arXiv:2512.13968v1 [math.RT] 16 Dec 2025

Khovanov 海森堡范畴的半单子范畴

Sam K. Miller

Abstract. 我们证明了 Khovanov 海森堡范畴的一个半单充满子范畴的存在性，该子范畴保留了完整范畴中对象的同构数据。这给出了一个非交换张量三角几何实例：某个幺半三角范畴的 Balmer 谱满足张量积性质，但其中包含并非双侧的单侧厚张量理想，且其标准支撑簇无法对单侧厚 $\otimes$理想进行分类。

Introduction

在全文中， $\mathcal{K}$ 表示一个本质小的幺半三角范畴。也就是说， $\mathcal{K}$ 是一个带有幺半结构的三角范畴，该幺半结构在每个变量上都是正合的，但我们不必假设 $\mathcal{K}$ 是对称的。作为开篇引例，我们将从一个非交换张量三角几何定理开始。

定理。 [NVY22b，定理 4.1。1] 设 $\mathcal{K}$ 是一个本质小的幺半三角范畴。那么，的每个素厚 $\otimes$理想都是完全素的 $\mathcal{K}$当且仅当 张量积性质 对 $\mathcal{K}$成立，即对所有 x， $y \in \mathcal{K}$，

$$\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) = \operatorname{supp}(x \otimes y).$$

此外，若 $\mathcal{K}$ 是右 *duo*，即所有右厚$\otimes$-理想都是双侧的，则这些等价条件成立。 ([NVY22b，定理 3.2。1])

这种所谓的支撑理论中的张量积性质，近来已成为一个备受关注的问题。我们此前在 [Mil25] 中证明，完全素谱 $\operatorname{Spc}^{cp}(\mathcal{K})$ 对于满足张量积性质的 $\mathcal{K}$ 支撑理论具有普适性，即使 $\operatorname{Spc}(\mathcal{K}) = \emptyset$。在上同调方面，Bergh–Plavnik–Witherspoon 在 [BPW25] 中证明，对于任意有限张量范畴 $\mathcal{C}$，上同调支撑簇 $\operatorname{Proj}(\operatorname{Ext}^{\bullet}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}))$ 满足张量积性质，当且仅当不可分解周期对象的每一对都满足该性质。他们猜想，若 $\mathcal{C}$ 是编织的，则张量积性质成立，并通过若干实例验证了这一猜想。Nakano–Vashaw–Yakimov 提出了一个更强的猜想，从而蕴含了他们的猜想；该猜想在 [NVY25]中有详细阐述。作者提出的一项预测是，对于任意有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 及其稳定模范畴 $\mathcal{K}$ =stab($\mathcal{C}$)，其上同调支撑簇与非交换 Balmer 谱是同一对象。

非交换 Balmer 谱通常不具有函子性，这可能使实际的显式计算变得困难。另一方面，完全

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18M05、18M30、18G80、18F70。
Key words and phrases. 海森堡范畴、Weyl代数、非交换张量三角几何、幺半范畴、张量积性质。

素谱具有函子性 [Mil25], 因此，如果已知给定的幺半三角范畴 $\mathcal{K}$ 中的每个素理想都是完全素理想，就能有更多工具可供使用。例如，我们此前推广了 Balmer 的一个结果 [Bal18]：给定一个幺半三角范畴之间的保守函子 $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$，其在完全素谱上诱导的映射 $F^*\colon \mathrm{Spc}^{cp}(\mathcal{L}) \to \mathrm{Spc}^{cp}(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{L}$ 为双侧 duo 且 $\mathcal{K}$ 为刚性时是满射。鉴于双侧性似乎是必要的假设，理解这一性质便很有意义。一个自然的问题是：

问题。 *NVY22b* [NVY22b，定理 4.21] 的逆命题是否 $\mathcal{K}$成立？ $\mathcal{K}$ 也就是说，如果 $\mathcal{K}$ 具有张量积性质，那么 $\mathcal{K}$ 它是左或右二元性吗？

在本文中，我们给出了一个例子，表明答案是**否**，这也在意料之中。尽管不应将环论作为张量三角几何的动机性例子，但存在大量非交换环，其所有素理想都是完全素理想，却具有并非双侧理想的单侧理想，例如矩阵环。对此，我们指出，Solberg–Vashaw–Witherspoon 最近发起了一项计划，旨在理解自内射代数的双模范畴的非交换张量三角几何 [SVW25]；由于双模可以视为同态的范畴化，我们预计这一框架可能会产生更多此类行为的例子。

进入图示世界。我们的例子源于一个张量三角几何似乎尚未涉足的领域：图示范畴。我们考察定义在环 $\mathbb{F}$ 上的海森堡范畴 $\mathcal{H}eis_k(\delta)$，该范畴最初由 Khovanov [Kho14] 为 $k=-1$ 和 $\delta=0$ 构造，随后由 Licata–Savage [LS13, LS15]，量子化，并由 Brundan 和 Mackaay–Savage [Bru18, MS18] 扩展到任意中心荷。Khovanov 猜想，$\mathcal{H}eis := \mathcal{H}eis_{-1}(0)$ 的 Karoubi 包络（幂等完备化）将海森堡代数范畴化；这一点已由 Brundan–Webster–Savage [BSW23] 证明。海森堡范畴还与 Kac-Moody 范畴化 [BSW20, BSW25]，密切相关，并且在中心荷为 0 时恢复仿射定向 Brauer 范畴 [BCNR17, Bru18]。此外，$\mathcal{H}eis := \mathcal{H}eis_{-1}(0)$ 将单变量上的整数 Weyl 代数范畴化A_1；我们在命题 2.3 中指出了这一点。

目前，图示范畴的张量三角几何似乎尚未得到充分探索。需要提醒读者的是，在张量范畴的语境中，术语 张量理想 与张量三角范畴语境中的术语 厚张量理想 含义不同。在幺半范畴的语境中，还有一个较弱的概念，即 厚理想；人们已对 Deligne 范畴（它们是图示范畴）中的这类理想进行了计算，参见例如[CH17、Cou18]。

海森堡范畴似乎难以直接用于张量三角几何，因为它并非自然地带有三角结构，具有高度非阿贝尔性，且态射空间很大。为解决这一问题，我们去除了该范畴几乎所有有趣的性质，转而证明存在一个充满半单子范畴 $\mathcal{H}eis_s \subset \mathcal{H}eis$ ，它编码了对象上的同构数据；这就是定理 2.2 和命题 2.3。

定理 A。 存在一个充实半单幺半子范畴 $\mathcal{H}eis_s \subseteq \mathcal{H}eis$，使得海森堡同构 $\downarrow\otimes\uparrow \cong \uparrow\otimes\downarrow \oplus \mathbb{1}$ 在 $\mathcal{H}eis_s$中成立。简单对象恰好由 $\uparrow^{\otimes i}\otimes\downarrow^{\otimes j}$ 对非负整数 $i,\ j \geq 0$ 给出。

我们有一个同构 $K_0(\mathcal{H}eis_s) \cong A_1$，并且若 $\mathbb{F}$ 是特征为 *0* 的域， $K_0(\mathcal{H}eis_s) \cong K_0(\mathcal{H}eis)$。特别地，给定两个对象 X、$Y \in \mathcal{H}eis$， $X \cong Y$属于 $\mathcal{H}eis$ 当且仅当 $X \cong Y$ 属于 $\mathcal{H}eis_s$。

证明的计算相当繁琐，因此我们将范围缩小到满足特定性质的态射 $\mathcal{H}eis$ ，并证明由此得到的子范畴定义良好。我们指出，判断一个 $\mathbb{Z}_+$ 环是否存在半单范畴化，一般而言相当困难；相关讨论见 [EGNO15，注 4.10。8] 目前尚不清楚海森堡范畴在其他中心荷或量子化下是否存在这样的半单子范畴，但我们预计并非如此。

由此，我们通过明确计算范畴 $\mathcal{K} := D^b(\mathcal{H}eis_s)$的所有左、右及双侧厚 $\otimes$-理想，推导出它满足张量积性质，但不是双侧 duo；这就是定理 2.5。

定理 B。令 $\mathcal{K}:= D^b(\mathcal{H}eis_s)$。 $\mathcal{K}$有 *2* 个双侧厚 $\otimes$-理想，即0和 $\mathcal{K}$，而厚左 $\otimes$-理想为

$$\mathcal{K} \supset \langle \downarrow \rangle_l \supset \langle \downarrow \otimes \downarrow \rangle_l \supset \cdots \supset 0,$$

并且厚右 $\otimes$-理想由下式给出

$$\mathcal{K} \supset \langle \uparrow \rangle_r \supset \langle \uparrow \otimes \uparrow \rangle_r \supset \cdots \supset 0.$$

特别地，$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}) = \{*\}$，并且对所有非零的 $x \in \mathcal{K}$，$\mathrm{supp}(x) = \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$。因此，$\mathcal{K}$ 满足张量积性质，但不具有左或右二元性。

单侧厚 $\otimes$-理想构成全序集这一事实，带来了一个罕见的情形：单侧理想并非由非交换 Balmer 谱 Spc($\mathcal{K}$) 或上同调谱 $\mathrm{Spec}^h(\mathrm{End}^\bullet_{\mathcal{K}}(\mathbb{1}))$ 分类（这本来就在意料之中），而是由泛准支撑数据Sp($\mathcal{K}$分类；作为集合，它由所有真厚单侧 $\otimes$-理想组成。我们将在注 2.6中讨论这一点。

本文结构如下：第 1 节回顾预备知识，第 2 节证明主要结果。

致谢。 感谢 Jon Brundan 提供意见并允许我们使用他的 TikZ 代码。我们还感谢 Math.SE 用户 Qiaochu Yuan 在 Math.StackExchange 上回答了一个相关问题 [Yua] ，该问题为本文带来了灵感。作者获得了部分 AMS-Simons 旅行资助。

1. Preliminaries

1.1. **非交换张量三角几何**。 我们将快速概述非交换张量三角几何的要点。Nakano–Vashaw–Yakimov 在 [NVY22a], 中阐述了这一理论，[Bal05] 将 Balmer 奠基性论文中的思想 [Bal10]推广到了非对称张量积的情形。关于张量三角几何的概述，请参见

回顾， $\mathcal{K}$表示一个本质小单体三角范畴。 $\mathcal{K}$ 的厚子范畴 是 $\mathcal{K}$ 中对直和项封闭的满三角子范畴。若厚子范畴 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ 此外还满足：对于所有 $x \in \mathcal{I}$和 $y \in \mathcal{K}$，$x \otimes y \in \mathcal{K}$ 和 $y \otimes x \in \mathcal{K}$，则称 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ 为厚 $\otimes$-理想 。给定一个元素 $x \in \mathcal{K}$，我们用 $\langle x \rangle$ （分别用$\langle x \rangle_l$、 $\langle x \rangle_r$）表示由 x生成的厚 $\otimes$-理想（分别为厚左 $\otimes$-理想、厚右 $\otimes$-理想）。

若 $\mathcal{K}$ 的所有厚左 $\otimes$-理想（分别为厚右$\otimes$-理想）都是双侧的，则称 $\mathcal{K}$ 为左（分别为右）双侧 *duo* 。若 $\mathcal{K}$既是左 duo 又是右 duo，则称其为双侧 duo。

定义 1.1. [NVY22a] 若真厚 $\otimes$-理想 $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ 满足：对于所有厚$\otimes$-理想 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$，若 $\mathcal{K}, \mathcal{I} \otimes \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}$，则 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ 或 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}$，则称其为素理想。等价地，若对于所有 $x, y \in \mathcal{K}, x \otimes \mathcal{K} \otimes y \subseteq \mathcal{P}$，只要 $x \in \mathcal{K}$ 或 $y \in \mathcal{K}$，就称 $\mathcal{P}$ 为素理想。最后，若对于所有 $x, y \in \mathcal{K}, x \otimes y \in \mathcal{P}$，只要 $x \in \mathcal{P}$ 或 $y \in \mathcal{P}$，则称 $\mathcal{P}$ 为完全素。若 $\mathcal{K}$ 是对称的（或编织的），则每个素理想都是完全素的。

非交换 *Balmer* 谱Spc($\mathcal{K}$) 是本质小单体三角范畴 $\mathcal{K}$ 的素厚 $\otimes$-理想的集合，并赋予由对象的支撑所定义的拓扑。

$$\operatorname{supp}(x) := \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{K}) \mid x \notin \mathcal{P}\}$$

作为闭子集的基。我们注意到，与张量三角几何中的情形一样，(Spc($\mathcal{K}$)，supp) 恢复了半素[1] 厚 $\otimes$-理想的 $\mathcal{K}$格，详见[DM25，定理 A] 。

1.2. **海森堡范畴**。 现在，我们回顾 [Kho14] 中定义的海森堡范畴的构造，以及本文所需的图示，这里遵循 [Bru18，注 1.5(2)]中的简化表述。我们描述 $\mathcal{H}eis :=\mathcal{H}eis_{-1}(0)$ 采用 *loc. cit.* 中的记号。我们所说的“海森堡范畴”是指范畴 $\mathcal{H}eis$，而不是其 Karoubi 包络，这与 [Kho14]中的做法相同。

定义 1.2. 固定一个交换环 $\mathbb{F}$。我们定义由两个对象 $\uparrow$ 和 $\downarrow$生成的加性、 $\mathbb{F}$-线性严格单体范畴 $\mathcal{H}eis$ 。也就是说，$\mathcal{H}eis$ 中的一个对象是张量积的有限直和 $X = X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$，其中 X 是一个有限词，且每个字符都是 $X_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$。 X_i 的值是其定向，其中每个X_i 的定向均为向上或向下。

$\mathcal{H}eis$的态射由 $\uparrow$和 $\downarrow$上的恒等态射生成，

$$\mathrm{id}_{\uparrow} = \uparrow, \qquad \mathrm{id}_{\downarrow} = \downarrow,$$

以及态射 $s : \uparrow \otimes \uparrow \to \uparrow \otimes \uparrow$, $c : \mathbb{1} \to \downarrow \otimes \uparrow$, $d : \uparrow \otimes \downarrow \to \mathbb{1}$, $c' : \mathbb{1} \to \uparrow \otimes \downarrow$, 和$d' : \downarrow \otimes \uparrow \to \mathbb{1}$,

$$s = \times, \qquad c = \cup, \qquad d = \cap, \qquad c' = \cup, \qquad d' = \cap.$$

这些图表记录了这些态射满足的关系。两个态射的张量积，即水平复合 $a \otimes b$, 绘制为左侧的 a b，而垂直复合 $a \circ b$ 则绘制为 a b 上方（在此操作有意义时）。我们将态射 $t : \uparrow \otimes \downarrow \to \downarrow \otimes \uparrow$和 $t' : \downarrow \otimes \uparrow \to \uparrow \otimes \downarrow$定义为

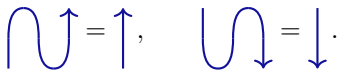
$$t = \times := \cup\cap, \qquad t' = \times := \cap\cup.$$

然后我们施加以下退化海克关系，

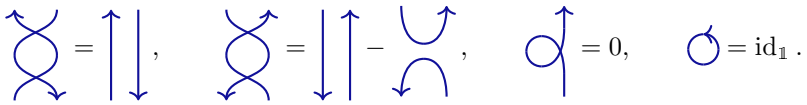
$$\bigcirc = \uparrow\uparrow, \qquad \times = \times,$$

[1]，即素理想的交。如果 $\mathcal{K}$ 是刚性的，则所有厚 $\otimes$-理想都是半素的。

以及右伴随关系，[2]

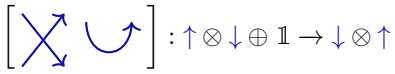


最后，我们断言还有四个额外的关系：

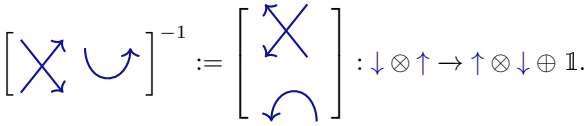


命题 1.3。海森堡关系 $\uparrow\otimes\downarrow\oplus\mathbb{1}\cong\downarrow\otimes\uparrow$ 成立。

证明。事实上，该同构由下式给出

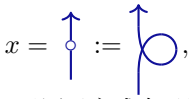


其逆为

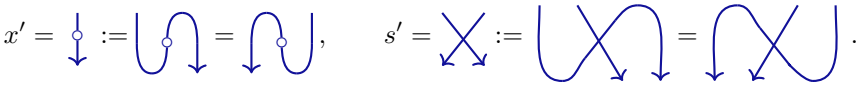


□

我们定义



并将 x 在垂直复合下的 $x^{\circ n}$ 次幂 n 以图示方式表示为在点上标注重数 n。对于 x 和 s，我们有以下对应物，分别记作 x'：$\downarrow\to\downarrow$ 和 s'：$\downarrow\otimes\downarrow\to\downarrow\otimes\downarrow$，其表达式分别为



我们引入一些后文将会用到的术语。为求简便，在下述定义中，“连通”一词不考虑弦交叉。

定义 1.4。如果 S 是图中的一条连通弦（其端点位于边界上，或为一个闭环），则称 S 为：

- 若 S 的两个端点都位于上边界，则称其为杯（例如，c，c'）；
- 若 S 的两个端点都位于下边界，则称其为帽（例如，d，d'）；
- 若 S 的端点分别位于下边界和上边界，则称其为桥（例如，$\mathrm{id}_{\uparrow}$，x）；
- 若没有端点，则称其为气泡（例如，$d\circ c'$, $c\circ d'=\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$）。

任意连通弦必属于以下四种类型之一。没有端点的图是张量单位 $\mathbb{1}$ 的自同态，此时每条弦都是一个气泡。气泡移动的演算，即泡越过线，并非平凡，它可由其他关系推出；但我们省略对它的回顾，因为本文不会用到。

对于杯、帽和气泡，可以将其定向称为顺时针或逆时针；对于桥，则可以将其定向称为向上

[2]此外，还有左伴随关系，它们可以通过将图水平翻转得到。

或向下。对于带有端点的弦，其定向可以完全根据端点方向读出：桥的定向与其两个端点的定向一致，而顺时针定向的杯或帽，其向上定向的端点位于向下定向的端点左侧。

类似地，弦上有两种可能的x，x'：顺时针卷曲（例如）和逆时针卷曲。任何包含左卷曲子图的图都必然由关系化为零。带有 n个点的弦可以闭合成带有 n 个点的顺时针或逆时针定向圆环。然而，带有一个点的逆时针环，即八字形图，是零态射（因此任何包含此类环的图也为零）；带有两个或更多点的逆时针环则可以表示为顺时针环乘积的线性组合，详情参见 [Kho14]。

给定一个未约化的图的复合 $g \circ f$ 以及$g \circ f$中的一条连续股线 S，分析构成S的 g中的 S和 f的子股线将十分重要。我们分别将 g 中 S 和 f 的连通子股线集合记为 $S \cap g$和 $S \cap f$（注意，$S \cap g$ 或 $S \cap f$不一定连通）。这种记法取决于 $g \circ f$ 的绘制方式（例如，应用右伴随关系可能会消去杯或帽）；我们假设 $g \circ f$ 是未约化的。

1.3. **标准基**。现在我们回顾任意有限字 $\mathbb{F}$-基的同态集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}eis}(X, Y)$，其中字符属于 X, Y，并且 $\uparrow$和 $\downarrow$，遵循 [Kho14]。一个（X, Y）-匹配是一个双射

$$\{i \mid X_i = \uparrow\} \sqcup \{j \mid Y_j = \downarrow\} \xrightarrow{\cong} \{i \mid X_i = \downarrow\} \sqcup \{j \mid Y_j = \uparrow\}.$$

如果不存在这样的双射，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}eis}(X, Y) = 0$。

（X, Y）-匹配的一个约化提升 是一个表示态射 $X \to Y$ 的图，使得

- 图中每条弦的端点都在该匹配下配对；
- 任意两条弦至多相交一次；
- 不存在自相交点（例如，没有点/环）；
- 不存在三重交点；
- 不存在气泡。

令 $B_0(X, Y)$ 为一个集合，其中包含每个 (X, Y)-匹配对应的一个约化提升。注意，两个约化提升的垂直复合未必是约化提升。对于 $B_0(X, Y)$ 中的每个元素，在每条弦上选取一个指定点，使其远离交叉和临界点，并靠近该弦的输出端点。对每个指定点，赋予一个带有非负整数的点。然后，从 $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 中选取一个有限子多重集，并对其中每个元素，在图最右侧且没有交点的区域画一个顺时针泡，其上带有标记相应非负整数的点。所得图的集合记作 $B(X, Y)$。若 n 表示 X 中 $\uparrow$的总数与 Y 中 $\downarrow$的总数，那么 $B(X, Y)$ 由 (X, Y)-匹配（共有 n 个！）、一个描述每条弦上点数的 n 个非负整数序列，以及另一个有限非负整数序列所参数化；后一个序列依次列出无点、带一个点等顺时针定向泡的数量。特别地，$B_0(X, Y)$ 是 $B(X, Y)$ 的子集，其中的元素仅由 (X, Y)-匹配参数化。

命题 1.5。[Kho14，命题 5] 对于任意序列 X，Y，集合 $B(X, Y)$构成 $\mathbb{F}$-模 $\mathbb{F}$的同态集$_{\mathcal{H}eis}(X, Y)$的 基。

2. The main results

我们首先描述 $\mathcal{H}eis$ 的半单子范畴。为此，我们描述对于所有序列 X， Y， $B_0(X, Y)$ 的一个子集，该子集在垂直复合和水平复合下相容。我们先记录一些观察结果。

引理 2.1. 设 $f \in B(X,Y)$ 和 $g \in B(Y,Z)$ 是可复合图，并设S 是 $g \circ f$中的一条弦。

(a) 若 S 是非自交的顺时针（分别为逆时针）定向的杯、帽或气泡，则在 f 或 g 中存在一个子串 $S' \subset S$，它是具有相同定向的杯、帽或气泡。*(b)* 若 S 是一座桥，则存在唯一的子串 $S' \in S \cap f$ 和 $S'' \in S \cap g$，它们也都是桥。此外，S' 和 S'' 与S具有相同的定向。

证明。对于 (a)，设 S 是 $g \circ f$中的一个杯。若 $S \subset g$，则无需证明，因此假设 S 部分包含于 f中，此时 $S \cap g$ 由两座桥以及可能的一些帽组成，而 $S \cap f$ 至少由一个杯组成。设 $g\colon\ Y \to Z$中有 $Y = Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_m$， $Z = Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_n$ 中有两座桥，它们分别连接Y_i、 $Z_{i'}$ 和 Y_j、 $Z_{j'}$。不失一般性，设 $i < j$，则$i' < j'$，因为 S 是不相交的。此外，我们有定向匹配 $Y_i = Z_{i'}$和 $Y_j = Z_{j'}$， $Y_i \neq Y_j$ 彼此相反，而 Y_i （或其他任意字母）的定向选择决定了 S的定向。

现在，由于 S 不相交，必然存在一个杯子子串 S'，它位于 $S \cap f$中，连接某些节点 Y_k 和 Y_l，且 $k \leq i$与 $l > i$。事实上，如果连接 Y_i 中 f 的杯子在更右侧还有另一个出口节点，那么令 $k = i$即可。否则，最终 S 必然会越过 Y_i 向右（因为 S 必须到达 Y_j），并且必须在 f中这样做；否则， S 会在出口节点为 Y_i 和$Z_{i'}$的桥处与自身相交。沿着 S 上远离 Y_i的方向移动，取它第一次这样做的时刻：设这发生在 S' 中的一个杯子处，该杯子穿过 Y_k，其$k < i$ 和 Y_l 带有 $l > i$。根据奇偶性论证， Y_k 与 Y_i具有相同的定向；又由于 $k < l$，我们得出结论： S' 作为 f 中的一个杯子，与 S 具有相同的定向。对于 S 为帽的情形，类似的论证同样成立。

最后，对于 S 一个气泡，若 $S \subseteq f$ 或 $S \subseteq g$，则无事可证，因此设 $S \cap f \neq \emptyset$ 且 $S \cap g \neq \emptyset$。假设 $g\colon\ Y \to Z$ 如前，取最小的 $i \in \mathbb{N}$，使得 S 经过 Y_i。注意， Y_i 的定向决定了S的定向；于是， $S \cap f$ 中经过 Y_i 的对应杯，或 $S \cap g$中的杯，其定向都与 S相同。因此，(a)得证。

对于 (b)， f 和 g 中对应的桥分别是 S中最先出现和最后出现的极大子串。显然，它们的定向必须与S相同；而且它们是唯一的，因为所有其他子串都无法到达 f 和 g的外边界，因此必定是杯和帽。□

Set $A_1 := \mathbb{Z}[x, \partial]/\langle \partial x - x\partial - 1 \rangle$, the *integral Weyl algebra on one variable.*

定理 2.2。 存在一个充实半单幺半子范畴 $\mathcal{H}eis_s \subseteq \mathcal{H}eis$， 定义如下。 $\mathcal{H}eis_s$ 的对象是 $\mathcal{H}$ 的对象，而态射空间同态集(X, Y) 具有一个 $\mathbb{F}$-基，该基由 $B_0(X, Y) \subset B(X, Y)$中满足以下条件的图组成：

(a) 没有点或气泡。也就是说，该图属于 $B_0(X, Y)$；

(b) 不存在顺时针定向的杯或帽（例如， c'、d 均不允许）。特别地，所有杯和帽都对应一对 $\uparrow$、$\downarrow$，其中 $\downarrow$ 位于 $\uparrow$ 的左侧；*(c)* 桥只有在定向相反时才可以交叉（例如， s、s' 均不允许，而 t、t' 则允许）。

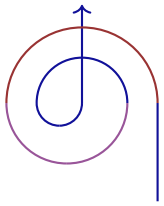
海森堡同构 $\downarrow\otimes\uparrow \cong \uparrow\otimes\downarrow\oplus \mathbb{1}$ 在 $\mathcal{H}eis_s$中成立。此外，简单对象恰好由 $\uparrow^{\otimes i}\otimes\downarrow^{\otimes j}$ 给出，其中 i、$j \geq 0$为非负整数。最后，我们有一个同构 $K_0(\mathcal{H}eis_s) \cong A_1$。

证明。我们必须验证 $\mathcal{H}eis_s$ 在垂直复合和水平复合下封闭。水平复合是显然的。对于垂直复合，我们验证 (a)-(c)；特别要验证，如果两个图 g，f 复合后违反某个条件，则该复合等价于零态射。

对于条件 (a)，设 $f \in B_0(X,Y)$ 和 $g \in B_0(Y,Z)$ 是 $\mathcal{H}eis_s$ 中满足 (a)-(c) 的可复合态射。如果 $g\circ f$ 含有一个非自相交泡 S，那么由于 f 和 g 都没有气泡，$S\cap f$ 和 $S\cap G$ 必由杯和帽组成，因此根据引理 2.1(a)， S 必为逆时针定向，故可将其消去。现在，假设 $g\circ f$ 含有一条自交弦 S，它与自身相交任意多次。那么存在一个连通子串 $S'\subseteq S$，它恰好与自身相交一次且包含一个闭环；它在局部上是一个卷曲（注意，如果 S 是一个泡，那么交点的选择不一定唯一；否则则是唯一的）。例如，在下面的例子中，选择蓝色的子弦。由于 f 和 g 都没有自交点，S' 不可能完全包含在 f 或 g中。不失一般性，假设 S' 中的交点发生在f中，那么 $S'\cap g$至少含有一个杯；又由于 $S'\cap g\subseteq g$，该杯必为逆时针定向。因此， S' 是一个逆时针定向的环，故$g\circ f = 0$。因此，化简后 $g\circ f$ 中不存在点或自相交泡。

对于条件 (b)，令 $f \in B_0(X,\ Y)$ 和 $g \in B_0(Y,\ Z)$ 与之前相同，并假设S 中的 $g\circ f$ 是一个杯。若 $S\in g$，则无需证明任何内容，因此假设 $S\cap f\neq 0$。若 S 不自相交，则由 引理 2.1(a) 可知 S 的定向为逆时针，因为 f 和 g 中的所有帽和杯都是如此。否则，假设 S 自交。特别地， S 包含一个卷曲；根据条件 (a)（我们已证明该条件在复合下封闭），这个自交是一个逆时针卷曲，并且 $g\circ f = 0$。帽的情形可类似地证明。

对于条件 (c)，设 $f \in B_0(X,Y)$ 和 $g \in B_0(Y,Z)$ 如前所述，并设 S 是 f 中的一个杯。若 S 属于 $g\circ f$ 中的一个气泡，则无须证明，因为若该气泡不自相交，就可以将其移除；若其自交，则由 (a) 和 (b) 可得 $g\circ f = 0$。若 S 与两条不相交桥相遇，则在 $g\circ f$ 中，包含 S 的弦仍是一个杯；若 S 与两条交叉一次的桥相遇（这是它们可能交叉的最大次数，因为 $g\in B_0(Y,Z)$），则 S 属于 $g\circ f$ 中的一个左环，因此 $g\circ f = 0$。最后，若 S 在一个端点处与一个帽相遇，但不是一个，则我们声称，无论 S 在另一端点处与什么相遇， $g\circ f = 0$ 都成立。事实上，令 S 在 g 中与帽 S' 相遇。不失一般性地假设 S 和 S' 在一个 $\downarrow$ 端点相遇，另一种情况可类似得出。在这种情况下， S 和 S' 的另一个 $\uparrow$端点都位于 S 与 S' 相遇的 $\downarrow$ 右侧，因为 S 和 S' 都是逆时针定向的。下方给出了一个例子，其中 S 是棕色子串， S' 是紫色子串。



根据 S 和 S' 内部剩余可用节点的奇偶性，必定还有另一条弦与 S 和 S' 在 $g\circ f$ 中相连，并与 S 和 S' 之一交叉，如上例所示。事实上，包含 S 和 S' 的弦要么终止于 S 上方，要么终止于 S' 下方，要么不含任何端点；在后一种情况下，该弦会再次与 S 相遇。在上述任一情况下，该交叉都会形成一个逆时针卷曲，因此 $g\circ f=0$。

上文的类似论证也可用于 S 中的一个帽 g。排除上述情形后，我们得出：若存在交叉桥 B，B' 中 $g\circ f$ 满足 $g\circ f$ 非零，则 $B\cap g$、$B\cap f$ 以及 $B'\cap g$ 中 $B'\cap f$ 对应的弦也都必须是桥。然而，根据引理 2.1(b)，桥 $S\in f$ 不能属于复合 $g\circ f$ 中与其定向相反的桥。$g\circ f$ 的交叉桥必定在 g 或 f 中交叉（也可能两者中都交叉；此时可利用局部关系将其解绕），且它们的定向必须相反，因此 $g\circ f$ 中的交叉定向也相反。由此我们证明了 (c) 在垂直复合下成立，并得出 $\mathcal{H}eis_s$ 确实是 $\mathcal{H}eis$ 的幺半子范畴。

海森堡同构成立，因为该同构的所有分量都存在于 $\mathcal{H}eis_s$ 中。设 $X=\uparrow^{\otimes i}\otimes\downarrow^{\otimes j}$，其中 i、$j\geq 0$ 为非负整数。我们证明 $\mathrm{End}(X)\cong k$，这由条件 (b) 和 (c) 得出。由于 X 不含形如 $\downarrow\otimes\uparrow$ 的子序列，根据 (b)，X 的任意自同态中都不存在帽或杯；归纳论证表明，根据 (c)，属于 $\mathcal{H}eis_s$ 的 $B_0(X,X)$ 中唯一的非平凡元素是恒等态射。类似的论证表明，对于任意其他的 $Y=\uparrow^{\otimes i'}\otimes\downarrow^{\otimes j'}$，若 $(i,j)\neq(i',j')$，则 $\mathrm{Hom}(X,Y)=0$。反过来，海森堡同构表明，$\mathcal{H}eis_s$ 中任何非 $\uparrow^{\otimes i}\otimes\downarrow^{\otimes j}$ 形式的对象都可分解，因此简单对象恰为 $\uparrow^{\otimes i}\otimes\downarrow^{\otimes j}$ 形式的对象，证毕。

同构 $A_1\cong K_0(\mathcal{H}eis_s)$ 现在可通过赋值 $x\mapsto[\uparrow]$ 和 $\partial\mapsto[\downarrow]$ 得出。由于海森堡关系 $[\downarrow][\uparrow]=[\uparrow][\downarrow]+1$ 成立，该赋值是良定义的；根据 $\mathcal{H}eis_s$ 的简单对象描述，它还是一个同构，因为 A_1 作为阿贝尔群有一个由形如 $x^i\partial^j$ 的元素构成的 $\mathbb{Z}$-基，其中 i，$j\geq 0$。□

关于定理 2.2，我们不必对环 $\mathbb{F}$ 作任何假设。当 $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的域时，半单子范畴 $\mathcal{H}eis_s$ 包含了海森堡范畴 $\mathcal{H}eis$ 的全部同构数据。

命题 2.3。假设 $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的域。令 X、$Y\in\mathcal{H}eis$。那么 $K_0(\mathcal{H}eis_s)\cong K_0(\mathcal{H}eis)\cong A_1$，且 $X\cong Y\in\mathcal{H}eis$ 当且仅当 $X\cong Y\in\mathcal{H}eis_s$。

证明。包含 $\mathcal{H}eis_s\subseteq\mathcal{H}eis$ 在格罗滕迪克群上诱导一个同态

$$\phi\colon K_0(\mathcal{H}eis_s)\to K_0(\mathcal{H}eis)\subseteq K_0(\mathrm{Kar}(\mathcal{H}eis)).$$

若 $X \cong Y \in \mathcal{H}eis_s$，则显然 $X \cong Y \in \mathcal{H}eis$ 也成立，因此 ϕ 是满射。另一方面，[BSW23，定理 1.1] 也断言，由 $x \mapsto [\uparrow]$ 和 $\partial \mapsto [\downarrow]$诱导的同构 $A_1 \cong K_0(\mathcal{H}eis)$。事实上，通过自然包含将 $K_0(\mathcal{H}eis)$视为 $K_0(\mathrm{Kar}(\mathcal{H}eis))$ 的子环后，它与 Heisenberg 环中由元素 h_1^+、e_1^-生成的子环同构，这些元素分别对应于 $\uparrow$、$\downarrow$，其表示为 $\mathbb{Z}[h_1^+, e_1^-]/\langle h_1^+ e_1^- - e_1^- h_1^+ - 1\rangle$，见 [BSW25，注 3.2]。这个同构与 ϕ相容，因此 ϕ 是一个同构。现在，若 $X \cong Y \in \mathcal{H}eis$，则 $[X] = [Y] \in K_0(\mathcal{H}eis)$，因此 $[X] = [Y] \in K_0(\mathcal{H}eis_s)$。由于 $\mathcal{H}eis_s$ 是半单的且满足 Krull–Schmidt 性质，我们得出 $X \cong Y$ 属于 $\mathcal{H}eis_s$，证毕。□

注记2.4。我们预计，在其他中心荷 $\mathcal{H}eis_k(\delta)$ 或非零参数 k 下，不存在编码同构类数据的半单子范畴 δ。当 $|k| > 1$ 时，海森堡关系要求使用带点的杯与帽（见[Bru18，1.4，1.5]），而我们的论证依赖于逆时针卷曲是零态射这一事实；这种性质仅见于 $\delta = 0$。

范畴 $\mathcal{H}eis$ 具有刚性，其中 $X^* = \overline{X}$，这里 $\overline{X}$表示将 X 反向书写并反转方向（例如 $\uparrow\otimes\downarrow\otimes\downarrow = \uparrow\otimes\uparrow\otimes\downarrow$）。在这种情况下，求值与余求值态射通过旋转相应的图 $180°$，再用嵌套的杯与帽连接相应端点而得到。另一方面，由于缺少顺时针杯与帽，$\mathcal{H}eis_s$ 并不具有刚性；仅有形如 $\uparrow^{\otimes i}$ 的不可分解对象具有左对偶，而具有右对偶的对象则为 $\downarrow^{\otimes j}$。然而，任意 X 仍是 $X \otimes X \otimes X$ 的直和项，无论基环 $\mathbb{F}$为何。

由 $\mathcal{H}eis_s$，我们得到一个非 duo 单体三角范畴的例子，它仍满足张量积性质，从而验证了[NVY22b定理 4.21]的逆命题并不成立。

定理 2.5。设 $\mathcal{K} := D^b(\mathcal{H}eis_s)$。$\mathcal{K}$ 有 *2* 个双侧厚 $\otimes$-理想：0 和 $\mathcal{K}$；而厚左 $\otimes$-理想为

$$\mathcal{K} \supset \langle\downarrow\rangle_l \supset \langle\downarrow\otimes\downarrow\rangle_l \supset \cdots \supset 0,$$

厚右 $\otimes$-理想为

$$\mathcal{K} \supset \langle\uparrow\rangle_r \supset \langle\uparrow\otimes\uparrow\rangle_r \supset \cdots \supset 0.$$

特别地，$\mathrm{Spc}(\mathcal{K}) = \{*\}$，且对所有非零的 $x \in \mathcal{K}$，$\mathrm{supp}(x) = \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$。因此，$\mathcal{K}$ 满足张量积性质，但不具有左或右二元性。

证明。我们首先证明只有 2 个双侧厚 $\otimes$-理想，此时可得 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K}) = \{*\}$。设 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ 是一个厚 $\otimes$-理想。由 定理 2.2可知，$\mathcal{K}$ 中的每个对象都是分裂链复形，因此作为链复形同构于其同调。因此，只需考虑 $\mathcal{K}$中的不可分解对象，也就是视为集中在单个次数上的链复形的模。

若 $\mathcal{I}$ 非零，则 $X \in \mathcal{I}$，其中 X 是一个长度至少为 1 的单词。若 X 以 $\uparrow$开头，则 $\downarrow\otimes X \in \mathcal{I}$，因此通过海森堡同构有 $X_1 \in \mathcal{I}$，其中 X_1 表示去掉首字符后的 X。若 X 以 $\downarrow$结尾，则$X \otimes \uparrow \in \mathcal{I}$，因此通过海森堡同构有 $X^1 \in \mathcal{I}$，其中 X^1 表示去掉末字符后的 X。若上述两种情况均不发生，则 X 以 $\downarrow$ 开头并以 $\uparrow$结尾，因此包含子序列 $\downarrow\otimes\uparrow$。因此，可以从 X中删除该子序列，使 $l(X)$ 减少 2。在这三种情况下，我们都推导出了存在一个 $Y \in \mathcal{I}$，满足 $l(Y) < l(X)$。由归纳法可知 $\mathbb{1} \in \mathcal{I}$，从而如所需有 $\mathcal{I} = \mathcal{K}$。因此 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K})^\vee = *$，所以 $\mathrm{Spc}(\mathcal{K})$ 也 $= *$。

由于对于每个非零 $x \in \mathcal{K}$，$\mathrm{supp}(x) = \mathrm{Spc}(\mathcal{K})$，$\mathcal{K}$ 显然满足张量积性质，即对于所有 x，$y \in \mathcal{K}$，$\mathrm{supp}(x \otimes y) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y)$。

现在我们考虑左理想和右理想。我们讨论右理想的情形；左理想的情形可通过对任意右理想 $\mathcal{I}$取其"对偶"左理想 $\mathcal{I}$ 得出。首先注意，对于任意厚右 $\otimes$-理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ 和正整数 $i > 0$，$\uparrow^{\otimes i} \notin \mathcal{I}$ 当且仅当对所有 $0 \leq j \leq i$都有 $\uparrow^{\otimes j} \notin \mathcal{I}$。这是一个例行验证：由此，我们得到理想的严格包含 $\langle\uparrow^{\otimes i}\rangle_r \supset \langle\uparrow^{\otimes(i+1)}\rangle_r$。其次，如果某个正 i满足 $\uparrow^{\otimes i} \otimes \downarrow^{\otimes j} \in \mathcal{I}$，那么 $\uparrow^{\otimes i} \in \mathcal{I}$。事实上，我们有 $\uparrow^{\otimes i} \otimes \downarrow^{\otimes j} \otimes \uparrow \in \mathcal{I}$，而海森堡同构意味着 $\uparrow^{\otimes i}\downarrow^{\otimes(j-1)} \in \mathcal{I}$，该结论由归纳法得出。由此可知，每个非零右理想都具有形式 $\langle\uparrow^{\otimes i}\rangle_r$，其中某个 $i \geq 0$满足 $\mathcal{I} = \langle\uparrow^{\otimes i}\rangle_r$，而 i 是使 $\uparrow^{\otimes i} \in \mathcal{I}$成立的最小整数。结果得证。□

注2.6。对于有限群概形 $\mathcal{G}$ 的坐标代数的稳定模范畴 stab(Coh($\mathcal{G}$)，De Deyn 和作者证明了，厚左、右 $\otimes$-理想由 Coh($\mathcal{G}$) [DM25，推论 710]，的上同调支撑簇分类 [NP23，问题 111]。这一论证大多是形式性的，并依赖于 Huang–Vashaw 提出的交叉积范畴相关结果 [HV25]。这一分类成立的原因高度依赖具体背景，不应期待它们在一般情形下也成立。事实上，Spc($\mathcal{K}$) 和 Spec^h(端同态$\mathcal{H}eis_s(\mathbb{1})$) 都是单点集，但 $\mathcal{K}$ 有可数多个单侧厚 $\otimes$-理想。

Nakano–Vashaw–Yakimov 给出了一个判据 [NVY22a, Theorem 7.3.1]，用于在附加的标准假设下判定支撑数据何时能够分类右厚 $\otimes$-理想[3]。将 $\mathcal{K} := D^b(\mathcal{H}eis_s)$ 的右厚 $\otimes$-理想格记为 $\mathcal{F}$。由于 $\mathcal{F}$ 是全序的，它是一个空间框架，因此根据斯通对偶，pt($\mathcal{F}$) 是普适的开支撑数据（见 [DM25, Proposition 2.2]，；这里我们将 pt($\mathcal{F}$) 与 $\mathcal{F}$的交素元集合等同），而 pt($\mathcal{F}$) 的开子集与 $\mathcal{K}$的右厚 $\otimes$-理想一一对应。具体而言，pt($\mathcal{F}$) 作为集合可与$\mathcal{F} \setminus \{\mathcal{K}\}$ 等同，其开集为

$$\mathrm{supp}(\uparrow^{\otimes n}) = \{\langle\uparrow^{m}\rangle_r \mid m > n\} \cup \{0\}.$$

相应地，对右厚 $\otimes$-理想（按照 Nakano–Vashaw–Yakimov 的意义）的支撑数据进行分类的是 Hochster 对偶 pt($\mathcal{F}$)$^\vee$；注意到 $\mathcal{F}$ 实际上是一个相干框架，其中每个元素都是紧的。

最后，pt($\mathcal{F}$)$^\vee$ 与 [Mil25 之定理 7.2] 中描述的泛准支撑数据 Sp($\mathcal{K}$) 重合。这里，Sp($\mathcal{K}$)作为集合，是所有真右厚 $\otimes$-理想的集合。这再次是一个罕见的情形：存在一个典范包含 pt($\mathcal{F}$)$^\nu \hookrightarrow$Sp($\mathcal{K}$)，其中 pt($\mathcal{F}$)$^\nu$ 表示伪 Hochster 对偶，即 pt($\mathcal{F}$)，其对象的支集为该拓扑提供一个闭基。对于一般的幺半三角范畴 $\mathcal{K}$，当且仅当 $\mathcal{F}$ 的每个元素都是交素时，这是一个同胚；而这又当且仅当 $\mathcal{F}$ 是全序的。事实上，如果 $\mathcal{F}$ 不是全序的，那么对于任意满足既不成立 $x \leq y$ 也不成立 $y \leq x$的 x、$y \in \mathcal{F}$，$x \wedge y$ 就不是交素。

References

[Bal05] P. Balmer. 张量三角范畴中素理想的谱。

J. Reine , :– 。

~~*Angew. Math.* 588~~ 149 168, 2005

[3]对于左厚 $\otimes$-理想，也可以进行类似的论证。

[Bal10] P. Balmer. 张量三角几何。载于 *Proceedings ICM Hyderabad* 2, , , 第 .卷[2010
Bal18] P. Balmer. 关于张量三角函子所关联谱映射的满射性。 *Bull. London Math. Soc*, 50(3):487–495, 2018. [BCNR17] J. Brundan、J. Comes、D. Nash 和 A. Reynolds。仿射定向 Brauer 范畴及其分圆商的基定理。 *Quantum Topol.*, 8 112, 2017 1 75( ): – .[BPW25] P. Bergh、J. Y. Plavnik 和 S. Witherspoon。有限张量范畴的支撑簇：张量积性质。 *Ann. Rep. Theory*, 2, 2025. [Bru18] J. Brundan。关于海森堡范畴的定义。 *Algebr. Comb.*, 1 544, 2018 4 523( ): – .[BSW20] J. Brundan、A. Savage 和 B. Webster。海森堡范畴化与 Kac-Moody 范畴化。*Selecta Math. (N.S.)*, 26(5):论文编号 74, 62, 2020. [BSW23] J. Brundan、A. Savage 和 B. Webster。退化海森堡范畴及其 Grothendieck 环。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 56(5):1517–1563, 2023. [BSW25] J. Brundan、A. Savage 和 B. Webster。海森堡范畴化与 Kac-Moody 范畴化新进展。arxiv:2508.14378, 2025. [CH17] J. Comes 和 T. Heidersdorf。Deligne 范畴 Rep(O_δ) 中的厚理想。 *J. Algebra*, 480 237 265, 2017 : – .[Cou18] K. Coulembier。张量理想、Deligne 范畴与不变量理论。 *Selecta Math.* , ( ): – . [*(N.S.)* 24 5 4659 4710, 2018
DM25] T. De Deyn 和 S. K. Miller。重新审视非交换张量三角几何中理想的分类。arXiv:2510.23767, 2025. [EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik. *Tensor Categories (Mathematical Surveys and Monographs)* 2015 。美国数学会，. [HV25] H. Huang 和 K. B. Vashaw。幺半三角范畴上的群作用与 Balmer 谱。 *Doc. Math*, 30(5):1055–1083, 2025. [Kho14] M. Khovanov。海森堡代数与图示演算。 *Fund. Math.*, 225(1):169–210, 2014. [LS13] A. Licata 和 A. Savage。Hecke 代数、有限一般线性群与海森堡范畴化。 *Quantum Topol.*, 4(2):125–185, 2013. [LS15] A. Licata 和 A. Savage。勘误：Hecke 代数、有限一般线性群与海森堡范畴化。 *Quantum Topol.*, 6(1):183, 2015. [Mil25] S. K. Miller。非交换张量三角几何中的函子性与张量积性质。arXiv:2505.01899, 2025.[MS18] M. Mackaay 和 A. Savage。退化分圆 Hecke 代数与高层海森堡范畴化。 *J. Algebra*, 505:150–193, 2018. [NP23] C. Negron 和 J. Pevtsova。稳定范畴的超曲面支撑与素理想谱。 *Ann. K-Theory*, 8(1):25–79, 2023. [NVY22a] D. K. Nakano、K. B. Vashaw 和 M. T. Yakimov。非交换张量三角几何。 *Amer. J. Math.*, 144(6):1681–1724, 2022. [NVY22b] D. K. Nakano、K. B. Vashaw 和 M. T. Yakimov。非交换张量三角几何与支撑映射的张量积性质。 *Int. Math. Res. Not.*, 2022 22 17766 17796, 2022 ( ): – .[NVY25] D. K. Nakano、K. B. Vashaw 和 M. T. Yakimov。幺半三角范畴的同调谱。arXiv:2506.19946, 2025.[SVW25] Ø. Solberg、K. B. Vashaw 和 S. Witherspoon。非交换张量三角几何：模、双模与幺幂 Hopf 代数。arxiv:2511.10531, 2025.[Yua] Q. Yuan。双侧主理想与单边主理想之别的反例。Mathematics Stack Exchange。 https://math.stackexchange.com/q/5099035 (版本：2025年9月29日)。

S. K. Miller, Department of Mathematics, University of Georgia, Athens GA 30602, United States of America*Email address*: sam.miller@uga.edu