arXiv:2512.14007v1 [math.CV] 16 Dec 2025

超复分析与奇点几何

´AURELIO MENEGON

Abstract. 我们建立了一种称为 *perplex anal-ysis*的实解析框架，在此框架中，复数、分裂复数和对偶数作为一个由二维交换实代数组成的四参数族的成员出现。在这一统一设定下，我们通过 *generalized Cauchy–Riemann structure*定义可微性，将复几何的若干特征拓展到更广泛的实解析语境中。理论的分析与几何适用范围由两项主要结果展示：针对 perplex 解析函数的Lojasiewicz 梯度不等式，为临界行为提供定量控制；以及针对非退化代数的 Milnor–Lˆe 型纤维化定理，用以描述奇点的局部拓扑。该框架揭示了复几何与双曲几何之间的连续过渡，而对偶边界则呈现出与零因子相关的新型无穷小现象。这些结果在统一的分析形式体系中，将广义复几何、超复分析和奇点理论联系起来。

Introduction

复数理论为数学提供了最强大的理论框架之一。除了其代数结构之外，全纯函数还具有一种解析刚性，这构成了几何与拓扑中诸多深刻结果的基础。一个经典例子是 Milnor 纤维化定理，它描述了复超曲面奇点的局部拓扑，并构成现代奇点理论诸多内容的解析基础。

相比之下，实解析情形缺乏一种自然的全纯性概念，无法据此构建可与之媲美的理论。尽管实解析映射的奇点在几何学和应用领域中发挥着核心作用，但现有的解析工具远不如复数情形中的工具具有刚性。弥合这一差距——在实平面上发展一种保留足够结构、能够支撑奇点理论的解析形式体系——长期以来一直是一个未解决的问题。

本文旨在引入一种朝这一方向推进的实解析框架。我们构造了一个由四个参数组成的二维交换实代数族，称为***perplex*** 代数，它

Date：2025年12月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 32S05、32A30；次要分类 32S55、58A07。

在同一结构中统一了三种经典二次模型：复数、分裂复数（双曲数）和对偶数。这一统一的代数框架提供了共同基础，使得解析概念能够在所有这些情形中并行定义和研究。在此框架下，我们提出了一种自然的可微性概念，由广义柯西–黎曼方程支配，将经典的全纯性概念拓展到更广阔的实解析语境。由此得到的*perplex* 解析函数 保留了全纯映射的关键特征，同时允许以受控方式退化至对偶极限。

这一解析结构自然导向几何应用。我们证明了两个主要结果，以展示这一框架的强大之处。第一个结果，即定理 4.9，建立了 perplex 解析函数的 Łojasiewicz 梯度不等式，为临界行为提供定量控制，并确保几何论证所需的解析正则性。第二个结果，即定理5.2，是针对非退化 perplex 代数的 Milnor–Lê 型纤维化定理，描述了在这一背景下组织奇点拓扑的局部纤维化结构。综上，这些结果表明，代数结构与解析控制相结合，足以恢复复奇点理论中发挥作用的大部分几何机制。

我们的方法与超复函数理论 （HFT）密切相关。超复函数理论研究固定实二次代数上的分析，例如复数、双曲数或对偶数。HFT 将每种情形分别处理，而本研究则将它们整合到一个参数族中，其中这些模型表现为特殊点。这种连续参数族的视角使得我们能够在椭圆、双曲和退化区域内统一证明解析结果，从而揭示复分析与分裂复分析如何作为同一解析几何的不同面向出现，以及退化（对偶数）边界处如何涌现新现象。

本文结构安排如下。第 2 节介绍 perplex 代数的代数结构，并分析其参数空间、单位以及场型、双曲型和退化型分类。第 3 节阐述微分学，并建立广义柯西–黎曼方程。第 4 节证明适用于 perplex解析函数的 Łojasiewicz 不等式。第 5 节建立 Milnor–Lˆe 纤维化定理。最后，第 6 节探讨分析、几何与奇点理论交汇处的研究前景和开放问题，着重说明 perplex框架如何在统一的解析形式体系中将这些主题融为一体。

1. Perplex algebras

我们介绍*perplex*数的代数框架。这是一类二维、交换、结合、含幺的 $\mathbb{R}$代数，由 $\mathbb{R}^2$ 上的双线性乘积构成，该乘积由两组三元参数 $a,\ b \in \mathbb{R}^3$确定。我们精确刻画了此类乘积何时构成 perplex 代数，

描述其参数空间，并记录其基本结构特征：单位、范数、共轭和定量估计。全文中， $\mathbb{R}^2$中的向量均为列向量，且默认采用标准基。

构造。 给定 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $b = (b_1, b_2, b_3)$，其中 $\mathbb{R}^3$，定义 $\mathbb{R}^2$ 上的双线性乘积 $*$，如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1x_1y_1 + a_2(x_1y_2 + x_2y_1) + a_3x_2y_2 \\ b_1x_1y_1 + b_2(x_1y_2 + x_2y_1) + b_3x_2y_2 \end{bmatrix}.$$

该乘积是双线性的、可交换的，并且对加法满足分配律；标量乘法采用 $\mathbb{R}^2$ 中的标准定义。

命题 1.1。 交换 $\mathbb{R}$-代数 $(\mathbb{R}^2, +, *)$ 是结合的、有单位元的，并且在两个坐标轴上都有单位，当且仅当

$$\textit{(i)}\quad a_1a_3 - a_2^2 \neq 0, \qquad \textit{(ii)}\quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$
$$\textit{(iii)}\quad a_2b_2 - a_3b_1 = 0, \qquad \textit{(iv)}\quad a_1a_3 - a_2^2 + a_2b_3 - a_3b_2 = 0;$$

或 $a_1 = b_2 \neq 0$ 和 $a_2 = b_1 = 0$。

定义 1.2。 当*(i)–(iv)* 成立时，我们称 $(\mathbb{R}^2, +, *)$ 为一个***perplex*** 代数，并将其记为$\mathbb{P}_{a,b}$。其元素称为***perplex***数。

参数空间。 令 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 为满足命题 a, b 的点对的半代数轨迹 1.1。沿着*(iii)–(iv)* 中的两个等式的雅可比矩阵秩恒为 2；因此 $\mathcal{P}$；故 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^6$中的光滑 4 维子流形。

单位元与可逆元。 乘法单位元为

$$\mathbb{1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{bmatrix}.$$

用 $\mathbb{P}_{a,b}^{\times}$ 表示可逆元群。对于 $\alpha \in \mathbb{R}^{\times}$ 和 $x, y \in \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$，有 $(\alpha x)^{-1} = \alpha^{-1}x^{-1}$ 和 $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$。直接计算可得，$x \notin \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$ 当且仅当

$$x_1^2(a_1b_2 - a_2b_1) + x_1x_2(a_1b_3 - a_3b_1) + x_2^2(a_2b_3 - a_3b_2) = 0,$$

$\mathbb{R}^2$中的一条实二次曲线。

幂与幂零元。对于 $x \in \mathbb{P}_{a,b}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $x^n := x * \cdots * x$（n次）。结合律蕴含二项式恒等式

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k * y^{n-k}.$$

命题 1.3. $\mathbb{P}_{a,b}$ 没有非零幂零元，当且仅当

$$\Delta = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_3 - a_3b_2) \neq 0.$$

证明。考虑左乘算子 $L_x(y) := x * y$。如果 x 是幂零的，那么 L_x 在二维空间上也幂零，因此 $L_x^2 =$为 0，这迫使 $x^2 = 0$。将 $x = (x_1, x_2)$ 写成这种形式，便得到关于 (x_1, x_2) 的两个二次方程。该方程组有非平凡解，当且仅当这两个二次多项式

$$q_a(t) = a_1 + 2a_2t + a_3t^2, \qquad q_b(t) = b_1 + 2b_2t + b_3t^2$$

有公共根。当且仅当它们的结式为零时，这种情况才会发生，即 $\Delta = 0$。□

例 1.4. 考虑 $a = (1, 0, -1)$ 和 $b = (0, 1, 2)$。这一对满足 (i)–(iv)。然而，在相应的代数中$\mathbb{P}_{a,b}$ 我们计算得

$$(1, -1)^2 = (0, 0).$$

因此 $(1, -1)$ 是一个非零幂零元。事实上，在这种情况下，判别式等于 $\Delta = 0$，所以我们恰好处于“域”区域与“非域”区域的边界上。

perplex 代数的分类

前面的讨论表明，判别式

$$\Delta = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_3 - a_3b_2)$$

决定 perplex 代数 $\mathbb{P}_{a,b}$的基本结构。现在我们证明，每个 perplex 代数都同构于三种经典二维实代数之一：复数 $\mathbb{C}$、双曲数 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$或对偶数 $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。

命题 1.5 （分类）。设 $\mathbb{P}_{a,b}$ 是一个 *perplex* 代数。则：

(i) 如果 $\Delta < 0$，则 $\mathbb{P}_{a,b} \cong \mathbb{C}$。在此情形下，我们称 $\mathbb{P}_{a,b}$ 为一个域型 perplex 代数。*(ii)* 如果 $\Delta > 0$，则 $\mathbb{P}_{a,b} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$。在此情形下，我们称 $\mathbb{P}_{a,b}$ 为一个双曲型 perplex 代数。*(iii)* 如果 $\Delta = 0$，则 $\mathbb{P}_{a,b} \cong \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。在此情形下，我们称 $\mathbb{P}_{a,b}$ 为一个退化 perplex 代数。

证明。考虑二次型

$$q_a(t) = a_1 + 2a_2t + a_3t^2, \qquad q_b(t) = b_1 + 2b_2t + b_3t^2.$$

如命题 1.3中所述，q_a 和 q_b 的公共根决定了 $\mathbb{P}_{a,b}$ 中的幂零方向，而判别式

$$\Delta = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_3 - a_3b_2)$$

恰好是这两个二次多项式的结式。

令 $e_1 = \binom{1}{0}$ 和 $e_2 = \binom{0}{1}$ 表示 $\mathbb{R}^2$的标准基，将其视为$\mathbb{P}_{a,b}$的元素。根据乘法的定义，左乘算子满足

$$L_{e_1} = A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad L_{e_2} = B := \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

命题 1.1 的条件 (ii) 给出 $\det A = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$，因此 e_1 是一个单位元。于是存在 $e_1^{-1} \in \mathbb{P}_{a,\,b}$，使得 $L_{e_1^{-1}} = A^{-1}$。定义

$$j := e_2 * e_1^{-1}.$$

Then

$$L_j = L_{e_2} \circ L_{e_1^{-1}} = B\,A^{-1}.$$

映射 $x \mapsto L_x$ 是单射的（因为 $L_x(1) = x$），因此 j 由此性质唯一确定。j 的最小多项式为

$$\chi_j(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(L_j)\,\lambda + \det(L_j),$$

直接计算可得，其判别式为

$$\operatorname{Disc}(\chi_j) := (\operatorname{tr} L_j)^2 - 4 \det L_j \;=\; (\det A)^{-2}\,\Delta.$$

– 如果 $\Delta < 0$，那么χ_j 在 $\mathbb{R}$上不可约，因此由 j 生成的子代数 $\mathbb{R}[j] \subset \mathbb{P}_{a,b}$ 是 $\mathbb{R}$上的二维除代数。根据 $\mathbb{R}$的二次扩张的唯一性，这就将$\mathbb{P}_{a,b}$ 与 $\mathbb{C}$对应起来。

– 如果 $\Delta > 0$，那么 χ_j 有两个不同的实根。相应的特征向量给出两个正交幂等元，从而产生分解 $\mathbb{P}_{a,\,b} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$，即双曲数。

– 如果 $\Delta = 0$，那么 χ_j 有一个重实根，因此 j 有一个非平凡的若尔当块。这会产生一个幂零元，并表明 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ 与对偶数同构。

因此，每个 perplex 代数都恰好同构于三种经典二次模型之一：复数、双曲数或对偶数。□

定义 1.6。如果一个 perplex 代数是域型 perplex 或双曲型 perplex，则称其为非退化 。

困惑范数。 L_x 在标准基下的矩阵为

$$[L_x] = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 & b_2 x_1 + b_3 x_2 \end{pmatrix}.$$

定义 困惑范数为

$$N(x) := \det L_x = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,x_1^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\,x_1 x_2 - (a_1 a_3 - a_2^2)\,x_2^2.$$

那么， N是一个二次型，对于所有的 x, y，都有 $N(x * y) = N(x)\,N(y)$，因此 $x \in \mathbb{P}_{a\ ,b}^{\times}$ 当且仅当 $N(x) \neq 0$。从几何上看， $|N(x)|$ 是 L_x 的面积畸变，而 $\operatorname{sign}(N(x))$ 记录了方向改变。

这个二次型自然地与$\mathbb{P}_{a,b}$上的一个对合相关，下面我们来描述它。

双曲共轭。定义 $x \in \mathbb{P}_{a,\,b}$ 的困惑共轭为

$$\widetilde{x} := \operatorname{adj}(L_x)\,\mathbb{1}.$$

直接计算可得显式线性公式

$$\widetilde{x} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{bmatrix} (b_2^2 + a_2 b_1)\, x_1 + (b_2 b_3 + a_3 b_1)\, x_2 \\ -(a_1 b_1 + b_1 b_2)\, x_1 - (b_2^2 + a_2 b_1)\, x_2 \end{bmatrix}.$$

命题 1.7。 对于每个 $x \in \mathbb{P}_{a,b}$ 都有 $x * \widetilde{x} = N(x)\, \mathbb{1}$。

证明。 使用 $L_x \operatorname{adj}(L_x) = \det(L_x)\, I_2$。 □

困惑范数与双曲共轭之间的相互作用为逆元提供了函数控制。为量化这种控制，接下来我们将比较 $\mathbb{P}_{a,b}$ 中的乘法与 $\mathbb{R}^2$上的标准范数。

定量界。 设 $\|x\|_m := \max\{|x_1|, |x_2|\}$，并令 $\|\cdot\|$ 为欧几里得范数。

命题 1.8。 存在

$$K := 4 \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, |b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

使得对所有 $x,y \in \mathbb{P}_{a,\ b}$,

$$\|x * y\|_m \le K\, \|x\|_m\, \|y\|_m \qquad and \qquad \|x * y\| \le \sqrt{2}\, K\, \|x\|\, \|y\|.$$

引理 1.9。 设 $\theta > 0$ 和 $N \ge 2$。假设对于给定的 ***perplex*** 代数$\mathbb{P}_{a,\ b}$，齐次映射

$$F_k : \mathbb{P}_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}, \qquad F_k(t) := t^k \qquad (k = N-1, N),$$

满足 $F_k(\hat{}t) \neq 0$ 对所有 $\hat{}t \in S_m := \{t \in \mathbb{P}_{a,b} : \ \|t\|_m = 1\}$成立。对$t \in \mathbb{P}_{a,\ b} \setminus \{0\}$，定义

$$Q_N(t) = \frac{\|t^N\|_m^\theta}{\|t^{N-1}\|_m}.$$

则 $\lim_{t \to 0} Q_N(t) = +\infty$。

证明。 将 $t = r\hat{}t$ 写成 $r = \|t\|_m$ 且 $\hat{}t \in S_m$。 由齐次性,

$$\|t^k\|_m = \|F_k(r\hat{t})\|_m = r^k\, \|F_k(\hat{t})\|_m.$$

该假设意味着 $\|F_k(\hat{}t)\|_m$ 在紧集 S_m上连续且处处非零，因此存在常数 $0 < m_k \le M_k < \infty$ 使得

$$m_k \le \|F_k(\hat{t})\|_m \le M_k, \qquad k = N-1, N.$$

Thus

$$Q_N(t) \ \ge \ \frac{(m_N\, r^N)^\theta}{M_{N-1}\, r^{N-1}} = \frac{m_N^\theta}{M_{N-1}}\, r^{\theta N - (N-1)}.$$

如果 $N \ge \frac{1}{1-\theta}$那么 $\theta N - (N-1) < 0$，因此右侧在 $r \to 0$时趋于 $+\infty$。 □

方向与零因子。令 $Z := \{z \in \mathbb{P}_{a,b} \setminus \{0\} : N(z) = 0\}$ 为零因子锥，并令 $[Z] \subset \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ 为相应的方向集。若序列 $(u_n) \subset \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$ 满足 $u_n \to 0$，且单位代表元 $\hat{u}_n := u_n/\|u_n\|$，则称其与 $[Z]$ 正向分离，如果存在 $c > 0$，使得对所有 n都有 $|N(\hat{u}_n)| \geq c$。

命题 1.10。 若$(u_n) \subset \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$ 且 $u_n \to 0$ 与$[Z]$正分离，则存在 $M > 0$ 使得

$$\|u_n^{-1}\| \leq \frac{M}{\|u_n\|} \qquad \text{for all } n.$$

证明。将 $u_n = \|u_n\|\hat{u}_n$，其中 $\hat{u}_n \in \mathbb{S}^1$。于是 $\|u_n^{-1}\| = \|u_n\|^{-1}\|\hat{u}_n^{-1}\|$。根据定义，正分离意味着对于所有 n，都有 $|N(\hat{u}_n)| = \left|\det L_{\hat{u}_n}\right| \geq c > 0$。映射 $v \mapsto \mathrm{adj}(L_v)\,\mathbb{1}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上连续，因此在（紧）集 $\{\hat{u}_n\}$上有界：存在 $A > 0$使得 $\|\mathrm{adj}(L_{\hat{u}_n})\,\mathbb{1}\| \leq A$。利用

$$\hat{u}_n^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(L_{\hat{u}_n})\,\mathbb{1}}{\det L_{\hat{u}_n}},$$

我们得到 $\|\hat{u}_n^{-1}\| \leq A/c =: M_0$。因此

$$\|u_n^{-1}\| = \frac{\|\hat{u}_n^{-1}\|}{\|u_n\|} \leq \frac{M_0}{\|u_n\|},$$

这就证明了关于 $M := M_0$ 的断言。 □

推论 1.11. 在命题 *1.10*的假设下，存在$C > 0$ 使得

$$|(u_n)_i\,(u_n^{-1})_j| \leq C \qquad \text{for all } n \text{ and } i,j \in \{1,2\}.$$

我们用一个具体例子结束本节，展示经典双曲数如何纳入我们的框架，以及单位序列在趋近零因子方向时如何退化。

例（双曲数）。对于 $a = (1,\ 0,\ 1)$ 和 $b = (0,\ 1,\ 0)$，$\mathbb{P}_{a,\,b}$是双曲（分裂复）数的代数（参见 [11]，例如），其中

$$N(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad [Z] = \{[(1,1)],\,[(1,-1)]\}.$$

令 $x(t) = (t,\ t(1-t)),\ t > 0$。那么 $x(t) \to 0$ 且 $N(x(t)) = t^3(2-t) \neq 0$对于 $0 < t < 2$ 成立，但 $x_2(t)/x_1(t) \to 1$，因此方向趋近于 $[Z]$，并且，写作$y(t) = x(t)^{-1}$，可得 $x_1(t)\,y_1(t) = 1/(t(2-t)) \to \infty$ 当 $t \to 0^+$ 时。

2. Differentiability in perplex algebras

现在，我们在 perplex 代数的框架下发展微分学。我们的目标是将全纯函数理论的基本原理推广到这一更广泛的框架，同时凸显实数情形中出现的新解析现象。我们引入$\mathbb{P}_{a,b}$–可微性的概念，其定义依据是沿着与零因子保持距离的单位元方向取增量，并

确立这一框架下微积分的基本法则。我们证明，多项式映射是$\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，其导数符合预期公式。随后，我们推导出广义柯西–黎曼方程，该方程以实偏导数刻画可微性，并重新得到经典的复数情形和双曲情形。最后，我们将$\mathbb{P}_{a,b}$–导数与实微分联系起来，从而以直接类比全纯情形的方式，自然地描述 perplex 函数的临界点。

2.1. 导数。

设 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ 是上述的 perplex 代数，并设 $f:\mathbb{P}_{a,\,b}\to\mathbb{P}_{a,\,b}$ 是一个函数。

定义 2.1。 我们称 f <style id='6}>在 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微 于点 $x\in\mathbb{P}_{a,\,b}$如果存在 $L\in\mathbb{P}_{a,\,b}$ 使得，对于每个正分离序列（h_n）$\subset\mathbb{P}_{a,\,b}^{\times}$ （见第 1 节）收敛到原点，都有

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x+h_n)-f(x)\big)*h_n^{-1}=L,$$

并且，作为 x, L 的函数，在 x的某个邻域上连续。在这种情况下，我们称 L f 在 x 处的导数，并将其记为 $f'(x)$。如果 f 在每个 $x\in\mathbb{P}_{a,\,b}$处都是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微的，则称f 是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微的。

因此，$\mathbb{P}_{a,\,b}$–可微性通过考察沿着与零因子正分离的单位元方向的增量来定义，并额外要求所得导数依赖于基点且连续。

若不致产生歧义，我们就简称 f可微。

很容易验证，在这种情形下，通常的求导法则仍然成立。具体而言，我们有：

命题 2.2。 设 $f,g:\mathbb{P}_{a,\,b}\to\mathbb{P}_{a,\,b}$ 在 $x\in\mathbb{P}_{a,\,b}$处可微。设$c\in\mathbb{P}_{a,\,b}$ 且 $\alpha\in\mathbb{R}$。则：

(i) 和 $f+g$ 在 x 处可微，且

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)\,.$$

(ii) 乘积 $f*g$ 在 x 处可微，且

$$(f*g)'(x)=\big(f'(x)*g(x)\big)+\big(f(x)*g'(x)\big)\,.$$

(iii) 乘积 $c*f$ 在 x 处可微，且

$$(c*f)'(x)=c*f'(x)\,.$$

(iv) 数乘 αf 在 x处可微，并且

$$(\alpha f)'(x)=\alpha\,f'(x)\,.$$

由此立即得到：

推论 2.3. 令 $f \in \mathbb{P}_{a,b}[x]$ 为多项式函数

$$f(x) = a_n * x^n + \cdots + a_2 * x^2 + a_1 * x + a_0,$$

其中 $a_n \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。那么 f 可微，且

$$f'(x) = n\, a_n * x^{n-1} + \cdots + 2\, a_2 * x + a_1\,.$$

2.2. **广义柯西–黎曼方程**。设 $f : \mathbb{P}_{a,\ b} \to \mathbb{P}_{a,\ b}$ 是可微函数，并设

$$f(x_1, x_2) = \big(u(x_1, x_2),\, v(x_1, x_2)\big)$$

它的坐标表示为映射 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$。还假设 f 在通常的实数意义下可微，并用 u_{x_i} 和 v_{x_i} 表示相应的关于 x_i 的偏导数（$i = 1,\ 2$）。

命题 2.4。若 $f :\ \mathbb{P}_{a,\ b} \to \mathbb{P}_{a,\ b}$ 可微，则对每个 $x \in \mathbb{P}_{a,\ b}$，有：

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ v_{x_1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

这些公式将导数表示为一个向量的左乘，该向量由实偏导数组成，并为广义柯西–黎曼条件做准备。

证明。 取 $h_r = r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，它是 $\mathbb{P}_a$ 中的单位元，b。于是，根据定义 2.1，

$$f'(x) = \lim_{r \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + r) - f(x_1, x_2)}{r} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

证明（1）。恒等式（2）可类似地通过 $h_r = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得到。 □

因此，结合（1）和（2），我们得到：

推论 2.5。 若 $f : \mathbb{P}_{a,\ b} \to \mathbb{P}_{a,\ b}$ 可微，则

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ v_{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{bmatrix}.$$

定义 2.6。 我们将推论2.5 中的恒等式称为广义柯西–黎曼方程。

回顾定义 2.1，如果 f 是 $\mathbb{P}_{a,\ b}$-可微的，那么它的导数f' 连续。由命题 2.4 可立即得出：

推论 2.7。 如果 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微的，其中 $(a,b) \in \mathcal{P}$，那么 f 在通常的实数意义下可微。

备注 2.8。 在特殊情形下，$\mathbb{P}_{a,\,b} = \mathbb{C}$，推论2.5 中的广义柯西–黎曼方程恰好化为经典的柯西–黎曼方程

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \qquad u_{x_2} = -v_{x_1}.$$

因此，广义方程恢复了复分析中通常的全纯性条件。

例 2.9 (双曲情形)。 考虑 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ 参数为 $a = (1,\ 0,\ 1)$，以及 $b = (0,\ 1,\ 0)$。若 $f = (u,\ v)$ 是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$- 可微的，则推论 2.5 变为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ v_{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{bmatrix},$$

利用上述乘法规则，这等价于线性方程组

$$\begin{cases} u_{x_1} = v_{x_2}, \\ u_{x_2} = v_{x_1}. \end{cases}$$

目前的结果表明，$\mathbb{P}_{a,\,b}$–可微性蕴含广义柯西–黎曼方程。反过来，我们现在证明这一条件也充分，从而完整刻画 $\mathbb{P}_{a,\,b}$–可微性。

定理 2.10. 设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个 C^1 映射，且 $(a,b) \in \mathcal{P}$。则f 是 $\mathbb{P}_{a,b}$-可微的，当且仅当相应的广义柯西–黎曼方程成立。

证明。 假设 $f = (u, v)$ 是 C^1 且满足广义柯西–黎曼方程。对每个 x，定义连续函数

$$w(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} u_{x_1}(x) \\ v_{x_1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} u_{x_2}(x) \\ v_{x_2}(x) \end{bmatrix}.$$

步骤 *1*： $Df(x) = L_{w(x)}$ 作为线性映射 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$。 由于 f 是 C^1，其实微分 $Df(x)$ 满足

$$Df(x)\, e_i = \begin{bmatrix} u_{x_i}(x) \\ v_{x_i}(x) \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2,$$

其中 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 且 $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。根据 $w(x)$ 的定义，

$$\begin{bmatrix} u_{x_1} \\ v_{x_1} \end{bmatrix} = e_1 * w(x), \qquad \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{bmatrix} = e_2 * w(x).$$

由于 $*$ 是交换的， $L_{w(x)}(e_i) = w(x) * e_i = e_i * w(x)$，因此

$$Df(x)\, e_i = L_{w(x)}(e_i) \quad (i = 1, 2).$$

因此 $Df(x) = L_{w(x)}$。

步骤 2：沿正分离序列取极限。设 $(h_n) \subset \mathbb{P}_{a,\,b}^{\times}$，$b$ 是任意一个满足 $h_n \to 0$ 的正分离序列。作为一个实映射，

$$f(x+h_n) - f(x) = Df(x)\,h_n + r(h_n) = L_{w(x)}(h_n) + r(h_n),$$

其中，$r(h)$ 是一阶展开中的余项，满足

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0.$$

因此

$$\big(f(x+h_n)-f(x)\big)*h_n^{-1} = \big(L_{w(x)}h_n\big)*h_n^{-1} + r(h_n)*h_n^{-1} = w(x)+r(h_n)*h_n^{-1},$$

利用结合律以及 $L_{w(x)}h_n = w(x) * h_n$。

根据命题 1.8，存在 $C_* > 0$ 使得

$$\|r(h_n) * h_n^{-1}\| \;\le\; C_*\,\|r(h_n)\|\,\|h_n^{-1}\|.$$

设 $h_n = r_n u_n$，其中 $r_n \in \mathbb{R}^{\times}$ 且 $\|u_n\| = 1$。与 $[Z]$正分离意味着 $\|u_n^{-1}\| \le M$ 对某个 $M > 0$（见命题 1.10）。于是

$$\|h_n^{-1}\| = \frac{\|u_n^{-1}\|}{|r_n|} \le \frac{M}{\|h_n\|}.$$

因此，

$$\|r(h_n) * h_n^{-1}\| \le \frac{C_* M\,\|r(h_n)\|}{\|h_n\|} \to 0.$$

我们得出结论

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x+h_n) - f(x)\big) * h_n^{-1} = w(x),$$

与正分离序列 (h_n) 无关。由于 w 连续，f 在 x 处是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微的，且 $f'(x) = w(x)$。证明至此完成。□

例 2.11。复共轭映射

$$f(x_1, x_2) = (x_1,\, -x_2)$$

对于任意 $(a,\ b) \in \mathcal{P}$，都不是 $\mathbb{P}_{a,\,b}$-可微的，因为广义柯西–黎曼方程在每种情况下都不成立。

定理 2.10 的推论如下：

推论 2.12。如果 $f\colon \mathbb{P}_{a,\,b} \to \mathbb{P}_{a,\,b}$ 可微，并且对于某个开邻域 $U \subset \mathbb{P}_{a,\,b}$中的每个$x$ 都有 $f'(x) = 0$，那么 f 在 U上为常数。

推论 2.13. 设 $f\colon \mathbb{P}_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 为一个可微函数。当且仅当$f'(x) \in \mathbb{P}_{a,b} \setminus \mathbb{P}_{a,\,b}^{\times}$时，$x$ 是 f 的临界点（按通常意义，即作为映射 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$）。

证明. 回顾一下，$y \in \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$ 当且仅当其困惑范数 $N(y) \neq 0$，这也等价于 L_y 可逆，其中 L_y 表示由$y \in \mathbb{P}_{a,b}$给出的左乘。根据定理 2.10，若 f 是 $\mathbb{P}_{a,b}$-可微的，则其实微分满足

$$Df(x) = L_{f'(x)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

特别地，$Df(x)$ 可逆，当且仅当 $L_{f'(x)}$ 可逆。由于 L_y可逆，当且仅当 $y \in \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$，因此我们有：

$$Df(x) \text{ invertible} \iff f'(x) \in \mathbb{P}_{a,b}^{\times}.$$

因此，$Df(x)$ 不可逆，当且仅当 $f'(x) \in \mathbb{P}_{a,b} \setminus \mathbb{P}_{a,b}^{\times}$。这就证明了该结论。□

这将临界点的概念从全纯映射自然地推广到了更广泛的困惑解析框架。

3. Perplex functions and approximation

本节中，我们研究映射类 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它们对某个 $(a, b) \in \mathcal{P}$ 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，我们称之为*perplex* 函数。它们是这一框架下全纯映射的自然类比。其关键特征是刚性：对于固定的代数 $\mathbb{P}_{a,b}$，广义柯西–黎曼（GCR）方程对函数类施加了严格限制。特别是，该函数类在多项式映射中并不稠密。然而，如果允许 (a, b) 变化，那么在线性和二次情形下便会出现丰富的逼近理论。

定义 3.1。C^1 映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个*perplex* 函数，如果存在 $(a, b) \in \mathcal{P}$ 使得 f 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的。

等价地，$f = (u, v)$ 是 perplex 函数，当且仅当其导数满足

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ v_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_2} \\ v_{x_2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

对于某个 $(a, b) \in \mathcal{P}$。因此，$\mathbb{P}_{a,b}$–可微性可归结为偏导数之间的线性关系。这种刚性使得在 (a, b) 固定时无法进行逼近。

例 3.2。设 $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$。扰动 $f_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha x_2,\ \beta x_1 - x_2)$ 仅在 (α, β) 依赖于 (a, b) 的特殊取值下满足 (3)。如果 (a, b) 固定，则不存在满足 $\alpha, \beta \to 0$ 的序列能使 $f_{\alpha,\beta}$ $\mathbb{P}_{a,b}$–可微，因为 f 本身不可微（例 2.11）。因此，多项式映射一般无法由 (a, b) 固定的 $\mathbb{P}_{a,b}$–函数逼近。

让（a，b）沿逼近序列变化，可以消除这一障碍。

定理 3.3。设 $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性映射，其矩阵为 $J = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$。那么：

(i) 对于 J 的一个扎里斯基开稠密集，存在 $(a,b)\in\mathcal{P}$，使得 $L^{\mathbb{P}_{a,b}}$ 可微。(ii) 对于任意 J，存在 $(a_n,b_n)\in\mathcal{P}$ 以及 $\mathbb{P}_{a_n,b_n}$可微的线性映射 L_n，其中 $L_n\to L$ 在 *Whitney* 拓扑下。因此，每个线性映射都是多项式 *perplex* 函数的极限。

证明。 对于 $L=(u,\ v)$，GCR 方程变为

$$a_2p+a_3q=a_1r+a_2s,\qquad b_2p+b_3q=b_1r+b_2s,$$

连同 $\mathcal{P}$ 的定义关系。根据维数计数，对于一般的（p，q，r，s），该系统有解，从而得到（i）。对于（ii），用一般集合中的一列 J_n 逼近任意一个J，并求解（a_n，b_n）；相应的映射 L_n 收敛到 L。□

例 3.4。 共轭映射 f（x_1，x_2）$=$（x_1，$-x_2$）不是 $\mathbb{P}_{a,\ b}$–可微的，对于任意固定的（a，b）。但是定理 3.3（ii）给出了序列（a_n，b_n）和多项式映射 f_n，满足 $f_n\to f$。因此，一旦允许（a，b）变化，例 3.2 中的障碍便消失了。

总之，例子 3.2 和 3.4 表明，改变 $(a,b$对于可行的逼近理论至关重要。

二次映射。 对于二次映射，情况更为微妙。记

$$\begin{pmatrix}u_{x_1}\\ v_{x_1}\end{pmatrix}=m_0+m_1x_1+m_2x_2,\qquad \begin{pmatrix}u_{x_2}\\ v_{x_2}\end{pmatrix}=n_0+n_1x_1+n_2x_2,$$

其中 $m_k,n_k\in\mathbb{R}^2$，GCR 方程给出：

命题 3.5 (二次特征刻画)。 二次映射 f 是 *perplex* 函数，当且仅当存在一个 $T\in M_2(\mathbb{R})$ 常数，使得

$$n_k=T\,m_k\qquad(k=0,1,2).$$

等价地，$\binom{u_{x_2}}{v_{x_2}}=T\binom{u_{x_1}}{v_{x_1}}$对所有 x均成立。

命题 *3.5* 的证明。 如果 f 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，GCR 方程可写为

$$A\begin{pmatrix}u_{x_1}\\ v_{x_1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}u_{x_2}\\ v_{x_2}\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{pmatrix}.$$

由于 B可逆，令 $T:=B^{-1}A$，得到$\binom{u_{x_2}}{v_{x_2}}=T\binom{u_{x_1}}{v_{x_1}}$，因此对于 $k=0$，1，2，有 $Tm_k=n_k$。反过来，给定这样的常数 T，任取 $B\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$，令 $A:=BT$，并通过调整B 来满足 $\mathcal{P}$ 的两个定义等式（通过微小扰动即可满足开不等式）。因此存在一个有效的（a，b）$\in\mathcal{P}$，定理 2.10 即得所述结论。□

例 3.6。 映射 $g(x_1,x_2)=(x_1^2,x_2^2)$ 不满足命题 3.5的条件，因此不是 perplex 函数。

推论 3.7. 二次 *perplex* 函数在 *Whitney* 拓扑下于二次映射中稠密。

证明. 对于一般的 f, m_0 和 m_1 线性无关，因此 T 由 n_0, n_1唯一确定。稍微调整系数即可使 $n_2 = Tm_2$ 也成立。因此，任意二次函数都可以用 perplex 二次函数逼近。□

例 3.8. 逼近 $g(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$：设

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = (x_1^2 + \varepsilon x_1 x_2,\ \varepsilon x_1^2 + x_2^2), \qquad \varepsilon \neq 0.$$

于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$f_\varepsilon \to g$ 平滑地趋近，且每个 f_ε 都是二次 perplex 函数。

4. Functions on several perplex variables

现在我们将理论从一个变量推广到多个 perplex 变量。自然的环境空间是自由的 $\mathbb{P}_{a,b}$–模 $\mathbb{P}^n_{a,b}$，它为定义偏导数、方向导数和切空间提供了恰当的框架。在这一设定下，我们建立解析 perplex 函数的Łojasiewicz 不等式的类比。

4.1. 多变量中的导数。 固定一个 perplex 代数 $\mathbb{P}_{a,b}$。对于$n \geq 1$，记

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}^n_{a,b}, \qquad p_i \in \mathbb{P}_{a,b}.$$

典范基为 $\{E_1, \ldots, E_n\}$，其中 E_i 在第 i 个坐标上的分量为 1，其余分量为 0。标量乘法按分量定义：$x * p := (x * p_1, \ldots\ldots, x * p_n)$。

定义 4.1。 设 $f : \mathbb{P}^n_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 且 $p \in \mathbb{P}^n_{a,b}$。如果存在 $L_i \in \mathbb{P}_{a,b}$，使得对于每个正分离序列 $(h_n) \subset \mathbb{P}^\times_{a,b}$ 且 $h_n \to 0$，我们称 f 在 p 处关于 p_i 存在偏导数，

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(p + h_n * E_i) - f(p)\big) * h_n^{-1} = L_i,$$

且 L_i 关于 p 连续依赖。此时定义 $\frac{\partial f}{\partial p_i}(p) := L_i$—若这对所有 i 都成立，则称 f 在 p 处是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的 。

记 $f = (u, v) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$，定理 2.10 给出多变量广义柯西–黎曼（GCR）方程：

命题 4.2。 映射 f 在 p 处是$\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，当且仅当对每个 $i = 1, \ldots, n$，

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_{i1}} \\ v_{x_{i1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_{i2}} \\ v_{x_{i2}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

给定 $w = \sum_i w_i * E_i \in \mathbb{P}^n_{a,b}$，方向导数为

$$df_p \cdot w = \sum_{i=1}^n w_i * \frac{\partial f}{\partial p_i}(p).$$

perplex 梯度定义为

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}(p)\right).$$

引理 4.3. 设 $Df_p:\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$ 为 f 在 p处的实雅可比矩阵。若 $w_i=\binom{w_{i1}}{w_{i2}}\in\mathbb{R}^2$，则

$$df_p\cdot(w_1,\dots,w_n)=Df_p\cdot(w_{11},w_{12},\dots,w_{n1},w_{n2}).$$

证明。由 (4), $\binom{u_{x_{i1}}}{v_{x_{i1}}}=e_1*\underline{\frac{\partial f}{\partial p_i}}(p)$ 和 $\binom{u_{x_{i2}}}{v_{x_{i2}}}=e_2*\underline{\frac{\partial f}{\partial p_i}}(p)$。因此

$$Df_p(w_{11},\dots,w_{n2})=\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}e_1+w_{i2}e_2)*\frac{\partial f}{\partial p_i}(p)=df_p\cdot(w_1,\dots,w_n).$$

□

Set

$$J_p:=\left\langle\frac{\partial f}{\partial p_1}(p),\dots,\frac{\partial f}{\partial p_n}(p)\right\rangle\subset\mathbb{P}_{a,b},$$

也就是说，由 f 在 p 处的偏导数生成的 $\mathbb{P}_{a,b}$ 的理想。

引理 4.4。设 $f:\mathbb{P}^n_{a,b}\to\mathbb{P}_{a,b}$ 是 $\mathbb{P}_{a,b}$-可微的，且 $p\in\mathbb{P}^n_{a,b}$。那么以下条件等价:

(1) p 是一个临界点（秩 $Df_p<2$）；*(2)* J_p 是$\mathbb{P}_a$中的真理想，b；*(3)* $df_p(\mathbb{P}^n_{a,\ b})\subset\mathbb{P}_{a,\ b}\setminus\mathbb{P}^{\times}_{a\ ,\ b}$。

定义 4.5. $\mathbb{P}^n_{a,\ b}$ 中的*perplex* 超平面是一个秩为 $n-1$的自由$\mathbb{P}_{a,\ b}$–子模。等价地，它是一个非零$\mathbb{P}_{a,\ b}$–线性泛函$\ell:\mathbb{P}^n_{a,\ b}\to\mathbb{P}_{a,\ b}$的核。在恒等对应$\mathbb{P}^n_{a,\ b}\cong\mathbb{R}^{2n}$下，perplex 超平面对应于一个余维 2 的实线性子空间。

推论 4.6. 若 p 正则，则$\ker(df_p)$ 是$\mathbb{P}^n_{a,\ b}$中的一个 *perplex* 超平面，并且

$$\ker(df_p)=\ker(Df_p)=T_p\big(f^{-1}(f(p))\big)\subset\mathbb{R}^{2n}.$$

证明. 由于 p 正则，$Df_p:\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$ 具有实秩 2。由引理4.3,

$$df_p(\mathbb{P}^n_{a,b})\ =\ \left\{\sum_{i=1}^{n}w_i*\frac{\partial f}{\partial p_i}(p):w_i\in\mathbb{P}_{a,b}\right\}=:J_p\subset\mathbb{P}_{a,b}.$$

由于秩 $Df_p=2$，理想 J_p 包含一个单位元$u\in\mathbb{P}^{\times}_{a\,b,}$，因此 df_p作为$\mathbb{P}_{a,\ b}$–线性映射是满射。取 $c=(c_1,\ \dots,\ c_n)\in\mathbb{P}^n_{a,\ b}$，使得$\sum_i c_i*\frac{\partial f}{\partial p_i}(p)=u$，并定义一个$\mathbb{P}_{a,\ b}$–线性截面 $s:\mathbb{P}_{a,\ b}\to\mathbb{P}^n_{a,\ b}$, $s(y):=(y*u^{-1})*c$。于是 $df_p\circ s=\mathrm{id}^{\mathbb{P}_{a,\ b}}$，因此

$$\mathbb{P}^n_{a,b}\ =\ \ker(df_p)\oplus\mathrm{im}(s)\ \cong\ \ker(df_p)\oplus\mathbb{P}_{a,b},$$

这表明，ker(df_p) 是秩为 $n-1$ 的自由 $\mathbb{P}_{a,\ b}$–模。

ker(df_p) $=\ker(Df_p)=T_p(f^{-1}(f(p)))$ 的识别直接由引理 4.3和隐函数定理得出。□

最后，后面将需要以下技术引理。

引理 4.7. 设 $f\colon \mathbb{P}^{n+1}_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，并设 $(p_k) \to p$ 为一列正则点。将 p_k 处的梯度写作

$$\nabla f(p_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_k), \dots, \frac{\partial f}{\partial p_{n+1}}(p_k)\right) \in \mathbb{P}^{n+1}_{a,b}.$$

将 $\nabla f(p_k) = (\alpha_k, \beta_k)$ 分解为 $\alpha_k \in \mathbb{P}^n_{a,b}$（前 n 个分量）和 $\beta_k \in \mathbb{P}_{a,b}$（最后一个分量）。如果

$$\frac{\|\alpha_k\|_m}{\|\beta_k\|_m} \longrightarrow \infty,$$

那么超平面 核 Df_{p_k} 不会收敛到 $\mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}$。

证明。 每个核 $\ker Df_{p_k}$ 都是由线性泛函定义的超平面

$$L_k(u_1, \dots, u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} u_i * (\alpha_k)_i + u_{n+1} * \beta_k.$$

˜归一化后，设 $\tilde{c}_k = (\tilde{\alpha}_k, \beta_k) := (\alpha_k, \beta_k)/\|(\alpha_k, \beta_k)\|_m$。假设˜ $\|\alpha_k\|_m/\|\beta_k\|_m \to \infty$ 蕴含 $\tilde{\alpha}_k \to \alpha_\infty \neq 0$ 和 $\beta_k \to 0$。因此，定义泛函˜ L_k 收敛到

$$L_\infty(u_1, \dots, u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} u_i * (\alpha_\infty)_i,$$

其核不是 $\mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}$。因此，$\ker Df_{p_k}$ 不能收敛到 $\mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}$。□

4.2. **实解析函数的 -Lojasiewicz 不等式**。 对于实解析的 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f(0) = 0$, 经典的 -Lojasiewicz 不等式指出，存在 $C > 0$ 和 $0 < \theta < 1$ 使得 $\|\nabla f(x)\| \geq C|f(x)|^\theta$ 在 0 [14]附近成立。在复数情形下也有类似结果。现在我们将其推广到解析 perplex 函数。

定义 4.8。 映射 $f : \mathbb{P}^n_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–解析的，如果它是 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微的，且其 $u, v\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 实坐标函数均为实解析函数。*perplex* 解析函数 是实解析映射 $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$，并且对于某个 $(a, b) \in \mathcal{P}$，它是 $\mathbb{P}_{a,b}$–解析的映射。

定理 4.9。 设 $f\colon \mathbb{P}^n_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 是 $\mathbb{P}_{a,b}$–解析的，且 $f(0) = 0$。那么存在 $U \ni 0$、$C > 0$ 和 $0 < \theta < 1$，使得

$$\|\nabla f(p)\|_m \geq C\,\|f(p)\|^\theta_m, \qquad p \in U.$$

证明。 对于 $\mathbb{P}_{a,b}$–可微函数 $g\colon \mathbb{P}_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$，GCR 方程和命题 1.8表明

$$\|g'(x)\|_m \geq \tfrac{1}{K} \max\{|u_{x_1}(x)|, |u_{x_2}(x)|, |v_{x_1}(x)|, |v_{x_2}(x)|\}, \quad K > 0.$$

因此

$$\|\nabla f(p)\|_m \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}K} \max\{\|\nabla u(p)\|, \|\nabla v(p)\|\}.$$

将经典的 Łojasiewicz 不等式应用于 u和 v，得到

$$\|\nabla f(p)\|_m \;\geq\; C\|f(p)\|_m^{\theta}$$

在 0 附近。 □

推论 4.10。若 $f\colon\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$ 是一个 *perplex* 解析函数，且 $f(0)\ =0$，那么在0的某个邻域内，每个 $p\notin f^{-1}(0)$ 都满足 秩 $Df_p\geq 1$（也就是说，实微分 Df_p 非零）。

注 4.11。与复数情形不同，秩 Df_p 可能等于 1 而非 2，因为非零偏导数未必是 $\mathbb{P}_{a,\ b}$中的单位元。这种现象反映了 perplex 环境中新颖的代数结构。

5. Singularities in the perplex setting

在复解析函数的经典理论中，有两个基本结果描述了奇点的局部拓扑：良好分层的存在性以及 Milnor–Lˆe 纤维化定理。本节将说明，这些结果可以自然地推广到 perplex 环境。利用定理 4.9 中的 Lojasiewicz 不等式，我们调整 Hamm 和 Lˆe 的论证，证明每个 $\mathbb{P}_{a,b}$–解析函数都具有良好分层，只要 $\mathbb{P}_{a,b}$ 是非退化的。由此，对于非退化的 perplex 解析映射 $f\colon\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$，我们得到 Milnor–Lˆe 型纤维化定理，从而给出其奇点周围的基本局部拓扑结构。

5.1. 良好分层。设 $f\colon\mathbb{P}^n_{a,b}\to\mathbb{P}_{a,b}$ 为 $\mathbb{P}_{a,b}$–解析函数，且 $f(0)\ =0$，并令 $V\colon\ =\{f=0\}\subset\mathbb{R}^{2n}$。设 $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 V的 Whitney 分层。

根据 [9]，，我们称 $\mathcal{S}$ 是良好分层，其所属空间为 V 在 0 处的良好分层，如果存在 0 的一个邻域 $U\subset\mathbb{R}^{2n}$，使得对每个序列 $q_i\in U\setminus V$收敛到 $q\in V\cap U$，且其切空间为 $T_{q_i}(f^{-1}(f(q_i)))$ 收敛到一个平面 T，都有

$$T\supset T_q\mathcal{S}_{\alpha(q)},$$

其中 $\mathcal{S}_{\alpha(q)}$ 是包含 q的分层片。

Hamm 和 Lˆe 在 [9] 中证明了，每个 $\mathbb{C}$–解析函数都存在良好分层。由于他们的证明仅依赖于 Łojasiewicz 不等式，因此通过定理 4.9，该证明可原样推广到 perplex 情形：

定理 5.1。设 $\mathbb{P}_{a,\ b}$ 是一个非退化超复代数。则每个$\mathbb{P}_{a,\ b}$–解析函数 $f\colon\mathbb{P}^n_{a,\ b}\to\mathbb{P}_{a,\ b}$ 都存在良好分层。

证明。设 $f\colon\mathbb{P}^n_{a,\ b}\to\mathbb{P}_{a,\ b}$ 是 $\mathbb{P}_{a,\ b}$–解析函数，满足 $f(0)\ =0$，并设 $V\colon\ =\{f=0\}\subset\mathbb{R}^{2n}$。取任意偶数 $N\in\mathbb{N}$，考虑$\mathbb{P}_{a,\ b}$–解析映射

$$g_N:\mathbb{P}^n_{a,b}\times\mathbb{P}_{a,b}\longrightarrow\mathbb{P}_{a,b},\qquad g_N(p,t):=f(p)-t^N,$$

以及实解析超曲面

$$G_N:=\{g_N=0\}\cap(U\times\mathbb{P}_{a,b}),$$

其中 $U \subset \mathbb{P}^n_{a,\,b}$ 是 0 的一个充分小的邻域（稍后确定）。由于 G_N 是 $U \times \mathbb{P}_{a,\,b} \cong \mathbb{R}^{2(n+1)}$ 的一个闭实解析子集，因此存在一个 Whitney 分层 $\mathcal{G}^N$，使得 $V \times \{0\}$ 是若干分层的并。投影到第一个因子后，分层 $\mathcal{G}^N$ 诱导出 V 的一个 Whitney 分层 $\mathcal{S}^N$。我们声称，当 N 足够大时，$\mathcal{S}^N$ 是 V 在 0 处的一个良好分层。

反设不然。则存在 $\varepsilon > 0$，以及一个收敛到 $q \in V \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ 的序列 $q_i \in \big(\mathbb{B}_\varepsilon \cap U\big) \setminus V$，使得：

(a) 每个 q_i 都是 f 的正则点（即 $\operatorname{rank} Df_{q_i} = 2$）；(b) 切空间 $T_{q_i}\big(f^{-1}(f(q_i))\big)$ 有定义，且收敛到超平面 $T \subset \mathbb{P}^n_{a,\,b}$；(c) T 不包含 $T_q\mathcal{S}^N_{\alpha(q)}$（即经过 q 的分层片的切空间）。

由于 N 是偶数，可以令 $t_i \in \mathbb{P}_{a,\,b}$ 由 $t_i^N := f(q_i)$。令 $x_i := (q_i,\ t_i) \in G_N$；则 $x_i \to x := (q,\ 0) \in V \times \{0\}$。由推论 4.6，水平集的实切空间满足

$$T_{q_i}\big(f^{-1}(f(q_i))\big) \;=\; \ker Df_{q_i} \subset \mathbb{P}^n_{a,b},$$

并且由于秩为 $Df_{q_i} = 2$，每个 $\ker Df_{q_i}$ 都是一个 perplex 超平面。同样，由于 q_i 对 f 是正则的，g_N 在 x_i 处的微分，

$$D(g_N)_{x_i} : (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad D(g_N)_{x_i}(v,s) \;=\; Df_{q_i}(v) \;-\; N\,t_i^{N-1} * s,$$

具有实秩 2，因此由推论4.6 应用于 g_N 切空间

$$T_{x_i}G_N = \ker D(g_N)_{x_i}$$

是 $\mathbb{P}^{n+1}_{a\,b}$ 中的一个 perplex 超平面。此外，

$$T_{x_i}\big(f^{-1}(f(q_i)) \times \{t_i\}\big) = \ker Df_{q_i} \times \{0\} \subset \ker D(g_N)_{x_i} = T_{x_i}G_N.$$

由 G_N 的分层 $\mathcal{G}^N$ 所满足的惠特尼条件 (a)，极限

$$\tau \;:=\; \lim_{i\to\infty} T_{x_i}G_N$$

存在（至多相差子列），并包含经过 $x = (q,\ 0)$ 的 G_N 分层片的切空间 $T_x\mathcal{G}^N_{\alpha(x)}$。根据 $\mathcal{S}^N$ 的构造，有

$$T_x\mathcal{G}^N_{\alpha(x)} \;\subset\; T_q\mathcal{S}^N_{\alpha(q)} \times \{0\}.$$

另一方面，由于对所有 i 都有 $T_{x_i}G_N \supset \ker\, Df_{q_i} \times \{0\}$，且 $\ker\, Df_{q_i} \to T$ 属于格拉斯曼流形，我们也有 $\tau \supset T \times \{0\}$。因此

$$T \times \{0\} \;\subset\; \tau \;\supset\; T_q\mathcal{S}^N_{\alpha(q)} \times \{0\}.$$

由于 τ 是$\mathbb{P}^{n+1}_{a\,b}$，中的 perplex 超平面，而 $T \times \{0\}$ 和$T_q\mathcal{S}^N_{\alpha(q)} \times \{0\}$ 都是$\mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}$的子空间，假设 (c)（即 T不包含 $T_q\mathcal{S}^N_{\alpha(q)}$）迫使

$$\tau \;=\; \mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}. \tag{5}$$

现在，我们利用定理5和引理4.9 推导出一个矛盾。根据定理 4.7，存在 $0 < \theta < 1$, $C > 0$，并且（如有必要，缩小 U 后）存在一个邻域 $U \ni 0$ 使得

$$\|\nabla f(p)\|_m \;\geq\; C\,\|f(p)\|_m^{\theta} \qquad \text{for all } p \in U.$$

在 $p = q_i$ 处求值并使用 $f(q_i) = t_i^N$可得

$$\|\nabla f(q_i)\|_m \;\geq\; C\,\|t_i^N\|_m^{\theta}.$$

因此，对于每个满足 $t_i \neq 0$ 的 i，

$$\frac{\|\nabla f(q_i)\|_m}{N\,\|t_i^{N-1}\|_m} \;\geq\; \frac{C}{N}\,\frac{\|t_i^N\|_m^{\theta}}{\|t_i^{N-1}\|_m}. \tag{6}$$

由引理1.9，选取 $N > \frac{1}{1-\theta}$ 可确保（6）的右侧趋于 $+\infty$ 当 $i \to \infty$ 时（回忆 $t_i \to 0$ 因为 $x_i \to$ （q，0））。因此

$$\frac{\|\nabla f(q_i)\|_m}{N\,\|t_i^{N-1}\|_m} \;\longrightarrow\; +\infty.$$

现在考虑在 $\mathbb{P}^{n+1}_{a\,b}$，坐标下写出的 g_N 在 x_i 处的梯度：

$$\nabla g_N(x_i) \;=\; \big(\nabla f(q_i),\; -N\,t_i^{N-1}\big).$$

将 $\nabla g_N(x_i)$ 分解为 $=(\alpha_i, \beta_i)$，其中 $\alpha_i := \nabla f(q_i) \in \mathbb{P}^n_{a,b}$，以及 β_i：$= -N\,t_i^{N-1} \in \mathbb{P}_{a,b}$。前一个极限意味着

$$\frac{\|\alpha_i\|_m}{\|\beta_i\|_m} \;\longrightarrow\; +\infty.$$

由于每个 x_i 都是 g_N 的正则点（如上所见），推论 4.6适用于 g_N，因此我们可以应用引理 4.7，得出超平面 ker $D(g_N)_{x_i} = T_{x_i}G_N$不收敛到 $\mathbb{P}^n_{a,b} \times \{0\}$。这与（5）矛盾。□

5.2. **Milnor–Lˆe 纤维化**。对于 $\varepsilon, \eta > 0$，令 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中半径为 ε 的闭球，$\mathbb{D}_\eta$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 η 的闭圆盘。给定一个实解析映射f：$\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$，令 Δ_f 表示判别式，即其临界集的像。

与复数情形一样，定理 5.1 保证当 $\varepsilon > 0$足够小时，f在 $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus f^{-1}(\Delta_f)$ 上的限制是一个淹没。根据带边流形的 Ehresmann 纤维化定理（见 [8, 定理 8.2]），我们得到 Milnor 经典定理的以下类似结果（综述见 [20] ）。

定理 5.2. 设 $\mathbb{P}_{a,b}$ 是一个非退化 *perplex* 代数，且 $f : \mathbb{P}^n_{a,b} \to \mathbb{P}_{a,b}$ 是一个 $\mathbb{P}_{a,b}$– 解析函数，满足 $f(0) = 0$。存在实数 $0 < \eta < \varepsilon$，使得限制

$$f:\; f^{-1}(\mathbb{D}_\eta \setminus \Delta_f) \cap \mathbb{B}_\varepsilon \;\longrightarrow\; \mathbb{D}_\eta \setminus \Delta_f$$

是一个光滑局部平凡纤维化的投影。

6. Perspectives and open problems in perplex geometry and singularities

本研究取得的结果为更广泛的研究计划开辟了道路。这些结果表明，perplex 分析为实理论与复理论之间提供了一个真正的中间框架，能够支撑奇点理论及其他领域的新工具。最后，我们提出几个自然的问题，以凸显未来发展的主要挑战和可能方向。

（Q1）Milnor 纤维的拓扑。定理5.2中的纤维化为每个连通分支 C 上的 $\mathbb{D}_\eta \setminus \Delta_f$一个 Milnor–Lˆe 纤维

$$F_{C,\varepsilon} := f^{-1}(c) \cap \mathbb{B}_\varepsilon, \qquad c \in C,$$

对 $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$ 而言，它在微分同胚意义下良定义。不同于复数情形，判别式 Δ_f 可能使圆盘 $\mathbb{D}_\eta$ 不连通，因此可能共存多个不等价的纤维。每个纤维可以关联哪些拓扑不变量（同伦类型、贝蒂数或极重数的类似物），它们又如何依赖于 f 的代数数据以及所选的 perplex 代数 $\mathbb{P}_{a,\,b}$? 特别是，当 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ 不是域时，零因子是否会引入复数情形中不存在的新拓扑现象?

（Q2）perplex 函数的拓扑不变量。在经典环境中，Milnor 数 μ 通过雅可比代数的维数来衡量孤立奇点的复杂性 [17, 20], ，而 Lˆe 数则刻画非孤立奇点 [15] 的 Milnor 纤维的拓扑。在 perplex 环境中，零因子的存在阻止了真正孤立奇点的出现，除非 $\mathbb{P}_{a,\,b} \cong \mathbb{C}$。因此，自然的问题是：能否发展出 *perplex Lˆe* 数，用以刻画 Milnor 纤维的拓扑；同时在复数情形下退化为经典的 Lˆe 数，并检测由零因子引起的新现象?

（Q3）奇点的分类。阿诺德著名的研究纲领对复奇点进行分类，使其在右左等价意义下归为等价类，并给出了简单系列和单模系列（参见例如 [1, 2, 3]）。在 perplex 环境中是否存在有意义的类比? 在那里，零因子的存在以及 $(a, b) \in \mathcal{P}$的可变性可能会带来新的变形模式和奇点模空间。

（Q4）困惑分层。Whitney 条件和 Thom 条件在奇点稳定性以及 Milnor 纤维化的存在性方面发挥着核心作用（例如，参见 Whitney 的奠基性工作 [22], 、Thom 条件 [21], 和 Mather 稳定性理论 [16]）。我们在此证明了$\mathbb{P}_{a,b}$–解析函数在 Hamm–Lê [9]的意义下具有良好分层。能否建立一套系统的*perplex* 分层理论，或许通过细化经典条件来捕捉$\mathbb{P}_{a,b}$的特殊代数特征?

（Q5）困惑解析集的几何。复解析集拥有丰富的几何理论，包括维数理论、不可约性、正规化和奇点消解（例如，参见 Hironaka消解定理 [7]以及 Chirka 的专著 [5]）。对于由$\mathbb{P}_{a,b}$–解析方程定义的集合，相应的概念是什么？这些集合是否存在有意义的分解或几何不变量，能够推广复数情形?

（Q6）Perplex 动力学。复数域中的迭代映射产生了 Julia集与 Fatou集，这是全纯动力系统的核心对象（参见 Julia 的开创性工作 [10], 、Fatou 的经典研究 [6], ，以及 Milnor [18] 和 Carleson–Gamelin [4] 的现代论述）。迭代 perplex 解析映射会呈现出哪些动力学现象？在 perplex 环境中出现了两个新的方向：代数的变化（a， b） $\in \mathcal{P}$，由此产生以 $\mathcal{P}$为参数的动力系统族；以及高维情形$\mathbb{P}^n_{a,\ b}$，其中零因子的存在可能导致新的轨道结构或分岔现象。在这些更广泛的背景下，会出现哪些类型的极限集、稳定性概念和参数空间分岔?

（Q7）整体几何与模空间。复奇点族通常组织成模空间，并受变形理论支配（例如参见 Kuranishi [13], 、Kodaira [12], 和 Pinkham [19] 的工作）。是否可以构造$\mathbb{P}_{a,\ b}$–解析奇点的模空间，并纳入改变（a， b） $\in \mathcal{P}$所带来的额外自由度？这类空间能否在实与复奇点理论之间建立新的桥梁，并通过反映 perplex 几何中间性质的新变形模式体现出来?

总而言之，这些问题表明，perplex 解析函数理论在实几何与复几何的交汇处开辟了一个真正崭新的领域。对其纤维、不变量和分类的探索，或许会揭示出介于这两个经典世界之间的拓扑现象，甚至展现出单从任何一方都无法看到的结构。从这个意义上说，perplex 分析不仅拓展了 Milnor 的构想，也指向一种仍有待发展的、更广阔的奇点理论。

References

[1] V. I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points the Weyl , , , 。groups of A_k D_k E_k and Lagrangian singularities* **6** 1972 《泛函分析及其应用》（），254–272。20[2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps Volume I: The Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts* , , 。《数学专著》，第 82, ¨ 1985 20 Birkhauser，波士顿，。V. I. [3] Arnol'd、S. M. Gusein-Zade、A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps Volume II: Monodromy and Asymptotics of Integrals* , 。《数学专著》，第 83, ¨ 1988 20 Birkhauser，波士顿。L. Carleson 和 T. W. [4] Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag，纽约，1993。21[5] E. M. Chirka, *Complex Analytic Sets*, 《数学及其应用》（苏联系列），第46卷，Kluwer，1989。21

[6] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, 《法国数学会通报》47（1919），161–271 **48** 1920 33 94, 208 314 21；（），––。H. Hironaka,
[7] *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero* 2 **79** 1964 109 326 ，《数学年刊》（）（），–。21
[8] *Differential Topology* M. W. Hirsch，。Springer，《研究生数学教材》第33卷，纽约，1976。19[9] H.A. Hamm 和 D.T. Lˆe, *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz*。《高等师范学校科学年刊》´E.N.S. 4 ´ 6, 3 1973 317 355 17, 20 e 辑，第 卷第 期（），第–页。G. Julia，，《纯粹与应用数学杂志》8（ 1918 47 245 21），–。I. L. Kantor、[10] *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*
A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers: An Elementary Introduction to Algebras* [11] 1989 。Springer，Universitext，纽约，。[12] 7 K. Kodaira, *On stability of compact submanifolds of complex manifolds*, 《美国数学杂志》**85** 1963 79 94 21（），–。M. Kuranishi,
[13] *On the locally complete families of complex analytic structures*, 《数学年刊》（2 **75** 1962 536 577 21）（），–。S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*。奥赛科学
[14] ¯学院课程讲义，I.H.E.S.复印讲义，Bures-sur-Yvette，。D. Massey，。《数学讲义》第1615, 1995 20 卷，Springer，柏林，。J. Mather，哈佛大学，1970–1973年（流
[16] *Notes on topological stability* 20 通讲义）。[17] J. W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*。《数学年刊研究丛书》第61卷，普林斯顿，1968 20。J. Milnor,
[18] *Dynamics in One Complex Variable* 160, ，《数学年刊研究丛书》第3 2006 21 三版，普林斯顿大学出版社，。[19] H. Pinkham,
Deformations of normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$ action, 《数学年刊》**232** 1974 65 84 21（），–。J. Seade, *On Milnor's Fibration Theorem and Its Offspring After 50 Years*。[20] 《美国数学会通报》（新系列）**56** 2019 2, 281 348 19, 20（），第–期。R. Thom, 《美国数学
[21] *Ensembles et morphismes stratifiés* 会通报》75（1969），240–284。20[22] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, 《数学年刊》（2）81（1965），496–549。20

Mid Sweden University, Department of Engineering, Mathematics and Subject Didactics, 85170 Sundsvall, Sweden*Email address*: aurelio.menegon@miun.se