mathfrak{B}_0$在动力系统下是递增的，即 $f^{-1}(\mathfrak{B}_0[f(q)]) \subseteq \mathfrak{B}_0[q]$。还要回顾一下，若存在一个从 $\pi_{\mathfrak{B}_0}$ 到标准Borel空间 S的可测映射，使得 $\mathfrak{B}_0$ 在模去零测度集合后是Borelσ-代数的原像，则称划分 $\mathfrak{B}_0$是“ν-可测的”。此时，条件测度 $\nu^u_{\mathfrak{B}_0}[q]$ 是 ν 沿着 $\pi_{\mathfrak{B}_0}$的纤维的分解。利用 $\mathfrak{B}_0$的递增性质，可以将这些条件测度拼接成定义在 $\mathcal{W}^u[q]$上的 $\nu^u[q]$ ；它们在动力系统下除相差一个常数缩放因子外是等变的，并且归一化为 $\nu^u[q](\mathfrak{B}_0[q]) = 1$。

我们用 $\mathfrak{B}_0^-$ 表示一个具有相同性质的稳定流形划分。

熵与维数。 平稳测度 ν 的不变性可以通过过去熵与未来熵之间的一个等式得到，该等式基于 Ledrappier–Young公式 [45] ，它将测度 ν 的熵与沿不稳定流形的条件测度 $\nu^u[q]$ 的维数以及李雅普诺夫谱联系起来。我们回顾如下形式的该公式。设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq W^u$ 是不稳定切丛中的可测且与动力系统等变的子丛，并具有如下性质：（经适当解释后）测度 ν^u 沿 E_1 的条件测度属于勒贝格类，且 ν^u 的支撑集包含于 E_2。用 $E_i^{\lambda_j}$ 表示相应的李雅普诺夫子空间。测度 f 关于 ν 的熵 $h_\nu(f)$ 满足：

$$\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \cdot \dim E_1^{\lambda_i} \leq h_\nu(f) \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \cdot \dim E_2^{\lambda_i} \tag{3.2}$$

第二个不等式取等号，当且仅当测度 ν^u 沿 E_2 的条件测度属于勒贝格类。

3.4 余循环层级。 我们以介绍余循环的若干构造及其先验性质来结束这些预备内容。

光滑且自然的余循环。 从流形 Q 及其上的光滑作用出发，我们得到第 3.1 节所述的喷丛，它们具有自然光滑结构。我们还可以进一步考虑相关的自然映射，以及商空间、张量积、外幂和对称幂、对偶空间等线性代数运算。我们将通过这一过程得到的任何余循环称为“光滑且自然的”。

正向和反向动力学定义的（fdd、bdd）余循环。 对于光滑且自然的余循环E，正向奥塞莱茨过滤 $E^{\leq \lambda}$ 沿稳定流形方向光滑。从光滑且自然余循环的奥塞莱茨过滤出发，通过标准线性代数运算得到的余循环称为正向动力学定义的 （fdd）余循环。通过反转时间，并使用反向过滤 $E^{\geq \lambda}$ ，我们得到反向动力学定义的 （bdd）余循环。

注： 一个余循环的给定可测同构类可能同时具有 fdd 和 bdd 结构，因此，fdd 余循环结构的一部分在于该余循环的构造方式。例如，奥塞莱茨子空间 E^λ 写成 $E^{\leq \lambda}/E^{<\lambda}$时具有 fdd 结构，写成 $E^{\geq \lambda}/E^{>\lambda}$时则具有 bdd 结构。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

可容许余圈。 最后，我们将考虑任意余循环，它们既包括由光滑自然余循环的动力学等变子余圈所产生的余循环，也包括通过对这些余循环进行标准线性代数运算得到的余循环。我们将这些称为可容许 余循环，而我们研究的所有余循环至少都是可容许的。值得记住的一类例子是：将单个 Lyapunov 子空间（它是可容许的）通过进一步的子余圈置于 Jordan标准形时所产生的余循环，见 [8, B.3]。

任何容许余循环 E 的一个重要特征是，它沿稳定流形和不稳定流形存在“可测联络” $P^{\pm}$ 。具体而言，对于一个满测度集合 Q_0，若 $x,\ y \in Q_0$ 且 $y \in \mathcal{W}^u[x]$ ，则存在映射$P^+(x,\ y)$： $E(x) \to E(y)$，该映射关于动力系统是等变的，并交织可测代数包。沿稳定流形也存在类似映射，我们有时用 $P^{u/s}$ 代替 $P^{+/-}$来表示它们。

4 正规形。本节中，我们在 § 4.1 回顾正规形理论的一些特征，并介绍若干有助于我们论证的改进。在 § 4.2 中，我们介绍一种构造正规形的替代方法，希望它能简化某些方面，并在技术上有助于推导关于标准形坐标的额外估计。最后，在 § 4.3 中，我们引入“广义 u-Gibbs 态”的概念，它在我们的陈述和证明中发挥关键作用。

4.1 经典正规形。 正规形理论可追溯至 Poincaré 和 Sternberg [60] 关于固定点附近微分同胚的工作。关于这一主题的文献浩瀚无垠，下面我们将引用 Kalinin 和 Sadovskaya [42] 的工作作为一个方便的参考（另见 Melnick [53]）；该工作将早期的成果，尤其是 Guysinsky 和 Katok [41]的成果，推广到了非一致收缩情形。

我们推导出正规形形式体系的一些附加性质。与我们的论证特别相关的是与正规形相联系的各种线性化构造，它们使我们能够进一步将次共振多项式动力学简化为线性动力学。

分次与次共振多项式。 我们需要介绍一些关于带滤过向量空间的多项式映射的预备知识。设 V 为一个有限维实向量空间，并赋予其一个由子空间$0 \subsetneq V^{\leq -\lambda_1} \subsetneq V^{\leq -\lambda_2} \subsetneq \cdots \subsetneq V^{\leq -\lambda_n} = V$构成的滤过，其中 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ 为正实数。从 V上的滤过可以自然地为各种线性代数构造赋予滤过。一般而言，带滤过向量空间之间的线性映射A: $V \to W$满足 $A \in \mathrm{Hom}(V,\ W)^{\leq \delta}$，当且仅当对于所有 λ都有 $A\left(V^{\leq \lambda}\right) \subset W^{\leq \lambda+\delta}$。例如，多项式函数空间就是对称代数 $\mathrm{Sym}^\bullet(V^*)$，其滤过定义为：规定当 $\xi\left(V^{\leq -\lambda_i}\right) = 0$ 时， $\xi \in V^{*,\ \leq \lambda_i}$ ，并取对称幂。

我们类似地可以在多项式映射空间 $\mathrm{Poly}(V, W)$ 上定义一个滤过，规定当且仅当 $F^*\xi \in \mathrm{Sym}^\bullet(V^*)^{\leq \lambda+\delta}$ 对每个 $\xi \in W^{*,\leq \lambda}$ 以及每个 λ 都成立时，$F \in \mathrm{Poly}(V, W)^{\leq \delta}$。这里， $F^*\xi$ 是线性函数 ξ 通过多项式映射 F 的拉回。

不难看出，如果在 V 的滤过中出现的所有权 $-\lambda_i$ 都严格为负，那么空间 $\mathrm{Poly}(V, V)^{\leq 0}$ 是有限维的，并且在复合运算下封闭。

定义 4.1（次共振映射）。定义 $\mathbf{G}^{sr}(V)$ 为由多项式映射 $F \in \mathrm{Poly}(V, V)^{\leq 0}$ 构成的群，其中这些映射具有多项式逆映射 $F^{-1} \in \mathrm{Poly}(V, V)^{\leq 0}$；称此类映射为次共振映射。

定义 $\mathbf{G}^{ssr}(V)$ 为 $\mathbf{G}^{sr}(V)$ 的子群，该子群由满足 $D_0F = \mathbf{1}$ 的映射 F 构成；称此类映射为严格次共振映射；等价地，这些映射是满足 $F - \mathbf{1}_V \in \mathrm{Poly}(V, V)^{<0}$ 的映射 F。

V 的平移是严格次共振映射。

[42] 的主要结果是，通过参数化变换，可以将稳定流形上的动力系统化为标准形，即属于群 $\mathbf{G}^{sr}(V)$。

定理 4.2（稳定流形上的正规形）。设 $f\colon Q \to Q$ 是一个保持遍历概率测度 ν的微分同胚，并且高阶喷流余循环满足额外的可积性条件。存在一个满 ν测度的集合Q_0，使得对于每个 $q \in Q_0$，都存在一个 C^∞-微分同胚 $H_q\colon \mathcal{W}^s[q] \to W^s(q)$，其中$W^s(q) \subset T_qQ$ 是负李雅普诺夫指数对应的子空间，并配备其奥塞莱茨滤过，使得：

1. *The maps $H_{f(q)} \circ f \circ H_q^{-1}\colon W^s(q) \to W^s(f(q))$ are subresonant polynomial maps.*
2. 若 $q' \in Q_0$属于局部稳定流形 $\mathcal{W}^s[q]$，则映射 $H_{q'} \circ H_q^{-1}\colon W^s(q) \to W^s(q')$ 是一个次共振多项式映射。

这些映射 H_q 称为标准形坐标，它们关于 q可测地依赖，但并不唯一：如果 $G_q \in \mathbf{G}^{sr}(W^s(q))\tilde{}$是一个可测的次共振多项式映射族，那么 $H_q := G_q \circ H_q$ 也同样是标准形坐标。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

注4.3（关于正规形的一些进一步要求）。首先，理想情况下，应当为稳定流形确定一种更内在的参数化方式，而不只是允许通过前置次共振多项式映射带来的有限维歧义。为此，需要一个不同于 $W^s(q)$的空间，其中包含关于动力系统的更高阶信息。

其次，我们希望标准形坐标对基点q 具有赫尔德连续依赖（在测度较大的集合上）。这显然与唯一性有关。

以下 § 4.2 将通过一种不同的标准形构造方法来解决这两个问题。此外，正如后文将会显现的，假设稳定流形存在，那么标准形的构造实际上相当简单，只需对一个“光滑”分布进行积分；这与稳定流形本身的构造不同。

标准形的可测联络。§ 3.4 中讨论的、在容许余循环上构造可测联络的方法，应用于由喷射构造出的适当余循环，可得到一族可测映射 $\wp^u(x,\ y) \in \mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[x])$，其中 $x,\ y$属于一个满测度集合。这些映射具有如下性质： $\wp^u(x,\ y)(x) = y$，并且它们对于确立条件测度的额外不变性至关重要。

余循环的标准形。 一个重要的技术要素是构造余循环的标准形，例如，对于沿不稳定流形光滑的余循环，可以沿不稳定流形构造其标准形。正如不稳定流形的标准形将动力系统化为特别简单的多项式形式一样，余循环标准形也能将任意余循环化为更简单的多项式形式。

标准形的一个例子。 首先考虑 $\mathbb{R}^2$，其坐标函数为（$x,\ y$），相应的权为$-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$。于是，最一般的次共振映射具有以下形式，其线性化由取 Veronese嵌入给出（其中 k_0 为使 $k_0\lambda_2 \le \lambda_1$ 成立的最大值，并为简便起见假设 $a = b = 0$）：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} a + \lambda x + \displaystyle\sum_{0<k\lambda_2\le\lambda_1} c_k y^k \\ b + \mu y \end{bmatrix} \text{ and linearization } \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{q} \leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y^{k_0} \\ \vdots \\ y \\ x \end{bmatrix}}_{Lq} \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} \mu^{k_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \dots & 0 & \mu & 0 \\ c_{k_0} & \dots & c_1 & \lambda \end{bmatrix}}_{Lf} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y^{k_0} \\ \vdots \\ y \\ x \end{bmatrix}}_{Lq} = L(f(q))$$

严格次共振映射是满足 $\lambda = \mu = 1$ 的映射。

我们还说明余循环标准形的概念。假设 E 是一个二维余循环，沿稳定流形光滑，其李雅普诺夫指数为 $\mu_1 > \mu_2$，线性函数基为 $\xi_1,\ \xi_2$（因此，权为 $-\mu_1 < -\mu_2$）。那么，通过类似于定理 4.2 中所述的坐标变换，并且该变换在纤维上是线性的，我们可以确保该余循环具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_1\xi_1 + \xi_2 \cdot \left(\displaystyle\sum_{i\lambda_1 + j\lambda_2 \le \mu_1 - \mu_2} b_{i,j} x^i y^j \right) \\ a_2\xi_2 \\ \lambda x + \displaystyle\sum_{0<k\lambda_2\le\lambda_1} c_k y^k \\ \mu y \end{bmatrix}$$

我们的约定是，标准形坐标中的动力系统以原点为中心。

4.2 作为 (G, X)-结构的正规形。 回顾一下，给定一个在“模型”流形 X 上传递作用的群 G，可以在任意流形 M 上定义一个 (G, X) 结构：它由取值于 X 的开子集中的图构成，粘合映射由 G 中的元素给出。还可以进一步放宽定义（但不会因此扩大空间的类别），方法是使用多个同构的模型空间。有鉴于此，我们有：

定义 4.4（流形上的次共振结构）。固定实数标量 $-\lambda_1 < \cdots < -\lambda_n < 0$ 以及适当的重数，记作 $\overrightarrow{\lambda}$。流形 M上的 $\overrightarrow{\lambda}$型次共振结构由以下部分组成：

版权所有 © 20XX SIAM 未经授权，禁止转载本文

到带滤过向量空间 V_i的开子集的图 $U_i \subseteq M$，其中滤过的类型为 $\overrightarrow{\lambda}$，且过渡映射是次共振多项式同构。

等价地，我们有一个由 $X := V$一个带滤过的向量空间和 $G := \mathbf{G}^{sr}(V)$ 所构成的(G, X)-结构的数据。次共振结构的一个经典例子是仿射结构，即具有由仿射群 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ 粘合而成的图的流形。取一个标量 $-\lambda_1 < 0$，并且 $V^{\leq -\lambda_1} := V$ 是滤过中唯一的元素，即可得到这种结构。

根据这个定义，我们可以清楚地表述定理 4.2：稳定流形具有次共振结构，其上的动力系统由次共振多项式映射给出。下面来看这如何也为标准形坐标（即次共振结构）的存在性提供另一种方法。

嘉当几何。 我们首先回顾一下，“嘉当几何”以与黎曼几何推广欧几里得几何相同的方式推广（$G,\ X$）-结构，参见 [59] 以了解一般性介绍。选取一个点稳定子 $H \subset G$，使得 $X \cong G/H$。在流形 M 上给定一个嘉当几何，等价于给定一个主 H-丛 $P \to M$，以及一个取值于 $\mathrm{Lie}(G)$ 的 1-形式 ω，定义在 P 上，并满足某些公理（见 [8, E.4.2]）。嘉当几何有相应的曲率概念；曲率消失当且仅当该嘉当几何局部同构于主 H-丛 $G \to G/H \cong X$，即一个（$G,\ X$）-结构。

动力系统中的自然联络。动力系统中的一个基本原理如下：若 $E \to Q$ 是光滑余循环，$S \subset E$ 是子丛循环，且 E/S 的李雅普诺夫指数都严格小于 S 的李雅普诺夫指数，那么就存在一个等变分裂 $E/S \to E$。此外，沿稳定流形，这种分裂的正则性与 S 和 E 一样（例如，若 S 和 E 光滑，则该分裂也光滑）。事实上，E 的稳定李雅普诺夫滤过沿稳定流形具有与 E 相同的正则性，而这里的假设是，S 与 E 中相应的稳定李雅普诺夫子丛等变同构。

O可以系统地应用这一原理，正如 [8, E.3-4]，中所做的那样，从而得到两件事 s:

- 在 ν-几乎处处的点 $q \in Q$，稳定流形的喷射，以及与之相关的无穷小次共振结构。
- 一个以（$\mathbf{G}^{sr}(V)$ V）为模型的嘉当几何，其中联络 1-形式 ω 由上述动力学分裂决定。

由此可见，嘉当几何的曲率为零，因为曲率对于动力系统是等变的，而动力系统沿稳定方向收缩，因此曲率必然消失。这给出了稳定流形上所需的动力等变次共振结构。

4.3 广义 u-Gibbs 态。 借助正规形的语言，现在可以给出该理论的一些关键定义。我们省略下述定义中的若干技术细节，详情请参见 [8, 定义 3.1。5]对于一个点 $q \in Q$和子群 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[q])$，我们记 $U^+[q] := U^+(q) \cdot q \subset \mathcal{W}^u[q]$为相应的轨道。

定义 4.5（相容的子群族）。 设 ν 是 Q上的遍历概率测度，在微分同胚 $f \in \mathrm{Diff}(Q)$下不变。一个相容的子群族 是一个 f-等变可测映射 $q \mapsto U^+(q)$ 的数据，其中 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(q)$ 是一个代数子群，并满足以下性质：

1. 由原子 $q \mapsto \mathfrak{B}_0[q] \cap U^+[q]$ 构成的划分是 ν-可测的。

2. 由该划分得到的 $U^+[q]$上的条件测度具有 $U^+(q)$-不变性，而 $U^+(q)$是$\mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[q])$ 中保持它不变的最大连通子群。

3. 对于 $q' \in U^+[q]$，我们有 $U^+(q) = U^+(q')$作为$\mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[q])$的子群满足 $= \mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[q'])$。

非正式地说，这一定义使我们能够讨论具有沿某些非平凡方向的勒贝格类条件测度的 f-不变测度；这些方向不一定来自按不稳定子流形构造的滤过。我们用$\mathcal{B}_0[q] := \mathfrak{B}_0[q] \cap U^+[q]$ 表示定义中的可测划分。

定义 4.6（广义 u-Gibbs 态）。在 Q 上的一个遍历的、 f-不变的概率测度 ν，若存在一个非平凡的可测子群族 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(q)$ 与 ν 相容（相容的含义见定理 *4.5*），则称其为广义 u-Gibbs 态。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

回顾一下（见 Pesin–Sinai [54]），“u-Gibbs 态”是指沿快速不稳定流形的条件测度属于勒贝格类的测度，这是定义 4.6 的一个特例。总是可以构造出 u-Gibbs 态，而了解它们何时唯一很重要，参见例如 Alvarez–Leguil–Obata [1]。

线性化余循环。 假设给定一个相容的子群族 U^+。那么可以引入由 $U^+[q]$ 在 $\mathcal{W}^u[q]$ 内的平移构成的空间$\mathcal{C}(q)$: $=\mathbf{G}^{ssr}(q)/U^+(q)$。事实证明，这个空间具有次共振结构，因此我们有一个线性化余循环 $L\mathcal{C}$，并带有一个动力学等变嵌入 $\mathcal{C} \hookrightarrow L\mathcal{C}$ （见 [8,§5]）。余循环 $L\mathcal{C}$ 有一个由单位陪集给出的典范等变截面，我们将商记为 $\mathbf{H}$ 。这个余循环测量了邻近 U^+ 轨道的发散程度。

有限覆盖。 定义 4.5 中有一个重要的技术细节被我们略去了。也就是说，不变子群族可能定义在 (Q,ν) 的有限覆盖上。这是因为可能需要先取有限覆盖，才能将余循环 $\mathbf{H}$ 化为“Jordan标准形”。这会对下文中的大多数概念产生连锁影响，但为简化记号，我们仍继续使用空间 (Q,ν)，而不是像 [8] 那样使用它可能存在的有限覆盖X 。

5 额外不变性或联合可积性。 在§ 5.1介绍了关键概念“定量非可积性”之后，我们将陈述主定理，并概述其证明。

5.1 QNI（定量非可积性）。 我们继续沿用前几节的记号，但为方便起见，并与 [8], 的记号保持一致，我们改用连续时间。因此，动力系统由流 g_t 给出，而非映射 f。

假设 ν 是一个广义 u-Gibbs 态，其关联的可测子群族 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(q)$ 与 ν相容。我们可以期待 ν 沿着 Q的某个子流形属于勒贝格类，但一般而言，这可能受到如下事实的阻碍：该测度可能是某个子流形上的勒贝格测度与横向上的分形测度的乘积。为排除这种可能性，我们引入以下条件，它是联合可积条件的逆否命题。这里我们不得不稍作非正式的表述，关于精确定义，请参见 [8, §3.2] 。

在下文的定义中，点 $q_\bullet$ 和时间参数 ℓ 的记号与 § 5.3 中的证明概要以及下方的图 5.1 相符。回想一下，$\mathfrak{B}_0^-$ 是从属于稳定流形的可测划分，而$\mathcal{B}_0$ 是从属于不稳定流形、并由族 U^+细化的可测划分。

定义 5.1（定量非可积性（QNI））。我们称相容的子群族 U^+满足定量非可积性，如果存在：

- 一个常数 $\alpha_0 > 0$
- 对于任意 $\delta > 0$ 一个紧集 K 满足 $\nu(K) > 1-\delta$，以及依赖于的常数 $C, \ell_0 > 0$ δ

s使得若 $\ell > \ell_0$，且 $q, q_{1/2}, q_1 \in K$，其中 $q_{1/2} := g_{\ell/2} q$ 且 $q_1 := g_\ell q$，则我们有 t

- 存在一个可测集 $S \subset g_{-\ell/2}(\mathcal{B}_0[q_1])$，满足 $|S|/|g_{-\ell/2}(\mathcal{B}_0[q_1])| \geq 1-\delta$，其中 $|\bullet|$ 表示 Ha ar 在 $U^+[q]$上的测度，
- 存在一个可测集 $S' \subset g_{-\ell/2}\left(\mathfrak{B}_0^-[q_1]\right)$，满足 $\nu^s[q_{1/2}](S')/\nu^s[q_{1/2}](g_{-\ell/2}(\mathfrak{B}_0[q_1])) \geq 1-\delta$

使得对每个 $y_{1/2} \in S$ 和 $q'_{1/2} \in S'$，都有

$$d\left(\mathcal{B}_0[q'_{1/2}], \mathcal{W}^{cs}_{loc}[y_{1/2}]\right) \geq Ce^{-\alpha_0 \ell}.$$

注意，我们使用上述中心稳定流形的一种显式实现，而指数 α_0 不受此选择影响。定义中隐含着， U^+ 在 S' 的所有点处都有定义，而 $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$ 在 S的所有点处都有定义。关于 S 和 S' 的测度条件（这是一个密度要求）也可以等价地表述为：在 q_1 处， $|g_{\ell/2}S|/|\mathcal{B}_0[q]| \geq 1-\delta$ 成立， S'也同理。另请参见 Katz [43] 和 Eskin–Potrie–Zhang [26] 关于 QNI 条件的相关研究。

5.2 主定理。 经过上述准备，我们现在可以陈述主要结果：

定理 5.2（归纳步骤）。设 ν 是 Q 上一个 f-不变的遍历概率测度，且它是广义 *u-Gibbs* 态，其关联的可测子群族为 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(q)$，并与 ν 相容。若 ν 满足 *QNI* 条件（定义 5.1），则存在一个维数严格更大的可测子群族 $\widetilde{}$，即 $U^+(q) \subseteq \mathbf{G}^{ssr}(q)$，并与 ν 相容。

版权所有 © 20XX，归 SIAM 所有。未经授权，禁止复制本文。

换句话说，如果 $U^+(q)$ 尽可能大，那么 ν 不满足 QNI 条件。于是我们可以期待将稳定方向和不稳定方向积分起来，并证明 ν 沿这样的叶状结构属于勒贝格类。

5.3 证明方案。 我们概述证明定理 5.2 所涉及的一些主要步骤。假设给定了一个满足 QNI 的非平凡相容子群族 $U^+(q)$。回顾一下，$\nu^u[q]$ 表示沿不稳定流形的条件测度。我们希望证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个正测度集，其中包含点 x, y，满足 $y \in \mathcal{W}^u[x]$，并且：

1. 我们有分离 U^+-轨道，其中 $d_{\mathcal{H},loc}$ 表示两个集合之间的（局部）Hausdorff距离：

$$d_{\mathcal{H},loc}(U^+[x], U^+[y]) \asymp \varepsilon.$$

2. 条件测度具有不变性（允许缩放，其中 $\propto$表示两个相差一个常数因子的测度）：

$$\nu^u[y] \propto \wp^u(x,y)\nu^u[x] \tag{5.1}$$

其中 $\wp^u(x,y) \in \mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[x])$ 是由 § 4.1 中讨论的不稳定可测联络给出的严格次共振映射。

由于 $\varepsilon \to 0$，最后一个条件将导出由一个严格次共振变换单参数群作用所产生的 ν^u 不变性，而第一个条件则意味着该子群不包含于 U^+ 中。

实际论证表明，一个更精细的条件测度族（见 [8, 命题 12.0.2]）具有不变性，记作$_\sim f_{ij}$，下文将对此作出说明。

一些约定和记号。 在全文中，我们经常转而考察一个几乎具有满测度的紧集 K，在该集合上，相关可观测量的遍历定理一致成立，可测变化的对象一致连续，涉及的常数也一致有界。我们不再具体说明这一反复转向更小紧集的过程，并始终用 K 表示论证中所涉及的集合。

如果存在一个仅依赖于李雅普诺夫谱和 QNI 条件的 $\delta_X > 0$，以及一个常数 C（此外还依赖于紧集 K），使得 $|X| \le Ce^{-\delta_X \ell}$，其中 ℓ 是下文引入的主要时间参数，那么称量 X（或向量、距离）为“指数级小”。如果量 $\frac{1}{C} \le |X| \le C$，且其中的常数 C 依赖于紧集 K，则称该量为“宏观级”。这两个说法可分别简写为 $|X| \asymp_K 1$ 和 $|X| \lesssim_K e^{-\delta_X \ell}$。更一般地，$X \lesssim_S Y$ 表示存在一个依赖于 S 的常数C，使得 $X \le C \cdot Y$。当隐含常数仅依赖于李雅普诺夫谱以及 QNI 条件中的指数时，我们将写作 $X \lesssim_\lambda Y$。

八个点。 获得 (5.1) 的方案可追溯至 Benoist–Quint 和 Eskin–Mirzakhani[4, 24] 的工作。首先，假设我们有 $q, q' \in K$，其中 $q' \in \mathcal{W}^s_{loc}[q]$ 之间相距宏观距离。整个论证过程中将使用一个关键的时间参数，并记为 ℓ；它将导出另外两个时间参数 t，τ，且分别满足 $t \lesssim_\lambda \ell$ 和 $\tau \lesssim_\lambda \ell$。

接下来引入各点

$$q_1 := g_\ell q \qquad q_3 := g_t q_1$$
$$q_1' := g_\ell q_1 \qquad q_3' := g_t q_1'$$

注意，q_1 和 q_1' 指数级接近（因为它们具有稳定关系），而 q_3，q_3' 则更加接近。我们继续假设所有点都在 K 中。

接下来，选择具有宏观大小但彼此接近的 $u \in U^+(q_1)$ $u' \in U^+(q_1')$（在对 U^+-群进行适当的识别之后），并令

$$q_2 := g_\tau(uq_1) \quad q_2' := g_\tau(u'q_1')$$

其中，uq_1 表示 $u \in U^+(q_1) \subset \mathbf{G}^{ssr}(\mathcal{W}^u[q_1])$ 作用于 q_1 后得到的结果；对于带撇的点也类似，参见图 5.1。

指数漂移。 令 $\ell \to +\infty$，并选取 τ，使得 $U^+[q_2]$和 $U^+[q_2']$之间（局部）的Hausdorff距离为$\asymp_K \varepsilon$。取一个子列后，可假设 $q_2 \to \widetilde{q}_2$ 且 $q_2' \to \widetilde{q}_2'$，其中 $\widetilde{q}_2$，$\widetilde{q}_2' \in K$ 且 $\widetilde{q}_2' \in \mathcal{W}^u[\widetilde{q}_2]$。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

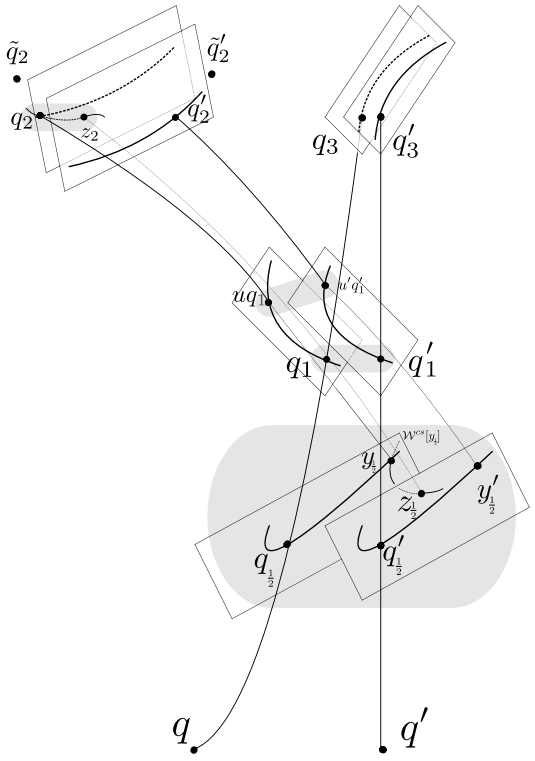

图 5.1：主要论证中的点的配置。同一片阴影云团中的点彼此呈指数级接近。

回顾一下，条件测度是等变的，且动力系统由次共振映射构成。因此，我们有

$$\begin{aligned} \nu^u[q_2] &\propto A_* \nu^u[q_3] \\ \nu^u[q'_2] &\propto A'_* \nu^u[q'_3] \end{aligned} \tag{5.2}$$

对应不稳定流形之间的次共振映射 A，A'。适当选择时间参数 t，τ，ℓ，即可确保 A 和 A' 大小相当且有界（在适当的平凡化下）。

当 $\ell \to +\infty$取极限时，$\nu^u[q_3]$ 趋近于$\nu^u[q'_3]$，因为$q_3 \to q'_3$（同样是在适当的平凡化下）；而差值 $A' \circ A^{-1}$ 收敛到严格次共振映射 $\wp^u$（$\tilde{q}_2$，$\tilde{q}'_2$），因此我们得到

$$\nu^u[\tilde{q}'_2] \propto \wp^u(\tilde{q}_2, \tilde{q}'_2)\nu^u[\tilde{q}_2]$$

正如所需。

发散与条件测度。要使上述论证得出非平凡的不变性，uq_1 和 $u'q'_1$ 在正向时间动力学下发散（尤其是，它们不在同一个稳定流形上）这一点至关重要。事实上，我们需要 U^+ 轨道的发散。回顾 § 4.3，我们有一个控制 U^+ 轨道发散的线性丛循环 $\mathbf{H}$。因此可以构造一个非空子丛循环 $\mathbf{E} \subset \mathbf{H}$（见 [8, §10.1]），使得在沿图 5.1 上半部分上下移动的过程中，对于大多数 u 的取值，发散都沿着$\mathbf{E}$发生。

随后进一步细化$\mathbf{E}$ 的Oseledets分解，使余循环动力系统呈现分块共形结构。接着利用这一点进一步细化按不稳定流形划分，并将测度ν^u 分解为更精细的族 f_{ij}，从而获得真正的额外不变性（参见 [8, §10-11]）。请注意，正是这一步要求使用§ 4.3中提到的有限覆盖。

因子化。在上述论证中，准确估计各种对象至关重要，例如轨道 $U^+[q]$ 及其发散情况，以及准确比较这些对象在邻近点处的表现。一个关键的

版权所有 © 20XX SIAM 未经授权，禁止转载本文

实现这一点的工具是引入“中点” $q_{1/2} := g_{\ell/2}q$， $q'_{1/2} := g_{\ell/2}q'$，如图 5.1 所示。这些点之所以有用，是因为在图示的这一区域，论证后续阶段出现的所有点彼此之间都指数接近。这意味着各种量的泰勒展开会很有用，而更高阶的展开则更加有用，因为我们可以将各种量近似到任意高的指数精度。

在 [8, §7], 中，我们建立了一套进行此类近似的形式体系；能够以与动力系统相容的方式得到良好近似的量称为“可因子化”。

不变性与熵。 最后，我们概述定理 2.2 的证明，沿用 § 2.1 和 § 3.2 中的记号。反复应用定理 5.2，可将一个 μ-平稳测度 ν 扩展为与该测度相容的极大群族 U^+。我们可以将 $\mathcal{L}^s[\hat{q}] \subseteq \mathcal{W}^s[\hat{q}]$ 定义为 $\operatorname{supp}\nu^s[\hat{q}]$ 的扎里斯基闭包，并将丛 $\mathcal{Z}(q) \subset T_qQ$（对 ν-几乎处处的 q）定义为：对 μ-几乎处处选取的 $b \in \mathrm{Diff}(Q)^{\mathbb{Z}}$，取 $T_q\mathcal{L}^s[q,b]$ 的张成空间。显然， $\mathcal{Z}$ 在随机游走作用下是不变的，因此其李雅普诺夫指数之和非负。

此外，在这一阶段我们还知道， $\nu^u[q,b]$ 在方向 $\mathcal{Z}(q) \cap T_qU^+[q,b]$上属于勒贝格类，因此由Ledrappier–Young公式（3.2）可得

$$h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}\right) \geq H(\mu) + \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i \cdot \dim\left(\mathcal{Z}^{\lambda_i}\right)$$

其中， $H(\mu)$ 是支撑集 μ上的概率分布的熵。反向考察时间方向，并利用$\operatorname{supp}\nu^s[q] \subset \mathcal{L}^s[q]$，我们得到：

$$\begin{aligned} h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}\right) &\leq h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}; \mathfrak{W}_1^s\right) + \sum_{\lambda_i<0} (-\lambda_i) \cdot \dim\left(\mathcal{L}^{s,\lambda_i}\right) \\ &\leq h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}; \mathfrak{W}_1^s\right) + \sum_{\lambda_i<0} (-\lambda_i) \cdot \dim\left(\mathcal{Z}^{\lambda_i}\right) \end{aligned}$$

利用 $h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}\right) = h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}\right)$，我们得到

$$h_{\hat{\nu}}(\hat{F}^{-1}; \mathfrak{W}_1^s) - H(\mu) \geq \sum_{\lambda_i} \lambda_i \cdot \dim\left(\mathcal{Z}^{\lambda_i}\right) \geq 0.$$

利用 $H(\mu) \geq h_{\hat{\nu}}\left(\hat{F}^{-1}; \mathfrak{W}_1^s\right)$ 成立（Ledrappier不变性原理 [44, 命题 2]，另见（3.1）），结论得证。

6 后续方向。 最后，我们提出一系列由前文讨论的结果自然引出的问题。

6.1 关于轨道闭包与测度的问题。

经验测度。我们仍然处于 § 2.1 的随机游走设定中。记由 μ 的支撑集生成的 Diff(Q) 子群为 Γ_μ。给定一个点 $q \in Q$，可以考虑经验测度

$$\nu_{N,q} := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu^{*n} * \delta_q$$

ν_N 的任意弱-$*$ 极限都是一个 μ-平稳测度。在适当的情况下，我们可以期待极限测度的支撑集与轨道闭包 $\overline{\Gamma_\mu \cdot q}$ 重合（根据构造，它总是包含于轨道闭包中）。我们将这种方式得到的平稳测度称为“与 q 相关联”。分类轨道闭包的典型方法是先理解遍历不变测度。

由流形分层的空间。 在预期能够对不变测度和轨道闭包进行分类的情形下，它们应具有归纳结构：主层是一个光滑流形，而其闭包由较低维度的轨道闭包构成。我们至少希望满足以下条件：

版权所有 © 20XX SIAM 未经授权，禁止复制本文

定义 6.1（由流形分层的空间）。 若流形 Q 中的一个子集 N 配备了一个有限分解 $N = \coprod S_i$，且其中每个 S_i 都是连通的并称为一个层，并满足以下性质，则称该子集按流形分层：

1. 对每个 S_i 和点 $s \in S_i$，存在一个开集 $U \ni s$，使得 $S_i \cap U$ 是 U的嵌入子流形 .

2. 如果层 S_i 的闭包与另一个层 S_j相交，那么 $S_j \subset S_i$ 且维数 $S_j <$ 维数 S_i .

用 $N^\circ \subset N$表示最高维数的层的并集，并将这个最高维数称为的维数。

对于局部结构以及奇点附近各层如何“粘合”，还可以施加大量其他约束，但我们省略这一讨论，因为不同情形可能涉及不同的附加性质。关于其中涉及的诸多问题，可参阅 Mather 的笔记 [52] 以及 Goresky 撰写的序言。这里想指出的是，这与动力系统中的一个共同主题：人们希望找出一个开且稠密的映射集合，以及具有良好结构理论的奇点集合。

光滑与实解析。 值得指出的是，本节提出的问题可能更容易在实解析动力系统的情形下，而不只是光滑情形下进行研究。例如，如果能够放宽定理 2.4 中关于全测地超曲面的解析性条件，将会非常有趣。在实解析情形下，人们会预期“由流形分层的空间”至少是一个 Whitney 分层。

K3 曲面的情形。 K3 曲面为动力系统中的许多问题提供了一个丰富的研究背景：它是一类具有典范的（除尺度因子外）全纯复辛形式的紧复二维流形。特别地，它们具有大的自同构群，参见 [31]以了解该主题的介绍及更多背景。

设 X 是一个复 K3 曲面，并令 Aut(X) 表示其自同构群。若 Aut(X) 的一个子群包含一个非阿贝尔自由群，则称其为非初等 的。若一个实二维子流形 $S \subset X$ 满足：对每个 $s \in S$，实切空间 T_sS 的复张成与 T_sX一致，则称其为全实 的。Cantat–Dujardin [11, 10, 12]和 Roda [58] 的工作提出了如下结论：

猜想 6.2（K3 曲面上点的轨道）。假设 $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ 是一个非初等子群，且 μ 是 Γ的某个生成集上的概率测度。对于任意 $x \in X$，以下情形恰有一种成立：

1. 轨道 $\Gamma \cdot x$ 是有限的。

2. 轨道 $\Gamma \cdot x$ 包含于代数曲线 C中，且在其中扎里斯基稠密。

3. 存在一个 Γ-不变集 $S \subset X$，其中包含 x，使得 S 按流形分层，维数为2，开层 S° 是全实的，且 $\Gamma \cdot x$ 在 S中稠密。相应的平稳测度是 S°上的光滑体积测度。

4. 轨道 $\Gamma \cdot x$ 在 X中稠密，且相应的平稳测度是其上的光滑体积测度 $it.$

任何遍历平稳测度都可由上述某个点的经验测度得到；除不变代数曲线的情形外，在所有情况下，该平稳测度也都是不变的。

在上述第一种情形中，相应的测度是原子型的；在第二种情形中，曲线 C 同构于有限个 $\mathbb{P}^1$（$\mathbb{C}$）的并，Γ 在 C 的某个分支上的作用由$\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$的一个子群给出，而相应的平稳测度则由这一线性作用通过Furstenberg理论确定。还要注意，x可能包含在一个全实曲面中，但其轨道并不稠密；在这种情况下，上述猜想指出，该轨道要么是有限的，要么局限于一条实代数曲线上。

当 Γ_μ 包含抛物元素时，Cantat–Dujardin已证明了定理 6.2 [10, 定理 1.22]。Roda[58]已开发出在一般情形下处理全实曲面所需的工具。以下特例若能得到证明，将是朝着猜想 6.2迈出的重大一步，而且很可能需要大量新思路：

猜想 6.3（K3曲面上的零李雅普诺夫指数测度）。在猜想 *6.2* 的假设下，假设 ν 是一个具有零李雅普诺夫指数的 μ 平稳测度。

那么，ν 的支撑集在 X中并非扎里斯基稠密。

版权所有 © 20XX SIAM 未经授权，禁止复制本文

当 Γ_μ 包含抛物元时，这一点由 Cantat–Dujardin 的研究所知，难点在于去掉这一假设。注意，根据 Ledrappier 不变性原理 [44], 经 Crauel [16]推广后的结论，具有零李雅普诺夫指数的 a μ-平稳测度必然是 Γ_μ-不变的。支撑集并非扎里斯基稠密意味着该测度要么是原子型，要么支撑在有限个 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$的并集上。

辛流形。 [8, 中的下述问题是定理 2.1 的自然推广：12]

猜想 6.4（辛流形上的轨道闭包）。 设 Q 是一个紧辛流形，且 μ 支撑在 Q 的光滑辛同胚所成的群 Γ_μ 上。假设对于每个 $q \in Q$， μ 在 T_qQ 的每个各向同性子空间上都具有定义 2.3 所述意义下的一致扩张，并且在维数 1 2 维数 Q 上具有一致间隙。

那么， Q 上的每个 μ-平稳测度 ν 都支撑在一个由流形 $S_\mu \subseteq Q$ 分层的空间上，其中 S_μ° 是一个辛子流形，且 ν 是 S_μ° 上的体积测度。此外，对于任意 $q \in Q$ ，轨道闭包$\Gamma_\mu \cdot q$ 都是这样的一个 $S_q \subseteq Q$，并且 q 的经验测度趋于 S_q°上的光滑体积测度。

维数 1 2 $\dim Q$ 中的一致间隙确保不存在零李雅普诺夫指数，并且稳定/不稳定流形具有一致的大小，因此可以使用 Dolgopyat–Krikorian [20, §10] 的方法来证明自然体积测度的遍历性。对各向同性子空间施加一致扩张的假设，应当能排除诸如 K3 曲面上不变代数曲线的射影作用这类例子，参见定理 6.2。

6.2 平稳测度的双曲性。 本文提到的几乎所有测度刚性结果，都需要以平稳测度具有正李雅普诺夫指数为出发点，参见例如 [4, 9, 11, 23]。在齐性情形中，这一点已得到充分理解，并由 Furstenberg [38], 开创的随机矩阵乘积理论加以阐明，之后还有许多相关研究。

在一般的流形上的动力系统情形中，这仍是个谜。

一致扩张。 回想一下，在定义 2.3 中我们引入了一致扩张的概念。Chung [15]提出了一些验证一致扩张的判据，这些判据可用于进行数值验证（另见 Liu [47]的早期工作）。需要指出的是，一致扩张是一种开性质，即当支撑集中的微分同胚发生足够小的扰动时，该性质仍然成立。Elliot Smith [21]证明了在测度发生扰动时，一致扩张具有普遍性。

尽管如此，人们仍预计，除非存在某种“显然的”障碍，否则一致扩张应当成立。因此我们提出：

问题 6.5（一致扩张的判据）。 为 μ 在Diff(Q)上的测度的一致扩张建立判据，类似于在线性群上的随机游走中所获得的判据，参见例如 *[37]*。

这类判据应当涉及在整个群 Γ_μ作用下不变的结构，参见 [10, 定理 1.21] 中的一个典型例子。虽然获得这样的可测 结构并不困难，但若能将其中一些结构提升到更高正则性，将会非常有用。需要指出的是，在一致扩张存在的情况下，DeWitt–Dolgopyat [19]证明了平稳测度的指数混合。

6.3 刚性与特殊轨道闭包。 本节对一些概念会刻意保持模糊，但将通过 § 6.1 中的一些猜想来说明这些概念。假设我们所处的情形中，已有对不变测度以及轨道闭包的分类（且所有平稳测度都是不变的）。

本节假设，“良好”的轨道闭包 N 是一个由流形分层的空间，且相应的不变测度 ν 是在维数最大的光滑层 N° 上的光滑体积形式。将轨道闭包区分为“良好”和“坏”的必要性，早在 K3 曲面这一背景下就已出现，例如猜想 6.2。

定义 6.6（极大轨道闭包与不变测度）。 假设 (N, ν) 是如上所述的一个“良好”轨道闭包。若不存在另一个这样的配对 (N', ν')满足 $N \subsetneq N'$且维数 $N <$维数 $N' <$维数 Q，则称 N（分别称 ν）为极大的 。

有鉴于此，我们现在可以提出这个基本问题：

问题 6.7（无穷多个意味着齐性）。假设 Q 具有无穷多个良好的极大轨道闭包 Q_i。证明 Q具有由 Γ_μ保持的齐性结构，并且与 Q_i 相关联的不变测度等分布到与 Q相关联的测度。

版权所有 © 20XX SIAM 未经授权，禁止复制本文

备注 6.8。关于问题 6.7 的几点说明：

1. 我们将这个问题表述为一种原则，而不是一个预期总能成立的陈述。

2. 将这一原则理解为一个有限性陈述往往更有用： Q具有有限多个良好的极大轨道闭包，除非它具有能够自然解释这些闭包的结构。

3. 关于齐性的结论可以理解为： Q 本身可以以一种 Γ_μ不变的方式按流形分层，使得 Q° 具有一个由 Γ_μ保持的（G， X）结构，或者更一般地说，具有一个 Gromov 刚性几何结构 [40]。

现在我们讨论一些支持对问题 6.7 作肯定回答的证据。

K3 曲面的刚性。 对于 K3 曲面，问题 6.7 的一个特例由 Cantat–Dujardin [12]作出了精确表述并予以证明。这一在算术动力系统中颇具代表性的策略，应当适用于其他 Γ_μ 保持某种代数结构的情形。

具体而言，若 X 是定义在 $\mathbb{Q}$上的射影代数曲面，子群 $\overline{\Gamma_\mu} \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ 是非初等的且包含抛物元素，并且 Γ_μ 有无穷多个周期轨道，那么该曲面必定是一个 Kummer 例子，也就是说，它由环面经有限次点吹起后再取有限商得到。关键在于，周期轨道在伽罗瓦群作用下是不变的。对于固定的双曲元素 $\gamma \in \Gamma_\mu$，越来越大的、在伽罗瓦群作用下不变的周期点集合，会向 γ的最大熵测度等分布。因此，有限轨道的经验测度一方面等分布于不变体积，另一方面则对任意双曲元素 $\gamma \in \Gamma_\mu$等分布于最大熵测度。根据 Cantat–Dupont [14] 得到的刚性定理，这便推出了 Kummer 性质（另一种证明 Kummer 刚性的方法见 [34] ）。

据我们所知，关于问题 6.7 中 K3曲面含有无穷多个全实 Γ_μ-不变曲面的情形，文献中尚无讨论；不过，参见 [10, 定理 1.22] 和 [13, 定理 10.1]，其中给出了有限性陈述。对于高维 Calabi–Yau 流形上的代数群作用，应该可以推广 [35] 中典范高度的构造，并利用这些高度研究有限轨道和不变子簇。

全测地子流形。 另一个为问题 6.7 提供佐证的结果，是关于负曲率黎曼流形中全测地超曲面的定理 2.4。在这一背景下，问题 6.7 预言：

猜想6.9（全测地刚性）。 设 M 是一个紧致的负截面曲率黎曼流形，其维数至少为 3。假设对某个 $k \geq 2$，存在无穷多个互不相同的 M 中浸入的极大全测地 k 维子流形。

那么， M 与一个负曲率局部对称空间等距，即 $\Lambda \backslash G / K$，其中 G是实秩 1 李群， $K \subset G$ 是极大紧子群，而 Λ 是 G 中的一个格。

与 [33], 中的结果类似，应该可以放宽假设，只要求 M 具有 Anosov 测地流，并允许其非紧，但在无穷远处满足适当的界。Bader–Fisher–Miller–Stover [2] 的工作自然强化了定理 6.9 的结论，证明定义 M 的格 Λ 是算术的。

值得一提的是，Benoist、Foulon 和 Labourie [3]在假设稳定与不稳定叶状结构光滑的情况下，得到了类似于定理 6.9 的结论。Zeghib [61]也研究了与全测地流形有关的密切相关问题。

Teichmüller 动力系统。 在 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$作用于平移曲面模空间的情形下，Eskin–Mirzakhani–Mohammadi [24, 25]得到了测度刚性和拓扑刚性结果。由此产生的轨道闭包完全可以用代数几何 [28, 29], 来描述，而且相应切丛余循环的代数包满足在 [22]中确立的强刚性性质。进而，这使我们能够以相当完整的形式解决问题 6.7，即定理 6.8 所阐明的“有限性”形式。

注记 6.10（关于特殊性）。在涉及全测地子流形的例子以及 Teichmüller 动力系统中，那些存在无穷多个极大轨道闭包的流形 Q 实际上还具有一种额外的结构。这种结构解释了为何会出现无穷多个轨道闭包。

版权 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

对于全测地子流形而言，这种结构就是格 Λ 的算术性；而在 Teichmüller 动力系统中，轨道闭包分为“典型”和“非典型”两类（见 [32, §5.1]）。极大非典型轨道闭包的数量总是有限的，而典型轨道闭包都可以通过标准构造来解释。

辛流形。 我们通过讨论如何在辛流形和定理 6.4 的背景下理解问题 6.7，来结束这一讨论。下面这类齐性辛流形应当会有所帮助：

例 6.11（齐性辛流形）。设 G 是一个单连通李群，它通过辛同胚在一个单连通辛流形 $(N,\ \omega)$ 上传递地作用。容易验证$\widehat{\ }$，存在一个 $\mathbb{R}$-中心扩张 $G \to G$，使得 $(N,\ \omega)$ 与 G 在 $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ 中的某个余伴随轨道的万有覆盖等变同构。注意，由于 $\widehat{G}$ 的余伴随作用可以下降到该空间上（因为中心平凡地作用），G 作用在 $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ 上。

在定理 6.4 的情形下，人们预期，如果存在无穷多个极大轨道闭包 $(N,\ \nu)$，那么环境辛流形 $(Q,\ \omega)$ 应当是局部齐性的，因此局部同构于某个余伴随轨道，其中作用群 Γ_μ 包含于 G中。

6.4 特征簇上的动力系统。 现在我们讨论一种有望实现遍历不变测度和轨道闭包分类的情形。具体而言，我们描述映射类群的一类丰富子群，即那些“源自代数几何”的子群，它们作用于一个紧李群的特征簇。对于这些群的作用，可以证明类似于猜想 6.2 的结果。Goldman 发起了关于完整映射类群作用于特征簇的遍历理论研究 [39]。这是与 Brown、Eskin 和 Rodriguez Hertz 合作准备中的工作。

为简化记号，我们将限于纯映射类群和紧曲面的特征簇。将证明推广到相对特征簇和带 puncture 曲面的情形并无额外困难。

曲面群的特征簇。 固定 $g \geq 2$，设 Σ_g 是一个紧的亏格为 g 的曲面，并令 $\pi_1(\Sigma_g)$ 表示其基本群（相对于一个指定的基点，记号中省略该基点）。再设 U 为一个紧连通李群。引入<style id='9'>表示簇

$$\mathcal{R}(g,U) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), U)$$

它可以描述为在映射下，U^{2g}中单位元的原像：$(a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g) \mapsto [a_1,b_1]\dots[a_g,b_g]$。现在考虑特征簇

$$\mathcal{X}(g,U) := \mathcal{R}(g,U)/\!\!/U$$

其中 U 通过共轭作用。每个紧李群都有唯一的实代数结构，因此我们也可以在代数环境中考虑上述商空间，并为这些集合赋予代数结构。一般而言，我们得到一个由流形分层的空间，并且可以将注意力限制在扎里斯基稠密表示所构成的轨迹上；该轨迹具有自然的光滑流形结构。

映射类群及其代数几何子群。 回顾一下，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$表示 Σ_g的映射类群，它是商 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}^0(\Sigma_g)$，即 Σ_g上所有保定向微分同胚的连通分支构成的群。映射类群有两个基本特征：一方面，它是亏格为 g 的黎曼曲面模空间的（轨形）基本群；另一方面，它通过外自同构作用于 $\pi_1(\Sigma_g)$。事实上，德恩–尼尔森–贝尔定理 [27, Thm. 8.1] 将 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$与 $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$中保定向的指数为 2 的子群等同起来。

现在考虑一个拟射影簇 B，它配备了一个黎曼曲面的射影族 $C \xrightarrow{\pi} B$。如果我们选取一个基点 $b_0 \in B$ 和一个微分同胚 $\pi^{-1}(b_0) \cong \Sigma_g$，便得到一个单值表示$\rho$: $\pi_1(B,b) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$。

定义 6.12（映射类群的代数几何子群）。如果子群 $\Gamma \subset \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$代数几何 是由上述黎曼曲面射影族的单值表示的像得到的，则称其为代数几何子群。

注记 6.13（关于代数几何子群）。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

1. 代数几何子群这一类在被 Mod(Σ_g) 的元素共轭下保持不变，因为构造过程的一部分是选择一个识别 $\pi^{-1}(b_0) \cong \Sigma_g$。整个映射类群 Mod($\Sigma_g$) 都是代数几何的。

2. 不失一般性，我们可以假设 B 是有限型黎曼曲面，即从紧黎曼曲面中去掉有限个点所得的曲面。事实上，从任意一个拟射影 B出发，我们可以在 B 中取一条足够一般的完全交曲线——其基本群将满射到 B 的基本群，并导出 Mod(Σ_g) 中相同的代数几何子群。

要研究 Mod(Σ_g) 中代数几何子群在 $\mathcal{X}(g,\ U)$ 上的作用，我们可以利用霍奇理论。事实上，Σ_g 上的黎曼曲面结构将 $\mathcal{X}(g,\ U)$ 识别为半稳定全纯丛的模空间，并赋予特征簇中每个点处的切空间一个权重为 1 的霍奇结构。这使我们能够运用 [28, 30]中发展的工具。霍奇范数的次调和性发挥着关键作用，它是定义 2.3 中一致扩张的一种替代。

致谢。我谨向本文所述研究的合作者 Aaron Brown、Alex Eskin、David Fisher、Ben Lowe 和 Federico Rodriguez Hertz 致以谢意。感谢 Serge Cantat、Alex Eskin 和 Federico Rodriguez Hertz 对本文初稿提出意见。本研究得到美国国家科学基金会项目 DMS-2005470 和 DMS-2305394 的资助。作者在担任克莱研究学者期间，部分开展了这项研究。

参考文献

[1] S. Alvarez, M. Leguil, D. Obata, and B. Santiago，保守阿诺索夫微分同胚附近 *U*-吉布斯测度的刚性 $\mathbb{T}^3$，arXiv，（2022年）。

[2] U. Bader、D. Fisher、N. Miller 和 M. Stover，算术性、超刚性与全测地子流形，《数学年刊》（第2辑），193（2021年），第837–861页，https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.3.4，https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.3.4。[3]Y. Benoist、P. Foulon 和 F. c. Labourie，具有可微稳定与不稳定分布的阿诺索夫流，《美国数学会杂志》，5（1992），第33–74页，https://doi.org/10.2307/2152750，https://doi.org/ 10.2307/2152750。[4] Y. Benoist 和 J.-F. Quint，齐性空间上的平稳测度与不变闭集，《数学年刊》（第2辑），174（2011年），第1111–1162页，https://doi.org/10.4007/annals.2011.174.2.8，https://doi.org/ 10.4007/annals.2011.174.2.8。[5] Y. Benoist 和 J.-F. Quint，齐性空间上的平稳测度与不变子集（*II*），《美国数学会杂志》，26（2013），第659–734页，https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2013-00760-2，https: //doi.org/10.1090/S0894-0347-2013-00760-2。[6] J. Bourgain、A. Furman、E. Lindenstrauss 和 S. Mozes，环面上非阿贝尔半群轨道的平稳测度与等分布，《美国数学会杂志》，24（2011），第231–280页，https: //doi.org/10.1090/S0894-0347-2010-00674-1，https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2010-00674-1。[7] A. Brown，作用于流形上的格子子群，载于《国际数学家大会论文集》第5卷，第9–11节，EMS出版社，柏林，2023年，第3388–3411页。[8] A. Brown、A. Eskin、S. Filip 和 F. Rodriguez Hertz，通过因子分解方法研究广义 *u-Gibbs*态与平稳测度的测度刚性，arXiv:2502.14042，（2025年）。[9] A. Brown 和 F. Rodriguez Hertz，曲面上随机动力系统及相关扭积的测度刚性，《美国数学会杂志》，30（2017年），第1055–1132页，https://doi.org/10.1090/jams/877，https: //doi.org/10.1090/jams/877。

[10] S. Cantat 和 R. Dujardin，射影曲面自同构群的动力学：分类、示例与展望，2023年，https://doi.org/10.48550/ARXIV.2310.01303，https://arxiv.org/abs/2310.01303。

版权所有 © 20XX，SIAM。未经授权，禁止复制本文。

[11] S. Cantat 和 R. Dujardin，实和复射影曲面上的随机动力学，《纯粹与应用数学杂志》，802（2023年），第 1–76 页，https://doi.org/10.1515/crelle-2023-0038.[12]S. Cantat 和 R. Dujardin，射影曲面自同构大群的有限轨道，《组合数学》，160（2024年），第 120–175 页，https://doi.org/10.1112/s0010437x23007613，https://doi.org/10. 1112/s0010437x23007613.[13] S. Cantat 和 R. Dujardin，射影曲面自同构大群的双曲性，《综合理工学院数学杂志》，12（2025），第 421–480 页，https://doi.org/10.5802/jep.294，https://doi.org/10.5802/jep.294.[14]S. Cantat 和 C. Dupont，曲面的自同构：Kummer 刚性与最大熵测度，《欧洲数学会杂志》（JEMS），22（2020），第 1289–1351 页，https://doi.org/10.4171/JEMS/946，https: //doi.org/10.4171/JEMS/946.[15] P. N. Chung，曲面上一致扩张随机动力系统的平稳测度与轨道闭包，（2020年），https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.03166，https://doi.org/10.48550/ arXiv.2006.03166.[16] H. Crauel，非马尔可夫不变测度是双曲的，《随机过程与应用》，45（1993），第 13–28 页，https://doi.org/10.1016/0304-4149(93)90057-B，https://doi.org/10.1016/0304-4149(93)90057-B.[17] S. G. Dani 和 G. A. Margulis，齐性空间上幺幂流轨迹的渐近行为，《印度科学院院刊：数学科学》，101（1991年），第 1–17 页，https://doi.org/10.1007/BF02872005，https://doi.org/10.1007/BF02872005.[18] S. G. Dani 和 G. A. Margulis，幺幂流轨道的极限分布与二次型的取值，载于《I. M. Gelfand 研讨会》，第 16 卷，《苏联数学进展》第 1 部分，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993年，第 91–137 页。[19] J. DeWitt 和 D. Dolgopyat，保守的平均共扩张微分同胚，arXiv，（2025），https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.06855.[20] D. Dolgopyat 和 R. Krikorian，关于球面微分同胚的同时线性化，《杜克数学杂志》，136（2007），第 475–505 页。[21] R. Elliott Smith，流形上的一致扩张随机游走，《非线性》，36（2023），第 5955–5972 页，https://doi.org/10.1088/1361-6544/acfa5a，https://doi.org/10.1088/1361-6544/acfa5a.[22] A. Eskin、S. Filip 和 A. Wright，Kontsevich-Zorich余循环的代数包，《数学年刊》（第 2 辑），188（2018），第 281–313 页，https://doi.org/10.4007/annals.2018.188.1.5，https://doi.org/10.4007/annals. 2018.188.1.5.[23] A. Eskin 和 E. Lindenstrauss，局部齐性空间上的随机游走。预印本，2018年，https: //math.uchicago.edu/~eskin/RandomWalks/paper.pdf.[24] A. Eskin 和 M. Mirzakhani，模空间上 SL(2, $\mathbb{R}$) 作用的不变测度和平稳测度，《高等科学研究院数学出版物》，127（2018），第 95–324 页，https://doi.org/10.1007/s10240-018-0099-2，https://doi.org/10.1007/s10240-018-0099-2.[25] A. Eskin、M. Mirzakhani 和 A. Mohammadi，模空间上 SL(2, $\mathbb{R}$) 作用的孤立性、等分布与轨道闭包，《数学年刊》（第 2 辑），182（2015），第 673–721 页，https://doi.org/10.4007/annals. 2015.182.2.7，https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.2.7.[26] A. Eskin、R. Potrie 和 Z. Zhang，部分双曲测度的几何性质及其在测度刚性中的应用，2023年，https://arxiv.org/abs/2302.12981.[27] B. Farb 和 D. Margalit，《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书第 49 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012年。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

[28] S. Filip，《Kontsevich-Zorich余循环的半单性与刚性》，《数学发明》，205 (2016年)，第617–670页，https://doi.org/10.1007/s00222-015-0643-3，https://doi.org/10.1007/s00222-015-0643-3。[29] S. Filip，《仿射不变流形上的混合霍奇结构的分裂》，《数学年刊》(2)，183 (2016年)，第681–713页，https://doi.org/10.4007/annals.2016.183.2.5，https://doi.org/10.4007/annals.2016.183.2.5。[30] S. Filip，《Kontsevich-Zorich余循环的零李雅普诺夫指数与单值化》，《杜克数学杂志》，166 (2017年)，第657–706页，https://doi.org/10.1215/00127094-3715806，https://doi.org/10.1215/00127094-3715806。[31] S. Filip，《K3 曲面及其动力学导论》，载于《Teichmüller理论与动力学》，《全景综述》第58卷，法国数学会，巴黎，2022年，第1–46页。[32] S. Filip，《平移曲面：动力学与霍奇理论》，《EMS数学科学综述》，11 (2024年)，第63–151页，https://doi.org/10.4171/emss/78，http://dx.doi.org/10.4171/EMSS/78。[33] S. Filip、D. Fisher 和 B. Lowe，《全测地超曲面的有限性》，arXiv:2408.03430，(2024年)，https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.03430。[34] S. Filip 和 V. Tosatti，《通过里奇平坦度量刻画 K3曲面自同构的 Kummer 刚性》，《美国数学杂志》，143 (2021年)，第1431–1462页，https://doi.org/10.1353/ajm.2021.0036，https://doi.org/10.1353/ajm. 2021.0036。[35] S. Filip 和 V. Tosatti，《K3 曲面的典范流与高度》，《剑桥数学杂志》，11 (2023年)，第699–794页，https://doi.org/10.4310/cjm.2023.v11.n3.a2，https://doi.org/10.4310/cjm.2023.v11.n3.a2。[36] D. Fisher，《超越齐性动力系统的刚性、格与不变测度》，载于《国际数学家大会论文集》第5卷，第9–11节，EMS出版社，柏林，2023年，第3484–3507页。[37] A. Furman，《群上的随机游走与随机变换》，载于《动力系统手册》第1A卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2002年，第931–1014页，https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80014-5，https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80014-5。[38] H. Furstenberg，《非交换随机乘积》，《美国数学会汇刊》，108 (1963年)，第377–428页，https://doi.org/10.2307/1993589，https://doi.org/10.2307/1993589。[39] W. M. Goldman，《模空间上的遍历理论》，《数学年刊》(2)，146 (1997年)，第475–507页，https: //doi.org/10.2307/2952454，https://doi.org/10.2307/2952454。[40] M. Gromov，《刚性变换群》，载于《微分几何》（巴黎，1986），《进行中的研究》第33卷，Hermann出版社，巴黎，1988年，第65–139页。[41] M. Guysinsky 和 A. Katok，《具有不变收缩叶状结构的动力系统的正规形与不变几何结构》，《数学研究快报》，5 (1998年)，第149–163页，https://doi.org/10.4310/MRL. 1998.v5.n2.a2，https://doi.org/10.4310/MRL.1998.v5.n2.a2。[42] B. Kalinin 和 V. Sadovskaya，《非一致收缩的正规形》，《现代动力学杂志》，11 (2017年)，第341–368页，https://doi.org/10.3934/jmd.2017014，https://doi.org/10.3934/jmd.2017014。[43] A. Katz，《通过因子分解方法研究Anosov流的测度刚性》，《几何与泛函分析》，33 (2023年)，第468–540页，https://doi.org/10.1007/s00039-023-00629-8，https://doi.org/10.1007/s00039-023-00629-8。[44] F. Ledrappier，《矩阵平稳序列的指数正性》，载于《李雅普诺夫指数》（不来梅，1984），《数学讲义》第1186卷，施普林格，柏林，1986年，第56–73页，https://doi.org/10. 1007/BFb0076833，https://doi.org/10.1007/BFb0076833。[45] F. Ledrappier 和 L.-S. Young，《微分同胚的度量熵。II. 熵、指数与维数之间的关系》，《数学年刊》(2)，122 (1985年)，第540–574页，https://doi.org/10.2307/1971329，https://doi.org/10.2307/1971329。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。

[46]E. Lindenstrauss, 《齐性空间上的等分布与数论》, 载于《国际数学家大会论文集》第一卷, 印度斯坦图书社, 新德里, 2010年, 第531–557页。[47] X.-C. Liu, 《李雅普诺夫指数近似、辛余循环变形与大偏差定理》, 博士论文, IMPA, 2016年, https://doi.org/https://impa.br/wp-content/uploads/2017/11/tese¯dout_Xiaochuan_Liu.pd。[48] G. Margulis 和 A. Mohammadi, 《包含无穷多个全测地曲面的双曲三维流形的算术性》, 《遍历理论与动力系统》, 42 (2022年), 第1188–1219页, https://doi.org/10. 1017/etds.2021.21, https://doi.org/10.1017/etds.2021.21。[49] G. A. Margulis, 《不定二次型与齐性空间上的幺幂流》, 巴黎科学院报告·数学系列 I, 304 (1987年), 第249–253页。[50]G. A. Margulis, 《半单李群的离散子群》, 《数学及其边界领域成果》(3)第17卷 [《数学及相关领域成果》(3)], 施普林格出版社, 柏林, 1991年, https://doi.org/10.1007/978-3-642-51445-6, https://doi.org/10.1007/978-3-642-51445-6。[51] G. A. Margulis 和 G. M. Tomanov, 《局部域上的幺幂群作用于齐性空间所对应的不变测度》, 《数学发明》, 116 (1994年), 第347–392页, https://doi.org/10.1007/BF01231565, https://doi.org/10.1007/BF01231565。[52] J. Mather, 《拓扑稳定性札记》, 《美国数学会通报》(新系列), 49 (2012年), 第475–506页, https: // doi.org/10.1090/S0273-0979-2012-01383-6, https://doi.org/10.1090/S0273-0979-2012-01383-6。[53]K. Melnick, 《收缩可测余循环的非平稳光滑几何结构》, 《遍历理论与动力系统》, 39 (2019年), 第392–424页, https://doi.org/10.1017/etds.2017.38, https://doi.org/ 10.1017/etds.2017.38。[54]Y. B. Pesin 和 Y. G. Sinai, 《部分双曲吸引子的吉布斯测度》, 《遍历理论与动力系统》, 2 (1982年), 第417–438页, https://doi.org/10.1017/S014338570000170X, https://doi.org/10. 1017/S014338570000170X。[55] M. Ratner, 《半单群的幺幂子群的测度刚性》, 《数学学报》, 165 (1990年), 第229–309页, https://doi.org/10.1007/BF02391906, https://doi.org/10.1007/BF02391906。[56] M. Ratner, 《关于Raghunathan测度猜想》, 《数学年刊》(2), 134 (1991年), 第545–607页, https: // doi.org/10.2307/2944357, https://doi.org/10.2307/2944357。[57]M. Ratner, 《Raghunathan拓扑猜想与幺幂流的分布》, 《杜克数学杂志》, 63 (1991年), 第235–280页, https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06311-8, https://doi.org/10.1215/ S0012-7094-91-06311-8。[58]M. Roda, 《大自同构群紧复曲面上的双曲遍历平稳测度分类》, arXiv, (2024年), https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.18350。[59] R. W. Sharpe, 《微分几何》, 《数学研究生教材》第166卷, 施普林格出版社, 纽约, 1997年。[60] S. Sternberg, 《局部收缩与Poincaré定理》, 《美国数学杂志》, 79 (1957年), 第809–824页, https://doi.org/10.2307/2372437, https://doi.org/10.2307/2372437。[61] A. Zeghib, 《双曲流形的层状结构与测地超曲面》, 《高等师范学校科学年刊》(4), 24 (1991年), 第171–188页, http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_2_171_0。[62] R. J. Zimmer, 《半单群作用与离散子群》, 载于《国际数学家大会论文集》第1、2卷（加利福尼亚州伯克利, 1986）, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1987年, 第1247–1258页。

版权所有 © 20XX SIAM。未经授权，禁止复制本文。