具有算术伪弗罗贝尼乌斯数的某些数值半群环的定义理想

KOU TAKAHASHI

Abstract. 本文研究数值半群环的定义理想。设 H 是一个重数为 a_0 、嵌入维数为 n的数值半群。假设 $a_0/2+1 \leq n$，我们证明，当伪弗罗贝尼乌斯数的集合构成长度为 $n-1$的等差数列时， H 的定义理想是行列式理想。这部分解决了 Cuong、Kien、Truong 和 Matsuoka 提出的一个猜想。

arXiv:2512.14025v1 [math.AC] 16 Dec 2025

1. Introduction

数值半群及其半群环构成了交换代数中一类重要的环。关于数值半群环的一个基本问题是求出其定义理想的生成元。举例来说，Herzog [4]求出了嵌入维数为三的数值半群环的定义理想。然而，当嵌入维数为四或更大时，定义理想的结构尚未得到充分理解。最近，Cuong、Kien、Truong 和 Matsuoka 提出了以下有趣的猜想。

为引出这一猜想，我们先约定一些记号。设 k 是一个域，

$$H = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1} : \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

由 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 极小生成的数值半群，其中 $a_0 = \mathrm{min}(H \setminus \{0\})$。数值半群 H的半群环记为 $k[H]$，定义为

$$k[H] := k[t^{a_0}, t^{a_1}, \dots, t^{a_{n-1}}] \subseteq k[t].$$

记 $S = k[X_0, X_1, \dots, X_{n-1}]$ 为以 k 为系数域的多项式环，并赋予分次 $\deg X_i = a_i$；记 $\varphi\colon S \to k[H]$ 为由 $\varphi(X_i) = t^{a_i}$ 定义的分次环同态，其中对每个 $0 \leq i \leq n-1$均成立。同态 φ 的核记为 I_H。对于一个元素取自 S的矩阵 M，$\mathrm{I}_2(M)$表示由 M的二阶子式生成的 S 的理想。令 $\mathrm{PF}(H)$表示 H的所有伪弗罗贝尼乌斯数构成的集合。（伪弗罗贝尼乌斯数的定义见第 2 节。）

猜想 1.1. (*Cuong-Kien-Truong-Matsuoka* [6, 猜想 1.1]) 使用上述记号，以下条件等价。

(1) $I_H = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} X_0^{l_0} & X_1^{l_1} & \cdots & X_{n-2}^{l_{n-2}} & X_{n-1}^{l_{n-1}} \\ X_1^{m_1} & X_2^{m_2} & \cdots & X_{n-1}^{m_{n-1}} & X_0^{m_0} \end{pmatrix}$ 对于某些整数 $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}, m_0, m_1, \dots, m_{n-1} > 0$，

对 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 进行适当的置换后。(2) 集合 $\mathrm{PF}(H)$ 构成一个长度为 $n-1$ 的等差数列。

从 (1) 到 (2) 的蕴含关系已在 [5] 中得到证明。另一方面，从 (2) 到 (1) 的蕴含关系通常仍未解决，但在某些特殊情形下已得到验证，包括几乎对称半群 [3], 具有最大嵌入维数的半群 [5],广义重复单位数值半群 [7]以及伸展数值半群环 [6]。

本文证明，当 H 的嵌入维数 n相对于其重数 a_0较大时，这一猜想成立。

定理 1.2. 当 $a_0/2+1 \leq n$ 时，猜想 *1.1* 成立。

实际上，我们证明了一个稍微更一般的结论（见定理 3.1）。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾数值半群及其不变量的基本定义和性质。第 3 节给出主结果的证明。第 4 节讨论支持猜想 1.1 的进一步推论，并给出几个说明主定理的例子。

2. 预备知识

我们介绍本文中使用的记号。在本节中，设 $H = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ 是由 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 极小生成的数值半群，其中 $n \geq 3$。数 n 被称为 H 的嵌入维数。我们始终假设 $a_0 = \min(H \setminus \{0\})$，其被称为 H 的重数。φ 的同态 $S \to k[H]$ 的核 I_H 被称为 H 的定义理想。

现在，我们借助 Ap´ery 集合和伪 Frobenius 数来研究数值半群。首先，回顾它们的定义。集合

$$\mathrm{Ap}(H) = \{a \in H : a - a_0 \notin H\}$$

称为 H的**Ap´ery 集合**。若整数 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus H$ 满足对所有 $0 < h \in H$均有 $p + h \in H$，则称其为 H的**伪弗罗贝尼乌斯数**。H 的所有伪弗罗贝尼乌斯数构成的集合记为 PF(H)。集合 PF(H) $+ a_0 = \{p + a_0 : p \in \mathrm{PF}(H)\}$ 记为 PF+(H)。注意，PF+(H) $\subseteq$ Ap(H)。令 $a, b \in \mathbb{Z}$。我们在 $\mathbb{Z}$ 上定义偏序 $\leq_H$ 如下：若 $b - a \in H$，则 $a \leq_H b$。

接下来，我们介绍 关于 Ap´ery 集合和伪弗罗贝尼乌斯数的一些已知事实 s.

引理 2.1。 ([7, 命题 2。19]) 对于整数 $z \in \mathbb{Z}$，$z \notin H$ 当且仅当存在 $\alpha \in \mathrm{PF}(H)$ 使得 $\alpha - z \in H$。

引理 2.2. ([1, 命题 8]) 集合 $\mathrm{PF}_+(H)$ 是关于 $\leq_H$ 的 $\mathrm{Ap}(H)$ 的极大元素集合，也就是说，

$$\mathrm{PF}_+(H) = \{a \in \mathrm{Ap}(H) : b - a \notin H \ for\ all\ b \in \mathrm{Ap}(H) \setminus \{a\}\}.$$

推论 2.3. 对于所有 $a \in \mathrm{Ap}(H)$，存在 $\eta \in \mathrm{Ap}(H)$ 使得 $a + \eta \in \mathrm{PF}_+(H)$。

引理 2.4. ([5, 引理 2.5]) 假设 $n \geq 3$。若存在 $h \geq 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，使得$\mathrm{PF}(H) = \{h + \alpha, h + 2\alpha, \dots, h + (n-1)\alpha\}$，则 $\alpha \notin H$。

证明。由于 $H \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$，情形 $\alpha < 0$ 显然。假设 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \in H$。那么 $(h+\alpha) + \alpha \in H$，因为 $\alpha > 0$ 且 $h + \alpha \in$PF(H)。这与 $h + 2\alpha \in H$ 矛盾。因此，$\alpha \notin H$。□

引理 2.5。 设 s、$t \in H$。若 $s \in \mathrm{Ap}(H)$ 且 $t \leq_H s$，则 $t \in \mathrm{Ap}(H)$。

证明。 反设 $t \notin$Ap(H)。则存在 $b \in H$，使得 $b \equiv t$ 模 a_0 且$b < t$。因此，我们有 $b + (s - t) < t + (s - t) = s$。由于 $b + (s - t) \in H$ 且 $b + (s - t) \equiv s$模 a_0，我们得到 $s \notin$Ap(H)，这与假设矛盾。□

引理 2.6。 假设 $\mathrm{PF}(H) = \{h + \alpha, h + 2\alpha, \dots, h + (n-1)\alpha\}$。若 $a_0/2 + 1 \leq n$，则$\gcd(a_0, \alpha) = 1$。

证明。 令 $l = \gcd(a_0, \alpha)$。反设 $l > 1$。则存在 $k > 1$ 使得 $a_0 = kl$。由 $kl/2 = a_0/2 < n$可知，整数 k 至多为 $n - 1$。令 $p_k = h + k\alpha$，其中$k = 1$、 2 、 ..... 、 $n-1$。若 $k < n-1$，则可得 $p_{k+1} = p_1 + k\alpha \equiv p_1$。这与如下事实矛盾：对于 $l = 0$、 1、.....、 $a_0 - 1$，Ap(H)恰好包含一个元素 σ，使得 $\sigma \equiv l$ 模 a_0。□

定义 2.7. 假设 $\gcd(a_0, \alpha) = 1$。对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，存在 $0 \leq i \leq a_0 - 1$ 使得 $k \equiv i\alpha \bmod a_0$。于是我们定义映射 $v_\alpha^{a_0}$: $\mathbb{Z} \to \{0, 1, \dots, a_0 - 1\}$，其定义为 $v_\alpha^{a_0}(k) = i$。

对于任意 $a,b\in\mathbb{Z}$，若 $v_\alpha^{a_0}(a)+v_\alpha^{a_0}(b)\leq a_0-1$，则 $v_\alpha^{a_0}(a+b)=v_\alpha^{a_0}(a)+v_\alpha^{a_0}(b)$；若 $v_\alpha^{a_0}(a)-v_\alpha^{a_0}(b)\geq 0$，则 $v_\alpha^{a_0}(a)-v_\alpha^{a_0}(b)=v_\alpha^{a_0}(a-b)$。通过一个简单的观察可知，对于任意整数 $a\notin a_0\mathbb{Z}$，$v_\alpha^{a_0}(a)+v_{-\alpha}^{a_0}(a)=a_0$。

接下来，我们介绍一些用于确定 I_H 的定义理想的引理。

引理 2.8。（[6, 命题 2。10]）设 J 是 $S=k[X_0,X_1,\ldots,X_{n-1}]$ 的一个分次理想，满足 $J\subseteq I_H$。如果维数 $S/(J+(X_1))=a_0$，则 $I_H=J$。

引理 2.9。（[6, 推论 2。12]）设 f_0、f_1、……、f_{n-1}、g_0、……、$g_{n-1}\in S$，并设

$$M=\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1}\\ g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1}\end{pmatrix}.$$

If

$$\deg\varphi(g_0)-\deg\varphi(f_0)=\cdots=\deg\varphi(g_{n-1})-\deg\varphi(f_{n-1}),$$

则 $\mathrm{I}_2(M)\subseteq I_H$。

3. Proof of the Main theorem

下文中，设 H 为一个嵌入维数为 $n\geq 3$、重数为 a_0的数值半群。假设存在 $h>0$ 和 $\alpha\neq 0$，使得 $\mathrm{PF}(H)=\{h+\alpha,h+2\alpha,\ldots,h+(n-1)\alpha\}$且 $\gcd(a_0,\alpha)=1$。记 $v_\alpha^{a_0}$为 v_α。令

$$G=\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_i,a_1',a_2',\ldots,a_j',a_1'',a_2'',\ldots,a_k''\}$$

为 H的极小生成元系，其中

- $G\cap\mathrm{PF}_+(H)=\{a_1',a_2',\ldots,a_j'\}$.
- $v_\alpha(a_0)=0<v_\alpha(a_1)<\cdots<v_\alpha(a_i)<v_\alpha(a_1')<\cdots<v_\alpha(a_j')<v_\alpha(a_1'')<\cdots<v_\alpha(a_k'')$.

令 $\varphi\colon S=k[X_0,X_1,\ldots,X_i,X_1',\ldots,X_j',X_1'',\ldots,X_k'']\to k[H]$ 为由以下映射定义的环同态：$\varphi(X_s)=t^{a_s}$，$\varphi(X_t')=t^{a_t'}$，$\varphi(X_u'')=t^{a_u''}$且 $I_H=\ker\varphi$。

定理 3.1。在上述假设下，若

$$v_\alpha(a_i)+v_{-\alpha}(a_1'')<n-1,$$

那么存在正整数 $c_0,c_1,\ldots,c_i,c_0'',c_1'',\ldots,c_k''$，使得

$$I_H=\mathrm{I}_2(M_+\ M_0\ M_-)$$

其中

$$M_+=\begin{pmatrix} X_0^{c_0} & X_1^{c_2} & \cdots & X_{i-1}^{c_{i-1}} & X_i^{c_i}\\ X_1 & X_2 & \cdots & X_i & X_1'\end{pmatrix}$$

$$M_0=\begin{pmatrix} X_1' & X_2' & \cdots & X_{j-1}'\\ X_2' & X_3' & \cdots & X_j'\end{pmatrix}$$

$$M_-=\begin{pmatrix} X_j' & X_1'' & X_2'' & \cdots & X_{k-1}'' & X_k''\\ X_1''^{c_1''} & X_2''^{c_2''} & X_3''^{c_3''} & \cdots & X_k''^{c_k''} & X_0^{c_0''}\end{pmatrix}.$$

注释 3.2。若 $i=0$，我们将假设 $v_\alpha(a_i)+v_{-\alpha}(a_1'')<n-1$ 视为 $v_{-\alpha}(a_1'')<n-1$ 一个 d

$$M_+=\begin{pmatrix} X_0^{c_0}\\ X_1'\end{pmatrix}.$$

类似地，若 $k=0$，我们将假设 $v_\alpha(a_i)+v_{-\alpha}(a_1'')<n-1$ 视为 $v_\alpha(a_i)<n-1$ 并

$$M_-=\begin{pmatrix} X_j'\\ X_0^{c_0''}\end{pmatrix}.$$

我们将在引理 3.6 中看到 $j\neq 0$。

定理 3.1 证明了主定理 1.2。

定理 1.2 的证明。只需证明当$a_0/2+1 \le n$时，定理 3.1 的假设成立，也就是说，对于任意 a_l、a_m，若 $v_\alpha(a_l)$ <min v_α(PF+(H))且 $v_{-\alpha}(a_m)$ < min $v_{-\alpha}$(PF+(H))，则 gcd(a_0, α) = 1 and $v_\alpha(a_l)$ + $v_{-\alpha}(a_m)$ < $n-1$。由引理 2.6 可得 gcd(a_0, α) = 1。我们证明 $v_\alpha(a_l) + v_{-\alpha}(a_m) < n-1$。由于 # PF+(H) = $n-1$ and $a_0/2+1 \le n$，因此有$a_0/2 \le n-1 =$ # PF+(H)。于是可得

$$\#(\mathrm{Ap}(H) \setminus (\mathrm{PF}_+(H) \cup \{0\})) = a_0 - (n-1) - 1 < n-1.$$

那么，根据 a_l 和 a_m的选取，我们得出

$$\begin{aligned} v_\alpha(a_l) + v_{-\alpha}(a_m) &\le (\min v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H))) - 1) + (\min v_{-\alpha}(\mathrm{PF}_+(H))) - 1) \\ &\le \#\,\mathrm{Ap}(H) \setminus (\mathrm{PF}_+(H) \cup \{0\}) < n-1, \end{aligned}$$

正如所需。 □

现在我们证明定理 3.1。在证明之前，先说明一个注记并引入一些记号。

注记 3.3。 通过将 α 与 $-\alpha$ 互换，我们可以交换 $a_1, a_2, \dots, a_i$ 和 $a''_1, a''_2, \dots, a''_k$ 的角色。事实上，令 $\beta = -\alpha$ 和 $h' = h + n\alpha$，可得

$$\mathrm{PF}(H) = \{h'+\beta, h'+2\beta, \dots, h'+(n-1)\beta\}$$

and

$$v_\beta(a_0) = 0 < v_\beta(a''_k) < v_\beta(a''_{k-1}) < \cdots < v_\beta(a''_1) < v_\beta(a'_j) < \cdots < v_\beta(a'_1) < v_\beta(a_i) < \cdots < v_\beta(a_1).$$

令 $\sigma_k :=$ min$\{a \in H : v_\alpha(a) = k\}$($\in$ Ap(H))。那么，我们看到

$$\mathrm{Ap}(H) = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{a_0-1}\}$$

并且存在 $1 \le s \le a_0 - 1$ 使得

$$\mathrm{PF}_+(H) = \{\sigma_s, \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_{s+n-1}\}.$$

例 3.4。 令 $H = \langle a_0 = 13, a_1 = 67, a_2 = 69, a_3 = 71, a'_1 = 144, a'_2 = 146, a''_1 = 37\rangle$。那么，我们有

$$\mathrm{PF}_+(H) = \{138, 140, 142, 144, 146, 148\}$$

$h = 123$ 和 $\alpha = 2$，且

$$\mathrm{Ap}(H) = \left\{ \begin{matrix} \sigma_0 = 0, \sigma_1 = 67, \sigma_2 = 69, \sigma_3 = 71, \sigma_4 = 138, \sigma_5 = 140, \sigma_6 = 142, \\ \sigma_7 = 144, \sigma_8 = 146, \sigma_9 = 148, \sigma_{10} = 111, \sigma_{11} = 74, \sigma_{12} = 37 \end{matrix} \right\}.$$

我们首先研究 H 的 Ap´ery 集合中元素的结构。

引理 3.5。 设 $\mathbf{0} \ne (c_1、\ c_2、\ \dots\dots、\ c_i) \in \mathbb{Z}^i_{\ge 0}$ 以及 $\mathbf{0} \ne (c''_1、\ c''_2、\ \dots\dots、\ c''_k) \in \mathbb{Z}^k_{\ge 0}$。则，$\sum_{l=1}^i c_l a_l + \sum_{l=1}^k c''_l a''_l \notin \mathrm{Ap}(H)$。

证明。 由引理 2.5，只需证明对于任意 $1 \le l \le i$ 和 $1 \le m \le k$，$a_l + a''_m \notin$ Ap(H)。若 $a_l + a''_m \in$ Ap(H)，则存在 $\eta \in$ Ap(H)，使得 $b = a_l + a''_m + \eta \in$ PF+(H)。令$b^+ = b - a_l$ 和 $b^- = b - a''_m$。这两个元素都属于 Ap(H) \PF+(H)。由于 $v_\alpha(a_l) < v_\alpha(b)$ 且 $b - a_l \notin$ PF+(H)，我们有 $0 < v_\alpha(b - a_l) <$ min v_α(PF+(H))。由注 3.3 可得

$0 < v_\beta(b - a_m'') < \min v_\beta(\mathrm{PF}_+(H))$。成立的是 $v_\beta(b^+) > \max v_\beta(\mathrm{PF}_+(H))$ 且 $v_\beta(b^-) < \min v_\beta(\mathrm{PF}_+(H))$。于是，

$$\begin{aligned}\#\,\mathrm{PF}(H) &= n-1\\ &> v_\alpha(a_l) + v_\beta(a_m'')\\ &= v_\alpha(a_l) + (a_0 - v_\alpha(a_m''))\\ &= a_0 - v_\alpha(a_m'' - a_l)\\ &= a_0 - v_\alpha(b^+ - b^-)\\ &= v_\beta(b^+ - b^-) > \#\,\mathrm{PF}(H),\end{aligned}$$

矛盾，其中第一个不等式由定理 3.1 的假设推出。 □

令 $r = \min\, v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H)) + v_\alpha(a_i)$，且 $r' = \min v_\beta(\mathrm{PF}_+(H)) + v_\beta(a_1'')$。注意到

$$\min v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H)) < r \le a_0 - r' < \max v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H)).$$

引理 3.6。以下结论成立。

(1) 若 $0 \neq \sigma_l \in \langle a_1, \dots, a_i\rangle$，则 $l < r$。(2) 若 $0 \neq \sigma_l \in \langle a_1'', \dots, a_k''\rangle$，则 $l > a_0 - r'$。(3) 若 $r \le l \le a_0 - r'$，则 $\sigma_l \in \{a_1', \dots, a_j'\}$。

证明。(1) 设 $\sigma_l = a_{t_1} + a_{t_2} + \cdots + a_{t_q}$。我们对 q 使用归纳法证明。当 $q = 1$ 时，我们有 $\sigma_l = a_{t_1}$。因此，得到 $l = v_\alpha(a_{t_1}) < \min v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H)) < r$。接下来，假设 $q > 1$，并设 $\tau = a_{t_1} + a_{t_2} + \cdots + a_{t_{q-1}}$。由引理 2.5，得到 $\tau \in \mathrm{Ap}(H)$。根据归纳假设，得到 $v_\alpha(\tau) < r$；又由于 $\tau \notin \mathrm{PF}_+(H)$，可知 $v_\alpha(\tau) < \min v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H))$。因此，得到$l = v_\alpha(\sigma_l) \le v_\alpha(\tau) + v_\alpha(a_i) < r$。

(2) 由 (1) 和注 3.3 得出。

(3) 考虑 (1) 和 (2) 的逆否命题，若 $r \le l \le a_0 - r'$，则由引理 3.5 可得$\sigma_l \notin \langle a_1, \dots, a_i, a_1'', \dots, a_k''\rangle$。因此可知 $\sigma_l \in \langle a_1', \dots, a_j'\rangle$。由于 $a_1', \dots, a_j' \in \mathrm{PF}_+(H)$，所以得到 $\sigma_l \in \{a_1', \dots, a_j'\}$。□

引理 3.7。假设 $X = \sum_{l=1}^i c_l a_l \in \mathrm{PF}_+(H)$ $v_\alpha(X) < r$ 且 $\omega = \sum_{l=1}^i d_l a_l \in \mathrm{Ap}(H)$满足对所有 l均有 $d_l \le c_l$。如果 $Y = X - \alpha \in \mathrm{PF}_+(H)$，则 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。

证明。由于 $\omega, X-\omega \in \langle a_1, \dots, a_i\rangle$，可知 $v_\alpha(\omega)$ $v_\alpha(X-\omega) < r$。因此，我们有 $v_\alpha(Y-\omega) < v_\alpha(X-\omega) < r$。假设 $Y-\omega \in H \setminus \mathrm{Ap}(H)$。那么，存在 $b \in H$使得 $v_\alpha(b) = v_\alpha(Y-\omega)$，且 $b < Y-\omega$。由此可得 $b+\omega < Y$ 和 $b+\omega \in H$。由于 $v_\alpha(b+\omega) = v_\alpha(Y)$，这与$Y \in \mathrm{Ap}(H)$矛盾。因此，$Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$或 $Y - \omega \notin H$。所以，存在一个整数 $t \ge 0$ 使得 $Y - \omega + ta_0 \in \mathrm{Ap}(H)$。由于 $X - \omega \notin \mathrm{PF}_+(H)$，我们有 $Y - \omega + ta_0 \notin \mathrm{PF}_+(H)$，从而$Y - \omega + ta_0 \notin \{a_1', \dots, a_j'\}$。此外，由于 $v_\alpha(Y - \omega + ta_0) < v_\alpha(X - \omega) < r$，根据引理 3.6 (2)，我们有$Y - \omega + ta_0 \notin \langle a_1'', \dots, a_k''\rangle$。因此，$Y - \omega + ta_0 \in \langle a_1, \dots, a_i\rangle$。根据推论 2.3，存在 $\eta \in \mathrm{Ap}(H)$，使得 $Y - \omega + ta_0 + \eta \in \mathrm{PF}_+(H)$。根据引理 3.5，可得$Y - \omega + ta_0 + \eta \in \langle a_1, \dots, a_i\rangle$。因此，根据引理 3.6，我们有 $v_\alpha(Y - \omega + ta_0 + \eta) < r \le \max v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H))$，从而 $X - \omega + ta_0 + \eta = (Y - \omega + ta_0 + \eta) + \alpha \in \mathrm{PF}_+(H)$。由于$X - \omega, \eta \in \mathrm{Ap}(H)$，我们得出 $t = 0$。□

推论 3.8. 假设 $X \in \langle a_1, \dots, a_i\rangle \cap$伪 Frobenius 数$_+(H)$ 且 $Y = X - \alpha \in$伪 Frobenius 数$_+(H)$。那么，$Y \notin G$。

证明。根据假设，存在 $(c_1, \dots, c_i) \in \mathbb{Z}^i_{\ge 0}$，使得 $(c_1, \dots, c_i) \neq \mathbf{e}_l (1 \le l \le i)$ 且$X = \sum_{l=1}^i c_l a_l$。我们可以取 $\mathbf{0} \neq (d_1, \dots, d_i) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，满足 $(d_1, \dots, d_i) \le (c_1, \dots, c_i)$。令

$\omega = \sum_{l=1}^{i} d_l a_l$。于是，$X - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。由引理 3.7 可得 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。由于$Y = (Y - \omega) + \omega$，$Y$总可以表示为至少两个生成元之和。□

根据注 3.3，我们可以用与引理 3.7 和推论 3.8 相同的方法证明以下结论。

引理 3.9. 假设 $X = \sum_{l=1}^{k} c_l'' a_l'' \in$ 伪弗罗贝尼乌斯数$_+(H)$ $v_\beta(X) < r'$ 且 $\omega = \sum_{l=1}^{k} d_l'' a_l'' \in \mathrm{Ap}(H)$满足 $d_l'' \le c_l''$对所有 l均成立。若 $Y = X - \beta \in$ 伪弗罗贝尼乌斯数$_+(H)$，则 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。

推论 3.10. 假设 $X \in \langle a_1'', \dots, a_k'' \rangle \cap$伪弗罗贝尼乌斯数$_+(H)$ 以及 $Y = X - \beta \in$伪弗罗贝尼乌斯数$_+(H)$。那么，$Y \notin G$。

根据推论 3.8 和推论 3.10，存在正整数 $g < h$ 满足

$$\mathrm{Ap}(H) = \{0, \sigma_1, \dots, \sigma_g, \sigma_{g+1}, \dots, \sigma_{h-1}, \sigma_h, \dots \sigma_{a_0-1}\} \tag{3.1}$$

with $\sigma_1, \dots, \sigma_g \in \langle a_1, \dots, a_i \rangle, \sigma_{g+1} = a_1', \sigma_{g+2} = a_2', \dots, \sigma_{h-1} = a_j'$, and $\sigma_h, \dots, \sigma_{a_0-1} \in \langle a_1'', \dots, a_k'' \rangle$.

例 3.11. 设 H如例 *3.4* 中所述。则有 $\mathrm{PF}_+(H) = \{138, 140, 142, 144, 146, 148\}$，其中 $h = 123$ 且 $\alpha = 2$。因此，H 的 *Ap´ery* 集合为

$$\mathrm{Ap}(H) = \{0, 67, 69, 71, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 111, 74, 37\}$$

其中 67，69，71，138，140，$142 \in \langle 67, 69, 71 \rangle$ 以及 148，111，74，$37 \in \langle 37 \rangle$。

我们的下一个目标是确定 PF$_+(H)$ 中的元素。我们将 Ap(H) 分解如下。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ap}_+(H) &:= \{a \in \mathrm{Ap}(H) : 0 < v_\alpha(a) < v_\alpha(a_1')\};\\
\mathrm{Ap}_0(H) &:= \{a \in \mathrm{Ap}(H) : v_\alpha(a_1') \le v_\alpha(a) \le v_\alpha(a_j')\};\\
\mathrm{Ap}_-(H) &:= \{a \in \mathrm{Ap}(H) : v_\alpha(a) > v_\alpha(a_j')\}.
\end{aligned}$$

我们有 Ap(H) $=$Ap$_+(H)$ $\cup$Ap$_0(H)$ $\cup$Ap$_-(H)$，并且 $a_s \in$Ap$_+(H)$ $a_t' \in$Ap$_0(H)$ $a_u'' \in$Ap$_-(H)$。

例 3.12. 设 H 如例 *3.4* 中所述。则，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ap}_+(H) &= \{67, 69, 71, 138, 140, 142\};\\
\mathrm{Ap}_0(H) &= \{144, 146\};\\
\mathrm{Ap}_-(H) &= \{148, 111, 74, 37\}.
\end{aligned}$$

引理 3.13. 设 t 是一个正整数。

(1) 若 $t < r$，则 $\sigma_t + \alpha \le \sigma_{t+1}$。(2)

若 $t < a_0 - r'$，则 $\sigma_t + \beta \le \sigma_{t-1}$。

证明。由注 3.3，只需证明 (1)。当 $\sigma_t \in$PF$_+(H)$ 时，显然该命题成立，因为 $\sigma_{l+1} \in$ PF$_+(H)$。假设 $\sigma_t \notin$ PF$_+(H)$。由于 $\sigma_t \in$ Ap(H)，根据推论 2.3，存在 $\eta \in$Ap(H)，使得 $\sigma_t + \eta \in$PF$_+(H)$。由于 $t < r$，我们有 $\sigma_t \in \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$，因此由引理3.5和引理3.6 (2)，有 $\sigma_t + \eta \in \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$，这证明了 $v_\alpha(\sigma_t + \eta) < r$。于是，我们有 $\sigma_t + \eta + \alpha \in$PF$_+(H)$。由于 $v_\alpha(\sigma_t + \eta + \alpha) = v_\alpha(\sigma_{t+1} + \eta)$ 且 $\sigma_{t+1} + \eta \in H$，可得 $\sigma_t + \eta + \alpha \le \sigma_{t+1} + \eta$。因此，$\sigma_t + \alpha \le \sigma_{t+1}$。□

引理 3.14。以下结论成立。

(1) 若 $\sum_{l=1}^{i} c_l a_l \in \mathrm{Ap}(H) \setminus \{0\}$ 且 $c_l \ge 0$，则 $\sum_{l=1}^{i} c_l a_l \in$Ap$_+(H)$。

(2) 若 $\sum_{l=1}^{k} c_l'' a_l'' \in \mathrm{Ap}(H) \setminus \{0\}$ 且 $c_l'' \ge 0$，则 $\sum_{l=1}^{k} c_l'' a_l'' \in$Ap$_-(H)$。

证明。根据注 3.3，只需证明(1)。根据引理3.6(1)，存在一个整数 $m < r$使得 $\sigma_m = \sum_{l=1}^{i} c_l a_l$。根据引理3.6(2)、推论 3.8和方程(3.1)，可得$\sigma_m \in$Ap$_+(H)$。□

引理 3.15。 以下结论成立。

(1) 若元素 $\sigma_l \in \mathrm{Ap}_+(H)$，则 $\sigma_l \not\geq_H a$ 对任意满足 $v_\alpha(a) > v_\alpha(\sigma_l)$ 的 $a \in G$ 都成立。

(2) 若元素 $\sigma_l \in \mathrm{Ap}_-(H)$，则 $\sigma_l \not\geq_H a$ 对任意满足 $v_\beta(a) > v_\beta(\sigma_l)$ 的 $a \in G$ 都成立。

证明。由注 3.3，只需证明 (1)。反设存在一个生成元 $a \in G$，使得 $\sigma_l \geq_H a$ 且 $v_\alpha(a) > v_\alpha(\sigma_l)$。由于 $\sigma_l, a \in \mathrm{Ap}(H)$，且根据假设有 $\sigma_l - a \in H$，因此我们得到 $\sigma_l - a \in \mathrm{Ap}(H)$。若 $a \in \mathrm{Ap}_-(H)$，则由引理 3.5 可得 $\sigma_l \in \langle a_1'', a_2'', \ldots, a_k'' \rangle$，因为 $\sigma_l = a + (\sigma_l - a)$。然而，由引理 3.14 可得 $\sigma_l \in \mathrm{Ap}_-(H)$，矛盾。因此，我们可以假设 $a \in \{a_1, \ldots, a_i\}$，使得 $v_\alpha(\sigma_l) < v_\alpha(a)$。由于 $\sigma_l = (\sigma_l - a) + a$ 且 $a, \sigma_l - a \in \mathrm{Ap}(H)$，由引理 3.5 可得 $b := \sigma_l - a \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_i \rangle$。于是，由引理 3.14 可得 $b \in \mathrm{Ap}_+(H)$，但这与 $v_\alpha(\sigma_l) = v_\alpha((\sigma_l - a) + a) > v_\alpha(a)$ 矛盾。□

注意，由该引理可得 $v_\alpha(a_1) = 1$ 且 $v_\alpha(a_k'') = a_0 - 1$。

引理 3.16. 设 $\mathrm{PF}_+(H) = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$ 满足 $p_l = p_1 + (l-1)\alpha$。

(1) 存在整数 $c_1, \ldots, c_i$，使得 $p_m = a_m + \sum_{l=m}^{i}(c_l - 1)a_l$ 对任意 $m = 1, 2, \ldots, i$ 均成立。(2) 存在整数 $c_1'', \ldots, c_k''$，使得 $p_{n-1-k+m} = a_m'' + \sum_{l=1}^{m}(c_l'' - 1)a_l''$ 对任意 $m = 1, 2, \ldots, k$ 均成立。

证明。根据备注 3.3，只需证明 (1)。首先，我们证明以下断言 .

断言。若 $p_l \in \langle a_1, \ldots\ldots, a_i \rangle$，则 最小值$\{s : a_s \leq_H p_l\}$ > 最小值$\{s : a_s \leq_H p_{l-1}\}$。

我们假设 $p_l = a_s + \sum_{t=s}^{i} d_t a_t$。令 $\omega = \sum_{t=s}^{i} d_t a_t$。我们有 $p_l - \omega = a_s$。根据引理 3.7，$p_l - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$ 蕴含 $p_{l-1} - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。根据引理 3.15，我们有 $\omega' = p_{l-1} - \omega \in \langle a_1, \ldots\ldots, a_{s-1} \rangle$。由于 $p_{l-1} = \omega' + \omega$，可推出 $\min\{s : a_s \leq_H p_l\} > \min\{s : a_s \leq_H p_{l-1}\}$。

接下来，我们证明 $\mathrm{PF}_+(H)$ 由 $\mathrm{Ap}_+(H)$ 中的 i 个元素、$\mathrm{Ap}_0(H)$ 中的 j 个元素以及 $\mathrm{Ap}_-(H)$ 中的 k 个元素组成。反设 $\mathrm{Ap}_+(H)$ 中至少有 $i+1$ 个元素包含于 $\mathrm{PF}_+(H)$ 中。假设 $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m \in \mathrm{PF}_+(H)$ 且 $m \geq i+1$。根据断言，我们得到

$$\min\{s : a_s \leq_H p_1\} < \min\{s : a_s \leq_H p_2\} < \cdots < \min\{s : a_s \leq_H p_m\}.$$

然而，这与 $\#\{a_1, a_2 \ldots, a_i\} = i$ 矛盾。因此，$\mathrm{PF}_+(H) \cap \mathrm{Ap}_+(H)$ 中至多包含 i 个元素。类似地，根据注 3.3，$\mathrm{PF}_+(H) \cap \mathrm{Ap}_-(H)$ 中至多包含 k 个元素。根据定理 3.1 的假设，我们有 j 个元素 $a_1', \ldots, a_j' \in \mathrm{PF}_+(H)$，且 $\#\,\mathrm{PF}_+(H) = n - 1 = i + j + k$。因此，$\mathrm{Ap}_+(H)$ 中恰有 i 个元素，$\mathrm{Ap}_0(H)$ 中有 j 个元素，$\mathrm{Ap}_-(H)$ 中有 k 个元素。由此以及方程(3.1)可知，$p_1, p_2, \ldots, p_i \in \mathrm{Ap}_+(H)$ $p_{i+1} = a_1'$，$p_{i+2} = a_2', \ldots, p_{i+j} = a_j'$ and $p_{i+j+1}, p_{i+j+2}, \ldots, p_{i+j+k} \in \mathrm{Ap}_-(H)$。

现在，我们通过对 m 使用归纳法来证明该结论。考虑 $m = i$ 的情形。由断言可得

$$\min\{s : a_s \leq_H p_1\} < \min\{s : a_s \leq_H p_2\} < \cdots < \min\{s : a_s \leq_H p_i\}.$$

如果 $\min\{s : a_s \leq_H p_i\} < i$，那么我们无法取满足该不等式的 p_1。因此，我们有 $p_i = c_i a_i$，且 $c_i > 0$。假设存在 c_{m+1}，c_{m+2}，……，c_i，使得对于 $s = m+1$，$m+2$，……，i，有 $p_s = a_s + \sum_{l=s}^{i}(c_l - 1)a_l$。我们证明存在 $c_m \geq 0$，使得 $p_m = a_m + \sum_{l=m}^{i}(c_l - 1)a_l$。令 $\omega = \sum_{l=m+1}^{i}(c_l - 1)a_l \in \mathrm{Ap}(H)$。由断言可得

$$\min\{1 : a_s \leq_H p_1\} < \cdots < \min\{s : a_s \leq_H p_m\} < \min\{s : a_s \leq_H p_{m+1}\} = m +$$

因此，我们有 $\min\{s : a_s \leq_H p_m\} = m$。由于 $\min\{s : a_s \leq_H p_m\} = m$ 且 $v_\alpha(p_m - \omega) < v_\alpha(p_{m+1} - \omega) = v_\alpha(a_{m+1})$，我们得出 $p_m = c_m a_m + \omega = a_m + \sum_{l=m}^{i}(c_l - 1)a_l$，其中 $c_m > 0$。□

根据此引理，PF+(*H*) 的所有元素如下

$$\mathrm{PF}_+(H)=\left\{\begin{array}{l} a_1+\displaystyle\sum_{l=1}^{i}(c_l-1)a_l, a_2+\sum_{l=2}^{i}(c_l-1)a_l,\dots,c_ia_i,\\ a'_1,\dots,a'_j,\\ c''_1a''_1, a''_2+\displaystyle\sum_{l=1}^{2}(c''_l-1)a''_l,\dots,a''_k+\sum_{l=1}^{k}(c''_l-1)a_l \end{array}\right\}.$$

例3.17。 设 H 如例 *3.4*所示。那么，

$$\mathrm{PF}_+(H)=\{138,140,142,144,146,148\}=\{a_1+a_3,a_2+a_3,2a_3,a'_1,a'_2,4a''_1\}.$$

接下来，我们给出 # Ap(*H*) 的下界。

定义3.18。 根据引理3.7和引理3.16，元素

$$a_m+\sum_{l=m}^{i}d_la_l \tag{3.2}$$

对于 $l=m$，带有 $0\le d_l\le c_l-1$， $m+1$，……， i 的元素属于 Ap(*H*)。令 B_+ 为所有形如（3.2）的元素构成的集合。我们称表达式（3.2）为 B_+中一个元素的**典范表达式** 。我们以与 B_+相同的方式，使用 a''_1，a''_2，$\dots a''_k$来定义 B_-。

引理3.19。 以下陈述成立。

(1) 如果 a、 $a'\in B_+$ 具有不同的典范表达式，则 $a\neq a'$。(2) 如果 a、 $a'\in B_-$ 具有不同的典范表达式，则 $a\neq a'$。

证明。 根据注 3.3，只需证明 (1)。反设 $a=a'$。我们假设 a， $a'\in B_+$ 具有不同的典范表达式。如果生成元 a_m 同时出现在 a 和 a'的典范表达式中，则 $a-a_m$ 和 $a'-a_m$ 满足相同的条件。不妨设 $a=\sum_{l=1}^{u}d_{s_l}a_{s_l}$和 $a'=\sum_{l=1}^{v}d_{t_l}a_{t_l}$，其中 $\{s_1,s_2,\dots,s_u\}\cap\{t_1,t_2,\dots,t_v\}=\varnothing$。令 $M:=$ max($\{s_1,s_2,\dots,s_u\}\cup\{t_1,t_2,\dots,t_v\}$)，不失一般性地设 $a\ge_H a_M$。令 $p=a_M+\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l$，并令 $q\in$PF+(*H*)，使得 $q\ge_H a'$。于是，我们得到

$$\begin{aligned} q-a'+a&=\left(q-a'+a+a_M+\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l\right)-\left(a_M+\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l\right)\\ &=\left\{\left(q-\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l\right)-a'+(a-a_M)\right\}+a_M+\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l\\ &=\left\{\left(q-\sum_{l=M}^{i}(d_l-1)a_l\right)-a'+(a-a_M)\right\}+p. \end{aligned}$$

我们有 $p\le_H q$，但这与 $p\in$ PF+(*H*) 相矛盾。 □

推论 3.20。 $\#\mathrm{Ap}(H)\ge\left(\sum_{l=1}^{i}\prod_{m=l}^{i}c_m\right)+j+\left(\sum_{l=1}^{k}\prod_{m=1}^{l}c''_m\right)+1$。

证明。 计算可能的典范表达式的数量，由引理3.16和引理3.19可知，$\#B_+=\sum_{l=1}^{i}\prod_{m=l}^{i}c_m$ 和# $B_-=\sum_{l=1}^{k}\prod_{m=1}^{l}c_m$ 分别。由于 Ap(*H*) $\supseteq B_+\cup\{a'_1,a'_2,\dots,a'_j\}\cup B_-\cup\{0\}$，因此 # Ap(*H*) $\ge\#B_++\#\{a'_1,a'_2,\dots,a'_j\}+\#B_-+1$。 □

最后，我们证明 $\mathrm{I}_2(M)=I_H$。

定理 *3.1* 的证明。由于 $h+\alpha+a_0=a_1+\sum_{l=1}^{i}(c_l-1)a_l$ 且 $v_\alpha(a_1)=v_\alpha(\alpha)=1$，我们有 $v_\alpha(h)=v_\alpha(\sum_{l=1}^{i}(c_l-1)a_l)$。由引理 2.4，既然 $\alpha\notin H$，我们有 $\alpha<a_1$。因此，我们得到 $\sigma_{v_\alpha(h)}=\sum_{l=1}^{i}(c_l-1)a_l<h+a_0$。换言之，存在一个整数 $c_0\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得 $h+a_0=\sum_{l=1}^{i}(c_l-1)a_l+c_0a_0$。类似地，存在一个整数 $c_0''\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得$h+n\alpha+a_0=\sum_{l=1}^{k}(c_l''-1)a_l''+c_0''a_0$。令

$$M'_+=\begin{pmatrix}X_0^{c_0}\prod_{l=1}^{i}X_l^{c_l-1} & X_1^{c_1}\prod_{l=2}^{i}X_l^{c_l-1} & \cdots & X_{i-1}^{c_{i-1}}X_i^{c_i-1} & X_i^{c_i}\\ X_1^{c_1}\prod_{l=2}^{i}X_l^{c_l-1} & X_2^{c_2}\prod_{l=3}^{i}X_l^{c_l-1} & \cdots & X_i^{c_i} & X_1'\end{pmatrix}$$

$$M_0=\begin{pmatrix}X_1' & X_2' & \cdots & X_{j-1}'\\ X_2' & X_3' & \cdots & X_j'\end{pmatrix}$$

$$M'_-=\begin{pmatrix}X_j' & X_1^{''c_1''} & X_1^{''c_1''-1}X_2^{''c_2''} & \cdots & X_{k-1}^{''c_{k-1}''}\prod_{l=1}^{k-2}X_l^{''c_l''-1} & X_k^{''c_k''}\prod_{l=1}^{k-1}X_l^{''c_l-1''}\\ X_1^{''c_1''} & X_1^{''c_1''-1}X_2^{''c_2''} & X_3^{''c_3''}\prod_{l=1}^{2}X_l^{''c_l''-1} & \cdots & X_k^{''c_k''}\prod_{l=1}^{k-1}X_l^{''c_l-1''} & X_0^{c_0''}\prod_{l=1}^{k}X_l^{''c_l-1''}\end{pmatrix}.$$

根据 M'_+、M_0、M'_-的构造，在 M_+、M_0、M_-的每一列中，若将顶端项记为f，底端项记为 g，则$\deg\varphi(f)-\deg\varphi(g)=\alpha$为常数。由于 $M:=(M_+\ M_0\ M_-)$是将$(M'_+\ M'_0\ M'_-)$的每一列除以其两个项的最大公约数得到的，根据引理2.9，我们有 $\mathrm{I}_2(M)\subseteq I_H$。

现在我们利用引理 2.8 证明 $\mathrm{I}_2(M)=I_H$。由于 $\mathrm{I}_2(M)\subseteq I_H$，我们有 $\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M)+(X_0)))\geq\dim_k(S/(I_H+(X_0)))$。由于 $I_H=\ker\varphi$，因此 $\varphi(I_H+(X_0))=(t^{a_0})$。换言之，$S/(I_H+(X_0))\cong k[H]/(t^{a_0})$。因此，我们得到

$$\dim_k(S/(I_H+(X_0)))=\dim_k(k[H]/(t^{a_0}))=a_0.$$

因此，我们有

$$\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M)+(X_0)))\geq a_0. \tag{3.3}$$

设 $LT(\mathrm{I}_2(M)+(X_0))$ 为 $\mathrm{I}_2(M)+(X_0)$ 关于加权次数反字典序（$X_0>X_1>\cdots>X_i>X_1'>\cdots>X_j'>X_1''>\cdots>X_k''$）的初始理想。回忆 $\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M)+(X_0)))=\dim_k(S/LT(\mathrm{I}_2(M)+(X_0)))$ [2,第 5 章第 §3] 节的命题 4。

这个初始理想 $LT(\mathrm{I}_2(M)+(X_0))$ 包含以下单项式。

$$X_0,X_sX_{s'}^{c_{s'}},X_sX_t',X_sX_u'',X_t'X_{t'}',X_t'X_u'',X_u''^{c_u''}X_{u'}''$$
$$(1\leq s\leq s'\leq i,1\leq t\leq t'\leq j,1\leq u\leq u'\leq k).$$

那么，$S/(I_H+(X_0))$ 作为一个向量空间，由不能被上述单项式整除的单项式生成。它们是

$$X_1^{s_1}\prod_{l=2}^{i}X_l^{s_l}(1\leq s_1\leq c_1,0\leq s_l\leq c_l-1(2\leq l\leq i))$$
$$X_2^{s_2}\prod_{l=3}^{i}X_l^{s_l}(1\leq s_2\leq c_2,0\leq s_l\leq c_l-1(3\leq l\leq i))$$
$$\vdots$$
$$X_{i-1}^{s_{i-1}}X_i^{s_i}(1\leq s_{i-1}\leq c_{i-1},0\leq s_i\leq c_i-1)$$

$$X_i^{s_i}(1 \le s_i \le c_i),$$
$$X_1', X_2', \dots, X_j',$$
$$X_1''^{t_1}(1 \le t_1 \le c_1'')$$
$$X_2''^{t_2} X_1''^{t_1}(1 \le t_2 \le c_2'', 0 \le t_1 \le c_1'' - 1)$$
$$\vdots$$
$$X_k''^{t_k} \prod_{l=1}^{k-1} X_l''^{t_l}(1 \le t_k \le c_k'', 0 \le t_l \le c_l''(1 \le l \le k-1)$$
$$1.$$

因此，我们有

$$\dim_k(S/\mathrm{I}_2(M) + (X_0)) \le \left(\sum_{l=1}^{i} \prod_{m=l}^{i} c_m\right) + j + \left(\sum_{l=1}^{k} \prod_{m=1}^{l} c_m\right) + 1. \tag{3.4}$$

由推论 3.20 可知，$\#\operatorname{Ap}(H) \ge \left(\sum_{l=1}^{i} \prod_{m=l}^{i} c_m\right) + j + \left(\sum_{l=1}^{k} \prod_{m=1}^{l} c_m\right) + 1$。因此，我们有

$$\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M) + (X_0))) \le \#\operatorname{Ap}(H) = a_0. \tag{3.5}$$

由不等式 (3.3) 和 (3.5)，我们得到 $\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M) + (X_0))) = a_0.$。由引理 2.8，我们得出 $\mathrm{I}_2(M) = I_H$。□

例 3.21. 设 H 如例 *3.4* 中所述。我们有 $\mathrm{PF}_+(H) = \{a_1+a_3, a_2+a_3, 2a_3, a_1', a_2', 4a_1''\}$,$h + a_0 = a_3 + 5a_0$, 以及 $h + n\alpha + a_0 = 3a_1'' + 3a_0$。于是，我们有

$$M' = \begin{pmatrix} X_0^5X_3 & X_1X_3 & X_2X_3 & X_3^2 & X_1' & X_2' & X_1''^4 \\ X_1X_3 & X_2X_3 & X_3^2 & X_1' & X_2' & X_1''^4 & X_0^3X_1''^3 \end{pmatrix},$$

and

$$M = \begin{pmatrix} X_0^5 & X_1 & X_2 & X_3^2 & X_1' & X_2' & X_1'' \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_1' & X_2' & X_1''^4 & X_0^3 \end{pmatrix}.$$

根据定理 *3.1* 的证明，可得 $I_H = \mathrm{I}_2(M)$。

4. Further Implications and Examples

本节采用与定理 3.1 相同的技巧，证明另一个支持猜想 1.1 的结果。设 H 是一个嵌入维数为 n 、重数为 a_0的数值半群。假设

(1) $\mathrm{PF}(H) = \{h + \alpha, h + 2\alpha, \dots, h + (n-1)\alpha\}$，其中 $h > 0$、 $\alpha > 0$，且 $\gcd(a_0, \alpha) = 1$。
(2) 元素 $h + (n-1)\alpha + a_0$ 属于 H 的极小生成系，且$v_\alpha(h + (n-1)\alpha) = a_0 - 1$。

设 G为 H的极小生成元系。令 $G = \{a_0, a_1, \dots, a_i, a_1', \dots, a_j'\}$，其中

- $v_\alpha(a_0) = 0 < v_\alpha(a_1) < \cdots < v_\alpha(a_i) < v_\alpha(a_1') < \cdots < v_\alpha(a_j') = a_0 - 1$
- $G \cap \mathrm{PF}_+(H) = \{a_1', \dots, a_j'\}$.

令 $\varphi\colon\ S = k[X_0, X_1, \dots, X_i, X_1', \dots, X_j'] \to k[H]$ 为 $\varphi(X_s) = t^{a_s}$ 和 $\varphi(X_t') = t^{a_t'}$，且 $I_H = \ker \varphi$。

定理 4.1。 在上述假设下，存在满足以下方程的整数 c_0、 c_1、……、 c_{n-1}、 c_0'。

$$I_H = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} X_0^{c_0} & X_1^{c_2} & \cdots & X_{i-1}^{c_{i-1}} & X_i^{c_i} & X_1' & \cdots & X_{j-1}' & X_j' \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_i & X_1' & X_2' & \cdots & X_j' & X_0^{c_0'} \end{pmatrix}$$

证明过程与定理 3.1 的证明相同，因此我们仅略述证明。根据假设，有

$$v_\alpha(\mathrm{PF}_+(H)) = \{a_0 - (n-1), a_0 - (n-2), \ldots, a_0 - 1\}.$$

令 $p_i = h + i\alpha \in \mathrm{PF}(H)$。

引理 4.2。 设 $X \in \mathrm{PF}_+(H) \setminus \{a_1', \ldots, a_j'\}$, $\omega \in \mathrm{Ap}(H)$。若 $Y = X - \alpha \in \mathrm{PF}_+(H)$且 $X - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$，则 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。

证明。 假设 $Y - \omega \in H \setminus \mathrm{Ap}(H)$。则存在 $b \in H$，使得 $v_\alpha(b) = v_\alpha(Y - \omega)$ 且$b < Y - \omega$。因此，由于 $b + \omega < Y$和 $b + \omega \in H$，我们有 $Y \notin \mathrm{Ap}(H)$。这就产生了矛盾。

我们可以假设 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$ 或 $Y - \omega \notin H$。因此，存在一个整数 $t \geq 0$，使得 $Y - \omega + ta_0 \in \mathrm{Ap}(H)$。由推论 2.3 可知，对于某个$\eta \in \mathrm{Ap}(H)$，有 $(Y - \omega + ta_0) + \eta \in \mathrm{PF}_+(H)$。由于 $p_{n-1} + a_0 = a_j'$ 且 G 是极小生成元系，因此可得 $(Y - \omega + ta_0) + \eta \neq a_j'$。于是，我们有

$$(Y - \omega + ta_0) + \eta + \alpha = X - \omega + ta_0 + \eta \in \mathrm{PF}_+(H).$$

$X - \omega + \eta \in H$ 意味着 $t = 0$。因此，我们得到 $Y - \omega \in \mathrm{Ap}(H)$。 □

引理 4.3. 对于 $1 \leq k < a_0 - 1$，我们有 $\sigma_k + \alpha \leq \sigma_{k+1}$。

证明。 若 $\sigma_k \in \mathrm{PF}_+(H)$，则结论显然。假设 $\sigma_k \notin \mathrm{PF}_+(H)$。由推论 2.3，存在 $\eta \in \mathrm{Ap}(H)$，使得 $\sigma_k + \eta \in \mathrm{PF}_+(H)$。由于 $p_{n-1} + a_0 = a_{n-1}$ 且 G 是极小生成元系，我们有 $\sigma_k + \eta \neq p_{n-1}$。因此可得 $\sigma_k + \eta + \alpha \in \mathrm{PF}_+(H)$。由于$v_\alpha(\sigma_k + \alpha) = v_\alpha(\sigma_{k+1})$，我们有 $\sigma_k + \eta + \alpha \leq \sigma_{k+1} + \eta$。因此，我们得出结论： $\sigma_k + \alpha \leq \sigma_{k+1}$。 □

推论 4.4。如果 t 该元素 $\sigma_k \in \mathrm{Ap}(H)$，那么 $\sigma_l \not\geq_H a$ 对于任意 $a \in G$，若有 $v_\alpha(a) > v_\alpha(\sigma_l)$。

证明。 根据引理 4.3，该结论显然成立，因为我们假设 $\alpha > 0$。 □

注意， $v_\alpha(a_1) = 1$。

引理 4.5。 (1) 存在整数 c_1、 c_2、…、 $c_i \geq 1$，使得

$$\mathrm{PF}_+(H) = \left\{ a_1 + \sum_{l=1}^{i} (c_l - 1)a_l, a_2 + \sum_{l=2}^{i} (c_l - 1)a_l, \ldots, c_i a_i, a_1', a_2', \ldots, a_j' \right\}.$$

(2) $\#\mathrm{Ap}(H) \geq (\sum_{l=1}^{i} \prod_{m=l}^{i} c_m) + j + 1.$

引理 4.5 的证明与引理 3.16 和推论 3.20 的证明方式相同。

定理 *4.1* 的证明。由于 $h + \alpha + a_0 = a_1 + \sum_{l=1}^{i} (c_l - 1)a_l$ 且 $v_\alpha(a_1) = v_\alpha(\alpha) = 1$，我们有 $v_\alpha(h) = v_\alpha(\sum_{l=1}^{i} (c_l - 1)a_l)$。由引理 2.4 可知 $\alpha \notin H$，因此我们有 $\alpha < a_1$。于是，得到 $\sigma_{v_\alpha(h)} = \sum_{l=1}^{i} (c_l - 1)a_l < h + a_0$。换言之，存在一个整数 c_0，使得$h = \sum_{l=1}^{i} (c_l - 1)a_l + c_0 a_0$ 且 $c_0 > 0$。根据定理 4.1 的假设， $v_\alpha(a_j') = a_0 - 1$。因此，我们有 $h + n\alpha + a_0 = a_j' + \alpha + a_0 \equiv 0$ 模 a_0。存在一个整数 $c_0' > 0$，使得$a_j' + \alpha + a_0 = c_0' a_0$。

Let

$$M'_+ = \begin{pmatrix} X_0^{c_0}\prod_{l=1}^{i} X_l^{c_l-1} & X_1^{c_1}\prod_{l=2}^{i} X_l^{c_l-1} & \cdots & X_{i-1}^{c_{i-1}}X_i^{c_i-1} & X_i^{c_i} \\ X_1^{c_1}\prod_{l=2}^{i} X_l^{c_l-1} & X_2^{c_2}\prod_{l=3}^{i} X_l^{c_l-1} & \cdots & X_i^{c_i} & X_1' \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} X_1' & X_2' & \cdots & X_{j-1}' & X_j' \\ X_2' & X_3' & \cdots & X_j' & X_0^{c_0'} \end{pmatrix}$$

根据 M'_+, M_0 的构造，在每一列中，若将顶项记为 f、底项记为 g，则 $\deg \varphi(f) - \deg \varphi(g) = \alpha$ 为常数。由于 $M := (M_+\ M_0)$ 是通过将 $(M_+\ M_0)$ 的每一列除以该列两个项的最大公约数得到的，根据引理 2.9，我们有 $\mathrm{I}_2(M) \subseteq I_H$。

现在我们使用引理 2.8 证明 $\mathrm{I}_2(M) = I_H$。通过使用引理 4.5 比较 $S/(\mathrm{I}_2(M) + (X_0))$ 和 $a_0 = \#\,\mathrm{Ap}(H)$ 的维数，我们可以按照定理 3.1 证明中的相同方法证明 $\dim_k(S/(\mathrm{I}_2(M) + (X_0))) = a_0$。由引理 2.8 可得 $\mathrm{I}_2(M) = I_H$。□

我们以几个例子为本文作结。

例 4.6。设 $H = \langle a_0 = 13, a_1 = 14, a_2 = 15, a_1' = 46, a_2' = 47, a_1'' = 24, a_2'' = 25\rangle$。那么 $\mathrm{PF}(H) = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$，因此它满足定理 *3.1* 在 $h = 30$ 和 $\alpha = 1$ 下的假设。因此，我们有

$$I_H = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2^3 & X_1' & X_2' & X_1'' & X_2'' \\ X_1 & X_2 & X_1' & X_2' & X_1''^2 & X_2'' & X_0^2 \end{pmatrix}.$$

例 4.7。令 $H = \langle a_0 = 9、\ a_1 = 19、\ a_2 = 48、\ a_1' = 106、\ a_2' = 116\rangle$。则 $\mathrm{PF}(H) = \{77, 87, 97, 107\}$。因此它满足定理 *4.1* 在 $h = 67$ 和 $\alpha = 10$ 下的假设。于是，我们有

$$I_H = \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} X_0 & X_1^2 & X_2^2 & X_1' & X_2' \\ X_1 & X_2 & X_1' & X_2' & X_0^{14} \end{pmatrix}.$$

References

[1] A. Assi、M. D'Anna、P. A. Garc´ıa-S´anchez，《数值半群及其应用》，Springer（2020年）。[2] D. A. Cox、J. Little、D. O'Shea，《理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》，第六版，Springer（2025年）。[3] S. Goto、D. V. Kien、N. Matsuoka、H. L. Truong，数值半群环中的伪弗罗贝尼乌斯数与定义理想，《代数杂志》 **508** （2018年），1–15[4] J. Herzog，阿贝尔半群及半群环的生成元与关系，《数学手稿》 **3**（1970年），第 2 期，175–193。[5] D. V. Kien、N. Matsuoka，具有行列式定义理想的最大嵌入维数数值半群环，《数值半群及其应用》（Springer INdAM Ser.） **40** （2020年），185–196。[6] D. V. Kien、N. Matsuoka、T. Ozaki，伸展数值半群环中的伪弗罗贝尼乌斯数与定义理想，arXiv:2501.06415。（2025年）[7] J. C. Rosales、M. B. Branco、D. Torr˜ao，重复单位数值半群的弗罗贝尼乌斯问题，《The Ra- manujan Journal》 **40** （2015年），第 2 期，323–334。

Department of Mathematics, Faculty of Education, Waseda University,
1-6-1 Nishi-Waseda,Shinjuku, Tokyo 169-8050, Japan电子邮箱地址: k takahash@akane.waseda.jp