arXiv:2512.13893v1 [math.RT] 15 Dec 2025

通过复制代数研究经典倾斜与 τ-倾斜理论

JONAH BERGGREN 和 KHRYSTYNA SERHIYENKO

Abstract. τ-倾斜理论可以视为经典倾斜理论的一种推广，它允许对支撑 τ-倾斜对的任意不可分解直和项进行变异。事实上，对于任意代数 Λ，其倾斜模 tilt Λ 构成支撑 τ-倾斜偏序集 sτ-tilt Λ的一个子偏序集。我们证明，反过来，代数 Λ 的 τ-倾斜理论可以通过建立偏序集同构 sτ-tilt $\Lambda \cong$ tilt $\bar{\Lambda}$，自然地等同于其复制代数 $\bar{\Lambda}$ 的经典倾斜理论。因此， τ-倾斜理论可以视为倾斜理论的一个特例。这将 Assem-Br¨ustle-Schiffler-Todorov 的结果推广到了遗传代数的情形。我们还证明，积 sτ-tilt $\Lambda \times$ sτ-tilt Λ 嵌入其复制代数的支撑 τ-倾斜偏序集 sτ-tilt $\bar{\Lambda}$ 中，且其像由若干 Bongartz 区间构成。作为应用，我们在极大绿色序列层面上得到了类似的包含关系。

1. Introduction

倾斜理论是联系不同范畴的有力工具，广泛应用于数学的许多领域，包括表示论、交换与非交换代数几何以及代数拓扑。它起源于 Bernstein、Gelfand 和 Ponomarev 于 1973年 对反射函子的研究 [BGP] ，旨在联系两个箭图的表示。反射函子也为有限表示型箭图的 Gabriel分类 提供了重要见解。随后，Auslander、Platzeck 和 Reiten 的工作 [APR] 以及 Brenner-Butler倾斜定理 [BB]对其进行了推广。如今对倾斜模的定义最早见于 Happel 和 Ringel 的工作 [HR], ，而对代数的倾斜偏序集及其组合性质的研究则由 Unger 推动 [U]。此后，倾斜理论从有限维代数上的模这一范畴推广至一般的环，并进一步扩展到余倾斜理论、硅化理论和簇倾斜理论。关于倾斜理论的更多信息，请参阅 [ASS, HHK] 及其中的参考文献。

倾斜理论的另一项重要推广是 τ-倾斜理论，它由 Iyama、Adachi 和 Reiten 在 2014年 的开创性著作中提出 [AIR]。他们证明，对于给定的有限维代数， τ-倾斜理论等价于研究投射模的二项硅化复形以及函子有限挠类。此外，Fomin 和 Zelevinsky 的簇代数[FZ] 可以通过某些 2-Calabi-Yau倾斜代数的 τ-倾斜理论进行范畴化，因此， τ-倾斜理论揭示了每个有限维代数的模范畴中类似簇的组合结构。此外， τ-倾斜理论的发展推动了表示论中许多新结果的出现。特别是， τ-倾斜理论与砖的研究 [DIRRT], 稳定性条件 [As], g向量 [DIJ], c向量 [F], 以及绿色序列 [BST]之间存在密切联系。

给定任意有限维代数 Λ，一个倾斜模自然会产生一个支撑 τ-倾斜对，因此 τ-倾斜理论自然包含一个代数的倾斜理论。更具体地说，倾斜模构成一个偏序集 tilt Λ ： 当两个倾斜模仅相差一个不可分解直和项时，它们便通过 tilt Λ 的哈斯图中的一条边相连。将一个

作者 得到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2451909 的支持。本工作得到 he 西蒙斯基金会 国际项目 [SFI-MPS-TSM-00013650 的资助，KS]。

倾斜模的不可分解直和项替换为另一个不可分解直和项，称为一次变异。类似地，支撑τ-倾斜模构成一个偏序集 sτ-tilt Λ，而 tilt Λ是 sτ-tilt Λ的保持覆盖关系的子偏序集。因此，τ-倾斜理论通常被视为经典倾斜理论的一种完备化，它允许在每个不可分解直和项处进行变异。

在本文中，我们从相反的角度出发，证明对于任意有限维代数 Λ，其 τ-倾斜理论等价于其复制代数 Λ的倾斜理论。Λ 的复制代数定义为一种 2×2 三角矩阵代数，其对角线上为 Λ，次对角线上为对偶双模 $D\Lambda$。我们的第一个主要结果如下。

定理 1.1。设 Λ 为一个代数，并令 Λ 表示其复制代数。那么存在一个偏序集同构

$$\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \cong \mathrm{tilt}\,\bar{\Lambda}.$$

该同构由一个显式映射 F实现，该映射将支撑_τ-倾斜 Λ-模的投射表示映射到倾斜 Λ-模的投射分解。我们注意到，对于遗传代数 Λ，这一结果可以由 Assem、Br¨ustle、Schiffler 和 Todorov_[在 2006年], 的工作中推出；他们证明了 Λ 上的倾斜模与簇范畴 $\mathcal{C}_\Lambda$ 中的簇倾斜对象之间存在双射，其中 Λ 来自 [BMRRT]。注意，后者又与支撑 τ-倾斜Λ-模之间存在双射，该结果见 [AIR]。因此，定理 1.1 将 [ABST] 的结果推广到了遗传情形之外。我们还注意到，某个代数及其复制代数之间，或更一般地说，与其 m-复制代数的倾斜模之间的关系，已在 Zhang[Z、Z2], 等人的多项工作中得到研究；此外，Chan、Iyama 和 Marczinzik [CIM]还在高阶 Auslander-Reiten 理论的背景下研究了这一关系。另一方面，最近 Hafezi、Nasr-Isfahani 和 Wei 在投射 Λ-模的态射范畴 [HNIW]中建立了 sτ-倾斜 Λ与倾斜对象之间的双射。

接下来，我们进一步联系 τ 和 Λ 的支撑 Λ -倾斜偏序集。特别地，我们证明，Λ 的支撑 τ-倾斜偏序集的积是 Λ 的支撑 τ-倾斜偏序集的子偏序集。

定理 1.2。设 Λ 是一个代数，并令 Λ 表示其复制代数。则存在偏序集包含映射

$$\varphi : \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \times \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \to \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\bar{\Lambda}.$$

映射 φ 的定义使用了定理 1.1 中的映射 F，并具有如下性质。固定映射 φ 第一分量中的一个支撑 τ-倾斜 Λ 模 M，同时令第二分量遍历 sτ-倾斜 Λ，则 $\varphi(M, -)$ 在 sτ-倾斜 Λ 中的像是一个 Bongartz 区间，并且同构于 sτ-倾斜 Λ。因此，sτ-倾斜 Λ 包含许多份 sτ-倾斜 Λ，且它们全都是 Bongartz 区间。证明该定理的关键要素是 Jasso [J] 的 τ-倾斜约化。

代数 Λ的极大绿色序列是偏序集 sτ-倾斜 Λ中的一条有限极大链。Keller 最初于 [K] 在簇代数的背景下引入了极大绿色序列，用于计算精细 Donaldson-Thomas 不变量。它们对于构造扭自同构以及证明簇代数中 theta 基的存在性也很重要。极大绿色序列的概念被推广到有限维代数的模范畴，例如参见综述 [KD]及其中的参考文献。此外，该领域的一个主要问题是代数是否存在极大绿色序列。

令 MGS(Λ) 表示 Λ的所有极大绿色序列的集合。作为定理 1.2 的一个应用，我们得出结论：代数 Λ 的一对极大绿色序列诱导出 Λ 的一个极大绿色正合列，该序列位于 φ的像中。这个结果意味着映射 φ的像覆盖了 Λ的支撑 τ-倾斜偏序集的整个长度。

推论 1.3. 存在极大绿色序列的包含

$$\psi : \ \mathrm{MGS}(\Lambda) \times \mathrm{MGS}(\Lambda) \to \mathrm{MGS}(\bar{\Lambda}).$$

本文结构如下。第 2 节回顾倾斜理论和_τ-倾斜理论的相关背景，以及复制代数。第 3 节定义映射 F: mod $\Lambda \to$ mod Λ

¯并描述其像。接着，我们利用 F在¯ ¯第 4 节构造 sτ-tilt Λ与 tilt Λ之间的双射。在下一节中，我们定义另一个映射 G: sτ-tilt $\Lambda \to$sτ-tilt Λ，其像是由 Λ定义的 sτ-tilt Λ中的 Bongartz 区间。然后，我们结合这两个映射 F, G，得到定理 1.2 和推论 1.3 中的包含关系。

2. 背景

设 Λ 是代数闭域 k 上的有限维代数。记 mod Λ 为有限维右 Λ 模的范畴。记 proj Λ, proj-inj Λ 分别为投射模与投射-内射 Λ-模的范畴。记 $P_\Lambda(i)$ $I_\Lambda(i)$ $S_\Lambda(i)$ 分别为顶点 i 处的不可分解投射模、单射模和简单模。给定 $M \in$mod Λ，令 $|M|$ 为 M 的两两非同构不可分解直和项的个数，$\mathrm{pd}_\Lambda M$ 为其投射维数。若模 M 的所有不可分解直和项两两非同构，则称其为基本模。此外，Fac M 是 M 的有限直和的所有商模构成的集合，而 add M 是 mod Λ 的加性子范畴，由 M 的直和项的所有有限直和组成。记 $\Omega_\Lambda M, \Omega_\Lambda^{-1} M$ 分别为 M 的上核与下核。最后，记标准对偶函子为 $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$，Auslander-Reiten 平移为 τ_Λ。

2.1. 倾斜。我们回顾倾斜理论和 τ-倾斜理论中的一些定义与结果。首先介绍经典倾斜理论。

定义 2.1。若基本模 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ 满足以下所有条件，则称其为倾斜模：

(a) M 是刚性的，即 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, M) = 0$;
(b) $\mathrm{pd}_\Lambda M \leq 1$; (c) $|M| = |\Lambda|$。

此外，若满足条件 (a) 和 (b)，则称其为部分倾斜模。

注意，任何部分倾斜模都可以通过添加额外的模补全为倾斜模 a 直和项 s，如 Bongartz [B] 所示。

令 tilt Λ 表示所有倾斜 Λ-模（按同构分类）所成的集合。此外，tilt Λ 带有一个偏序集结构，其中偏序关系定义如下：若 Fac $M \subseteq$Fac M'，则 $M \leq M' \in$tilt Λ。

接下来，我们根据 [AIR] 回顾由 Adachi、Iyama 和 Reiten 引入的相关 τ-倾斜理论。我们也提请读者注意倾斜与τ-倾斜之间的各种对应关系。

定义 2.2。若一对基本模 (M, P_Λ) 满足 $M \in$模范畴 Λ, $P_\Lambda \in$proj Λ，则称其为 支撑τ-倾斜，如果它满足以下所有条件：

(a) M是 τ-刚性的，即 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau_\Lambda M) = 0$;
(b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda, M) = 0$; (c) $|M \oplus P_\Lambda| = |\Lambda|$。

此外，若一对 (M, P_Λ) 满足 (a) 和 (b)，则称其为 τ-刚性的。

注意，一个支撑 τ-倾斜对 (M, P_Λ) 由 M 确定，其中 M 称为支撑τ-倾斜模。因此，有时我们可以省略第二个位置上的投射模，而只关注支撑 τ-倾斜模。

令 sτ-tilt Λ表示所有支撑 τ-倾斜对按同构分类后所得的集合（即 $(M, P) \cong (M', P')$ 当且仅当 $M \cong M$且$P \cong P'$），或者等价地，表示模范畴 mod Λ中所有支撑 τ-倾斜模按同构分类后所得的集合。此外，sτ-tilt Λ是一个偏序集，其偏序定义如下：若 $(M, P_\Lambda) \leq (M', P'_\Lambda) \in$s$\tau$-tilt Λ，则 Fac $M \subseteq$Fac M'。我们注意到，每个倾斜模 M都是支撑 τ-倾斜模，或者等价地，会诱导出一个支撑 τ-倾斜对 $(M, 0)$，参见 [AIR，命题 2.2]。这诱导出一个保覆盖嵌入（偏序集嵌入

保持覆盖关系）tilt Λ 到 sτ-tilt Λ。因此，tilt Λ 是 sτ-tilt Λ的一个保覆盖子偏序集，由此，支撑 τ-倾斜理论被视为倾斜理论的推广。

一个 τ-刚性对 $(M,\ P_\Lambda)$ 总可以通过添加额外的直和项，补全为一个支撑 τ-倾斜对 $(M \oplus M',\ P_\Lambda \oplus P'_\Lambda)$。这种补全并不唯一。令 s$\tau$-倾斜$_{(M,P_\Lambda)}\Lambda$ 表示 sτ-倾斜 Λ中所有可能的 τ-刚性对 $(M,\ P_\Lambda)$ 的补全所构成的子集；也就是说，

$$\text{s}\tau\text{-tilt}_{(M,P_\Lambda)}\Lambda = \{(M', P'_\Lambda) \in \text{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \mid M \in \operatorname{add} M', P_\Lambda \in \operatorname{add} P'_\Lambda\}.$$

已知 sτ-倾斜$_{(M,P_\Lambda)}\Lambda$构成 sτ-倾斜 Λ中的一个区间，称为 $(M,\ P_\Lambda)$ 的***Bongartz* 区间** 。此外，sτ-倾斜$_{(M,P_\Lambda)}\Lambda$ 的最大元素称为 $(M,\ P_\Lambda)$ 的***Bongartz* 补全** ，其形式为 $(M \oplus M',\ P_\Lambda)$。类似地，s$\tau$-倾斜$_{(M,P_\Lambda)}\Lambda$的最小元素称为 $(M,\ P_\Lambda)$ 的***Bongartz* 余完备** 。注意，$(M,\ P_\Lambda)$ 的 Bongartz 余完备可能不具有 $(M,\ P_\Lambda \oplus P')$ 的形式，其中 P' 是某个投射模。

我们还回顾挠对的概念。挠对 是模范畴 mod Λ 中的一对全子范畴 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$，满足对所有 $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$，$\operatorname{Hom}_\Lambda(T, F) = 0$，并且 $\mathcal{T}, \mathcal{F}$关于此性质是极大的。注意，这样一来，$\mathcal{T}$决定了 $\mathcal{F}$。此外，每个 τ-刚性模T都会导出一个挠对 $(\mathcal{T}(T)\ \mathcal{F}(T))$，其中 $\mathcal{T}(T) = \operatorname{Fac} T$。

给定一个挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 以及任意一个 $M \in$模范畴 mod Λ 中的对象，都存在一个典范正合列，它在同构意义下唯一，

$$0 \to tM \to M \to fM \to 0 \tag{2.1}$$

其中 $tM \in \mathcal{T}$和 $fM \in \mathcal{F}$，例如参见 [ASS，命题 VI. 1.5]。在此情形下，tM和 fM分别称为与挠对 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 对应的 M 的扭挠部分 和 M 的无挠部分 。关于倾斜理论的更多信息，请参见 [ASS，第 VI 章]。

最后，我们回顾 τ-倾斜约化，这是 Jasso [J] 在 τ-倾斜理论中发展的一项重要技术。设 $(M,\ P_\Lambda)$ 是模范畴 mod Λ 中的一个 τ-刚性对。它定义了一个挠对 $(\operatorname{Fac} M,\ M^\perp)$，其中

$$M^\perp = \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(M, X) = 0\}.$$

设 $(M \oplus M',\ P_\Lambda)$ 是 $(M,\ P_\Lambda)$ 的 Bongartz 补全，并定义 $B_{(M,P_\Lambda)} = \operatorname{End}_\Lambda(M \oplus M')$ 为 $M \oplus M'$ 的自同态代数。令

$$C_{(M,P_\Lambda)} = B_{(M,P_\Lambda)} / \langle e_M \rangle$$

为 $B_{(M,P_\Lambda)}$ 对应于投射 $B_{(M,P_\Lambda)}$-模 $\operatorname{Hom}_\Lambda(M \oplus M',\ M)$ 的幂等元 e_M 所确定的商。采用这一记号，[J] 的主要结果之一可表述如下。

定理 2.3。 [J，定理 3。16] 设 $(M,\ P_\Lambda)$ 是 模范畴 mod Λ 中的一个 τ-刚性对。那么，在支撑 τ-倾斜模上存在一个偏序集同构

$$\begin{aligned} \text{s}\tau\text{-tilt}_{(M,P_\Lambda)}\Lambda &\to \text{s}\tau\text{-tilt}\, C_{(M,P_\Lambda)} \\ N &\mapsto \operatorname{Hom}_\Lambda(M \oplus M', fN) \end{aligned}$$

其中，$fN \in M^\perp$由与挠对(2.1)相对应的典范正合列$(\operatorname{Fac} M, M^\perp)$定义。

2.2. **复制代数**。 我们回顾复制代数的构造及其主要性质，复制代数是本文研究的主要对象之一。给定一个代数 Λ，三角矩阵代数

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ D\Lambda & \Lambda \end{bmatrix}$$

称为 Λ的复制代数。注意，Λ包含代数 Λ的两个副本，我们将它们记为 Λ 和 $\Lambda^\bullet$，使得 $\Lambda^\bullet$ 对应于 Λ的矩阵 表示的右下角。因此，Λ 的本原正交幂等元是 Λ 和 $\Lambda^\bullet$的本原幂等元。相应地，Λ的箭图中的每个顶点 i 都会在 Λ中对应两个顶点，我们将

记为 i、$i^\bullet$。另外请注意，每个 Λ-模也是 $\bar{\Lambda}$上的模，因此，$\operatorname{mod}\Lambda$、$\operatorname{mod}\Lambda^\bullet$是$\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$的全子范畴。

以下描述不可分解投射和单射 Λ-模的命题可由 [ABST]推出。关于复制代数的更多信息，参见 [ANS]。

引理 2.4. [ABST，第 1 节。3] 设 $\bar{\Lambda}$ 是代数 Λ的复制代数，则以下结论成立：

(a) $P_{\bar{\Lambda}}(i) \cong P_\Lambda(i)$, *(b)* $P_{\bar{\Lambda}}(i^\bullet) \cong I_{\bar{\Lambda}}(i)$，并且存在一个短正合列 $0 \to I_\Lambda(i) \to P_{\bar{\Lambda}}(i^\bullet) \to P_{\Lambda^\bullet}(i^\bullet) \to 0$，属于模范畴 $\bar{\Lambda}$，*(c)* $I_{\bar{\Lambda}}(i^\bullet) \cong I_{\Lambda^\bullet}(i^\bullet)$。

例 2.5。 </style}若 $\Lambda = k(1 \to 2)$，则 $\bar{\Lambda}$ 是具有关系$\alpha^\bullet\beta\alpha = 0$的下列箭图的路径代数。

$$\begin{array}{ccc} 1^\bullet & \xrightarrow{\alpha^\bullet} & 2^\bullet \\ & \overset{\beta}{\searrow} & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \end{array}$$

我们看到，$\bar{\Lambda}$ 包含 $\Lambda = k(1 \xrightarrow{\alpha} 2)$和 $\Lambda^\bullet = k(1^\bullet \xrightarrow{\alpha^\bullet} 2^\bullet)$，它们对应的模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$，$\operatorname{mod}\Lambda^\bullet$ 都是 $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$ 的全子范畴。注意，不可分解投射$\bar{\Lambda}$-模是投射 Λ-模，$P(1) = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$和 $P(2) = 2$ 以及投射-内射$\bar{\Lambda}$-模 $P(1^\bullet) = \begin{smallmatrix}1^\bullet\\2^\bullet\\1\end{smallmatrix}$ 和 $P(2^\bullet) = \begin{smallmatrix}2^\bullet\\1\\2\end{smallmatrix}$。

3. Construction of the map F

本节构造一个映射 F，将 Λ-模映到 $\bar{\Lambda}$-模。我们证明该映射是 单射，并描述其在 $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$ 中的像：几乎所有投射维数至多为一的 $\bar{\Lambda}$-模都属于该像。

定义 3.1. 在模上定义一个映射

$$\begin{aligned} F : \operatorname{mod}\Lambda &\to \operatorname{mod}\bar{\Lambda} \\ M &\mapsto F(M) \end{aligned}$$

如下。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P^1_\Lambda & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}f\\g\end{smallmatrix}\right]} & P^0_\Lambda \oplus P'_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & F(M) \oplus P''_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle [1\ 0]} & & \downarrow & & \\ & & P^1_\Lambda & \xrightarrow{f} & P^0_\Lambda & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.1}$$

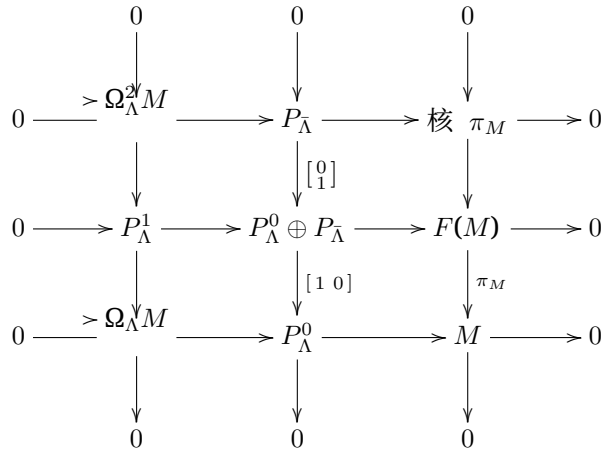
其中底行是 M 在模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的一个投射表示，顶行则按下文所述构造。令 $g\colon P^1_\Lambda \to P'_{\bar{\Lambda}}$ 表示 P^1_Λ在模范畴 $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$中的一个内射包，并注意到，根据引理 2.4(b)，$P'_{\bar{\Lambda}}$ 是投射-内射的。定义 $F(M)$为 $\left[\begin{smallmatrix}f\\g\end{smallmatrix}\right]$ 的余核中不含非零投射-内射直和项 $\bar{\Lambda}$的极大直和项。因此，该余核具有形式 $F(M) \oplus P''_{\bar{\Lambda}}$，其中 $P''_{\bar{\Lambda}}$是余核的一个极大投射-内射直和项，且可能为零。

注意，左侧的方形图表按构造可交换，因此根据余核的泛性质，存在一个映射 $F(M) \oplus P''_{\bar{\Lambda}} \to M$ 使得第二个方形图表可交换。

注意， F 仅是定义在模上的映射，我们并未将其定义在态射上。下图更精确地说明了 M与 F (M)之间的关系，这一关系将在接下来的讨论中发挥重要作用。

引理 3.2. 给定 $M \in$模范畴 Λ，存在一个模范畴 $\bar{\Lambda}$ 中的交换图，其正合行与列

(3.2)



其中， P^0_Λ是 M的投射覆盖， $P^0_\Lambda \oplus P_{\bar{\Lambda}}$是 $F(M)$的投射覆盖，而 $P_{\bar{\Lambda}}$是投射-单射 Λ-模。特别地，中间一行是 $F(M)$在模范畴 $\bar{\Lambda}$ 中的极小投射分解，并且核 $\pi_M \cong \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}}\Omega^2_\Lambda M$。

证明。 回顾模 $F(M)$的构造以及图表（3.1）。我们将说明如何由（3.1）得到（3.2）。注意，（3.2）的底行是通过使（3.1）的底行在左端正合而得到的。特别地， P^0_Λ是 M在模范畴 Λ中的投射覆盖，而投影 $P^0_\Lambda \to M$的核是 M的上核，记为$\Omega_\Lambda M$。

现在考虑 (3.1) 中的上方正合列。根据定义，它是 $F(M) \oplus P''_{\bar{\Lambda}}$ 的一个投射分解，其中 $P''_{\bar{\Lambda}}$ 是一个投射-内射 $\bar{\Lambda}$-模。于是 $P''_{\bar{\Lambda}}$ 是 $P^0_\Lambda \oplus P'_{\bar{\Lambda}}$ 的一个直和项。由于 P^0_Λ 是一个投射 Λ-模，因此它不含任何投射-内射 $\bar{\Lambda}$ 的直和项。因此， $P''_{\bar{\Lambda}}$ 是 $P'_{\bar{\Lambda}}$ 的一个直和项。令 $P_{\bar{\Lambda}}$ 由 $P'_{\bar{\Lambda}}$ 去掉 $P''_{\bar{\Lambda}}$ 得到。这便得到 (3.2) 第二行中的短正合序列。注意，该正合列是 $F(M)$ 的一个投射分解，而且还是极小的。事实上， P^1_Λ 与 $P_{\bar{\Lambda}}$ 没有共同的直和项，所以如果 $P^1_\Lambda \to P^0_\Lambda \oplus P_{\bar{\Lambda}}$ 不是极小的，那么 $P^1_\Lambda \to P^0_\Lambda$ 也不是极小的。后者是 M 的一个极小投射分解，这将导致矛盾。最后，由 (3.1) 还可得到 (3.2) 中从第二行到第三行的诱导垂直映射，使两个方块交换。注意，这些垂直映射确实是满射。

(3.2) 的顶行是通过取垂直映射的核得到的，根据蛇引理可得一个正合序列。注意，根据定义，P^1_Λ是 $\Omega_\Lambda M$ 的投射覆盖，因此相应投影的核是 $\Omega^2_\Lambda M$ ，如所声称。

最后，注意如果 ker π_M 包含任何投射-内射 Λ-模，那么由于图表第三列中的短正合列，这些模也必然是 $F(M)$ 的直和项，这与映射 F 的定义相矛盾。因此，ker π_M 不包含任何投射-内射直和项，这意味着 $P_{\bar{\Lambda}}$ 是 mod $\bar{\Lambda}$ 中 $\Omega^2_\Lambda M$ 的内射包，所以包含 $\Omega^2_\Lambda M \to P_{\bar{\Lambda}}$ 的余核 ker π_M 同构于 $\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}}\Omega^2_\Lambda M$。引理得证。□

接下来，我们得到映射 F 的一些重要性质。

命题 3.3. 设 $M, N \in$ 模范畴 Λ，则以下结论成立：

(a) $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$, (b) $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}} F(M) \leq 1$, (c) $F(M) \cong M$ 当且仅当 $\mathrm{pd}_{\Lambda} M \leq 1$. (d) M 是不可分解的，当且仅当 $F(M)$ 是不可分解的。

证明。(a)由 F的定义可知，因为模的直和的投射表示是各直和项的投射表示的直和。(b)由(3.2)的第二行可知，因为根据引理 2.4(a)，P^1_{Λ} 是一个投射 $\bar{\Lambda}$-模。此外，同一个图表意味着，若 $F(M) \cong M$，则 $P_{\bar{\Lambda}} = 0$ 且 $\Omega_{\Lambda} M \cong P^1_{\Lambda}$。因此 $\mathrm{pd}_{\Lambda} M \leq 1$。反过来，若 $\mathrm{pd}_{\Lambda} M \leq 1$，则 $\Omega_{\Lambda} M \cong P^1_{\Lambda}$ 且 $\Omega^2_{\Lambda} M = 0$。于是，核 $\pi_M \cong \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} \Omega^2_{\Lambda} M = 0$，这表明$F(M) \cong M$，从而完成了(c)部分的证明。

为证明(d)，首先假设 $M = N_1 \oplus N_2$ 为一个非零的(3.2)第二行中的 $F(M)$ 的极小投射分解也可以写成如下形式，其中 $P^1_{\Lambda} \cong P^1_{\Lambda}(N_1) \oplus P^1_{\Lambda}(N_2)$ 且 $P^0_{\Lambda} \cong P^0_{\Lambda}(N_1) \oplus P^0_{\Lambda}(N_2)$。注意，由于 $N_1, N_2 \in$模 Λ 不含投射-内射直和项，因此 f_1, f_2 均非零。

$$0 \longrightarrow P^1_{\Lambda}(N_1) \oplus P^1_{\Lambda}(N_2) \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \\ \star & \star \end{bmatrix}} P^0_{\Lambda}(N_1) \oplus P^0_{\Lambda}(N_2) \oplus P_{\bar{\Lambda}} \longrightarrow N_1 \oplus N_2 \longrightarrow 0$$

此外，由图表 (3.2)，M是 $f = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$ 的余核：$P^1_{\Lambda} \to P^0_{\Lambda}$，其中 f 是 M 的投射表示。这意味着 $M \cong \mathrm{coker}\ f_1 \oplus \mathrm{coker}\ f_2$，且直和项 $\mathrm{coker}\ f_1, \mathrm{coker}\ f_2$ 均非零。这表明，若 M 可分解，则 $F(M)$ 也可分解。反过来，(a) 部分推出，若 M 可分解，则 $F(M)$ 也可分解，从而完成了 (d) 的证明。□

引理 3.4。映射 F：模范畴 $\Lambda \to$模范畴 Λ 是单射。

证明。设 M，$N \in$模范畴 Λ使得 $F(M) \cong F(N)$。我们需要证明 $M \cong N$。由于$F(M) \cong F(N)$，所以它们具有同构的投射分解，且这些投射分解具有引理 3.2 所给出的形式。此外，我们得到如下交换图，其中包含 $F(M)$ 和 $F(N)$ 的投射分解

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P^1_{\Lambda} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}} & P^0_{\Lambda} \oplus P_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & F(M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ 0 & \longrightarrow & P^1_{\Lambda} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix}} & P^0_{\Lambda} \oplus P_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & F(N) \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 ϕ_0，ϕ_1是同构。这里，$P_{\bar{\Lambda}} \in$投射-内射Λ且 P^1_{Λ}，$P^0_{\Lambda} \in$投射 Λ。此外，注意到根据引理 3.2 的构造，我们有 $M \cong$余核 f以及 $N \cong$余核 f'。

注意到 $P_{\bar{\Lambda}}$的顶属于 $\Lambda^{\bullet}$，因此 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_{\bar{\Lambda}}, P^0_{\Lambda}) = 0$和 $\phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_{00} & 0 \\ \phi_{10} & \phi_{11} \end{bmatrix}$，其中 ϕ_{00}，ϕ_{11}是同构。然后，由上述图表的交换性，我们得到 $\phi_{00} f = f' \phi_1$。因此，

$$M \cong \mathrm{coker}\, f \cong \mathrm{coker}\, \phi_{00} f = \mathrm{coker}\, f' \phi_1 \cong \mathrm{coker}\, f' \cong N.$$

□

现在我们定义模范畴 Λ 中的一个子范畴 $\mathcal{H}(\Lambda)$，并将证明它等于映射 F 的像。

定义 3.5。令 $\mathcal{H}(\Lambda)$ 表示 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的全子范畴，其中包含所有投射维数至多为一且不含投射-内射直和项 Λ 、也不含 $\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 的直和项的模。

引理 3.6。 $F\colon \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\bar{\Lambda}$ 的像包含于 $\mathcal{H}(\Lambda)$。

证明。 由命题 3.3(d)，映射 F 保持直和分解，因此只需证明该引理对不可分解模 $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ 成立。由命题 3.3(b)，模 $F(M)$ 的投射维数至多为一。此外，根据定义， $F(M)$ 不含任何投射-内射直和项，因此只需证明 $F(M)$ 不是 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 的直和项。

令 $P_\Lambda \in \operatorname{proj}\Lambda$，并考虑以下正合列

$$0 \to P_\Lambda \to I_{\bar{\Lambda}} \to \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda \to 0$$

其中 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是 P_Λ 的内射包。由于 P_Λ 的底属于 $\operatorname{mod}\Lambda$，由引理 2.4(b)，其内射包 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是投射-内射的。特别地，上述正合列也是 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda$ 在模范畴 $\operatorname{mod}\bar{\Lambda}$ 中的极小投射分解。若 $F(M) \cong \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda$，则由引理 3.2， M 在模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的投射覆盖为零。因此 $M = 0$ 且 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda = 0$。这就证明了所需结论。□

引理 3.7。 映射 F 是满射到 $\mathcal{H}(\Lambda)$。

证明。 设 X 是 $\mathcal{H}(\Lambda)$ 中某个非零模。由于 $\operatorname{pd}_{\bar{\Lambda}} X \leq 1$，令

$$0 \to P_\Lambda^1 \to P_\Lambda^0 \oplus P_{\bar{\Lambda}} \to X \to 0$$

为 X 在模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的极小投射分解，其中 $P_{\bar{\Lambda}}$ 是 X 的投射覆盖的极大投射-内射直和项。于是 $P_\Lambda^0 \in \operatorname{proj}\Lambda$，并且 $P_\Lambda^1 \in \operatorname{proj}\Lambda$，因为它不能包含投射-内射 Λ的任何直和项，否则该分解就不是极小的。

若 $P_\Lambda^1 = 0$，则 X是投射模，但不是投射-内射模，因为 $X \in \mathcal{H}(\bar{\Lambda})$。因此， $X \in \operatorname{proj}\Lambda$，故根据命题 3.3(c)，$F(X) = X$。特别地， X属于 F 的像。

若 $P_\Lambda^0 = 0$，则 $P_{\bar{\Lambda}} \neq 0$，且它是 P_Λ^1 的极小内射包络。因此， $X \cong \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda^1$，这与 $X \in \mathcal{H}(\Lambda)$ 矛盾。

因此，设 P_Λ^1， P_Λ^0均非零。考虑由上述正合列得到的映射 $f\colon P_\Lambda^1 \to P_\Lambda^0$。令 $M =$为 f的余核。我们想证明 $F(M) \cong X$。

现在考虑图表

$$\begin{array}{ccccccccc} (3.3) & 0 & \longrightarrow & P_\Lambda^1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ g' \end{bmatrix}} & P_\Lambda^0 \oplus I(\ker f) & \longrightarrow & F(M) \oplus \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P & \longrightarrow 0 \\ & & & \| & & \vdots{\scriptstyle \phi_0} & & \vdots{\scriptstyle \phi} & \\ & 0 & \longrightarrow & P_\Lambda^1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}} & P_\Lambda^0 \oplus P_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & X & \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中底部正合列是之前的 X 的极小投射表示。顶部正合列构造如下。首先，我们可以将映射 $f\colon P_\Lambda^1 \to P_\Lambda^0$分解为$f_{min} \oplus f'$，其中 $f_{min}\colon P_{min}^1 \to P_{min}^0$是 $M =$的极小投射表示， f 为余核， $f'\colon P \oplus P'' \xrightarrow{[0,1]} P''$，其中 P， $P'' \in \operatorname{proj}\Lambda$。于是 $f_{min} \cong$的余核为 $f = M$的余核，并且根据引理 3.2，存在关于 $F(M)$ 的短正合列

$$(3.4) \qquad 0 \longrightarrow P_{min}^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_{min} \\ g_{min} \end{bmatrix}} P_{min}^0 \oplus I(\ker f_{min}) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$

其中， $I(\ker f_{min})$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中 $\ker f_{min}$ 的极小内射包络。我们还得到以下短正合列

$$(3.5) \qquad 0 \longrightarrow P \oplus P'' \longrightarrow I(\ker f') \oplus P'' \longrightarrow \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P \longrightarrow 0$$

其中， $I(\ker f')$ 是 $\ker f' = P$ 的内射包。将两个短正合列 (3.4) 和 (3.5) 取直和，我们得到图表 (3.3) 的顶行，其中 $I(\ker f)$ 是 $\ker f$ 的内射包。现在我们要证明存在一个映射 ϕ_0，使得 (3.3) 中的第一个方块交换，从而推出 ϕ 的存在。

对图表 (3.3) 中顶部的短正合序列应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, P_{\bar{\Lambda}})$，得到如下长正合列。

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P^0_\Lambda \oplus I(\ker f), P_{\bar{\Lambda}}) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P^1_\Lambda, P_{\bar{\Lambda}}) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P, P_{\bar{\Lambda}})$$

注意到最后一项为零，这是因为 $P_{\bar{\Lambda}} \in \text{proj-inj}\,\Lambda$，从而上述第一个映射是满射。因此，映射 $g \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P^1_\Lambda, P_{\bar{\Lambda}})$ 可经过 $\begin{bmatrix} f \\ g' \end{bmatrix}$ 分解。特别地，存在

$$h = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \end{bmatrix} : P^0_\Lambda \oplus I(\ker f) \to P_{\bar{\Lambda}}$$

使得 $g = h \circ \begin{bmatrix} f \\ g' \end{bmatrix}$。现在，令 $\phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_0 & h_1 \end{bmatrix}$，并注意到这使图表 (3.3) 中的第一个方框可交换。至此完成了该图表的构造。

现在，我们要证明 h_1 是单射。令 soc 表示一个模的底，并注意到根据构造，我们有

$$\mathrm{soc}(\ker h_1) \subset \mathrm{soc}\, I(\ker f) = \mathrm{soc}(\mathrm{im}\, g')$$

因为 $I(\ker f) \in$投射-内射 $\bar{\Lambda}$且 $F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P$没有 $I(\ker f)$ 的直和项。此外，$\mathrm{soc}\, I(\ker f) = \mathrm{soc}(\ker f)$，因为 $I(\ker f)$ 是 $\ker f$ 的内射包。令 a为 $\mathrm{soc}(\ker h_1)$ 中的一个元素，则存在 $b \in \ker f \subset P^1_\Lambda$ 使得 $g'(b) = a$。因此，由 (3.3) 的交换性可得

$$\left(\phi_0 \circ \begin{bmatrix} f \\ g' \end{bmatrix}\right)(b) = \phi_0 \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_1(a) \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}(b).$$

由于 $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ 是单射，我们得出 $b = 0$，因此 $a = 0$。于是 $\mathrm{soc}(\ker h_1) = 0$，故 $\ker h_1 = 0$。这说明 h_1 是单射。特别地，由图表 (3.3) 可知，映射 ϕ_0 和 ϕ 均为单射。

现在考虑短正合列

$$0 \to P^0_\Lambda \oplus I(\ker f) \xrightarrow{\phi_0} P^0_\Lambda \oplus P_{\bar{\Lambda}} \to \mathrm{coker}\, \phi_0 \to 0.$$

特别地，这是模范畴 Λ 中 $\mathrm{coker}\, \phi_0$ 的一个投射分解。由于正合列中直和项 $P^0_\Lambda \to P^0_\Lambda$ 上的映射是恒等映射，且 $I(\ker f) \in \text{proj-inj}\,\bar{\Lambda}$，因此该正合列分裂。特别地，$\mathrm{coker}\, \phi_0$ 也是投射-内射。由蛇引理可得 $\mathrm{coker}\, \phi_0 \cong \mathrm{coker}\, \phi$。因此，正合列

$$0 \to F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P \to X \to \mathrm{coker}\, \phi \to 0$$

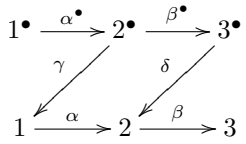
也分裂，因为它以一个单射对象结尾。特别地，$X \cong F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P \oplus \mathrm{coker}\ \phi$。由于 $X \in \mathcal{H}(\bar{\Lambda})$，它不含 $\text{proj-inj}\,\bar{\Lambda}$ 的任何直和项，也不含 $\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}}\Lambda$ 的任何直和项。这证明了所需的结论 $X \cong F(M)$。□

结合上述结果，我们立即得到以下定理。

定理 3.8。 映射 F: 模范畴 $\Lambda \to \mathcal{H}(\Lambda)$ 是一个双射。

证明。 根据引理 3.6，映射 F 是定义良好的。此外，根据引理 3.7 和引理 3.4， F 是一个双射。□

例 3.9。 如果 Λ 是由 $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ 的路径代数模去关系 $\alpha\beta = 0$得到的，那么 $\bar{\Lambda}$ 是下列带有关系 $\alpha\beta = \alpha^\bullet\beta^\bullet = 0$ 和 $\gamma\alpha = \beta^\bullet\delta$的箭图的路径代数。



注意，投射 Λ-模为

$$\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}1^\bullet\\2^\bullet\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2^\bullet\\1\,3^\bullet\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3^\bullet\\2\\3\end{smallmatrix}$$

其中前三个也是投射 Λ-模，后三个则是投射-内射Λ-模。

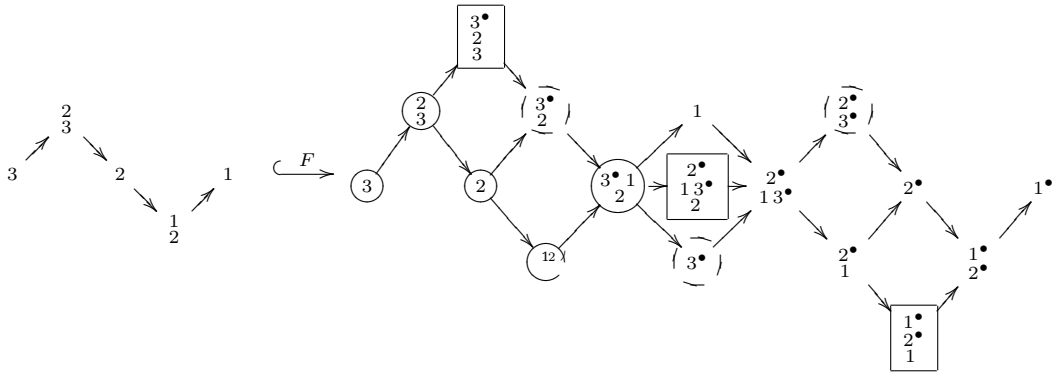
简单模 $S(1) \in$ 模范畴Λ 在 F 下的像可按如下方式计算。 $S(1)$的投射表示为

$$P_\Lambda(2) \to P_\Lambda(1) \to S(1) \to 0.$$

然后，为了使左侧的映射成为单射，我们添加 $P_{\bar{\Lambda}}(3^\bullet)$，得到

$$P_\Lambda(2) \to P_\Lambda(1) \oplus P_{\bar{\Lambda}}(3^\bullet) \to \begin{smallmatrix}3^\bullet\\2\end{smallmatrix}\,1 \to 0.$$

因此 $F(S(1)) = \begin{smallmatrix}3^\bullet\\2\end{smallmatrix}\,1$。此外，我们可以在 Auslander-Reiten箭图的层面上将映射 F 可视化，如下所示。这里， F 的像对应于圈出的项 $\mathcal{H}(\Lambda)$。方框标出的项是投射-内射 Λ-模，而用虚线圈出的项对应于 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}$(投射 Λ) 的直和项。所有突出显示的 $\bar{\Lambda}$-模恰好是投射维数至多为 1 的模。



4. τ-TILTING AS CLASSICAL TILTING

在本节中，我们证明映射 F 可以扩展为映射 F ，从而在 Λ的支撑 τ-倾斜对与 Λ的倾斜模之间建立双射。这样， τ-倾斜理论可以被视为倾斜理论的特例。

4.1. 映射 F 与刚性。

我们首先给出一些关于映射 F 保持刚性的预备引理。

引理 4.1。 若 $F(M) \in$模范畴 Λ是刚性的，则 $M \in$模范畴 Λ是刚性的。

证明。 设 $F(M) \in$模范畴 Λ是刚性的，并考虑图表 (3.2) 中构造的以下短正合列。

$$0 \to \ker \pi_M \to F(M) \xrightarrow{\pi} M \to 0 \tag{4.1}$$

应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ -)$ 得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M),F(M)) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M),M) \to \mathrm{Ext}^2_{\bar{\Lambda}}(F(M),\ker\ \pi_M).$$

注意，首项为零，因为 $F(M)$是刚性的；末项则由命题 3.3(b)可知为零。这意味着 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ M)\ =0$。

现在对正合列 (4.1) 应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-,\ M)$，得到

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\ker\ \pi_M,M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(M,M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M),M).$$

由上可知末项为零，而首项为零是因为根据图表 (3.2)，top(ker π_M) $\in$模 $\Lambda^\bullet$。因此，$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(M,\ M)\ =0$，这就得到了所需结论。□

¯接下来的三个引理描述了 τ在模范畴 Λ 与模范畴 $\bar{\Lambda}$之间的一种重要关系。

¯**引理 4.2**。 设 $M\in$模范畴 Λ。则存在一个短正合列，位于模范畴 $\bar{\Lambda}$

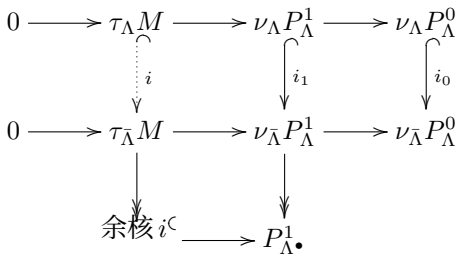
$$0 \to \tau_\Lambda M \to \tau_{\bar{\Lambda}} M \to X^\bullet \to 0$$

使得 $X^\bullet \in$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$。

证明。设

$$P^1_\Lambda \to P^0_\Lambda \to M \to 0 \tag{4.2}$$

是 M 在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的极小投射表示。根据引理 2.4(a)，它也是 M 在 $\mathrm{mod}\,\bar{\Lambda}$ 中的极小投射表示¯。令 $\nu_\Lambda,\nu_{\bar{\Lambda}}$ 分别表示相应模范畴中的中山函子。考虑下图，其中第一行是将 ν_Λ 作用于 (4.2) 得到的，第二行则是将 $\nu_{\bar{\Lambda}}$ 作用于同一正合列得到的。



¯回顾一下，根据引理 2.4(b)，投射 Λ-模 P_Λ 的 $\nu_{\bar{\Lambda}}$ 是投射-内射 Λ-模 $\nu_{\bar{\Lambda}}P_\Lambda$。此外， $\nu_\Lambda P_\Lambda$ 嵌入到 $\nu_{\bar{\Lambda}}P_\Lambda$ 中，且余核是一个投射 $\Lambda^\bullet$-模 $P_{\Lambda^\bullet}$。这意味着我们有如下图所示的垂直单射映射 i_1,i_0，它们使最右边的方块交换。于是，根据核的泛性质，存在映射 $i:\tau_\Lambda M\to\tau_{\bar{\Lambda}}M$，使第一个方块交换。特别地， i 是单射。

现在，蛇引理说明 coker i 是投射 $\Lambda^\bullet$-模 $P^1_{\Lambda^\bullet}$ 的子模，因此 coker$\,i\in$ 属于模范畴 $\Lambda^\bullet$。令 $X^\bullet=$coker i，即可得到引理陈述中的短正合列。□

引理 4.3. 设 $M\in$ 属于模范畴 Λ。则 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M,\tau_{\bar{\Lambda}}M)\ \cong\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau_\Lambda M)$。

证明。 将 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M,-)$ 作用于引理 4.2 中的短正合序列，得到一个长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M,\tau_\Lambda M) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M,\tau_{\bar{\Lambda}}M) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M,X^\bullet).$$

注意，最后一项为零，因为 $M\in$ 属于模范畴 Λ 且 $X^\bullet\in$ 属于模范畴$\Lambda^\bullet$，这意味着这两个模的支撑互不相交。这就证明了所需的结论。□

类似地，我们比较 M 的 $\tau_{\bar{\Lambda}}$ 与 F（M）。

引理 4.4。 设 $M \in$ 模范畴 Λ。那么在 模范畴 Λ 中存在一个短正合列

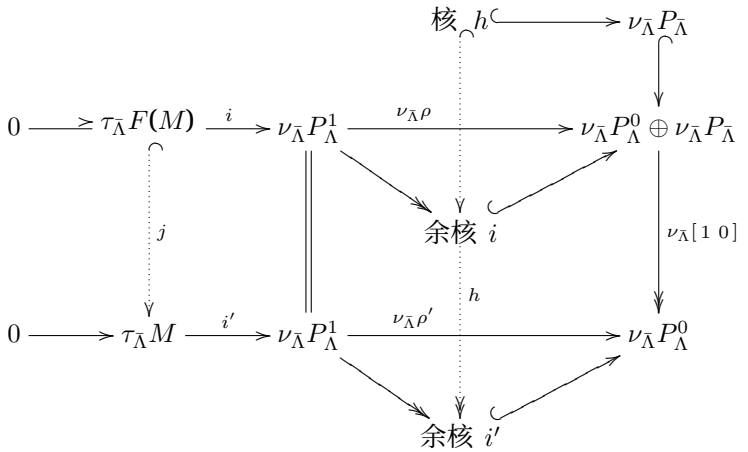
$$0 \to \tau_{\bar{\Lambda}} F(M) \to \tau_{\bar{\Lambda}} M \to Y^\bullet \to 0$$

使得 $Y^\bullet \in$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$。

证明。 考虑 $F(M)$ 和 M 在模范畴 Λ 中的极小投射表示，如图表(3.2)所示，其中 $P_{\bar{\Lambda}} \in$ 投射-内射 Λ。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_\Lambda^1 & \xrightarrow{\rho} & P_\Lambda^0 \oplus P_{\bar{\Lambda}} & \longrightarrow & F(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle [1\ 0]} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P_\Lambda^1 & \xrightarrow{\rho'} & P_\Lambda^0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

应用 Nakayama 函子 $\nu_{\bar{\Lambda}}$，得到以下交换图的一部分，其中包含两条正合行。



映射 j: $\tau_{\bar{\Lambda}} F(M) \to \tau_{\bar{\Lambda}} M$存在，并且由 $\nu_{\bar{\Lambda}}\rho'$ 的核的泛性质可知它是单射。现在注意到，映射 $\nu_{\bar{\Lambda}}\rho$, $\nu_{\bar{\Lambda}}\rho'$ 分别经由 i, i' 的余核分解。此外，由 i 的余核的泛性质，存在映射 h : coker $i \to$ coker i'，使得涉及 h 的相应方块交换。特别地， h 是满射。最后，由蛇引理，coker $j \cong$ ker h。因此，只需证明 ker $h \in$模范畴 $\Lambda^\bullet$，令 $Y^\bullet =$ ker h 即可得到引理。

由 ker $(\nu_{\bar{\Lambda}}[1\ 0])$ 的核的泛性质，我们注意到 ker h 嵌入 ker$(\nu_{\bar{\Lambda}}[1\ 0]) \cong \nu_{\bar{\Lambda}} P_{\bar{\Lambda}}$。由于 $P_{\bar{\Lambda}} \in$ 投射-内射Λ，由引理 2.4 的 (a) 和 (b) 可知，它是一个顶属于模范畴 $\Lambda^\bullet$ 的投射模。于是，由引理 2.4(c)，相应的内射模 $\nu_{\bar{\Lambda}} P_{\bar{\Lambda}}$ 是一个内射 $\Lambda^\bullet$-模，因此特别有 $\nu_{\bar{\Lambda}} P_{\bar{\Lambda}} \in$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$。这就得到了所需结论：ker $h \in$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$。□

接下来的两个结果表明， F 在 τ-刚性 Λ模与刚性_Λ模之间诱导出一个双射。

命题 4.5。 若 $F(M)$ 在 模范畴 Λ 中是刚性的，则 M 是 τ_Λ-刚性的。

证明。 设 $F(M) \in$模范畴 Λ 是刚性的。由引理 4.3，只需证明 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}} M) = 0$。由命题 3.3(b)， $F(M)$ 的投射维数至多为一，因此由 Auslander–Reiten 公式可得如下结论。

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), F(M)) \cong D\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F(M), \tau_{\bar{\Lambda}} F(M))$$

现在，考虑引理 4.4 陈述中的正合列

$$0 \to \tau_{\bar{\Lambda}}F(M) \xrightarrow{j} \tau_{\bar{\Lambda}}M \xrightarrow{h} Y^{\bullet} \to 0$$

设 $f \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}}M)$。我们要证明 $f = 0$。由于 $Y^{\bullet} \in$ 模范畴 $\Lambda^{\bullet}$ 且 $M \in$ 模范畴 Λ，因此$hf = 0$。于是 f经过 h的核分解，因此特别地，存在一个映射 $q\colon M \to \tau_{\bar{\Lambda}}F(M)$，使得 $jq = f$。另一方面，我们有投影 $\pi_M\colon F(M) \to M$。复合$q\pi_M \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ \tau_{\bar{\Lambda}}F(M))$由上述结果可知为零。于是 $q = 0$，因为 π_M是满射，这意味着 $f = jq = 0$。这证明了所需结论，即 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}}M) = 0$。□

现在我们证明上述陈述的逆命题。

命题 4.6. </style}若 是 -刚性，则 (M) </style}在 模范畴 Λ中是刚性的。

证明. 设 $M \in$ 模范畴 Λ 是 τ_{Λ}-刚性的，并将 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, –)$ 作用于引理4.4中的短正合列，得到如下结果。

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}}F(M)) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}}M)$$

由引理 4.3，最后一项同构于 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\Lambda}M)$，根据假设该项为零。这意味着

$$0 = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(M, \tau_{\bar{\Lambda}}F(M)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), M)$$

其中，同构来自应用 Auslander–Reiten 公式，并注意到由命题 3.3(b) 可知 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}}F(M) \leq 1$。

现在考虑下面的短正合列

$$0 \to \Omega^2_{\Lambda}M \to P_{\bar{\Lambda}} \to \ker\ \pi \to 0$$

它来自图表 (3.2)。注意此处 $P_{\bar{\Lambda}} \in$投射-内射 Λ。将 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ –)$ 作用于此正合列，得到如下结果。

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), P_{\bar{\Lambda}}) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), \ker\ \pi) \to \mathrm{Ext}^2_{\bar{\Lambda}}(F(M), \Omega^2_{\Lambda}M)$$

首项为零，因为 $P_{\bar{\Lambda}}$是投射-内射的；末项为零，因为 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}}F(M) \leq 1$。因此，我们得到 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M),$ $\ker\ \pi) = 0$。

最后，考虑短正合列

$$0 \to \ker\ \pi \to F(M) \to M \to 0$$

并应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ –)$。因此，我们得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), \ker\ \pi) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), F(M)) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), M).$$

由上述计算可知，首项和末项均为零，因此我们得到所需结果，即 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M)\ F(M)) = 0$。□

结合上述结果，我们得到以下双射。

定理 4.7。 映射 F 限制为 模范畴Λ 中的 τ_{Λ}-刚性模与 $\mathcal{H}(\Lambda)$中的刚性_ _Λ-模之间的双射。

证明。 根据定理 3.8，映射 F 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 与 $\mathcal{H}(\Lambda)$ 之间的双射。现在由命题 4.5 和 4.6 即可得出该结论。□

4.2. **映射** F。我们将 F扩展为一个映射 F，将 mod Λ中的支撑 τ-倾斜对映至 mod Λ中的倾斜模。我们先给出以下定义。

定义 4.8. 设 (M, P_Λ) 是模范畴 Λ 中的一个支撑 τ-倾斜对，并定义

$$\bar{F}(M, P_\Lambda) = F(M) \oplus \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda \oplus Q_{\bar{\Lambda}}$$

其中 $Q_{\bar{\Lambda}}$ 是所有不可分解的投射-内射 Λ-模的直和。

首先我们证明， F 将 τ-刚性对第二分量中的投射 Λ-模映为刚性 Λ-模。

引理 4.9. 模 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda \in$ 模范畴 $\bar{\Lambda}$ 是刚性的，且投射维数为一。

证明. 设 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是 Λ 中 Λ 的内射包，则考虑模范畴 Λ 中的以下正合列。

$$0 \to \Lambda \to I_{\bar{\Lambda}} \to \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda \to 0$$

注意，根据引理 2.4(b)， $I_{\bar{\Lambda}}$ 也是投射的，因此特别有 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}}\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda = 1$。接下来我们证明 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda$ 是刚性的。对该正合列应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda)$，得到

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Lambda, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda)$$

其中最后一项为零，因为 $I_{\bar{\Lambda}} \in$ 投射-内射 Λ。还要注意，第一个映射是满射，因为 $\Lambda \in$ 是投射的，且 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda$的投射覆盖。这意味着 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda, \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda) = 0$，因此 $\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1}\Lambda$ 是刚性的。□

接下来的两个引理表明，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda, M) = 0$这一条件等价于 $F(M) \oplus \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda$是刚性的条件。

引理 4.10. 设 $M \in$模范畴 Λ 且 $P_\Lambda \in$投射 Λ。若 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda, M) = 0$，则

(a) $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda) = 0$且

(b) $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, F(M)) = 0$。

证明。 (a) 部分成立，因为 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda) \cong \mathrm{Ext}^2_{\bar{\Lambda}}(F(M) P_\Lambda)$，而后者为零，因为 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}} F(M) \leq 1$。

为证明 (b) 部分，考虑如下短正合序列

$$0 \to P_\Lambda \xrightarrow{i} I_{\bar{\Lambda}} \to \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda \to 0 \tag{4.3}$$

属于模范畴 mod Λ ，其中 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是 P_Λ 的内射包。注意， $I_{\bar{\Lambda}}$ 是投射-内射的。对该正合序列应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, M)$，得到

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, M).$$

注意到，根据假设第一项为零，而最后一项为零是因为 $I_{\bar{\Lambda}} \in$ 投射-内射 Λ。因此，我们得出 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, M) = 0$。

接下来考虑短正合列

$$0 \to \ker \pi \to F(M) \to M \to 0$$

并对其应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, -)$，得到如下结果。

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, \ker \pi) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, F(M)) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, M)$$

注意到，第一项为零是因为 $\mathrm{top}\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda \in$模范畴 $\Lambda^\bullet$，而最后一项根据上面的计算为零。因此我们得出

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, \ker \pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, F(M))$$

因此，只需证明 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda, \text{核 } \pi) = 0$。

将 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-,$ 核 $\pi)$ 应用于正合列 (4.3)，得到

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, \ker \pi) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_\Lambda, \ker \pi) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, \ker \pi) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, \ker \pi).$$

最后一项为零，因为 $I_{\bar{\Lambda}} \in \text{proj-inj}\,\Lambda$。因此，为了得到所需结论，我们需要证明映射 i^* 是满射。令 $f \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_\Lambda,$ ker $\pi)$，并回顾图表 3.2，可知存在一个短正合列

$$0 \to \Omega^2_\Lambda M \to P'_{\bar{\Lambda}} \xrightarrow{g} \ker \pi \to 0$$

其中 $P'_{\bar{\Lambda}} \in \text{proj-inj}\ \Lambda$。特别地，$g$ 是 ker π 的一个投射覆盖，因此 f 经由 g 分解。因此，存在一个映射 $f'\colon P_\Lambda \to P'_{\bar{\Lambda}}$，使得 $f = gf'$。现在，映射 f' 的目标是一个内射模，因此也必须经由 i 分解，其中 i 是 P_Λ 的内射包。因此，对于某个 $f''\colon I_{\bar{\Lambda}} \to P'_{\bar{\Lambda}}$，有 $f' = f''i$。由此得到 $f = gf' = gf''i$，这意味着 $f \in \text{im}\ i^*$。这就得到了所需结论。□

引理 4.11. 若 $F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda$ 在 模范畴 $\bar{\Lambda}$ 中是刚性的，则 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda, M) = 0$。

证明。 考虑短正合列 (4.3)，其中 $I_{\bar{\Lambda}} \in$ 是投射-内射 Λ。对其应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, M)$，得到

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, M) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(I_{\bar{\Lambda}}, M)$$

其中，首项为零，因为顶 $I_{\bar{\Lambda}} \in$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$，末项为零，因为 $I_{\bar{\Lambda}}$ 是投射-内射。因此，$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_\Lambda, M) \cong \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, M)$，还需证明后一项 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, M)$ 为零。

现在，对短正合列应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, -)$

$$0 \to \ker \pi \to F(M) \to M \to 0$$

以获得

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, F(M)) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^2_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, \ker \pi).$$

第一项由假设为零，最后一项因 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}} \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda \le 1$ 而为零。这意味着 $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda,\ M) = 0$，并完成了该引理的证明。□

现在我们可以证明一个主要定理了。

定理 4.12。 映射 $F\colon \mathrm{s}\tau$-倾斜 $\Lambda \to$ 倾斜 Λ 是一个双射。

证明。 设（$M,\ P_\Lambda$）是一个支撑 τ-倾斜对。根据定义，$\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\ \tau_\Lambda M) = 0$ 且 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda,\ M) = 0$。根据 F 的定义，我们有

$$\bar{F}(M, P_\Lambda) = F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda \oplus Q_{\bar{\Lambda}}.$$

注意，根据命题 3.3(b) 和引理 4.9，$F(M,\ P_\Lambda)$ 的每个直和项的投射维数至多为一。

现在我们想证明 $F(M, P_\Lambda)$ 没有自扩张，并且由于末项是投射-单射的，只需证明

$$\mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), F(M)) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(F(M), \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\bar{\Lambda}}(\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda, F(M)) = 0.$$

第一项由命题 4.6 可知为零，第二项由引理 4.9 可知为零，其余两项由引理 4.10 可知也为零。这表明 $F(M, P_\Lambda)$ 是 Λ 中的部分倾斜对象。

最后，我们验证 $\left|\bar{F}(M,\ P_\Lambda)\right| = \left|\bar{\Lambda}\right|$。由命题 3.3(a)，我们有 $|F(M)| \ge |M|$；又由于 P_Λ 不含任何单射 $\bar{\Lambda}$-模作为直和项，因此 $\left|\Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda\right| \ge |P_\Lambda|$。所以 $\left|F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda\right| \ge |M \oplus P_\Lambda|$。由于 $|M \oplus P_\Lambda| = |\Lambda|$，我们得到

$$\left|\bar{F}(M, P_\Lambda)\right| = \left|F(M) \oplus \Omega^{-1}_{\bar{\Lambda}} P_\Lambda\right| + |Q_{\bar{\Lambda}}| \ge |M \oplus P_\Lambda| + |\Lambda| = 2\,|\Lambda| = \left|\bar{\Lambda}\right|$$

由于我们知道 $F(M,\ P_\Lambda)$ 是刚性的，且投射维数至多为一，因此我们也有 $\left|\bar{F}(M,\ P_\Lambda)\right| \leq \left|\bar{\Lambda}\right|$。这意味着 $\left|\bar{F}(M,\ P_\Lambda)\right| = \left|\bar{\Lambda}\right|$。

综上所述，我们得出结论：$F(M,\ P_\Lambda)$ 是一个倾斜 Λ-模。

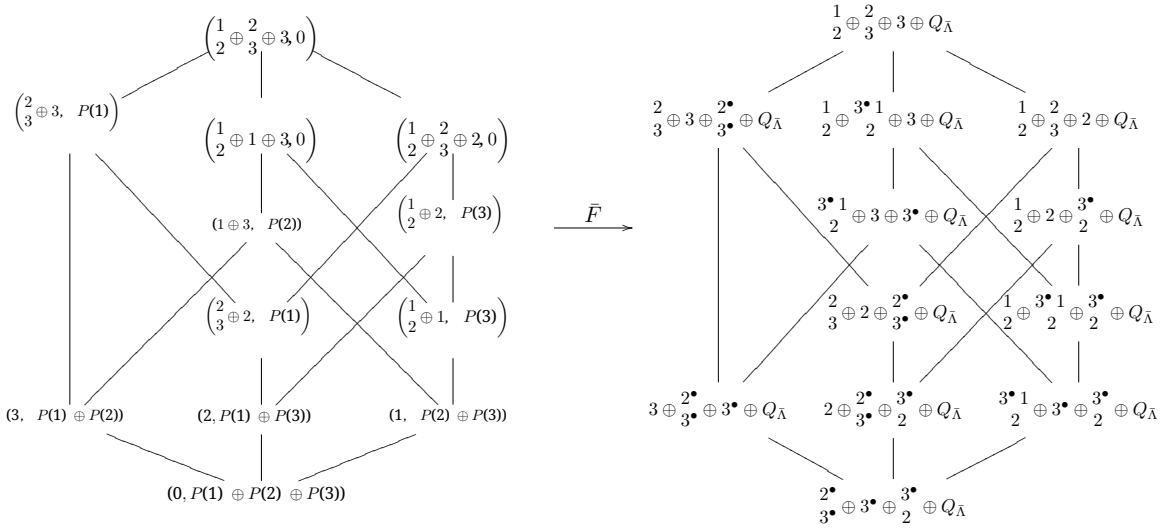
现在，只需证明 F 是满射。设 $M \in \Lambda$ 是一个倾斜模。注意到，由于 $Q_{\bar{\Lambda}}$ 与任何模之间都没有非零扩张，因此它属于每个倾斜模。因此，由于 $\mathrm{pd}_{\bar{\Lambda}} M \leq 1$，我们可以将 M 分解如下

$$\bar{M} \cong M' \oplus \Omega_{\bar{\Lambda}}^{-1} P_\Lambda \oplus Q_{\bar{\Lambda}}$$

其中 $M' \in \mathcal{H}(\Lambda)$ 且 $P_\Lambda \in \mathsf{proj}\ \Lambda$。由于 F满射到 $\mathcal{H}(\Lambda)$，存在 $M \in \mathsf{mod}\ \Lambda$，使得 $F(M) \cong M'$。现在我们要证明这一对 $(M,\ P_\Lambda)$ 是 τ_Λ-刚性的。事实上，根据定理 4.7，$\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\ \tau_\Lambda M) = 0$；根据引理 4.11，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda,\ M) = 0$。因此，$F(M,\ P_\Lambda) \cong M$。这表明 F 是满射，并完成了定理的证明。□

我们将在下一节证明 F 保序，见推论 5.12。事实上，偏序集 sτ-tilt Λ与偏序集 tilt Λ在 F下同构，并构成 sτ-tilt Λ中的一个 Bongartz 区间。

例 4.13。设 Λ 是由例 3.9 中的箭图所给出的路径代数。那么，sτ-tilt Λ 如左图所示，并且在 F 下映射到右图所示的 tilt Λ 。



5. Bongartz intervals in Λ

本节定义另一个映射 $G\colon \mathsf{mod}\ \Lambda \to \mathsf{mod}\ \Lambda$，该映射将 τ-刚性 Λ-模映射为 τ-刚性 Λ-模。我们将其扩展为支撑 τ-倾斜对上的包含 $G\colon$ sτ-tilt $\Lambda \to$sτ-tilt Λ，并证明 G 的像是 sτ-tilt Λ 中的一个 Bongartz 区间，该区间同构于 sτ-tilt Λ。此外，G 的像中的每个支撑 τ-倾斜对都是 sτ-tilt Λ 中另一个 Bongartz 区间的极大元，该区间也同构于 sτ-tilt Λ。作为应用，我们得出偏序集 sτ-tilt $\Lambda \times$sτ-tilt Λ 的乘积是 sτ-tilt Λ 的子偏序集。此外，它还在极大绿色序列层面诱导出类似的嵌入。

回顾一下，Λ 包含 Λ的两个同构副本，我们将它们记为 Λ，$\Lambda^\bullet$。我们首先定义两个映射 mod $\Lambda \to$ 模 Λ。

定义 5.1. 定义函子 $(-)^\bullet\colon$ 模范畴 $\Lambda \to$ 模范畴 $\Lambda^\bullet$，将模范畴 mod Λ 同构地映射到模范畴 $\Lambda^\bullet$。

¯请注意，这种记法不会造成歧义，因为模 $\Lambda^\bullet \in \operatorname{mod}\Lambda$ 与将映射 $(-)^\bullet$ 应用于 Λ后得到的模相同。

¯通过将 $(-)^\bullet$ 与包含 $\operatorname{mod}\Lambda^\bullet \to \operatorname{mod}\ \Lambda$ 复合，我们将把 $(-)^\bullet$ 视为一个像位于 Λ中的函子。

¯**定义 5.2**。定义一个映射 $G\colon \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\ \Lambda$，在对象上的定义如下。首先，给定一个投射 Λ-模 $P_\Lambda = \bigoplus_i P_\Lambda(i)^{m_i}$，令 $G(P_\Lambda) = \bigoplus_i P_{\bar\Lambda}(i^\bullet)^{m_i}$ 为相应的点标顶点处的投射$\bar\Lambda$-模。现在，给定一个具有投射表示的 $M \in \operatorname{mod}\Lambda$

$$P^1_\Lambda \xrightarrow{f} P^0_\Lambda \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

定义 $G(M)$ 为映射 $G(f)$ 的余核

$$G(P^1_\Lambda) \xrightarrow{G(f)} G(P^0_\Lambda) \longrightarrow G(M) \longrightarrow 0\ .$$

注意，投射 Λ-模之间的映射 f 由箭图中的路径诱导，因此 $G(f)$ 是通过在 $\Lambda^\bullet$ 的子箭图中取点标顶点之间相应的路径得到的，并将其视为 Λ 的子代数。

以下结论可由 G 的定义直接得出。

引理 5.3. 设 $M \in$ 模范畴 Λ。那么

(a) M 是不可分解的，当且仅当 $G(M)$ 是不可分解的；(b) 存在短正合列 $0 \to$ 核 $\rho_M \to G(M) \xrightarrow{\rho_M} M^\bullet \to 0$，其中在模范畴 $\bar\Lambda$中有核 $\rho_M \in$ 模范畴 $\bar\Lambda$。

证明。(a) 部分成立，因为定义 5.2 中的映射 f 可分解为两个非零映射的直和，当且仅当映射 $G(f)$ 也如此。(b) 部分可如下证明。对于投射模 P_Λ，存在自然满射 $\rho\colon G(P_\Lambda) \to (P_\Lambda)^\bullet$，进而诱导出满射 $\rho_M\colon G(M) \to M^\bullet$。特别地，我们有如下具有正合行的交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} G(P^1_\Lambda) & \xrightarrow{G(f)} & G(P^0_\Lambda) & \longrightarrow & G(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_M} & & \\ (P^1_\Lambda)^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & (P^0_\Lambda)^\bullet & \longrightarrow & M^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

于是，蛇引理推出存在一个满射 $\ker\ \rho_0 \to \ker\ \rho_M$。由引理 2.4(b)，我们有 $\ker\ \rho_0$ 是一个单射 Λ-模，这意味着 $\ker\ \rho_M \in \operatorname{mod}\Lambda$。□

我们还有 τ 与映射 G 之间的如下关系。

引理 5.4. 设 $M \in$模范畴 Λ。则 $\tau_{\bar\Lambda} G(M) \cong (\tau_\Lambda M)^\bullet$。

证明. 设 $M \in$ 模 Λ 有投射表示

$$P^1_\Lambda \xrightarrow{f} P^0_\Lambda \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

应用中山函子 ν_Λ 得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow \tau_\Lambda M \longrightarrow \nu_\Lambda P^1_\Lambda \xrightarrow{\nu_\Lambda f} \nu_\Lambda P^0_\Lambda\ . \tag{5.1}$$

根据定义，对于 Λ 的每个顶点 i，$G(P_\Lambda(i)) \cong P_{\bar\Lambda}(i^\bullet)$，因此在 $\bar\Lambda$ 上应用中山函子，我们得到以下同构列

$$\nu_{\bar\Lambda} G(P_\Lambda(i)) \cong \nu_{\bar\Lambda} P_{\bar\Lambda}(i^\bullet) \cong I_{\bar\Lambda}(i^\bullet) \cong (I_\Lambda(i))^\bullet.$$

In p特别地，对 M 的投射表示先应用映射 G，再应用 $\nu_{\bar{\Lambda}}$，可得

$$0 \longrightarrow \tau_{\bar{\Lambda}} G(M) \longrightarrow (I^1_\Lambda)^\bullet \xrightarrow{\nu_{\bar{\Lambda}} G(f)} (I^0_\Lambda)^\bullet . \tag{5.2}$$

此外，很容易看出，映射 $\nu_{\bar{\Lambda}} G(f)$ 与映射 $(\nu_\Lambda f)^\bullet$ 相同。这表明，正合列 (5.2) 是通过应用函子 $(-)^\bullet$ 从 (5.1) 得到的，因此我们得出 $\tau_{\bar{\Lambda}} G(M) \cong (\tau_\Lambda M)^\bullet$。□

接下来我们证明映射 G 保持 τ-刚性。

命题 5.5。在模 Λ 中，偶 $M(P_\Lambda)$ 是 τ-刚性的，当且仅当偶 $G(M, P_\Lambda) := (G(M)\ G(P_\Lambda))$ 在模 Λ 中是 τ-刚性的。

证明。给定 $M \in$模Λ 和 $P_\Lambda \in \mathrm{proj}\ \Lambda$，考虑如下同构列

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(M), \tau_{\bar{\Lambda}} G(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(M), (\tau_\Lambda M)^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda\bullet}(M^\bullet, (\tau_\Lambda M)^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau_\Lambda M),$$

其中，第一个同构由引理 5.4 得出。第二个同构是将函子 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(-, (\tau_\Lambda M)^\bullet)$ 应用于引理 5.3(b) 中的短正合列，并注意到 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\text{核}\ \rho_M, (\tau_\Lambda M)^\bullet) = 0$ 而得到的。这表明，M 在模 Λ 中是 τ-刚性的，当且仅当 $G(M)$ 在模Λ中是 τ-刚性的。

此外，我们还有

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(P_\Lambda), G(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda\bullet}((P_\Lambda)^\bullet, M^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P_\Lambda, M),$$

其中，第一个同构由对引理 5.3(b) 中的短正合列应用 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(P_\Lambda)\ -)$ 得到，并注意到 $G(P_\Lambda)$ 是 Λ 中点标顶点处的投射模。这表明，$(M,\ P_\Lambda)$ 是模范畴 mod Λ 中的 τ-刚性对，当且仅当 $G(M,\ P_\Lambda)$ 是模范畴 mod Λ 中的 τ-刚性对。□

我们将 G 的定义扩展为支撑 τ-倾斜模上的映射 G。定义

$$\begin{aligned} \bar{G} : s\tau\text{-tilt}\,\Lambda &\to s\tau\text{-tilt}\,\bar{\Lambda} \\ (M, P_\Lambda) &\mapsto (G(M) \oplus \Lambda, G(P_\Lambda)) \end{aligned}$$

其中，Λ 是所有不可分解投射 Λ-模的直和。如下所示，映射 G 确实定义良好。

定理 5.6. 映射 $G : s\tau$-倾斜 $\Lambda \to s\tau$-倾斜 Λ 是一个包含。此外，$G(M, P_\Lambda)$ 是 $G(M, P_\Lambda)$ 在模范畴 Λ 中的 *Bongartz* 补全。

证明。首先，我们证明映射 G 是良定义的。注意，由引理 5.3(b)，映射 G 是单射，且其像除了零模之外不是一个 Λ-模。此外，由引理 5.3(a) G 保持不可分解直和项的数目。因此，$G(M,\ P_\Lambda)$具有所需数量的不可分解直和项，因为

$$|G(M) \oplus G(P_\Lambda) \oplus \Lambda| = |M \oplus P_\Lambda| + |\Lambda| = 2\,|\Lambda| = \left|\bar{\Lambda}\right| .$$

现在，我们证明 $G(M,\ P_\Lambda)$ 是 τ-刚性的。注意，Λ 是一个投射 Λ-模，因此 $\tau_{\bar{\Lambda}}(\Lambda_\Lambda) = 0$。由命题 5.5 可知，$(G(M)\ G(P_\Lambda))$ 在模范畴 mod Λ 中是 τ-刚性的，因此只需证明将Λ作为直和项加到 $G(M)$ 中会保持 τ-刚性。特别地，我们需要证明

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(P_\Lambda), \Lambda) = 0 = \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Lambda, \tau_{\bar{\Lambda}} G(M)).$$

第一个等式成立，是因为 $G(P_\Lambda)$ 在 Λ 的点标顶点处是投射的，而 Λ 在点标顶点处没有支撑。应用引理 5.4 后，第二个等式可类似得出。这表明 $G(M,\ P_\Lambda)$ 是 τ-刚性的。

此外，容易看出 G 是一个包含，因为 G 是单射，且其像不包含 Λ的非零直和项。最后，G 是 $G(M,\ P_\Lambda)$ 的 Bongartz 补全，因为 Λ 在模范畴 Λ中是投射的。□

接下来，我们将 G 的像描述为包含 Λ的支撑 τ-倾斜 Λ-模的集合，也就是 Λ的 Bongartz 区间。

定理 5.7。 映射 $G\colon$ sτ-倾斜 $\Lambda \to$sτ-倾斜$_{\Lambda}\Lambda$ 是偏序集同构。

证明。 由定理 5.6 可知，像 G(sτ-倾斜 Λ) 包含于 Λ 在模范畴 Λ中的 Bongartz 区间。为证明反向包含，取模范畴 Λ中的一个支撑 τ-倾斜对 $(N \oplus \Lambda, P_{\bar{\Lambda}})$。根据命题 5.5，只需证明存在某个 $M \in$模范畴 Λ和 $P_{\Lambda} \in$投射 Λ，使得 $(N \oplus \Lambda, P_{\bar{\Lambda}}) = G(M, P_{\Lambda})$。首先注意到，由于 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(P_{\bar{\Lambda}}, \Lambda) = 0$，所以 $P_{\bar{\Lambda}}$ 是 Λ点标顶点处的投射，从而 $P_{\bar{\Lambda}}$ 属于 G的像。因此，只需证明 N 也属于 G的像。

Let

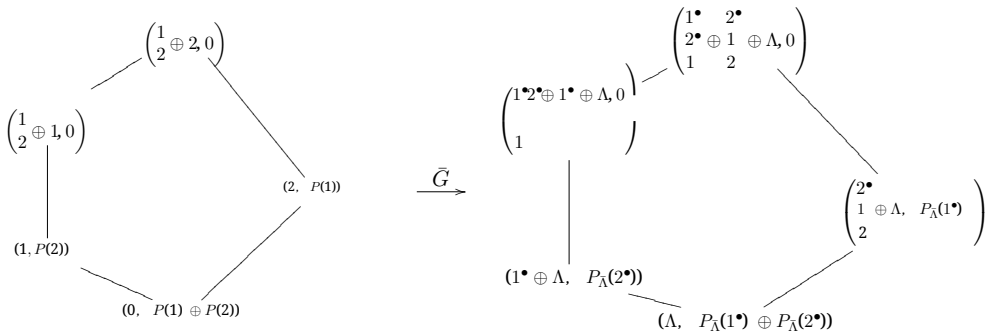
$$P_{\bar{\Lambda}}^1 \xrightarrow{\bar{f}} P_{\bar{\Lambda}}^0 \to N \to 0$$

是 N 在模范畴Λ中的一个投射表示。应用中山函子 $\nu_{\bar{\Lambda}}$ ，我们得到一个正合序列

$$0 \to \tau_{\bar{\Lambda}} N \to \nu_{\bar{\Lambda}} P_{\bar{\Lambda}}^1 \to \nu_{\bar{\Lambda}} P_{\bar{\Lambda}}^0.$$

由于 $N \oplus \Lambda$是 τ-刚性的，因此 $\mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Lambda, \tau_{\bar{\Lambda}} N) = 0$，所以特别地， $\tau_{\bar{\Lambda}} N$仅支撑在 $\bar{\Lambda}$的点标顶点上，因此 $\tau_{\bar{\Lambda}} N \in$模 $\Lambda^{\bullet}$。由上述正合序列可知， $\nu P_{\bar{\Lambda}}^1$、$\nu P_{\bar{\Lambda}}^0$在点标顶点处都是内射模，因此 $P_{\bar{\Lambda}}^1$、$P_{\bar{\Lambda}}^0$在 $\bar{\Lambda}$的点标顶点处都是投射模。令 $G(P_{\Lambda}^1) = P_{\bar{\Lambda}}^1$、$G(P_{\Lambda}^0) = P_{\bar{\Lambda}}^0$，其中 $P_{\Lambda}^1, P_{\Lambda}^0 \in \mathrm{proj}\ \Lambda$。另外，令 $f\colon P_{\Lambda}^1 \to P_{\Lambda}^0$ be 映射，使得 $G(f) = f$。定义 M为 f的余核。注意，由于 f是 N 的一个投射表示，因此 f 是 M的一个投射表示。根据 G的定义，我们有$G(M) \cong N$。这表明 N属于 G的像，如所需。□

例 5.8。 设 Λ 如例 2.5 所示。其 τ-倾斜偏序集见左图，而其在 G下的像见右图。



回想一下，根据定理 4.12，映射 F 的像与 sτ-倾斜 Λ 同构。上面的定理 5.7 类似地表明， G 的像是投射模 Λ 的 Bongartz 区间，它也与 sτ-倾斜 Λ 同构。注意，这两个像仅在顶元素 $(\Lambda,\ 0)$ 处重叠。现在我们应用 τ-倾斜约化，得出 sτ-倾斜 $\Lambda \times$sτ-倾斜 Λ 是 sτ-倾斜 Λ 的一个子偏序集。特别地，sτ-倾斜 Λ 包含许多与 sτ-倾斜 Λ 同构的 Bongartz 区间。

命题 5.9. 设 (M, P_{Λ}) 是 模范畴 Λ 中的一个支撑 τ-倾斜对。那么存在一个偏序集同构

$$\bar{F}_M : \text{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \to \text{s}\tau\text{-tilt}_{G(M,P)}\bar{\Lambda}$$

使得，若 $F_M(M', P'_{\Lambda}) = (N, P'_{\bar{\Lambda}})$，则 $M' \cong fN$是关于 N 的挠对 $(\mathrm{Fac}(G(M))\ G(M)^{\perp})$ 在模范畴 $\bar{\Lambda}$ 中的无挠部分。

证明。 设 (M, P_{Λ}) 是模范畴 mod Λ 中的一个支撑 τ-倾斜对。由定理 5.6 $G(M, P_{\Lambda})$ 是模范畴 mod Λ 中的一个支撑_τ-倾斜对，并且是 $G(M, P_{\Lambda})$ 的 Bongartz 补全。我们断言，Bongartz

区间 $G(M,P_\Lambda)$ 同构于 sτ-倾斜 Λ。根据 τ-倾斜约化（见定理 2.3）， $G(M,P_\Lambda)$ 的 Bongartz 区间同构于代数的支撑 τ-倾斜偏序集

$$C_{G(M,P_\Lambda)} = \mathrm{End}_{\bar{\Lambda}}(G(M)\oplus\Lambda)/\left\langle e_{G(M)}\right\rangle$$

其中 $e_{G(M)}$ 是与 $G(M)$ 对应的自同态代数中的幂等元。由于 $G(M)$ 的顶位于点标顶点处，因此很容易看出

$$C_{G(M,P_\Lambda)} = \mathrm{End}_{\bar{\Lambda}}(G(M)\oplus\Lambda)/\left\langle e_{G(M)}\right\rangle \cong \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda)\cong\Lambda.$$

这证明了我们的断言： $G(M,\ P_\Lambda)$ 的 Bongartz 区间同构于 sτ-倾斜 Λ。现在，定义 F_M 为定理 2.3 中映射的逆映射，该映射将模范畴 mod Λ 中的支撑 τ-倾斜对映至其在 $G(M,\ P_\Lambda)$ 的 Bongartz 区间中对应的元素。

尚需证明，若 $F_M(M',P'_\Lambda) = (N,P'_{\bar{\Lambda}})$，则 $M'\cong fN$ 是相对于模范畴 mod $\bar{\Lambda}$ 中挠对 (Fac$(G(M))$ $G(M)^\perp$) 的 N 的无挠部分。给定 $(N,P'_{\bar{\Lambda}})\in$s$\tau$-倾斜$_{G(M,P)}\bar{\Lambda}$，定理 2.3 蕴含 $M'\cong \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(M)\oplus\Lambda, fN)$，其中 fN 由挠对 (Fac$(G(M))$ $G(M)^\perp$) 定义。由于 $N\in$Fac$(G(M)\oplus\Lambda)$，因此可得 $fN\in$Fac Λ。特别地，$fN\in$模范畴 mod Λ，并且

$$M'\cong \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(G(M)\oplus\Lambda, fN)\cong \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(\Lambda, fN)\cong fN.$$

□

现在，我们对所有可能的支撑 τ-倾斜对（$M,\ P_\Lambda$）取映射 F_M，从而得到偏序集 sτ-tilt $\Lambda\times$sτ-tilt $\Lambda\to$sτ-tilt Λ的包含。

推论 5.10. 存在偏序集的包含

$$\varphi : \text{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda\times\text{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda\to\text{s}\tau\text{-tilt}\,\bar{\Lambda}$$
$$((M,P_\Lambda),(M',P'_\Lambda))\mapsto \bar{F}_M(M',P'_\Lambda).$$

证明。由命题 5.9，映射 φ是良定义的。首先，我们证明 φ是一个包含。由上文可知，固定 M时， F_M 是一个包含，因此只需证明对于 $M\ncong M'$， F_M 和 $F_{M'}$ 的像互不相交。根据构造， F_M 的像是$G(M,P_\Lambda)$的 Bongartz 区间，而$F_{M'}$的像是 $G(M',P'_\Lambda)$的 Bongartz 区间。两个区间交集中的任意支撑 τ-倾斜对都包含 $G(M\oplus M',P_\Lambda\oplus P'_\Lambda)$。特别地，对 $G(M\oplus M',P_\Lambda\oplus P'_\Lambda)$是 τ-刚性的，因此命题 5.5 蕴含$(M\oplus M',P_\Lambda\oplus P'_\Lambda)$在模范畴 mod Λ中是 τ-刚性的。然而，(M,P_Λ)和(M',P'_Λ)都是模范畴 mod Λ中的支撑 τ-倾斜对。因此，$M\cong M', P_\Lambda\cong P'_\Lambda$。这表明 F_M和 $F_{M'}$的像互不相交，并完成了 φ 是一个包含的证明。

现在，我们要证明 φ 保持偏序。设 $(M_1,P_1)\le(M_3,P_3)$，且 $(M_2,P_2)\le(M_4,P_4)$ 是 mod Λ 中的支撑 τ-倾斜对。于是，我们要证明 $F_{M_1}(M_2,P_2)\le F_{M_3}(M_4,P_4)$。根据 φ的定义和命题 5.9，我们有 $F_{M_1}(M_2,P_2) = (G(M_1)\oplus N_2, P_{\bar{\Lambda}})$，其中某个 $N_2\in$属于 modΛ，并且在 mod Λ 中存在一个短正合列

$$0\to tN_2\to N_2\to M_2\to 0$$

，其中 $tN_2\in$Fac $G(M_1)$。类似地，对于某个 $N_4\in$属于 mod Λ，有 $F_{M_3}(M_4,P_4) = (G(M_3)\oplus N_4, P'_{\bar{\Lambda}})$，且 M_4是 N_4的商。由于 $(M_2,P_2)\le(M_4,P_4)$，因此 $M_2\in$Fac $M_4\subset$Fac N_4；又由于 $(M_1,P_1)\le(M_3,P_3)$，根据定理 5.7， $G(M_1)\in$Fac $G(M_3)$。因此， tN_2, $M_2\in$Fac$(G(M_3)\oplus N_4)$。由于 Fac$(G(M_3)\oplus N_4)$ 是 mod Λ 中的挠类，故对扩张封闭，因此 $N_2\in$Fac$(G(M_3)\oplus N_4)$。由此可得 Fac$(G(M_1)\oplus N_2)\subset$Fac$(G(M_3)\oplus N_4)$，这就证明了所需结论 $F_{M_1}(M_2,P_2)\le F_{M_3}(M_4,P_4)$。□

接下来，我们将映射 F_M 与定义 4.8 中的映射 F 联系起来。注意， F_Λ 的像是 $G(\Lambda)$的 Bongartz 区间。根据定义， $G(\Lambda)$ 是投射-内射 Λ-模的直和，我们将其记为 $Q_{\bar{\Lambda}}$；下面我们将证明， $Q_{\bar{\Lambda}}$ 的 Bongartz 区间恰好是倾斜偏序集 tiltΛ。特别地，我们将证明映射 F_Λ 和 F 是等价的。

定理 5.11。偏序集包含 F, F_Λ: sτ-倾斜 $\Lambda \to$sτ-倾斜 Λ相等。特别地， F: sτ-倾斜 $\Lambda \to$ 倾斜 Λ是偏序集同构。

证明。由命题 5.9，映射 $\bar{F}_\Lambda^{-1}$: sτ-tilt$_{Q_{\bar\Lambda}} \bar\Lambda \to$s$\tau$-tilt Λ是偏序集同构。此外，一个 τ-倾斜 $\bar\Lambda$-模 N被映射为 $\bar{F}_\Lambda^{-1}(N) = fN$，其中 fN是 N相对于模范畴 mod $\bar\Lambda$ 中的挠对 (Fac $Q_{\bar\Lambda}, (Q_{\bar\Lambda})^\perp$) =(Fac $Q_{\bar\Lambda}$, mod Λ) 的无挠部分。

那么， N 关于这个挠对的典范正合列为

$$0 \to tN \to N \to fN \to 0$$

其中 $tN \in$Fac $Q_{\bar\Lambda}, fN \in$mod Λ。注意， $fN \in$mod Λ。

另一方面 映射 F: sτ-tilt $\Lambda \to$tilt Λ由定理 4.12 可知是一个双射。此外 r, tilt $\Lambda \subseteq$ s τ-倾斜$_{Q_{\bar\Lambda}} \Lambda$。

接下来我们证明， $\bar{F}^{-1}$ 也对应于关于挠对（Fac $Q_{\bar\Lambda}$，mod Λ）取无挠部分。设（M， P_Λ） $\in$ sτ-倾斜 Λ。根据定义，有 F（M， P_Λ） =F（M） $\oplus \Omega_{\bar\Lambda}^{-1} P_\Lambda \oplus Q_{\bar\Lambda} \in$Fac $Q_{\bar\Lambda}$。注意，$\Omega_{\bar\Lambda}^{-1} P_\Lambda \oplus Q_{\bar\Lambda} \in$Fac $Q_{\bar\Lambda}$。由于 $M \in$mod Λ且 ker π_M是某个投射-内射 Λ-模的商模，F（M）的典范正合列恰好是图表 (3.2) 的最后一列。这表明 f（F（M））$\cong M$。因此，两个映射$\bar{F}^{-1}$， $\bar{F}_\Lambda^{-1}$: tilt $\bar\Lambda \to$sτ-倾斜 Λ一致。

由于 F: sτ-tilt $\Lambda \to$tilt $\Lambda \subseteq$sτ-tilt$_{Q_{\bar\Lambda}} \Lambda$ 是一个双射，而 F_Λ: sτ-tilt $\Lambda \to$sτ-tilt$_{Q_{\bar\Lambda}} \Lambda$ 是一个双射，且它们的逆映射在 tilt Λ 上一致，因此我们可以得出 F 和 F_Λ 实际上相等。特别地，由于 F_Λ 是偏序集同构，因此 F 也是。□

特别地，下面的陈述可由定理 5.11 立即推出。

推论 5.12. 存在一个偏序集同构

$$\text{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda \cong \text{s}\tau\text{-tilt}_{\text{proj-inj}\,\bar\Lambda}\,\bar\Lambda \cong \text{tilt}\,\bar\Lambda.$$

证明. 前两项之间的同构由命题 5.9 中的 F_Λ 给出，而第一项与最后一项之间的同构由定理 5.11 中的 F 给出。□

例 5.13。设 Λ 如例 2.5 所示。回顾一下， Λ 的支撑 τ-倾斜偏序集见例 5.8，其形式为一个五边形。Λ 的支撑 τ-倾斜偏序集见图 1。五个高亮的五边形表示 φ 在 sτ-tilt Λ 中的像，其中每个五边形都是模范畴 G 中支撑 τ-倾斜对 (M， P_Λ) 的 Bongartz 区间 M， P_Λ。此外，每个高亮区域中的极大元对应于 G 的像，该像也在 例 5.8 中计算得出。最后，sτ-tilt Λ 中最上方的高亮五边形是与 F 的像相对应的 tilt Λ，或者等价地，是 F_Λ 的像。

接下来，我们给出模范畴 Λ 和模范畴 Λ 中极大绿色序列之间的关系。回顾一下，一个极大绿色序列 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots\ldots, \mathcal{M}_t)$ 是 sτ-tilt Λ 中的一条有限极大链。特别地，$\mathcal{M}$ 从 $\mathcal{M}_1 = (\Lambda, 0)$ 开始，在 $\mathcal{M}_t = (0, \Lambda)$ 结束，并且对于 $\mathcal{M}$ 中的任意两个相邻元素，都有 $\mathcal{M}_i > \mathcal{M}_{i+1}$ 是 sτ-tilt Λ 中的覆盖关系。极大绿色序列最初由 Keller 在 [K] 中引入，背景是簇代数，后来推广到有限维代数的模范畴中；例如可参见综述 [KD] 及其中的参考文献。本领域的主要问题之一是：一个代数是否存在极大绿色序列。

令 MGS(Λ) 表示 Λ 的极大绿色序列集合。给定一个由 sτ-tilt Λ 中元素构成的正合列 $\mathcal{M}$，该正合列不一定是极大绿色序列；再给定一个映射 g: sτ-tilt $\Lambda \to$sτ-tilt Λ，我们将所得正合列定义为 $g(\mathcal{M}) = (g(\mathcal{M}_1) \ldots, g(\mathcal{M}_t))$。类似地，给定两个正合列 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{i=1}^t, \mathcal{M}' = (\mathcal{M}'_i)_{i=1}^{t'}$，且 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}'_{t'}$，我们将 $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}'$ 定义为复合 $(\mathcal{M}'_1, \ldots, \mathcal{M}'_{t'} = \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_t)$。

采用这一记号，我们有以下结果；特别是，该结果表明，推论 5.10 中映射 φ 的像覆盖了 Λ 的支撑倾斜偏序集的整个长度。

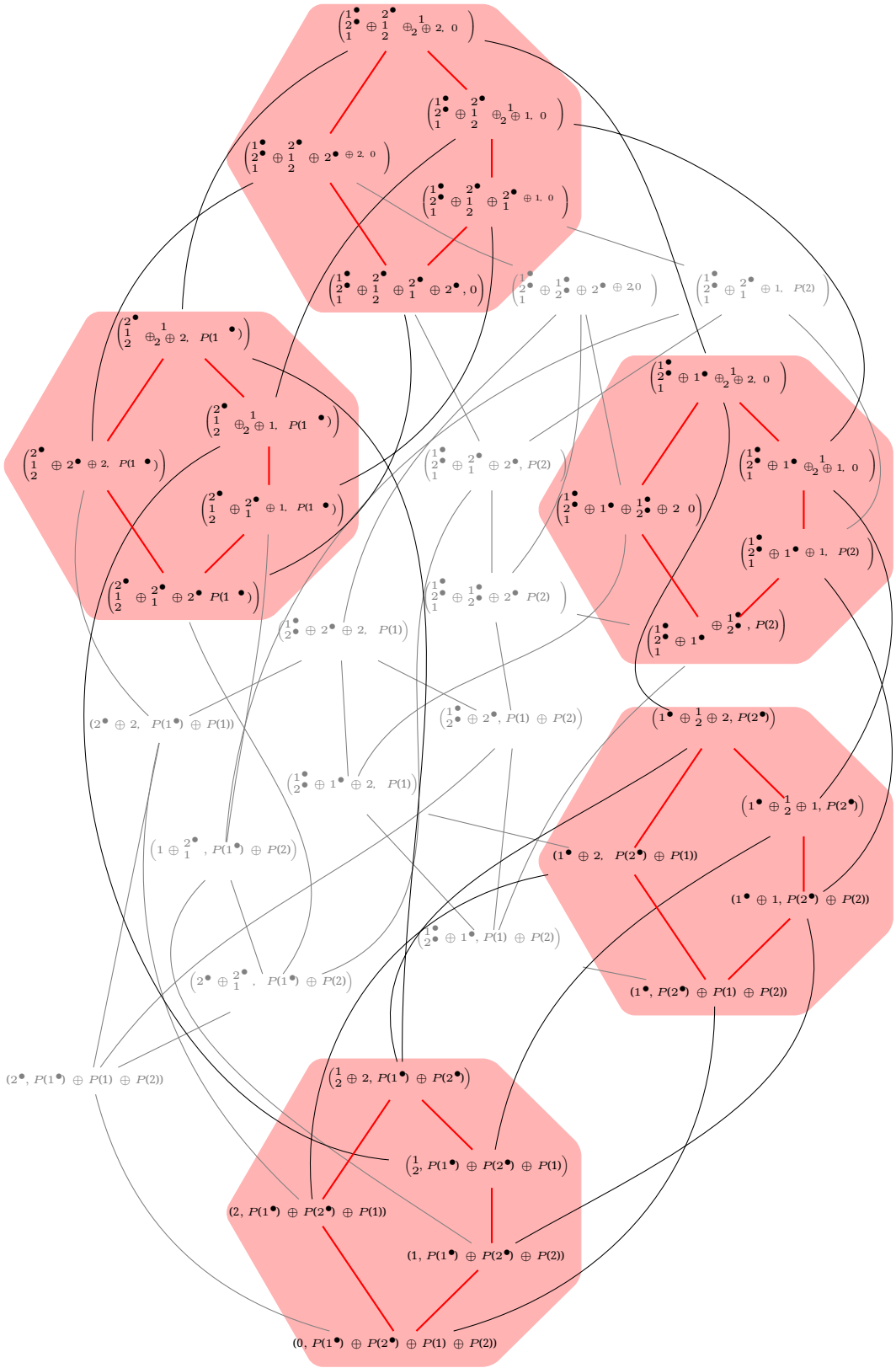


FIGURE 1. τ支撑倾斜偏序集，其中 Λ $\Lambda = k(1 \to 2)$。

定理 5.14. 极大绿色序列之间存在包含关系

$$\psi\colon \operatorname{MGS}(\Lambda)\times\operatorname{MGS}(\Lambda)\to\operatorname{MGS}(\bar{\Lambda})$$
$$(\mathcal{M},\mathcal{M}')\mapsto \bar{F}_0(\mathcal{M}')\circ\bar{G}(\mathcal{M}).$$

证明。设 $\mathcal{M},\mathcal{M}'\in \mathbf{MGS}(\Lambda)$。那么根据 G 的定义，我们有

$$\bar{G}(\mathcal{M})=(\bar{G}(\Lambda,0),\dots,\bar{G}(0,\Lambda))=((\bar{\Lambda},0),\dots(\Lambda,Q_{\bar{\Lambda}}))$$

其中 $Q_{\bar{\Lambda}}$ 表示投射-内射 Λ-模。此外，由定理 5.7，正合列 $G(\mathcal{M})$ 是区间中的一条极大链

$$[(\bar{\Lambda},0),(\Lambda,Q_{\bar{\Lambda}})]\subset \mathrm{s}\tau\text{-}\operatorname{tilt}\bar{\Lambda}.$$

类似地，

$$\bar{F}_0(\mathcal{M}')=(\bar{F}_0(\Lambda,0),\dots,\bar{F}_0(0,\Lambda))\subset \mathrm{s}\tau\text{-}\operatorname{tilt}_{G(0,\Lambda)}\bar{\Lambda}$$

其中根据定义，$F_0(\Lambda,0)$ 是 $G(0,\Lambda)=(0,Q_{\bar{\Lambda}})$ 的 Bongartz 补全，等于 $(\Lambda,Q_{\bar{\Lambda}})$。

此外，$F_0(0,\Lambda)$ 是 $G(0,\Lambda)=(0,Q_{\bar{\Lambda}})$ 的 Bongartz 余完备，等于 $(0,\Lambda)$。还要注意，根据定义，F_0 是 sτ-倾斜 Λ 与 $G(0,\Lambda)$ 的 Bongartz 区间之间的偏序集同构，因此 $F_0(\mathcal{M}')$ 是区间中的一条极大链

$$[(\Lambda,Q_{\bar{\Lambda}}),(0,\bar{\Lambda})]\subset \mathrm{s}\tau\text{-}\operatorname{tilt}\bar{\Lambda}.$$

这意味着，复合 $F_0(\mathcal{M}')\circ G(\mathcal{M})$ 是 Λ 的极大绿色序列。显然，ψ 是单射，因为 F_0 和 G 都是单射。□

例 5.15。设 $\Lambda=k(1\to 2)$ 的支撑倾斜偏序集如例 5.8 所示。考虑下面给出的 Λ 的两个极大绿色序列。

$$\mathcal{M}=\Big(\big(\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,0\big),\big(\tfrac{1}{2}\oplus 1\,,\,0\big),\big(1\,,\,P(2)\big),\big(0\,,\,P(1)\oplus P(2)\big)\Big)$$

$$\mathcal{M}'=\Big(\big(\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,0\big),\big(2\,,\,P(1)\big),\big(0\,,\,P(1)\oplus P(2)\big)\Big)$$

那么，$\psi(\mathcal{M},\ \mathcal{M}')$ 是 Λ 的如下极大绿色序列。

$$\Big(\big(\begin{smallmatrix}1^\bullet\\2^\bullet\\1\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2^\bullet\\1\\2\end{smallmatrix}\oplus\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,0\big),\big(\begin{smallmatrix}1^\bullet\\2^\bullet\\1\end{smallmatrix}\oplus 1^\bullet\oplus\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,0\big),\big(1^\bullet\oplus\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,P(2^\bullet)\big),\big(\tfrac{1}{2}\oplus 2\,,\,P(1^\bullet)\oplus P(2^\bullet)\big),$$
$$\big(2\,,\,P(1^\bullet)\oplus P(2^\bullet)\oplus P(1)\big),\big(0,\,P(1^\bullet)\oplus P(2^\bullet)\oplus P(1)\oplus P(2)\big)\Big)$$

注意，在图 1 中，此正合列 $\psi(\mathcal{M},\ \mathcal{M}')$ 对应于一个以 $G(\mathcal{M})$ 开始的正合列，它经过每个高亮五边形中最顶端的元素之间，随后是在图表底部高亮五边形中的极大正合列 $F_0(\mathcal{M}')$。

References

[AIR] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten，τ-倾斜理论，*Compos. Math.* **150** (2014年)，第 3 期，415–452。[As] S. Asai，实 Grothendieck 群的墙-室结构，*Adv. Math.* **381** (2021年)，论文编号 107615，共 44 页。[A] I. Assem、Ibrahim，关于双模 DA 的表示，*Tsukuba J. Math.* **9** (1985年)，第 2 期，217–232。[ABST] I.Assem、T.Br

J. Algebra ustle、R. Schiffler 和 **305** 2006 1, 548 561

G. Todorov，簇范畴与复制代数，( )，第 – 期。[ANS] I. Assem、J. Nehring 和 W. Schewe, 基本区域与复制代数。*Representations of finite-dimensional algebras (Tsukuba, 1990)* 25 51 11 , –。CMS Conf. Proc.,

由美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯；for the，1991年。[ASS] I. Assem、D. Simson 和 A. Skowronski，结合代数表示论要义。第 1 卷，*London Math. Soc. Stud. Texts*，**65** 剑桥大学出版社，剑桥，2006年，x+458 页。[APR] M. Auslander、M. I. Platzeck 和 I. Reiten，无图表的 Coxeter 函数，*Trans. Amer. Math. Soc.* **250** 1979 1 12 ( ) –。[BGP] I. N.

Bernstein、I. M. Gelfand 和 V. A. Pomonarev，Coxeter 函子与 Gabriel 定理，*Uspehi Mat. Nauk* **28** 1973 19 33 ( ), –。

[B] K. Bongartz，倾斜代数， *Proc. ICRA III (Puebla 1980)*，《数学讲义》第 903 号，施普林格出版社，1981年，26–38。[BB] S. Brenner 和 M. Butler，Bernstein-Gel'fand-Ponomarev 反射函子的推广。表示论 II（第二届国际会议论文集，卡尔顿大学，渥太华，安大略省，1979年），第 103–169 页，《数学讲义》，832，施普林格出版社，柏林—纽约，1980年。[BST] T. Br¨ustle、D. Smith 和 H. Treffinger，有限维代数的墙与室结构，*Adv. Math.* **354** (2019年)，106746，共 31 页。[BMRRT] A. Buan、B. Marsh、M. Reineke、I. Reiten 和 G. Todorov，倾斜理论与簇组合学，*Adv. Math.* **204**，(2006年)，第 2 期，572–518。[CIM] A. Chan、O. Iyama 和 R. Marczinzik，通过复制从 Serre-形式代数构造 Auslander-Gorenstein 代数， *Adv. Math.* **345** (2019年)，222–262。[DIJ] L. Demonet、O. Iyama 和 G. Jasso， τ g *Int. Math. Res. Not.* -倾 *IMRN* **2019** 892 斜有限代数、砖与 -向量， ，第 3 期，852–。[DIRRT] L. Demonet、O. Iyama、N. Reading、I. Reiten 和 H. Thomas，挠类的格论：超越 τ-倾斜理论， *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* **10** (2023年)，542–612。[FZ] S. Fomin 和 A. Zelevinsky，簇代数 I：基础， *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002 2, 497 529)，第 – 期。[F] C. Fu，通过 τ-倾斜理论研究 c-向量， *J. Algebra* **473** (2017年)，194–220。[HNIW] R. Hafezi、A. Nasr-Isfahani、J. Wei，通过投射模的态射范畴研究 τ-倾斜理论 I：ICE-闭子范畴，arXiv:2410.17965。[HR] D. Happel 和 C. M. Ringel，倾斜代数， *Trans. Amer. Math. Soc.* **274**(1982年)，399–443。[HHK] L. Angeleri H ¨ *London Math. Soc.* ugel、D. *Lecture Note Ser.* **332** 2007 +472 Happel 和 H. Krause，编者。《倾斜理论手册》。剑桥大学出版社，剑桥，。viii 页。[J] G. Jasso， τ 2015 16, -倾斜模与挠对的约化， *Int. Math. Res. Not. IMRN*，( )，第 – 期。[K] B. Keller，论簇理论与量子二重对数恒等式， 7190, 7237 *EMS Ser. Congr. Rep.* 欧洲数学会（EMS），苏¨黎世，2011年，85–116。[KD] B. Keller 和 L. Demonet，极大绿色序列综述， *Contemp. Math.*，758，美国数学会， [普罗维登斯], ，罗得岛州，2020年，267–286。[U] L. Unger，倾斜模集合的组合方面。 *Handbook of tilting theory*，259–277。伦敦数学学会讲义丛书，332，剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[Z2] S. Zhang，m-复制代数上的部分倾斜模， *J. Algebra* **323**(2010年)，第 9 期，2538–2546。[Z] S. Zhang，倾斜变异与复制代数， *Comm. Algebra* **37**(2009年)，第 10 期，3516–3524。

Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington, KY 40506-0027, USA
Email address: jrberggren@uky.edu

Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington, KY 40506-0027, USA*Email address*: khrystyna.serhiyenko@uky.edu