arXiv:2512.13901v1 [cond-mat.quant-gas] 15 Dec 2025

冷原子模拟器中的量子场：隧穿耦合的一维玻色准凝聚体中的弛豫与相位锁定

Bence Fitos[1], 2, * 和 G´abor Tak´acs[1], 3, †[1] *Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Budapest University of Technology and Economics, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*[2] *HUN-REN-BME-BCE Quantum Technology Research Group, Institute of Physics, Budapest University of Technology and Economics, Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary*
[3] *BME-MTA Momentum Statistical Field Theory Research Group, Institute of Physics, Budapest University of Technology and Economics, Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary*
（日期：2025年12月8日）

我们考察一个利用冷原子模拟相互作用相对论量子场论的典型实例：通过隧穿耦合的准一维玻色气体实现正弦-戈登模型。实验已表明，该系统可在平衡态下实现正弦-戈登模型；然而，对非平衡动力学的研究揭示了一种与正弦-戈登场论预测截然不同的相位锁定行为。在此，我们考察该系统的一维场论模型，并发现，这种相位锁定行为可归因于纵向谐振陷阱的存在；而已知实验中存在的额外自由度似乎并未发挥显著作用。因此，只要考虑陷阱引起的非均匀背景，该实验装置即使在非平衡态下，也能很好地模拟正弦-戈登量子场论。此外，我们的结果支持这样一种观点：将纵向囚禁势改为盒形，应能使实验结果与标准正弦-戈登动力学相符。尚待解决的主要问题是纳入三维修正，并对边界的影响进行建模。

目录

I. 引言 1
II. 模型与方法 2
A. 有效一维描述 2
B. 隧穿耦合 2
C. 晶格离散化 5
D. 截断维格纳近似 5
III. 模型的分解 7
A. 主要情形 7
B. 进一步改进 7
1. 有限温度 7
2. 粒子数方差 8
IV. 实验参数范围内的完整动力学 9
A. 模拟 9
B. 时间尺度 9
V. 简化模型 9
A. 拟合函数 9
B. 约瑟夫森频率 11
C. 弛豫时间 11
VI. 结论 11
致谢 14
参考文献 14
A. 模型参数摘要 17

* fitos5bence@gmail.com
† takacs.gabor@ttk.bme.hu

I. 引言

费曼提出利用量子系统模拟其他量子系统的构想，[1]，尤其是模拟量子场论；这一构想在超冷原子实验中展现出很大潜力。[2]，超冷原子系统具有高度可控且可调的特性，可用于模拟量子粒子和场的行为，并为探索经典计算无法触及的现象开辟途径。如今，在囚禁超冷原子的实验中，构建并操控孤立量子系统已成为常规操作 [3–10]。特别是，这些实验能够让人们研究量子系统的非平衡动力学，而这一领域近年来一直是研究前沿 [11–14]。

本文研究正弦-戈登模型。它是一个典型的相互作用可积量子场论，用于描述众多物理系统的低能物理 [15–23]。该模型的一个有趣特征是其可积性，它使许多物理量都能得到精确结果，涵盖散射振幅、形状因子以及局域可观测量的期望值等 [24–26]。

正弦-戈登模型可通过两个约瑟夫森耦合的一维玻色准

凝聚体[1] [7, 27, 30], 实现：超冷原子被囚禁在细长的双阱势中，从而有效地将物理限制在一维空间。对多体系统的一维描述进行玻色化 [30], 后，得到一个由凝聚体之间的相对相位实现的正弦-戈登模型；该模型与描述共同（平均）相位的卢廷格液体弱耦合。后者的耦合破坏了可积性；然而，平衡关联函数与正弦-戈登模型的预测相当吻合 [27, 31], 这表明，在热平衡下，耦合凝聚体可视为量子模拟正弦-戈登量子场论的良好平台。

非平衡动力学可以通过量子淬火 [32, 33],这一典型方案加以研究：先将系统制备在平衡态，随后突然改变某个物理参数，例如哈密顿量中的耦合。在耦合凝聚体中，一种自然的方案是将单个一维凝聚体分裂，在两者之间印刻相对相位，然后开启隧穿耦合。基于纯正弦-戈登动力学的理论计算预测了再定相 [34–37], ，即凝聚体的相对相位弛豫至一个有限值。与此相反，实验发现凝聚体之间会迅速发生相位锁定 [38] ，这一现象可以用加入耗散项 [39, 40]的双模模型进行参数化描述。实验的主要发现可以通过随机 Gross-Pitaevskii 描述 [41], 加以捕捉，但这种描述超出了量子场论（正弦-戈登）框架。另一种采用自洽哈特里-福克近似 [42–44], 的方法，则不适用于实验所涉及的参数范围；该实验中的粒子数显著高于模型计算所用的粒子数。

本文采用所谓的截断维格纳近似 [45–47], 在有效耦合正弦-戈登-卢廷格场论描述下，考察系统的动力学。事实上，这种方法此前已用于正弦-戈登模型，得到了普适的再定相动力学 [34]。哈密顿量截断可用于验证截断维格纳近似方法的有效性 [48, 49], ，但无法达到实验相关的参数范围。本文将纵向囚禁势以及正弦-戈登自由度与卢廷格自由度之间的耦合纳入考虑，并证明该方法能够捕捉相位锁定动力学，如图I.1所示。为与实验进行定性比较，参数根据参考文献 [38]选取。

本文结构如下。第 II 节回顾耦合凝聚体有效场论描述的推导，以及截断维格纳近似的实现。第 III 节讨论模型的三个关键要素：正弦-戈登自相互作用所固有的非线性、囚禁势导致的空间非均匀性，以及相对（正弦-戈登）模与共同（卢廷格）模之间的耦合。第IV 节介绍实验参数范围内完整动力学的结果。第 V 节分析约瑟夫森频率和相对相位弛豫时间随实验各项输入参数的变化规律，并将结果与先前研究进行比较。此外，我们还将结果与自由有质量玻色子近似描述的正弦-戈登场中小量子猝发的领先阶行为进行比较。最后，我们在第 VI节给出结论。附录A 中还汇总了不同参数之间的有用关系。

II. 模型与方法

A. 有效一维描述

本节介绍单个细长玻色准凝聚体的准一维模型。我们从三维相互作用玻色气体的巨正则哈密顿量出发：

$$H = \int d^3\vec{r}\Psi^\dagger(\vec{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) - \mu\right)\Psi(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}'\Psi^\dagger(\vec{r})\Psi^\dagger(\vec{r}')U_{\text{eff}}(\vec{r}-\vec{r}')\Psi(\vec{r}')\Psi(\vec{r}),$$
$$\left[\Psi(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')\right] = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{II.1}$$

其中， m 为原子质量， $V(\vec{r})$为三维陷阱势， μ 为化学势。在低温下，有效相互作用 U_{eff} 可近似为δ势

$$U_{\text{eff}}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{II.2}$$

[1] 其他冷原子实现可见参考文献 [2, 22, 27,28]; 其他方案还包括通过量子电路[19]或耦合自旋链 [29]实现。

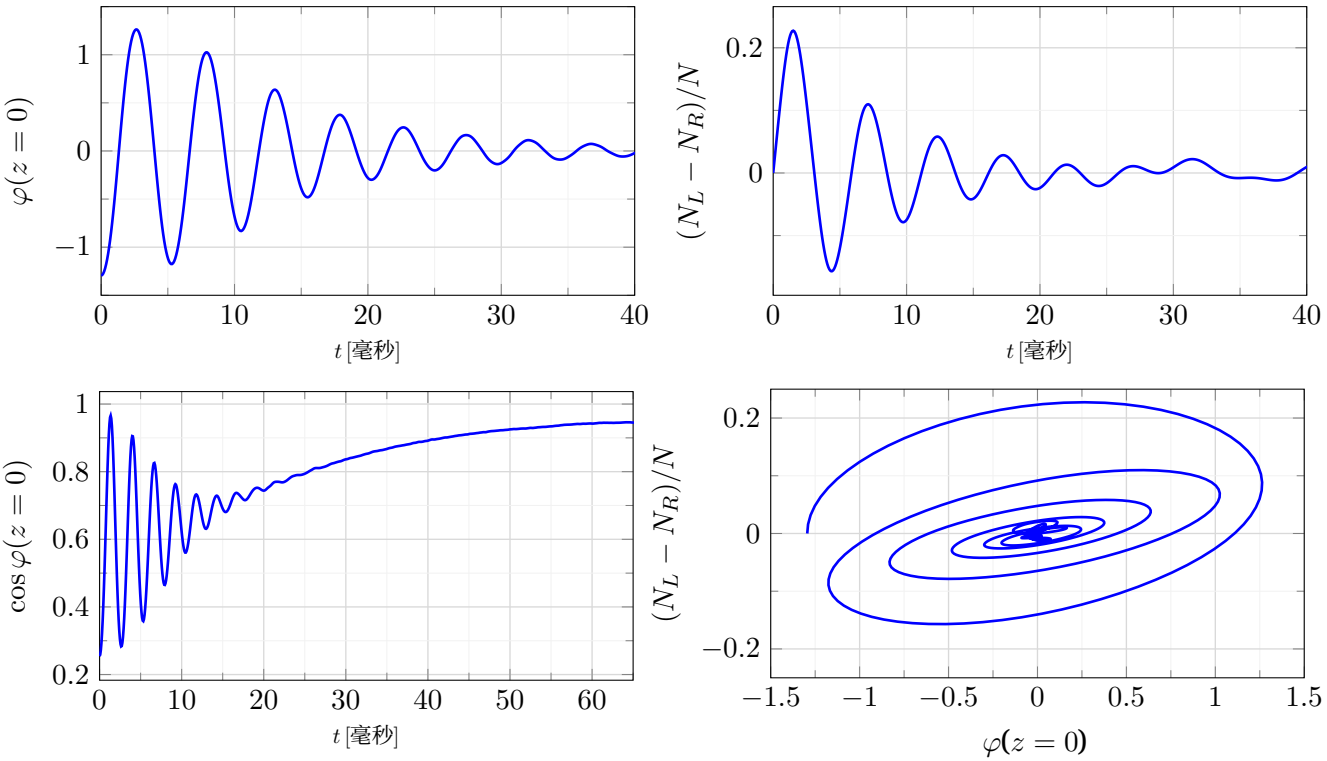

图 I.1：约瑟夫森淬火的相位和总粒子数差的截断维格纳近似结果。我们还展示了 $\cos\varphi$，它表明相位锁定随 $\langle\cos\varphi\rangle_{\rm eq} \approx 0.945$ 的演化。φ 的期望值取自凝聚体中部（$z=0$）。参数：$N = 3300$，$\omega_{||} = 2\pi \cdot 12\,\mathrm{s}^{-1}$，$J/(2\pi\hbar) = 19.0\,\mathrm{Hz}$ $T = 0$，$\sigma_N = 300$，$\varphi_0 = -1.3(2)$。

其特征由 s波散射长度 a_s决定。

开启径向囚禁势，例如采用以下形式

$$\frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2) \tag{II.3}$$

在 xy 平面中会形成细长的凝聚体，可以将其建模为有效的一维李布-林尼格气体

$$H = \int dz\,\psi^\dagger(z)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + V(z) - \mu + \frac{g_{1\mathrm{D}}}{2}\psi^\dagger(z)\psi(z)\right)\psi(z)\,, \tag{II.4}$$

其中，有效的一维耦合常数可以用 s-波散射长度以及横向囚禁势 [50]的频率 $\omega_\perp$ 表示

$$g_{1\mathrm{D}} \approx \frac{2\hbar^2 a_s}{m l_\perp^2}\left(1 - 1.036\frac{a_s}{l_\perp}\right)^{-1}. \tag{II.5}$$

这里，$l_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$ 是与径向限制势的频率 $\omega_\perp$ 相关的横向振子长度，a_s 是原子的三维 s 波散射长度。在弱相互作用区间 $a_s \ll l_\perp$ 结果简化为 $g_{1\mathrm{D}} \approx 2\hbar\omega_\perp a_s$.

我们假设系统处于准凝聚体区间，在该区间内，凝聚体的密度可以视为一个经典函数 $\rho_0(z)$，其上叠加了相对较小的量子涨落。为了获得低能有效理论，引入场的马德隆表示是有益的

$$\psi(z) = e^{i\varphi(z)}\sqrt{\rho_0(z) + \delta\rho(z)}\,, \tag{II.6}$$

其中 $\hat{}\varphi(z)$ 和 $\delta\hat{}\rho(z)$ 是实值场。经典背景密度分布 $\rho_0(z)$ 满足 Gross–

皮塔耶夫斯基方程

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + V(z) - \mu + g_{1D}\rho_0(z)\right)\sqrt{\rho_0(z)} = 0\,, \quad \text{(II.7)}$$

其中化学势 μ由粒子总数决定

$$N = \int dz \rho_0(z)\,. \quad \text{(II.8)}$$

在实验装置中，凝聚体还受到二次势的约束，限制在 z 方向上

$$V(z) = \frac{1}{2}m\omega_{||}^2 z^2\,, \quad \text{(II.9)}$$

其中 $\omega_{||} \ll \omega_{\perp}$。在（II.7）中忽略动能项（局域密度近似），可得到托马斯–费米密度分布

$$\rho_0(z) = n_0\left(1 - \frac{z^2}{R_{\rm TF}^2}\right)\,, \quad \text{(II.10)}$$

其中

$$R_{\rm TF} = \frac{L}{2}\,, \quad n_0 = \frac{3N}{2L}\,, \quad \text{(II.11)}$$

其中 L 表示 z 方向上的总长度。

在密度涨落 $\delta\hat{}\rho$ 的一阶近似下，系统可由非均匀的卢廷格液体哈密顿量 [51] 描述

$$H_{\rm TLL} = \frac{\hbar}{2\pi}\int dz \left(\nu_N(z)\left(\pi\delta\rho\right)^2 + \nu_J(z)\left(\partial_z\varphi\right)^2\right) \quad \text{(II.12)}$$

其中密度和相位刚度由 [52, 53] 给出

$$\begin{aligned}\nu_N(z) &= \frac{1}{\pi\hbar}\left.\frac{\partial\mu}{\partial\rho_0}\right|_{\rho_0=\rho_0(z)} \approx \frac{g_{1D}}{\pi\hbar}\\ \nu_J(z) &= \frac{\pi\hbar\rho_0(z)}{m}\,.\end{aligned} \quad \text{(II.13)}$$

其中，第一个近似适用于弱相互作用区域

$$\gamma = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n_{1D}} \ll 1\,. \quad \text{(II.14)}$$

哈密顿量可以写成以下形式

$$H_{\rm TLL} = \frac{\hbar c_0}{2}\int dz \left(\frac{\pi}{K_0}\delta\rho^2 + f(z)\frac{K_0}{\pi}(\partial_z\varphi)^2\right)\,, \quad \text{(II.15)}$$

其中

$$n_0 = \rho_0(z=0) \quad \text{(II.16)}$$

是密度，

$$f(z) = \frac{\rho_0(z)}{n_0} \quad \text{(II.17)}$$

是无量纲密度分布，

$$c_0 = \sqrt{\frac{g_{1D}n_0}{m}} \quad \text{(II.18)}$$

是声速，且

$$K_0 = \pi\hbar\sqrt{\frac{n_0}{mg_{1D}}} \quad \text{(II.19)}$$

是（无量纲的）Luttinger 参数，下标 0 表示它们均取中点 $z = 0$ 处的局部值。

二次哈密顿量的谱（II.15）可用解耦的玻色模来表示，这些玻色模满足关于重整化场的经典运动方程 $\phi(z) = \sqrt{K_0/\pi}\,\varphi(z)$

$$-\partial_t^2\phi + \partial_z\left(f\partial_z\phi\right) = 0\,, \quad \text{(II.20)}$$

f其解可以写成 form

$$\phi_{n\pm}(t,z) = e^{\pm i\omega_n t}Z_n(z)\,, \quad \text{(II.21)}$$

其中

$$\partial_z\left(f\partial_z Z_n\right) = -\omega_n^2 Z_n\,, \quad \text{(II.22)}$$

其中我们将所有 Z_n 选为实值函数，它们构成一个正交归一基

$$\int_{L/2}^{L/2} dz Z_n(z)Z_m(z) = \delta_{nm}\,. \quad \text{(II.23)}$$

随后可将 ϕ 分解为本征模

$$\phi(t,z) = \sum_n \frac{Z_n(z)}{\sqrt{2\omega_n}}\left(a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{-i\omega_n t}\right)\,, \quad \text{(II.24)}$$

其中 a_n 和 $a_n^\dagger$ 是玻色产生与湮灭算符，由此哈密顿量可写为

$$H_{\rm TLL} = \hbar c_0\sum_n \omega_n a_n^\dagger a_n + \text{const}\,. \quad \text{(II.25)}$$

对于托马斯-费米密度分布（II.10），我们有 $f(z) = 1 - 4z^2/L^2$ 且 Z_n 函数可用勒让德多项式表示：

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2n+1}{L}}P_n\left(\frac{z}{L/2}\right)\,, \quad \text{(II.26)}$$

相应的频率为

$$\omega_n = \frac{1}{L}\sqrt{(2n+1)^2 - 1}\,. \quad \text{(II.27)}$$

需要注意，边界条件问题并非简单明了。直观来看，粒子数守恒意味着应满足诺伊曼边界条件（$\partial_z\phi = 0$在边界处）

在系统两端都是如此。然而，由于 $f(z)$ 在边界处为零，我们至多只能要求 Z_n 在边界处具有正则性（有限性）。事实上，微分方程的通解是第一类和第二类勒让德函数的线性组合。舍去后者（不规则解），并令频率匹配，便可得到上述解。

场分解为本征模的形式可写为

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_n &= \int dz Z_n(z)\phi(z)\,,\\ \tilde{\Pi}_n &= \int dz Z_n(z)\Pi(z)\,,\end{aligned} \tag{II.28}$$

逆变换为

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_n Z_n(z)\tilde{\phi}_n\,,\\ \Pi(z) &= \sum_n Z_n(z)\tilde{\Pi}_n\,.\end{aligned} \tag{II.29}$$

B. 隧穿耦合

实验装置对应于通过隧穿哈密顿量耦合两个准凝聚体 $\psi_{1,2}(z)$

$$H_I = -J\int dz\left(\psi_1^\dagger(z)\psi_2(z)+\psi_2^\dagger(z)\psi_1(z)\right)\,. \tag{II.30}$$

使用马德隆表示，式（II.6）表明，对于 $\psi_{1,2}$，两个凝聚体之间的耦合取决于相对相位 $\varphi_1(z)-\varphi_2(z)$。因此，我们引入相对和公共自由度

$$\begin{aligned}\varphi^r(z) &:= \varphi_1(z)-\varphi_2(z)\,,\\ \varphi^c(z) &:= \frac{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)}{2}\,,\\ \delta\rho^r(z) &:= \frac{\delta\rho_1(z)-\delta\rho_2(z)}{2}\,,\\ \delta\rho^c(z) &:= \delta\rho_1(z)+\delta\rho_2(z)\,.\end{aligned} \tag{II.31}$$

在密度涨落的最低阶近似下，相对模由正弦-戈登模型描述，其相互作用哈密顿量为

$$H_I^{(0)} = -2J\int dz\,\rho_0(z)\cos(\varphi^r(z))\,, \tag{II.32}$$

而公共模仍是一个独立的卢廷格液体。高阶修正将相对模与公共模耦合起来，次领项给出了如下项

$$H_I^{(1)} = -J\int dz\,\delta\rho^c(z)\left(\cos(\varphi^r(z))-1\right)\,. \tag{II.33}$$

C. Lattice discretisation

非均匀卢廷格哈密顿量（II.12）可通过晶格 $z_j = ja$ 进行离散化，晶格间距为 a，其无量纲形式（对应于凝聚体$s=1,2$）可写为

$$\tilde{H}^{\#}_{\mathrm{TLL},s} = \frac{1}{2}\sum_j\left(\Pi_{s,j}^2+\frac{f(z_j)+f(z_{j+1})}{2}\left(\phi_{s,j+1}-\phi_{s,j}\right)^2\right)\,, \tag{II.34}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{\#} &= \frac{a}{\hbar c_0}H^{\#}\,,\\ \Pi_{s,j} &= \sqrt{\frac{\pi}{K_0}}a\,\delta\rho_s(z_j)\,,\quad \phi_{s,j} = \sqrt{\frac{K_0}{\pi}}\varphi_s(z_j)\,.\end{aligned} \tag{II.35}$$

为恰当地刻画隧穿耦合相互作用，我们改用相对与公共自由度

$$\begin{aligned}\phi_j^r &= \frac{1}{\beta_r}\varphi^r(z_j)\,,\quad \Pi_j^r = a\beta_r\delta\rho^r(z_j)\,,\\ \phi_j^c &= \frac{1}{\beta_c}\varphi^c(z_j)\,,\quad \Pi^c = a\beta_c\delta\rho^c(z_j)\,,\end{aligned} \tag{II.36}$$

其中

$$\beta_r = \sqrt{\frac{2\pi}{K_0}}\,,\quad \beta_c = \sqrt{\frac{\pi}{2K_0}}\,. \tag{II.37}$$

用相对与公共自由度表示的卢廷格哈密顿量与式（II.34）形式相同，而对应于（II.32）和（II.33）的无量纲晶格正则化相互作用项可表示为

$$\begin{aligned}\tilde{H}_I^{(0)\#} &= \frac{2gLn_0}{N_s}\sum_j f(z_j)\cos\left(\beta_r\phi_j^r\right)\,,\\ \tilde{H}_I^{(1)\#} &= \frac{g}{N_s}\sum_j\frac{\Pi_j^c}{\beta_c}\left(\cos\left(\beta_r\phi_j^r\right)-1\right)\,,\end{aligned} \tag{II.38}$$

wh其中 $N_s = L/a$ 为晶格点的数量 ，并且

$$g = 2\pi\frac{J}{2\pi\hbar}\frac{L}{c_0}\,. \tag{II.39}$$

将自由部分与相互作用部分结合起来，完整的晶格正则化无量纲哈密顿量形式如下

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{\#} &= \tilde{H}^{\#}_{\mathrm{TLL},1} + \tilde{H}^{\#}_{\mathrm{TLL},2} + \tilde{H}^{(0)\#}_{I} + \tilde{H}^{(1)\#}_{I} \\ &= \sum_j \Bigg\{ \frac{1}{2}\left[\left(\Pi^r_j\right)^2 + \frac{f(z_j)+f(z_{j+1})}{2}\left(\phi^r_{j+1}-\phi^r_j\right)^2 \right] + \frac{1}{2}\left[\left(\Pi^c_j\right)^2 + \frac{f(z_j)+f(z_{j+1})}{2}\left(\phi^c_{j+1}-\phi^c_j\right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{2gLn_0}{N_s^2} f(z_j)\cos\left(\beta_r\phi^r_j\right) - \frac{g}{N_s}\frac{\Pi^c_j}{\beta_c}\left[\cos\left(\beta_r\phi^r_j\right)-1\right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{II.40}$$

D. 截断维格纳近似

为了在实验相关的参数范围内模拟准凝聚体，我们采用一种强大的半经典方法——截断维格纳近似（TWA）[54, 55], ，该方法尤其适用于计算非平衡态下的期望值。截断维格纳近似基于量子算符与（经典）相空间中定义的普通函数之间的一一映射：对于任意算符 Ω，我们定义韦尔符号

$$\Omega_W(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \int d\mathbf{x}' \left\langle \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2}\middle|\,\hat{\Omega}\,\middle|\mathbf{x}+\frac{\mathbf{x}'}{2}\right\rangle e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}'}, \tag{II.41}$$

其中 $|\mathbf{x}\rangle$ 是位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$的本征态。特别地，经过适当归一化的密度矩阵的韦尔符号称为维格纳函数

$$W(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{N_s}} \int d\mathbf{x}' \left\langle \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2}\middle|\,\hat{\rho}\,\middle|\mathbf{x}+\frac{\mathbf{x}'}{2}\right\rangle e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}'}, \tag{II.42}$$

其中 N_s 是$\mathbf{x}$ 向量和$\mathbf{p}$ 向量的维数。

两个算符乘积的迹可以表示为它们的韦尔符号在相空间上的积分。特别是，对于期望值，我们得到

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle = \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{p}\, W(\mathbf{x},\mathbf{p})\Omega_W(\mathbf{x},\mathbf{p}). \tag{II.43}$$

为了纳入时间演化，我们用经典路径近似相空间点的轨迹

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle_{\mathrm{TWA}}(t) = \int d\mathbf{x}_0\, d\mathbf{p}_0\, W(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)\Omega_W(\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)), \tag{II.44}$$

其中$\mathbf{x}(t)$ 和$\mathbf{p}(t)$分别是满足初始条件$\mathbf{x}(0)$ $=\mathbf{x}_0$ 和$\mathbf{p}(0)$ $=$ $\mathbf{p}_0$, 的经典运动方程的解。截断维格纳近似可以系统地推导为量子场 Keldysh路径积分系统展开的首阶项 [54, 55]。这里我们遵循文献 [48],中的论述，更多关于实现的细节请参阅该文献。

在耦合凝聚体系统中，正则共轭经典变量为 $\{\phi^r_j,\Pi^r_j\}_{j=1,\ldots,N_s}$和$\{\phi^c_j,\Pi^c_j\}_{j=1,\ldots,N_s}$。淬火前态是未耦合凝聚体，$J=0$对应的无量纲哈密顿量为 $\tilde{H}^{\#}_{\mathrm{pre}} = \tilde{H}^{\#}{}_{\mathrm{TLL}\ 1} + \tilde{H}^{\#}{}_{\mathrm{TLL},\ 2}$。淬火前哈密顿量是二次型，可通过线性变换 $\{(\phi^\alpha_j,\Pi^\alpha_j)\} \to\{(\tilde{\phi}^\alpha_n,\tilde{\Pi}^\alpha_n)\}, \alpha = r,c$对角化，如式（II.28）所述。[2] 请注意，对于晶格正则化理论，本征模分解（II.28）变换由一个正交矩阵确定，该矩阵由式（II.22）中微分算子的晶格正则化的本征向量构成。

基态维格纳函数在每个˜ ˜变换后的模 $\{(\phi^\alpha_n,\Pi^\alpha_n)\}$中均为高斯分布，因此可以进行蒙特卡罗抽样。对于 $n\neq 0$, 第 n 个模 $(\phi^\alpha_n,\Pi^\alpha_n)$ 的标准差为˜ ˜

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{\phi}^\alpha_n} &= \frac{1}{\sqrt{2a\omega_n}}, \\ \sigma_{\tilde{\Pi}^\alpha_n} &= \sqrt{\frac{a\omega_n}{2}}. \end{aligned} \tag{II.45}$$

零模能量为零 $(\omega_0 = 0)$，因此基态维格纳函数在变量 $\tilde{\phi}^\alpha_0$ 上是均匀分布（定义于$[0, 2\pi\sqrt{N_s}/\beta_\alpha)$），在变量 Π^α_0上则是一个 δ 函数（中心位于˜0）。

实验猝灭方案设定总相对相位

$$\varphi^r_0 = \frac{1}{L}\int dz\, \varphi^r(z) = \frac{\beta_r}{\sqrt{N_s}}\tilde{\phi}^r_0 \tag{II.46}$$

其标准差为 σ_{φ_0}。因此，我们不再采用均匀分布，而是将实验中˜给定的相对相位零模 ϕ^r_0 纳入维格纳函数：一个中心位于 $\sqrt{N_s}\varphi^r_0/\beta_r$ 、标准差为 —

$$\sigma_{\tilde{\phi}^r_0} = \frac{\sqrt{N_s}}{\beta_r}\sigma_{\varphi_0}. \tag{II.47}$$

˜相应的共轭变量 Π^r_0 选取为以 0 为中心的高斯分布，其标准差取使海森堡不等式达到最小值：

$$\sigma_{\tilde{\Pi}^r_0} = \frac{\beta_r}{2\sqrt{N_s}\sigma_{\varphi_0}}. \tag{II.48}$$

[2] 我们定义一个额外的归一化因子 $\sqrt{a}$，以消除 Z_n 函数的量纲。

TWA模拟首先从初始值中抽取蒙特卡洛样本，再通过逆变换式（II.29）获得实空间函数。随后，TWA模拟使用相互作用哈密顿量 $J \neq 0$，根据这些初始条件计算经典时间演化。可观测量通过对单条轨迹得到的数值取平均来计算。通过计算各时间点数据的标准差，估算这些平均值的蒙特卡洛误差。TWA 具有多项显著优势，包括数值稳定性和广泛可扩展性，即使计算资源有限，也能将 MC 误差降至可忽略的程度。值得注意的是，TWA 还可用于有限温度下的计算 $k_B T = 1/\beta$，此时维格纳函数中的每个（非零）模仍服从高斯分布，但标准差有所增大

$$\sigma^{(\beta)} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{e^{\beta\omega}+1}{e^{\beta\omega}-1}}. \tag{II.49}$$

III. 模型分解

A. 主要情景

为了系统地理解耦合凝聚体系统，我们根据其主要特征对模型进行剖析。我们首先考察均匀背景上的线性化正弦-戈登模型。随后逐步构建完整模型，每一步都引入完整模型的一个新方面。对于每项改进，我们都会分析其对系统动力学的具体影响。

接下来的分析聚焦于模型的三个关键特征：

- **非线性：** 这涉及余弦势的二次近似在准确描述系统行为方面的有效性。
- **非均匀性：** 我们考察纵向二次囚禁势（产生近似的托马斯-费米密度分布）对动力学的影响，并将其与简单的平底囚禁势进行对比。
- **共模耦合：** 我们考察次主导相互作用项（式（II.33）的影响，该项耦合共模与相对相位模。

为系统地比较这些效应，我们探究了所有 $2^3 = 8$通过激活这些效应而得到的组合。在不同设置中，我们始终将局部物理参数固定在中点 $z = 0$。图III.1展示了在中点定义的相对相位所呈现的动力学

$$\langle \cos\varphi \rangle(t) = \langle \cos\varphi^r(z=0,t) \rangle\,, \tag{III.1}$$

这些参数取自与实验相关的范围。值得注意的是，八种不同情形呈现出定性上截然不同的动力学行为。

我们的主要发现是，相位弛豫$\langle \cos\varphi \rangle(t) \xrightarrow{} \approx 1$ 可归因于纵向二次囚禁势所导致的非均匀性。无论其他两种设置如何，在非均匀背景下，相对相位 $\langle \cos\varphi \rangle(t)$系统都会以由纵向陷阱决定的 ≈ 1 时间尺度趋近于$2\pi/\omega_{||}$。然而，一旦$\langle \cos\varphi \rangle(t)$达到峰值，便会出现复现，使其数值下降。尽管如此，在复现出现之前存在一个明确的平台期，此时 $\langle \cos\varphi \rangle(t)$稳定在接近 1 的数值附近，表明发生了相位锁定。对此，我们指出，即使在（零温）正弦-戈登真空中，$\langle \cos\varphi \rangle$ 的期望值也不会恰好等于 1，这是由于相位场 φ的量子涨落所致 [26]。量子淬火会向系统注入有限能量密度，因此预期其偏离 1 的程度会更大。因此，即使在相位锁定状态下，我们也预期相对相位仍存在残余涨落，使$\langle \cos\varphi \rangle(t)$弛豫至略低于 1 的数值。

根据参数所处的范围，非线性和共模耦合都可能在抑制这些复现方面发挥作用；然而，对于与实验相关的参数范围，共模耦合对动力学的影响结果证明可以忽略不计。

余弦相互作用的非线性是该模型的另一项重要特征。当初始相位取较大值 φ_0 时，显然这一特征十分重要。此外，对于其他参数的一般取值，它也在平滑约瑟夫森振荡方面发挥着重要作用。

B. 进一步改进

为了使我们的分析更贴近实际，我们考虑了若干进一步的改进，包括有限温度，以及在启动各次独立实验时，装入系统的初始粒子数存在不确定度。

1. *Finite temperature*

我们考察了有限温度下的运行，发现这会使$\langle \varphi^r(t) \rangle \to 0$的弛豫额外受到阻尼。此外，它还会降低相位 $\langle \cos\varphi^r(t) \rangle$ 的渐近值（参见图III.2）。鉴于实验观察到的相位锁定相当稳健，我们预计，相对自由度的温度远低于支配相位锁定的能量尺度。因此，为了简化问题，从现在起，除非另有说明，我们均考虑零温模拟。

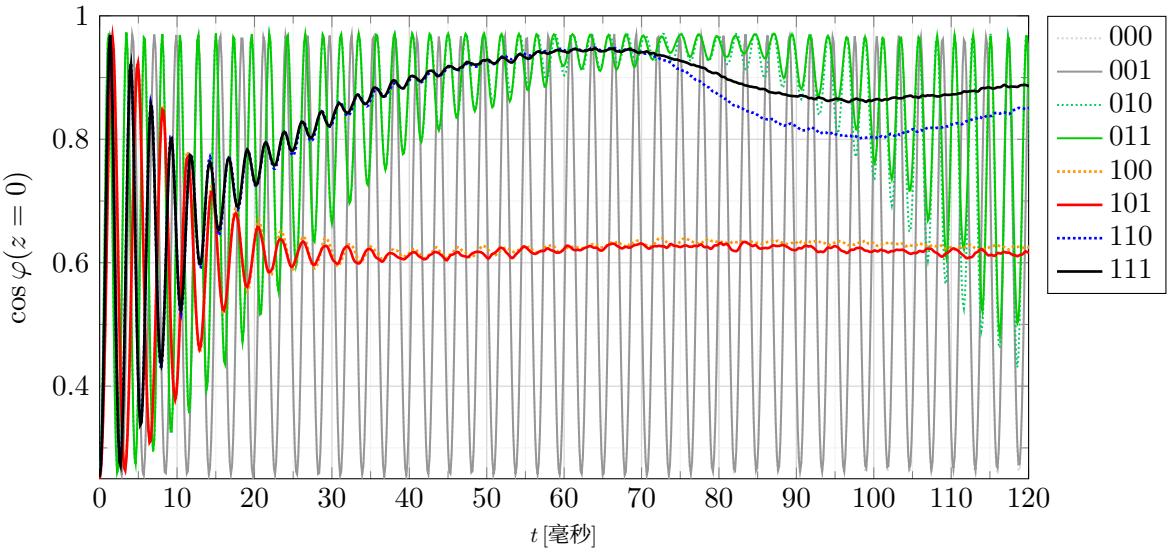

图 III.1：比较八种情形。二进制编码表示模型的三个特征——非线性、非均匀性和共模耦合——是否存在。参数：$N = 3300$，$J/(2\pi\hbar) = 19.0\,\text{Hz}$ T =0。0 nK $\varphi_0^r = -1.3$，$\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2$，$\sigma_N = 0$。

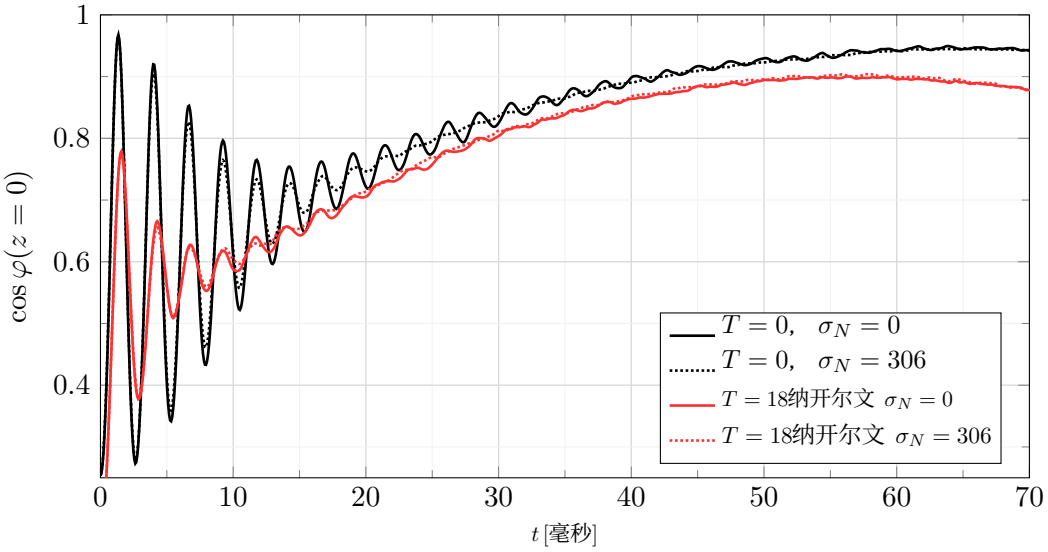

图 III.2：分析有限温度和初始原子数波动的影响，并考察 cos φ^r 期望值。参数：$N = 3300$，$J/(2\pi\hbar) = 19.0\,\text{Hz}$ $\varphi_0^r = -1.3$，$\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2$，。

2. Particle number variance

另一项改进是考虑初始参数的不确定性。这里我们仅考虑初始粒子数 N 的不确定性。在实验中，数据点是对多次单次运行取平均得到的；因此，初始参数的涨落会因退相干而导致额外阻尼。

与热涨落不同，初始粒子数方差导致的退相干只会使阻尼出现在 $\langle\varphi^r(t)\rangle$ 中。初始参数的不确定性不会改变 φ^r 的预期方差，因此也不会使 $\langle\cos\,\varphi^r\rangle$ 的期望值衰减。

描述原子数分布最简单的方法 N 是采用高斯分布。然而，标准差 σ_N 与粒子总数之间的关系并不明确。此外，也可以考虑采用后选择方法（忽略粒子数偏差过大的实验轮次，参见 [41]）；然而，设置一个硬性截断

在实验中并不现实，并会导致非物理的≈sinc($\tilde{\omega}t$)调制。基于这些考虑，我们采用简单的高斯分布，并假设标准差由相应的实验装置明确确定。

IV. 实验参数范围内的完整动力学

A. 模拟

我们还在与实验相关的参数范围内进行了完整模拟 [38]。结果如图 I.1 所示。根据实验设置，我们确定了以下参数值

$$\begin{aligned} &N = 3300\,, \quad \sigma_N = 300\,, \\ &\omega_{||} = 2\pi \cdot 12\,\mathrm{s}^{-1}\,, \quad J/(2\pi\hbar) = 19\,\mathrm{Hz}\,, \\ &\varphi_0^r = -1.3\,, \quad \sigma_{\varphi_0^r} = 0.2, \end{aligned} \tag{IV.1}$$

分别对应原子平均数及其方差、纵向陷阱频率、约瑟夫森耦合[3], 和初始相位。温度设为 $T = 0$，如第 IIIB 1 小节所述；唯一可以自由选择的变量是初始时间偏移，用于匹配实验数据采集的开始时间。

我们发现，只需选择一个时间偏移量，模拟曲线就能准确捕捉实验数据的特征。此外，我们还展示了相对相位余弦期望值的理论演化。原因在于，平均值弛豫至零并不一定意味着相位锁定；相位锁定还要求其方差趋近于零。相位余弦弛豫至接近 1 的值，则为后者提供了证据。

B. 时间尺度

系统的行为可通过三个不同层级的时间尺度来理解。

第一个是约瑟夫森振荡的时间尺度$1/f_J$，在此尺度下，相对模的动力学可由均匀势中的正弦-戈登模型很好地描述。与非均匀模型以及包含共模耦合的模型相比（见图 III.1），我们没有观察到定性差异（约瑟夫森频率的重整化除外）。

下一个时间尺度是与 $\langle\cos\varphi\rangle(t) \to\approx 1$ 相对应的弛豫时间。由于相位锁定是陷阱的结果，系统达到相位锁定所需的时间可用$\omega_{||}$来表征。如图 I.1所示，这一时间尺度与 $\langle\varphi\rangle(t) \to 0$中振荡的弛豫时间大致相同。下一节将研究弛豫时间对实验参数的依赖性。

众所周知，正弦-戈登模型在均匀背景下是可积的。与此同时，它并不会完全弛豫至相位锁定态；相反，它只表现出一种（普适的）再定相动力学，在这种动力学中，相对相位的期望值趋近于一个非零值 [34, 37]。陷阱诱导的非均匀性破坏了可积性，因此自然会预期弛豫动力学发生深刻变化。然而，目前可积性的破缺与相位锁定之间的详细联系仍不清楚。此外，我们观察到，与公共模的耦合在这一时间尺度上并未发挥显著作用，尽管它同样会破坏可积性。

第三个时间尺度是复现出现的时间尺度。此时，与公共模的耦合可能变得重要，进一步抑制非均匀正弦-戈登模型中的复现。这一特征可以这样理解：与公共模的耦合受到粒子密度的抑制；凝聚体中部的粒子密度较高，而在两端则趋近于零。因此，在短时间内，共模耦合对凝聚体中部的动力学影响可以忽略不计，但它可能显著影响边界处的反射，从而影响复现。然而，由于边界处的密度趋近于零，场论描述在其邻域内的适用性有限；因此，要更详细、现实地描述这一状态，还需要进一步研究。

V. 简化模型

本节分析弛豫时间 τ 和约瑟夫森频率 ω_J 随 $\varphi^r(t, z = 0)$模型输入参数变化的标度关系。

A. 拟合函数

为了定义 τ和 ω_J，我们用阻尼振荡拟合了 $\varphi(t) \equiv \varphi^r(t, z = 0)$[4]

$$\varphi_{\mathrm{fit}}(t) = \varphi_{\mathrm{fit}}^0 e^{-t/\tau} \sin(\omega_J t + \vartheta_0)\,, \tag{V.1}$$

这是有质量量子场论中小量子猝发（含单粒子贡献）领先阶行为的精确解析形式

[3] 约瑟夫森耦合由振荡频率确定。

[4] 为避免边缘效应，我们考察了中心的局域可观测量，以及复现到达中点之前的时间演化。

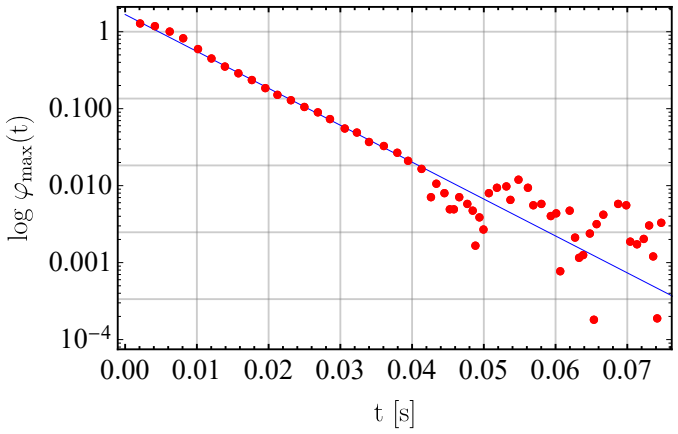

图 V.1： $\varphi(t)$ 在半对数坐标轴上的局部极值（红点）。蓝线表示对应于长寿命激发的平 Plateau。参数： $T = 0\,\mathrm{nK}$ $\varphi_0^r = -1.3$, $\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2, \sigma_N = 300, N = 3300, J/(2\pi\hbar) = 31.2\,\mathrm{Hz}$.

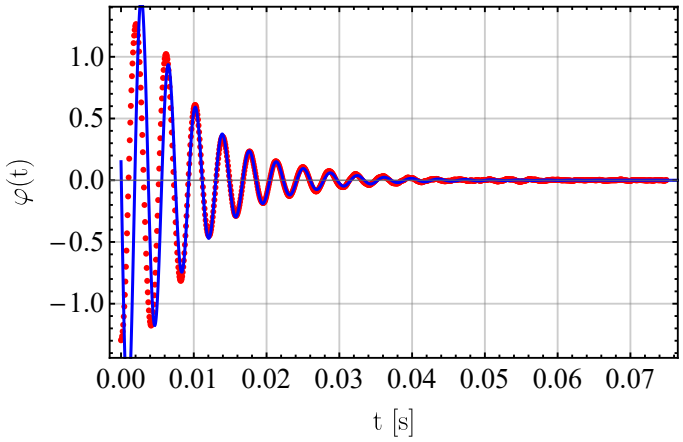

图 V.2： $\varphi(t)$ 的期望值，来自 TWA模拟（红点）和拟合函数式（V.1）（蓝线）。参数： $T = 0\,\mathrm{nK}$ $\varphi_0^r = -1.3$ $\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2$ $\sigma_N = 300$ $N = 3300$ $J/2\pi\hbar = 31.2$,,, ( ) Hz，拟合结果：$\varphi^0_{\mathrm{fit}} = 2.09, \omega_J = 1694\mathrm{s}^{-1}, \tau = 8.10$ 毫秒。

[56]。正弦形式可通过在淬火前基底上进行领先阶形状因子展开得到 [57, 58], ，而对高阶项求和（在淬火后基底上展开）则揭示了指数阻尼的起源 [59, 60]。

我们指出，即使使用非线性模型函数（例如参考文献[38]中采用的双模模型），淬火开始阶段的数据也无法得到良好拟合。只有考虑长寿命激发，我们才能获得稳健的拟合。当长寿命激发的振幅相对较小时，我们可以使用源自小密度近似下领先阶的式（V.1）中的拟合函数。

我们首先对 TWA模拟 的结果$\varphi(t)$进行了平滑处理，并找出了其中的零点、局部极小值和极大值。

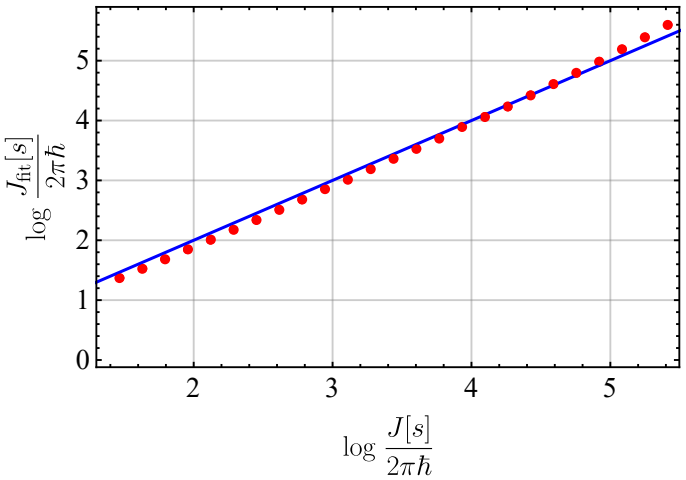

图 V.3：拟合得到的约瑟夫森耦合 J_{fit} 随模拟 J 的输入耦合变化的关系（红点），并与恒等函数（蓝线）进行比较。参数：$N = 3300$, $T = 0\mathrm{nK}$ $\varphi_0^r = -1.3$, $\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2$, $\sigma_N = 300$。

观察半对数图中局部极值点的绝对值，我们可以识别出一个递减的平台，对应于长寿命振荡的弛豫（参见图V.1）。为捕捉这一阶段，我们对约瑟夫森振荡第 3 至第 10 个周期之间的数据拟合了公式（V.1）。图V.2展示了一个典型的拟合结果。

我们还简要分析了共轭变量 $\Pi(t, z=0)$，它对应于中心处的局域粒子不平衡。两个凝聚体之间的总粒子数差由该量外推得到：

$$n := \frac{N_L - N_R}{N_L + N_R} \approx \frac{4}{3}\frac{N_s}{N}\frac{\Pi_r(0)}{\beta_r}\,, \tag{V.2}$$

这是通过假设 $\delta\rho^r(z)/\rho_0(z) \approx \delta\rho^r(0)/\rho_0(0)$ 得到的。这一近似并非在所有参数范围内都必然成立；尽管如此，它提供了一种计算有效约瑟夫森耦合（J_{fit}，见公式（V.4））的方法，而结果表明，该耦合可作为实验参数范围内的一致性替代指标。

假设 $\tau \gg 1/\omega_J$，粒子数差变为

$$n_{\mathrm{fit}}(t) = n^0_{\mathrm{fit}} e^{-t/\tau}\cos(\omega_J t + \vartheta_0)\,. \tag{V.3}$$

将 $\{\varphi(t, 0)\ \Pi(t, 0)\}$ 视为单模振子，有效约瑟夫森耦合可用拟合参数表示为

$$J_{\mathrm{fit}} = \frac{\hbar\omega_J}{2}\frac{n^0_{\mathrm{fit}}}{\varphi^0_{\mathrm{fit}}}\,. \tag{V.4}$$

我们发现，有效约瑟夫森耦合（J_{fit}）与模拟的原始输入参数 J（见图V.3）高度吻合，这证实了我们方法的自洽性。

B. 约瑟夫森频率

接下来，我们分析了约瑟夫森频率 ω_J。自然可以将其与最简单的量子场论近似——领先阶行为——进行比较。对于小量子猝发，凝聚体的中间区域可近似为自由（均匀）有质量玻色子。自由玻色子的参数经过选取，使其局域参数（粒子密度 n、声速 c、卢廷格参数 K_0）与中点 $z=0$ 处的相应参数相匹配。初态被建模为与初始期望值 φ_0相对应的相干态。由此可以很容易地用凝聚体的参数表示振荡频率：

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi^2 \tilde{J} c_0 n_0}{K_0}} = 2\pi \left(\frac{3^2 \tilde{J}^3 N^2 g_{1\mathrm{D}}^2 \omega_{||}^2 m}{2^4 \pi^3 \hbar^3} \right)^{1/6}, \quad \text{(V.5)}$$

其中 $\tilde{J} = J/(2\pi\hbar)$。我们将这一解析结果与模型模拟所得的结果进行比较。[5] 图V.4展示了约瑟夫森振荡频率随约瑟夫森耦合、原子数和囚禁势强度的变化，并与理论预测（V.5）进行了比较。我们发现，理论预测与模拟结果吻合良好。

线性化模型的理论预测与模拟结果之间的吻合具有稳健性，即使初始相位差较大时也是如此。这表明，在拟合中略去的初始瞬态之后，系统动力学由低能正弦-戈登呼吸子准粒子主导，而线性化模型能够很好地近似描述这些准粒子。

C. 弛豫时间

接下来，我们考察了不同参 τ 数设置下的阻尼时间（见图V.5）。我们发现，阻尼时间仅表现出对初始全局相位 φ_0轻微的振荡依赖。另一方面，我们发现，随着约瑟夫森耦合 τ、粒子总数 J以及囚禁势强度的增加， N 阻尼时间呈下降趋势。假设其具有幂律依赖关系，我们对数图进行了线性拟合，以提取相应的指数。我们发现，弛豫时间与约瑟夫森耦合的 $-1/2$ 次幂 J、粒子数的 $-1/3$ 次幂N 以及纵向囚禁强度的$\omega_{||}$次幂 $\omega_\perp$。对于横向势强度 $1/4$ ，指数并不完全明确（介于 $1/3$和之间）；应覆盖更宽的对数范围，才能给出更准确的结果。遗憾的是，参数不能无限制地改变，因为必须在复现从边缘传回之前获得数量合理的约瑟夫森振荡。

我们得到的 τ 随参数 J 和 N 变化的标度关系，与先前研究 [38, 41] 给出的结果有所不同。在此我们强调，我们的模拟基于有效一维模型，无法涵盖所有三维现象。其中一种修正是线粒子密度增加时凝聚体的局部膨胀，这会导致隧穿耦合随位置变化。要将这些效应纳入考量，需要对模型进行大幅扩展，或许可以参考文献 [44] 的做法；我们将这些问题留待未来研究。我们还注意到，文献 [41] 中所研究的三维随机 Gross-Pitaevskii 模型，成功再现了实验中观察到的弛豫时间对输入参数的依赖关系。

造成差异的另一个原因可能是弛豫时间的定义。尽管式（V.1）中的阻尼振荡是参考文献 [38], 中双模模型结果的小振幅近似，但拟合所采用的时间区间不同：实验关注的是较短的时间尺度，此时振幅仍然较大，而非长寿命激发所处的时间尺度。

另一个问题是有效一维模型中初态的恰当形式。为简便起见，按照 [37, 49] ，我们将初态的非零模部分视为零温（或有限温度）平衡态，而零模则取为初始角度 φ_0，即一个相干态。考虑更真实的初态，并将通过分裂凝聚体 [35, 36] 的制备过程所产生的影响纳入其中，则留待今后研究。

此外，正如第 IV节末尾所讨论的，在纵向谐振阱边缘附近，密度趋近于零，此时场论近似不再适用，卢廷格液体描述也会失效。在我们的分析中，用于模拟的哈密顿量（II.40）即使在边缘处也保持正则（有限）；然而，下一阶相互作用项（按粒子密度展开）会发散。为避免得出不可靠的结果，我们只分析位于中心的物理量，并且只考虑复现出现之前的时间演化。要建立一种稳健的边缘建模方法，还需要进一步分析。

VI. 结论

我们研究了一个有效的一维量子场论模型，该模型描述了量子正弦-戈登场论的耦合玻色凝聚体模拟器。此前的实验已证实，该模拟器能够很好地模拟平衡态[27, 31]；然而，其非平衡动力学表现出相位锁定行为 [38] ，这与普适的

[5] 通过将上述模型拟合到模拟数据，得到约瑟夫森频率。

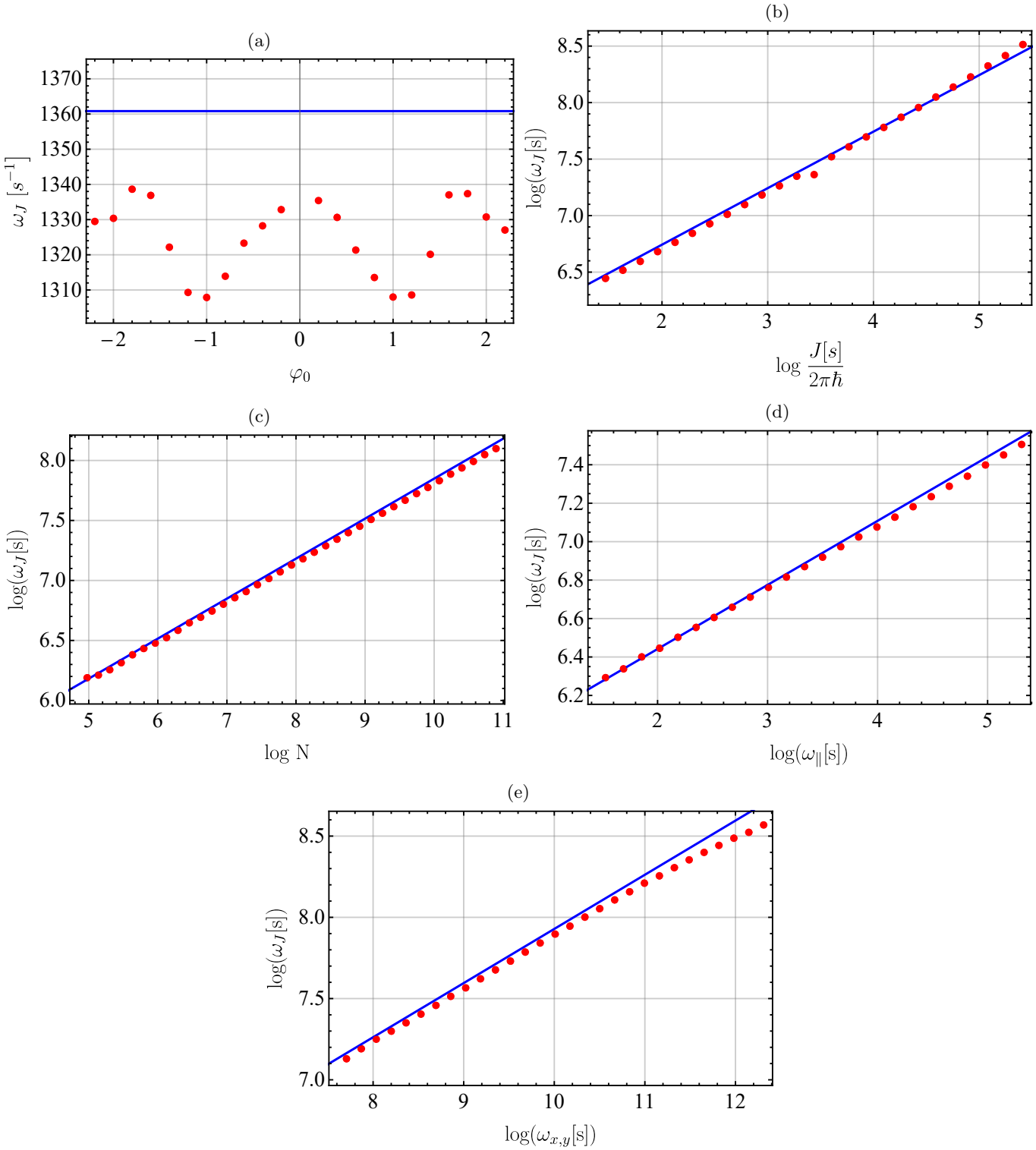

图 V.4：约瑟夫森频率随**(a)** 初始相位差 φ_0、**(b)** 约瑟夫森耦合J、**(c)** 原子数 N，以及**(d)** 纵向和**(e)** 横向囚禁势强度的变化，$\omega_{\parallel}$和 $\omega_{\perp}$。蓝线表示线性化均匀模型的理论预测。参数： $T = 0\,\mathrm{nK}$ $\varphi_0 = -1.3(2)$ $N = 3300$， $\sigma_N = 300$， $J/(2\pi\hbar) = 19\,\mathrm{Hz}$，**(e)**： $J/(2\pi\hbar) = 30\,\mathrm{Hz}$。

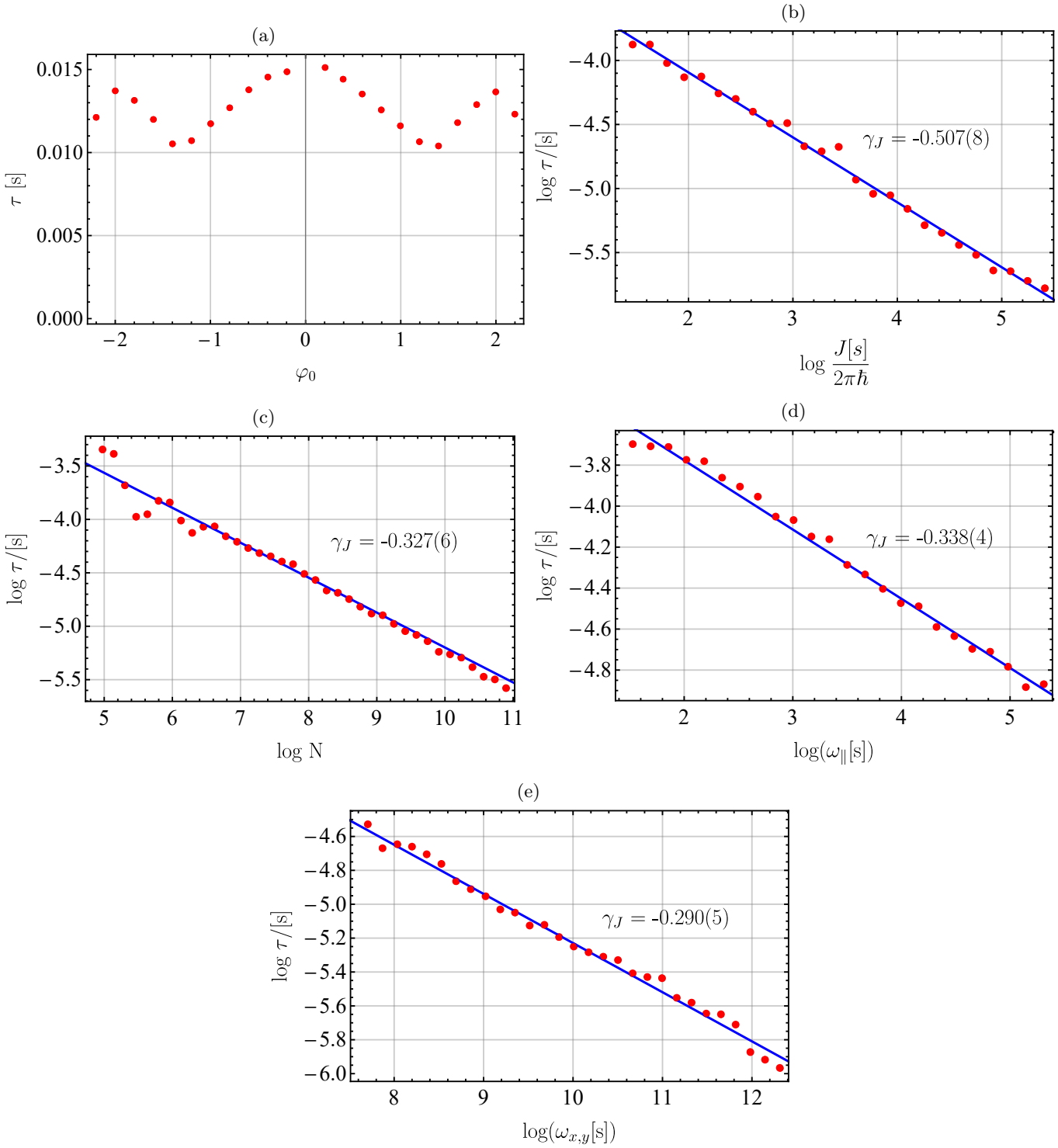

图 V.5：弛豫时间 τ 随（**a**）初始相位差 φ_0、（**b**）约瑟夫森耦合 J、（**c**）原子数 N以及（**d**）纵向和（**e**）横向囚禁势强度的变化，$\omega_{\parallel}$ 和 $\omega_{\perp}$。我们还展示了拟合曲线（蓝色）及其对应的指数 γ。参数：$T = 0\text{nK}$ $\varphi_0 = -1.3$（2）$\sigma_N = 300$、$N = 3300$，$J/(2\pi\hbar) = 19.0\,\text{Hz}$。

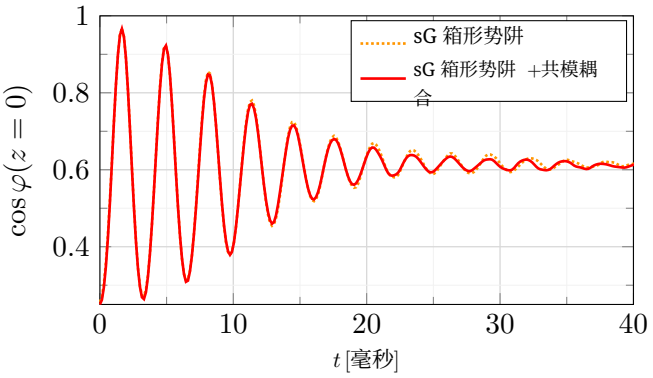

图 VI.1：在平底（箱形）纵向囚禁势中，纯正弦-戈登模型的相位弛豫与包含共模耦合（CMC）的正弦-戈登动力学的比较。（数据与图 III.1 相同。）参数：$N = 3300$，$J/(2\pi\hbar) = 19.0\,\mathrm{Hz}$ T =0。0 nK $\varphi_0^r = -1.3$，$\sigma_{\varphi_0^r} = 0.2$，$\sigma_N = 0$。

理论预测的再定相 [34–37]。

我们证明，只需考虑纵向囚禁势的影响，就能解释相位锁定动力学。随机 Gross-Pitaevski 方法中已发现纵向囚禁势的作用 [41]。然而，我们是在一维场论框架下得出这一结论的，这表明该实验可被视为在非均匀背景上模拟正弦-戈登场论的良好平台。我们还发现，在可以忽略边界效应的时间范围内，相对相位（对应于正弦-戈登场）与平均相位（公共模）之间的耦合并不起显著作用。因此，我们完全有理由相信，通过塑造囚禁势制备的盒式囚禁势，如文献 [61]，所提议的那样，能够实现对非平衡态正弦-戈登动力学的精确模拟，如图所示图 VI.1。

最后，我们提出几个有趣的未解问题。其中一个是考虑偏离严格一维行为的情形，即三维效应；人们认为，这些效应能够解释陷阱中原子数与弛豫时间和约瑟夫森频率之间的反常标度关系。另一个问题是边缘附近的行为建模。对于抛物线型纵向囚禁势，凝聚体的密度在边缘处趋近于零，这会增强与公共模的有效耦合，从而使场论模型的有效性受到质疑。对于盒式囚禁势，我们预计正弦-戈登场在边缘处满足诺伊曼边界条件。这是一种可积边界条件，其反射因子 [62] 和边界激发谱 [63]，均已精确求得，因此，能否通过实验验证这些预言便成了一个有趣的问题。

致谢

我们感谢 J. Schmiedmayer 富有启发性的讨论，并感谢他提供部分尚未发表的实验结果供我们参考。本研究得到了 HUN-REN 匈牙利研究网络通过支持研究团队计划、HUN-REN-BME-BCE 量子技术研究组（TKCS-2024/34）的资助，也得到了匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）通过 OTKA 项目（编号：ANN 142584）的资助。NKFIH 还通过“国家量子信息实验室”项目（编号：2022-2.1.1-NL-2022-00004）为 G.T. 提供了部分资助。B.F. 还获得了博士卓越奖学金计划（DCEP）的部分资助。该计划由文化与创新部的国家研究、发展与创新基金以及布达佩斯科技与经济大学共同资助。

[1] R. P. Feynman, 《用计算机模拟物理》, *Int.* () –。 *J. Theor. Phys.* **21** 1982 467 488
[2] J. I. Cirac、P. Maraner 和 J. K. Pachos, 《冷原子模拟相互作用相对论量子场论》, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010年) 190403, arXiv:1006.2975 [凝聚态物理：强关联电子]。[3] T. Kinoshita、T. Wenger 和 D. S. Weiss, 《量子牛顿摆》, *Nature* **440** (2006) 900–903。[4] S. Hofferberth、I.Lesanovsky、B. Fischer、T. Schumm 和 J. Schmiedmayer, 《一维玻色气体中的非平衡相干动力学》, *Nature* **449** (2007) 324–327, arXiv:0706.2259 [cond-mat.other]。[5] S. Trotzky、Y. A. Chen、A. Flesch、I. P. McCulloch、U. Schollw¨ock、J. Eisert 和 I. Bloch, 《探测孤立强关联一维玻色气体向平衡态弛豫的过程》, *Nat. Phys.* **8**(2012) 325–330, arXiv:1101.2659 [凝聚态物理：量子气体]。[6] M. Gring、M. Kuhnert、T. Langen、T. Kitagawa、B. Rauer、M. Schreitl、I. Mazets、D. A. Smith、E. Demler 和 J. Sc hmiedmayer, 《孤立量子系统中的弛豫与预热化》, *Science* **337** (2012) 1318, arXiv:1112.0013 [凝聚态物理：量子气体]。[7] T. Langen、R. Geiger、M. Kuhnert、B. Rauer 和 J. Schmiedmayer, 《孤立量子多体系统中热关联的局部涌现》, *Nat. Phys.* **9** (2013 640 643, 1305 3708) –arXiv: 。凝聚态物[理：量子气体。[8] F. Meinert、M. J. Mark、E. Kirilov、K. Lauber、P. Weinmann、A. J. Daley 和 H. C. N¨agerl, 《原子一维伊辛链中的量子淬火》, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013 053003, 1304 2628)arXiv: 。凝[聚态物理：量子气体。]

[9] T. Fukuhara、P. Schauß、M. Endres、S. Hild、M. Cheneau、I. Bloch 和 C. Gross，《磁振子束缚态及其动力学的微观观测》，*Nature* **502** (2013年) 76–79，arXiv:1305.6598 [凝聚态物理：量子气体]。[10] T. Langen、S. Erne、R. Geiger、B. Rauer、T. Schweigler、M. Kuhnert、W. Rohringer、I. E. Mazets、T. Gasenzer 和 J. Schmiedmayer，《广义吉布斯系综的实验观测》，*Science* **348** (2015年) 207–211，arXiv:1411.7185 [凝聚态物理：量子气体]。[11] M. A. Cazalilla 和 M. Rigol，《编者按：孤立量子多体系统中的动力学与热化专题》，*New J. Phys.* **12** (2010年) 055006。[12] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalattore，《综述：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学》，*Rev. Mod. Phys.* **83** 2011 863 883, 1007 5331 ( ) – arXiv: 。凝聚态物理：强关联电子 。[13] C. Gogolin 和 J. Eisert，《封闭量子系统中的平衡化、热化及统计力学的涌现》，*Rep. Prog. Phys.* **79** (2016年) 056001，arXiv:1503.07538 [quant-ph]。[14] P. Calabrese、F. H. L. Essler 和 G. Mussardo，《〈非平衡系统中的量子可积性〉导论》，*J. Stat. Mech.* **6** (2016年) 064001。[15] I. Affleck 和 M. Oshikawa，《苯甲酸铜及其他 $S = 1/2$ 反铁磁链中的磁场诱导能隙》，*Phys. Rev. B* **60** (1999年) 1038–1056，arXiv:cond-mat/9905002 [凝聚态物理：强关联电子]。[16] I. Umegaki、H. Tanaka、T. Ono、H. Uekusa 和 H. Nojiri，《$S = 1/2$ 一维反铁磁体 $KCuGaF_6$ 在磁场中的基本激发与量子正弦-戈登模型》，*Phys. Rev. B* **79** (2009年) 184401，arXiv:0902.1371 [凝聚态物理：强关联电子]。[17] S. A. Zvyagin、A. K. Kolezhuk、J. Krzystek 和 R. Feyerherm，《强磁场中的量子正弦-戈登自旋链激发态层级结构》，*Phys. Rev. Lett.* **93** (2004年) 027201，arXiv:cond-mat/0403364 [凝聚态物理：强关联电子]。[18] A. Roy 和 H. Saleur，《广义正弦-戈登模型的量子电子电路模拟》，*Phys. Rev.B* **100** 2019 155425, 1902 09530 ( ) arXiv: 。cond-mat.mes-hall 。[19] A. Roy、D. Schuricht、J. Hauschild、F. Pollmann 和 H. Saleur，《采用量子电路的量子正弦-戈登模型》，*Nucl. Phys. B* **968** (2021年) 115445，arXiv:2007.06874 [quant-ph]。[20] F. H. L. Essler、H. Frahm、F. G¨ohmann、A. Kl¨umper 和 V. E. Korepin，*The One-Dimensional Hubbard Model*。剑桥大学出版社，2005年。[21] T. Giamarchi，*Quantum physics in one dimension*。物理学国际系列专著。克拉伦登出版社，牛津，2004年。[22] E. Haller、R. Hart、M. J. Mark、J. G. Danzl、L. Reichs¨ollner、M. Gustavsson、M. Dalmonte、G. Pupillo 和 H.-C. N¨agerl，《强相互作用玻色子卢廷格液体的钉扎量子相变》，*Nature* **466** 2010 597 600, 1004 3168 ( ) – arXiv: 。凝聚态物理：量子气体 。[23] D. Controzzi、F. H. L. Essler 和 A. M. Tsvelik，《一维莫特绝缘体的动力学性质》，*arXiv e-prints*(2000年) cond–mat/0011439，arXiv:cond-mat/0011439 [凝聚态物理：强关联电子]。[24] A. B. Zamolodchikov 和 A. B. Zamolodchikov，“二维中的因子化 S矩阵作为某些相对论性量子场论模型的精确解”，*Annals Phys.* **120** (1979年) 253–291。[25] F. A. Smirnov，*Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*。世界科学出版社，1992年。[26] S. Lukyanov 和 A. Zamolodchikov，“量子正弦-戈登模型中局域场的精确期望值”，*Nucl. Phys. B* **493** (1997年) 571–587，arXiv：hep-th/9611238 [hep-th]。[27] T. Schweigler、V. Kasper、S. Erne、I. Mazets、B. Rauer、F. Cataldini、T. Langen、T. Gasenzer、J. Berges 和 J. Schmiedmayer，“通过高阶关联对量子多体系统进行实验表征”，*Nature* **545** (2017年) 323–326，arXiv：1505.03126 [凝聚态物理：量子气体]。[28] E. Wybo、A. Bastianello、M. Aidelsburger、I. Bloch 和 M. Knap，“利用量子气体显微镜制备和分析正弦-戈登模型中的孤子”，*PRX Quantum* **4** 2023 030308, 2303 16221 ( ) arXiv: 。凝聚态物理：量子气体。[29] E. Wybo、M. Knap 和 A. Bastianello，“耦合自旋链中的量子正弦-戈登动力学”，*Phys. Rev. B* **106** 2022 075102, 2203 09530 ( ) arXiv: 。凝聚态物理：强关联电子。[30] V. Gritsev、A. Polkovnikov 和 E. Demler，“相互作用原子组成的两个耦合一维凝聚体的线性响应理论”，*Phys. Rev. B* **75** (2007年) 174511，arXiv：cond-mat/0701421 [cond-mat.other]。[31] S. Beck、I. E. Mazets 和 T. Schweigler，“计算一维系统中热关联的非微扰方法”，*Phys. Rev. A* **98** (2018年) 023613，arXiv：1802.06610 [凝聚态物理：量子气体]。[32] P. Calabrese 和 J. Cardy，“量子淬火后关联函数的时间依赖性”，*Phys. Rev. Lett.* **96** (2006年) 136801，arXiv：cond-mat/0601225 [cond-mat.stat-mech]。[33] P. Calabrese 和 J. Cardy，“扩展系统中的量子淬火”，*J. Stat. Mech. Theor. Exp.* **2007** (2007年) 06008，arXiv：0704.1880 [cond-mat.stat-mech]。[34] E. G. Dalla Torre、E. Demler 和 A. Polkovnikov，“通过突然耦合两个初始独立凝聚体实现量子淬火后的普适再定相动力学”，*Phys. Rev. Lett.* **110** (2013年) 090404，arXiv：1211.5145 [凝聚态物理：量子气体]。[35] L. Foini 和 T. Giamarchi，“耦合卢廷格液体的非平衡动力学”，*Phys. Rev. A* **91** (2015年) 023627，arXiv：1412.6377 [凝聚态物理：量子气体]。[36] L. Foini 和 T. Giamarchi，“两个相干耦合一维玻色气体的弛豫动力学”，*Eur. Phys. J. Special Topics* **226** 2017 2763 2774, ( ) – arXiv：1612.01858 [凝聚态物理：量子气体]。[37] D. X. Horv´ath、I. Lovas、M. Kormos、G. Tak´acs 和 G. Zar´and，“量子正弦-戈登模型中的非平衡时间演化与再定相”，*Phys. Rev. A* **100** (2019年) 013613。[38] M. Pigneur、T. Berrada、M. Bonneau、T. Schumm、E. Demler 和 J. Schmiedmayer，“一维玻色约瑟夫森结向锁相平衡态的弛豫”，*Phys. Rev. Lett.* **120** (2018年) 173601，arXiv：1711.06635 [quant-ph]。[39] I. Marino、S. Raghavan、S. Fantoni、S. R. Shenoy 和 A. Smerzi，“玻色-爱因斯坦凝聚体隧穿动力学：

带阻尼的动量缩短摆”，

Phys. 第（7月，）–。

Rev. A **60** 1, 1999 487 493

[40] M. Pigneur 和 J. Schmiedmayer，“玻色约瑟夫森结的解析摆模型”，*Phys. Rev. A* **98**（2018年）063632，arXiv：1810.02772 [quant-ph]。[41] J. F. Mennemann、I. E. Mazets、M. Pigneur、H. P. Stimming、N. J. Mauser、J. Schmiedmayer 和 S. Erne，“扩展玻色约瑟夫森结中的弛豫”，*Phys. Rev. Research* **3**（2021 023197, 2012 05885）arXiv：。[凝聚态物理：量子气体]。[42] Y. D. van Nieuwkerk 和 F. H. L. Essler，“非平衡态下正弦-戈登模型的自洽含时谐近似”，

J. Stat. Mech.（）arXiv：。

Theor. Exp. **8** 2019 084012, 1812 06690 [凝聚态物理：量子气体]。[43] Y. D. van Nieuwkerk 和 F. Essler，“隧穿耦合的一维玻色气体的低能描述”，*Scipost Phys.* **9**（2020 025, 2003 07873）arXiv：。凝聚态物理：量子气体。[44] Y. D. van Nieuwkerk、J. Schmiedmayer 和 F. Essler，“分裂的一维玻色气体中的约瑟夫森振荡”，*Scipost Phys.* **10**（2021 090, 2010 11214）arXiv：。凝聚态物理：量子气体。[45] M. J. Steel、M. K. Olsen、L. I. Plimak、P. D. Drummond、S. M. Tan、M. J. Collett、D. F. Walls 和 R. Graham，“因禁的玻色-爱因斯坦凝聚体中的动力学量子噪声”，*Phys. Rev. A* **58**（1998年）4824–4835，arXiv：cond-mat/9807349 [cond-mat.soft]。[46] A. Sinatra、C. Lobo 和 Y. Castin，“含时玻色-爱因斯坦凝聚气体的经典场方法”，*Phys. Rev. Lett.* **87**（2001年）210404，arXiv：cond-mat/0101210 [cond-mat.soft]。[47] C. Bodet、J. Est`eve、M. K. Oberthaler 和 T. Gasenzer，“双模玻色气体：超越经典压缩”，

Phys.（）arXiv：。

Rev. A **81** 2010 063605, 1002 2504 [凝聚态物理：量子气体。

[48] D. X. Horv´ath、I. Lovas、M. Kormos、G. Tak´acs 和 G. Zar´and，“量子正弦-戈登模型中的非平衡时间演化与再定相”，*Phys. Rev. A* **100**（2019 013613, 1809 06789）arXiv：。凝聚态物理：量子气体。[49] D. Sz´asz-Schagrin、I. Lovas 和 G. Tak´acs，“正弦-戈登模型中的非平衡时间演化”，*Phys. Rev. B* **109**（2024年）014308，arXiv：2309.03596 [cond-mat.stat-mech]。[50] M. Olshanii，“外部限制下的原子散射与不可穿透玻色子气体”，*Phys. Rev. Lett.* **81**（1998年）938–941，arXiv：cond-mat/9804130 [cond-mat]。[51] D. S. Shlyapnikov、D. M. Petrov 和 G. V. Gangardt，“低维囚禁气体”，*J. Phys. IV France* **116**（2004 5 44, 0409230）– arXiv：cond-mat/cond-mat.stat-mech。[52] M. A. Cazalilla，“一维冷原子气体的玻色化”，*Journal of Physics B Atomic Molecular Physics* **37**（2004 1 47, 0307033）S–S arXiv：cond-mat/cond-mat.mes-hall。[53] M. A. Cazalilla、R. Citro、T. Giamarchi、E. Orignac 和 M. Rigol，“一维玻色子：从凝聚态系统到超冷气体”，*Rev. Mod. Phys.* **83**（2011年）1405–1466，arXiv：1101.5337 [cond-mat.str-el]。[54] A. Polkovnikov，“动力学的量子修正”

相互作用玻色子：超越截断维格纳近似”，*Phys. Rev. A* **68** (2003) 053604，arXiv:cond-mat/0303628 [凝聚态物理：量子气体]. [55] A. Polkovnikov，“量子动力学的相空间表示”，*Ann. Phys.* **325** (2010) 1790–1852，arXiv:0905.3384 [凝聚态物理：量子气体].[56] T. Rakovszky、M. Mesty´an、M. Collura、M. Kormos 和 G. Tak´acs，“伊辛场论中淬火的哈密顿量截断方法”，*Nucl. Phys. B* **911**(2016) 805–845，arXiv:1607.01068 [凝聚态物理：量子气体]。[57] G. Delfino，“具有量子猝灭前的可积动力学的量子淬火”，*J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 402001，arXiv:1405.6553 [凝聚态物理：量子气体]。[58] G. Delfino 和 J. Viti，“关于近临界系统中量子淬火的理论”，*J. Phys. A: Math. Theor.* **50** 2017 084004, 1608 07812 arXiv:。[凝聚态物理：量子气体 。[59] B. Bertini、D. Schuricht 和 F. H. L. Essler，“正弦-戈登模型中的量子淬火”，

J. Stat. Mech. Theor. () arXiv:。

Exp. **2014** 2014 10035, 1405 4813 [凝聚态物理：量子气体 。

[60] A. Cort´es Cubero 和 D. Schuricht，“正弦-戈登模型吸引区中的量子淬火”，*J. Stat. Mech. Theor. Exp.* **10** 2017 103106, 1707 09218 arXiv:。[凝聚态物理：量子气体 。[61] M. Tajik、B. Rauer、T. Schweigler、F. Cataldini、J. Sabino、F. S. Møller、S.-C. Ji、I. E. Mazets 和 J. Schmiedmayer，“在原子芯片上设计任意一维势”，*Optics Express* **27** (2019年) 33474，arXiv:1908.01563 [凝聚态物理：量子气体]。[62] S. Ghoshal 和 A. Zamolodchikov，“二维可积量子场论中的边界S矩阵与边界态”，*Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994) 3841–3885，arXiv:hep-th/9306002 [hep-th]。[63] Z. Bajnok、L. Palla 和 G. Tak´acs，“具有诺伊曼边界条件的正弦-戈登模型中的边界态与有限尺寸效应”，*Nucl. Phys. B* **614** (2001) 405–448，arXiv:hep-th/0106069 [hep-th]。

附录 A：模型参数汇总

在本附录中，我们总结了模型的所有参数。准确区分独立变化的输入参数，并确定系统的所有物理特性，这一点非常重要。

实验的输入参数（可直接给定或调节）：

- 原子质量 m （对于 ^{87}Rb， $m = 86.90918 \cdot 1.660539 \cdot 10^{-27} = 1.44316 \cdot 10^{-25}$kg），
- 一维相互作用强度 $g_{1D} \approx 2\hbar\omega_\perp a_s$（对于 ^{87}Rb， $a_s = 5.24$ nm；对于所考虑的实验装置， $\omega_\perp = 2\pi \cdot 1500$Hz），
- 原子总数 N （通常在 750 至 4500 之间）及其不确定度σ_N （如果已知），
- 纵向囚禁势 $\omega_{||}$ （对于所考虑的实验装置，若无另行说明，则为 $\omega_\perp = 2\pi \cdot 12$Hz），
- 约瑟夫森耦合 $J = \tilde{J}/(2\pi\hbar)$,
- 初始总相对相位 φ_0^r 及其标准差 $\sigma_{\varphi_0^r}$,
- 温度 T (分裂过程之前，实验凝聚体的温度为 18 nK；然而，正如第 IIIB 1 节所述，相对自由度必须更冷，因此我们将温度设为 0)。

这些输入参数决定了物理系统，并且可以独立调整。根据这些参数，我们可以计算许多与本研究相关的其他物理量，例如

- 凝聚体的长度 L,
- 1中点处的 D 密度 ($z = 0$)： n_0,
- 中点处的声速： c_0,
- 中点处的卢廷格参数： K_0,
- 化学势， μ,
- 约瑟夫森频率， ω_J。

确定这些参数的关系式为

$$
\begin{aligned}
L &= \left(\frac{6g_{1D}N}{m\omega_{||}^2}\right)^{1/3}, \\
n_0 &= \frac{3^{2/3}}{2^{7/3}}\left(\frac{m\omega_{||}^2N^2}{g_{1D}}\right)^{1/3}, \\
c_0 &= \frac{3^{1/3}}{2^{7/6}}\left(\frac{g_{1D}N\omega_{||}}{m}\right)^{1/3}, \\
K_0 &= \pi\hbar\frac{3^{1/3}}{2^{7/6}}\left(\frac{N\omega_{||}}{mg_{1D}^2}\right)^{1/3}, \\
\mu &= \left(\frac{3^2}{2^7}g_{1D}^2N^2\omega_{||}^2m\right)^{1/3}, \\
\omega_J &= 2\pi\left(\frac{3^2\tilde{J}^3N^2g_{1D}^2\omega_{||}^2m}{2^4\pi^3\hbar^3}\right)^{1/6}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

以下关系也很方便:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{TF}}^2 &= \frac{2\mu}{m\omega_{||}^2}, \\
n_0 &= \frac{\mu}{g_{1D}}, \\
N &= \frac{4}{3}n_0R_{\mathrm{TF}}, \\
\mu &= \left(\frac{3}{4}g_{1D}N\sqrt{\frac{1}{2}m\omega_{||}^2}\right)^{2/3}, \\
m &= \frac{\pi\hbar n_0}{K_s^0c_0}, \\
N_s &= \left\lfloor\frac{3^{2/3}}{2^{5/6}}\left(\frac{mg_{1D}^2N^2}{\omega_{||}\hbar^3}\right)^{1/3}\right\rfloor, \\
g &= 2\pi\tilde{J}\frac{2^{3/2}}{\omega_{||}} \\
g_{1D} &= \frac{\pi\hbar c_0}{K_0}.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

晶格参数的选取依据为

$$
\begin{aligned}
N_s &= \left\lfloor\frac{Lmc_0}{\hbar}\right\rfloor, \\
a &= \frac{L}{N_s},
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

因此晶格常数满足

$$
a \approx \frac{\hbar}{mc_0}. \tag{A.4}
$$