arXiv:2512.14027v1 [math.GT] 16 Dec 2025

纽结的辫子与仿射 Hecke 代数

SEONGJEONG KIM

Abstract. 在 [5]中，研究表明，对于亏格为 g 的定向曲面 S_g，其中的链环 $S_g \times S^1$ 可以表示为带有一种称为 *doublelines*的装饰的虚拟图。本文首先定义了 $S_g \times S^1$中链环的带双线辫子。我们将带双线辫子群记为 VB_n^{dl}。对于 $S_g \times S^1$ 中的链环，可以仿照 [17]中的工作证明 Alexander 定理和马尔可夫定理。我们证明，若将研究范围限制在由不含虚交叉的带双线辫子生成的群 B_n^{dl}，则 B_n^{dl}的 Hecke 代数与仿射 Hecke 代数同构。此外，我们定义了一个从仿射 Hecke 代数到 $S^2 \times S^1$的 Kauffman 括号 skein 模的 Markov 迹。

1. Introduction

经典结理论的一种推广是虚结理论。Kauffman 于 1996 [13, 14] 提出了这一理论。它的研究动机源于对加厚曲面中的纽结以及 Gauss 图的研究。具体而言，虚纽结可以用包含两种交叉点（经典交叉点和虚交叉点）的图示来表示，例如参见 [1, 3, 8]。作为经典结理论的一种推广，虚结理论的各种性质和应用已得到发现（参见 [16]）。

另一方面，辫子理论将纽结理论与多个研究领域联系起来，例如三维流形理论和量子场论。辫子理论还通过 Alexander 定理和马尔可夫定理与经典结理论相联系。这两个定理指出，任意链环都可以在共轭、稳定化和去稳定化的意义下表示为辫子。利用这一事实，Jones 多项式通过 Hecke 代数上的马尔可夫迹映射构造而成，见 1987 [12]。在 M. Geck 和 S. Lambropoulou 的 [10]中，利用 B 型 Iwahori-Hecke 代数上的迹映射构造了定向链环的 Jones 型不变量。

类似地，可以利用虚辫理论研究虚纽结。已有证明表明，任意虚链环都可以通过辫子表示，并在共轭、稳定化以及左右虚交换变换下等价 [15, 4]。

我们关注 $S_g \times S^1$ 中的链环，其中 S_g 是亏格为 g 的定向曲面。在 [5], 中，已证明 $S_g \times S^1$ 中的链环可以用带有装饰的虚拟纽结图表示，这些装饰称为双线。此外，$S_g \times S^1$ 中两个纽结之间的同痕可以用有限多个局部变换表示。这是对 [9] 中工作的扩展。也就是说，虚纽结包含在 $S_g \times S^1$ 中的纽结理论之内。在 [6], 中，证明了 $S_g \times S^1$ 中纽结的 Kuperberg 定理。此外，还引入了一种研究 $S_g \times S^1$ 中纽结的工具，称为绕行奇偶性，并证明存在无穷多个纽结 $S_g \times S^1$，其图仅有一个或两个交叉点。在 [7], 中，利用绕行奇偶性证明，两个虚拟纽结图

在 $S_g \times S^1$ 中关于纽结的变换下等价，当且仅当它们作为虚纽结等价，也就是说，在广义 Reidemeister 变换下等价。

本文探讨了 $S_g \times S^1$ 中链环的辫子理论。在第 2 节中，我们介绍 $S_g \times S^1$ 中链环的基本概念。在第 3 节中，我们定义带双线的虚拟辫子群，并陈述 $S_g \times S^1$ 中链环的 Alexander 定理和马尔可夫定理。在第 4 节中，我们将研究范围限定于带双线的经典辫子群。我们证明，由带双线辫子群生成的 Hecke 代数与仿射 Iwahori-Hecke 代数同构。在第 5 节中，通过带双线经典辫子的闭包，我们构造一个映入 $S_g \times S^1$ 的 Kauffman 括号 skein 模（代数）的 Markov 迹。在附录中，我们证明 $S_g \times S^1$ 中链环的 Alexander 定理和马尔可夫定理。

2. Link in $S_g \times S^1$ and its diagrams

设 S_g 是一个亏格为 g 的可定向曲面。我们如下通过使用底层曲面，类比虚拟链环来定义 $S_g \times S^1$ 中的链环：

定义 2.1. 设 S_g 是亏格为 g 的定向曲面。链环 L 位于 $S_g \times S^1$ 中，是由 $S_g \times S^1$ 以及一个将若干个 S^1 的不交并光滑嵌入到 $S_g \times S^1$ 中的映射构成的一对。我们将其记为 $(L, S_g \times S^1)$。S^1 在 $S_g \times S^1$ 中的每个像称为 L 的一个分支。只有一个分支的链环称为 $S_g \times S^1$中的一个结 。

定义 2.2. 设 $(L, S_g \times S^1)$ 和 $(L', S_{g'} \times S^1)$ 是 $S_g \times S^1$ 和 $S_{g'} \times S^1$ 中的两个链环。若 $(L', S_{g'} \times S^1)$ 可由 $(L, S_g \times S^1)$ 通过 $S_g \times S^1$ 的同痕以及稳定化/去稳定化得到，则称链环 $(L, S_g \times S^1)$ 和 $(L', S_{g'} \times S^1)$ 等价。

我们所说的$(L, S_g \times S^1)$去稳定化是指如下操作：设 C 是曲面 S_g 上的一个非可缩圆，且在 $S_g \times S^1$中存在一个环面 T，它与环面 $C \times S^1$ 同伦，且不与链环相交。然后，沿环面 $C \times S^1$ 切开流形 $S_g \times S^1$，并用 $D^2 \times S^1$粘合两个新生成的边界分支，即完成去稳定化。 $S_g \times S^1$ 的稳定化是去稳定化的逆操作。

首先，我们按如下方式在曲面 S_g上构造 $(L, S_g \times S^1)$ 的图示：设 L 是 $S_g \times S^1$ 中的一个（定向）链环。假设 S^1 上给定了一个定向。设 $x_0 \in S^1$ 是一点，使得 $S_g \times \{x_0\} \cap L$ 是一个有限点集，且没有横截交点。那么存在一个自然的微分同胚 f，从 $(S_g \times$

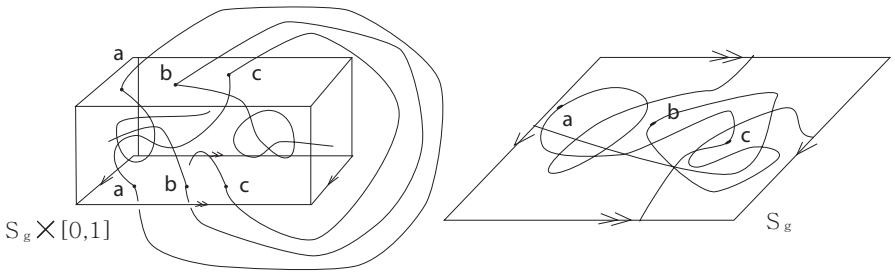


Figure 1. 链环在 $S_g \times S^1$ 中的示意图及其在曲面 $S_g \times \{0\}$上的投影

$S^1)\setminus(S_g\times\{x_0\})$ 到 $S_g\times(0,1)\subset S_g\times[0,1]$。设 $M_L=f((S_g\times S^1)-(S_g\times\{x_0\}))\cong S_g\times[0,1]$。那么， M_L 中的 $f(L)$ 由有限个圆和弧组成，且每条弧在 $S_g\times\{0\}$ 和 $S_g\times\{1\}$ 上恰有两个边界点。

设 $D_{\overline{f(L)}}$ 是 $f(L)$ 在 $S_g\times\{0\}$ 上投影的像。注意， $f(L)$ 的边界点成对配对，从而投影到 $S_g\times\{0\}$ 上的同一点；我们将这样的点称为顶点。因此， L 在 S_g 上的图 $D_{f(L)}$ 具有相应于 $S_g\times\{0\}$ 和 $S_g\times\{1\}$ 上两个边界点的顶点，这两个边界点属于 $f(L)$，如图 1 右侧所示。

注意，顶点附近的两条弧分别是 $M_L\cong S_g\times[0,1]$ 中 $S_g\times\{0\}$ 和 $S_g\times\{1\}$ 附近的弧的像，如图 2 所示。我们将该点改为两条短线，使得如果其中一条线与靠近 $S_g\times\{1\}$ 的弧相连，则该线比另一条更长，如图 2 所示。

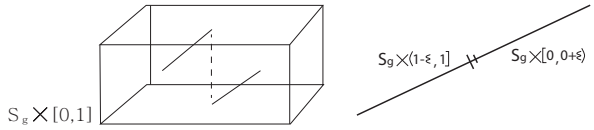


FIGURE 2. 链环与 $S_g\times\{x_0\}$的交点附近的局部图，以及对应的双线

由于 $D_{\overline{f(L)}}$ 是曲面 S_g上的一个带框架的四价图，其双线来自 $S_g\times[0,1]$中的 $f(L)$，因此可以为每个四价顶点指定经典交叉信息。也就是说， L 中的链环 M_L 在S_g上有一个带双线的纽结图。我们将其简称为上的图，带有双线。

现在，我们利用 S_g 上的图示，为平面 $S_g\times S^1$ 中的链环构造图。对于 $S_g\times S^1$ 中的一个链环，设其在 S_g 上带有双线的图为 D 。我们可以假设该图绘制在 S_g 的 $2g$ 边形表示上，如图 3 中间所示。用弧在 $2g$ 边形外连接其边界上的点与对应的点。将 $2g$ 边形外弧之间的交点改为虚交叉后，我们得到一个带有双线和虚交叉的图，见图 3 右侧。我们称之为链环 $S_g\times S^1$ 的平面上的双线图，或简称为链环 $S_g\times S^1$的图。

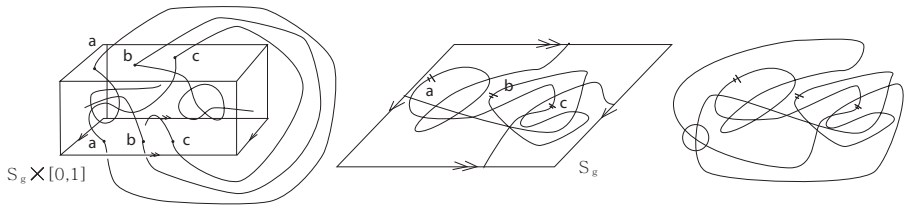


FIGURE 3. $S_g\times S^1$ 中的链环示意图及其在平面上的投影

下述定理成立。

命题 2.3（Kim（2018） [5][1]）。设（L、$S_g \times S^1$）和（L'、$S_{g'} \times S^1$）是两个链环。设 D_L 和 $D_{L'}$ 分别是 L 和 L' 在平面上的图。那么，L 和 L' 等价，当且仅当 $D_{L'}$ 可由 D_L 经过有限次应用图 ***4*** 中的变换得到。

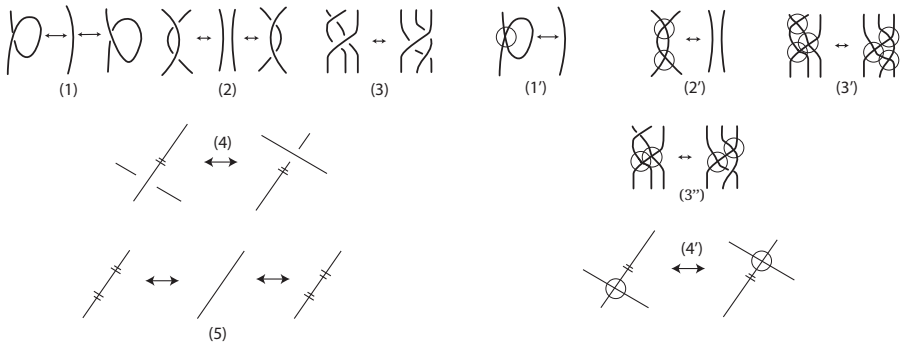


FIGURE 4. 链环变换在 $S_g \times S^1$中

简单来说， $S_g \times S^1$ 中的纽结和链环可以用带有双线的虚拟纽结图表示，并且在图 4 所示的变换下等价；例如，参见图 5。

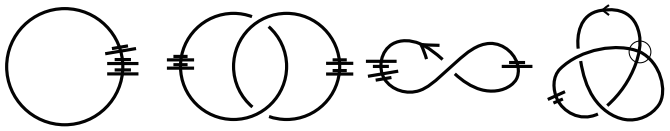


FIGURE 5. 带有双线的图

3. VIRTUAL DL-BRAID GROUP AND ITS REPRESENTATION

3.1. **带双线的虚拟辫**。

定义3.1。带双线的虚拟辫图 β 在 n 条辫股上的是光滑曲线的并集 b_1，.....， b_n，这些曲线在 $\mathbb{R} \times [0,1]$上带有双线，称为辫股，并满足：

- $\cup \partial(b_i) = \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{0,1\} \subset \mathbb{R} \times [0,1]$
- 每条辫股都从 $\mathbb{R} \times \{1\}$ 到 $\mathbb{R} \times \{0\}$单调递减。
- 两条辫股横向相交。每个交点都是经典交叉或虚交叉。
- 只有有限多个 $t_s \in [0,1]$， $s = 1$，.....， m 使得 $\beta \cap \mathbb{R} \times \{t\}$存在经典交叉、虚交叉或双线。

为简便起见，我们将这样的辫称为基于 n股的虚拟 ***dl***-辫图。我们假设每条辫股的方向均为从 $x_s \times \{1\}$ 到 $x_t \times \{0\}$，其中 $x_s \times \{1\}$ 和$x_t \times \{0\}$ 是辫股的边界。

[1]文献 [9] 研究了来自 $S_g \times S^1$ 的曲面上的图，以计算 Kauffman 括号 skein 模。该文使用了“箭头”这一概念，对应于本文中的双线。

定义 3.2. 如果一个虚 dl-辫图 β 可以通过有限次对 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 进行同伦（同时保持 dl-辫的条件），并应用图 6 中的变换，从另一个虚 dl-辫图 β' 得到，则称二者等价。

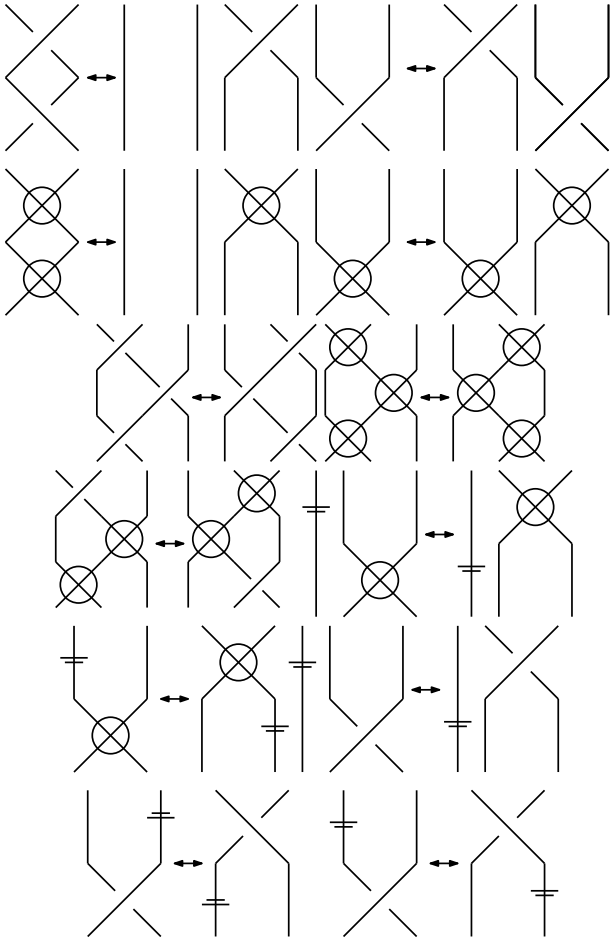


FIGURE 6. dl-辫的变换

令 VB_n^{dl} 为基于 n股的虚拟 dl-辫的等价类集合。它具有自然的二元运算 $\beta_1\cdot\beta_2$，其定义为将 β_1 置于 $\mathbb{R}\times[\frac{1}{2},1]$ 上，并将 β_2 置于$\mathbb{R}\times[0,\frac{1}{2}]$上。可以证明，$(VB_n^{dl},\ \cdot)$ 是一个群。

我们将 i 与 $i+1$ 之间的正（负）交叉记为 σ_i（σ_i^{-1}），将 i 与 $i+1$ 之间的虚交叉记为 ρ_i。此外，我们将第 i 股上的正（负）双线记为 τ_i （τ_i^{-1}），见图 7。由此不难看出，VB_n^{dl}可以用以下群表示定义。

定义 3.3. n 股 dl-辫群 VB_n^{dl}是一个由生成元 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-1}$、$\{\rho_i\}_{i=1}^{n-1}$ 和 $\{\tau_i\}_{i=1}^{n}$ 生成、满足以下关系的群：

(1) $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$，适用于 $|i-j|\geq 2$。(2)

$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$，适用于 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n-1$。

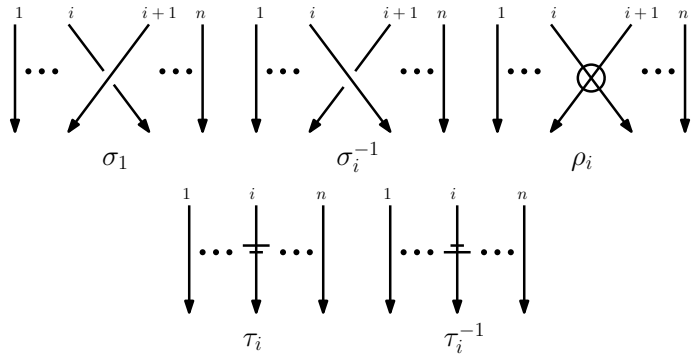


FIGURE 7. VB_n^{dl}的生成元

(3) $\rho_i^2 = 1$，适用于 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。(4) $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i$，适用于 $|i-j| \geq 2$。(5) $\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}$，适用于 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。(6) $\sigma_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\sigma_{i+1}$，适用于 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。(7) $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$适用于 i，$j = 1, \ldots\ldots, n$。(8) $\sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i$，若 $j \neq i, i+1$。(9) $\rho_i\tau_j = \tau_j\rho_i$适用于 $i = 1, \ldots n-1, j = 1, \ldots\ldots, n$。(10) $\tau_i\sigma_i = \sigma_i^{-1}\tau_{i+1}$适用于 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。

ˆ虚拟 dl-辫图 β 的闭包 β 按照纽结理论中的标准方式定义。于是， β 是一个带有双线的图。显然，如果 β 和 β'ˆ ˆ是等价的虚拟 dl-辫，那么 β 和 β' 是等价的带双线的图。虚拟 dl-辫的一项重要任务，是证明虚拟 dl-辫及带双线图的亚历山大定理和马尔可夫定理。在 [4]中，S. Kamada 证明了虚拟辫的马尔可夫定理。在 [17] 中，K. Negi、M. Prabhakar 和 S. Kamada 证明了扭结虚辫的亚历山大定理和马尔可夫定理。由于扭结虚辫是带有一种称为横杠的装饰的虚拟辫，因此与我们的情形相似。粗略地说，由于绕行变换适用于 dl-辫，因此可以用类似的方法得到 dl-辫的亚历山大定理和马尔可夫定理。下面陈述这些定理。

推论 3.4。设 D 是一个带双线的图。则存在一个虚双线ˆ辫 β，使得 β 与 D 等价。

推论 3.5。设 D、D' 是带双线的图。设 β 和 β' 是两个辫子ˆ ˆ，满足 $D = \beta$ 和 $D' = \beta'$。当且仅当 β' 可通过以下变换由 β 得到时， D 和 D' 等价：

- 图 *6* 中的变换
- 共轭
- 图 *8* 描绘的稳定化与去稳定化。
- 图 *9* 描绘的左、右虚交换变换。

为使本文完整起见，上述两个陈述将在附录中予以证明。

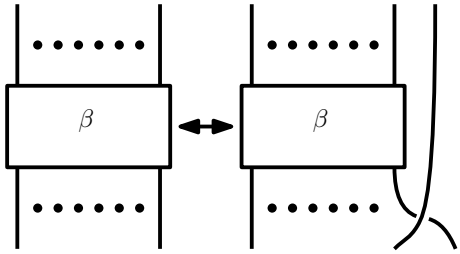


FIGURE 8. 辫的稳定化与去稳定化 $\beta\sigma_n = \beta$其中 $\beta \in B_n^{dl}$

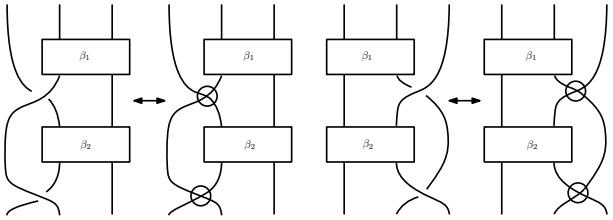


FIGURE 9. 左、右虚交换变换: $\beta_1\sigma_1\beta_2\sigma_1 = \beta_1\rho_1\beta_2\rho_1$ 和 $\beta_1\sigma_{n-1}\beta_2\sigma_{n-1} = \beta_1\rho_{n-1}\beta_2\rho_{n-1}$

4. HECKE ALGEBRA GENERATED CLASSICAL DL-BRAID GROUP AND AFFINE HECKE ALGEBRA

定义 4.1。 n股经典双线辫群 B_n^{dl}是一个由生成元 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-1}$ 和 $\{\tau_i\}_{i=1}^{n}$ 以及以下关系生成的群:

(1) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, 其中 $|i-j| \geq 2$。(2) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, 其中 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。(3) $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$, 其中 $i, j = 1, \ldots\ldots, n$。(4) $\sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i$, 其中 $j \neq i, i+1$。(5) $\tau_i\sigma_i = \sigma_i^{-1}\tau_{i+1}$, 其中 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。

备注 4.2。 请注意，本文并不要求 B_n^{dl} 是VB_n^{dl}的子群。不过，答案是肯定的，因为众所周知，经典辫群是虚拟辫群的子群。这一点是通过奇偶性证明的，且不受双线以及交叉点的上穿／下穿信息影响。我们将在另一篇论文中研究这一问题。

定义 4.3 ([18])。 与$\hat{}$ $\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_r \ltimes \mathbb{Z}^r$相关联的岩堀-赫克代数$\hat{}$ $\mathcal{H}_n$ ，其中 $\mathcal{G}_r$ 是由 r 个元素组成的对称群，是由 $T_i^{\pm 1}$、 $X_j^{\pm 1}$ 生成的含幺 $\mathbb{C}[v^{\pm 1}]$-代数，其中 $i = 1, \ldots, n-1$ 且 $j = 1, \ldots, n$，满足以下关系:

(1) $T_iT_i^{-1} = 1 = T_i^{-1}T_i$。(2) 对于 $|i-j| \geq 2$, $T_iT_j = T_jT_i$，(3) $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$(4) $X_iX_i^{-1} = 1 = X_i^{-1}X_i$, (5) 对于 $|i-j| \geq 2$, $X_iX_j = X_jX_i$，

(6) 如果 $j \neq i$ $T_i X_j = X_j T_i$,
$i+1$(7) $T_i X_i T_i = v^{-2} X_{i+1}$,
(8) $(T_i + 1)(T_i - v^{-2}) = 0$.
它也称为仿射 ***Hecke*** 代数

令 $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$ 为 B_n^{dl}的 Hecke 代数，也就是说，它是由 B_n^{dl}生成的含幺 $\mathbb{C}[q^{\pm\frac{1}{2}}]$-代数，并满足以下关系

$$(\sigma_i - q^{\frac{1}{2}})(\sigma + q^{-\frac{1}{2}}) = 0. \tag{4.1}$$

定理 4.4。 $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$ 与仿射 ***Hecke*** 代数 $\hat{}$ $\mathcal{H}_n$同构。

证明。 定义一个从 $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$ 到 $\hat{}$ $\mathcal{H}_n$ 的映射 ϕ，使得 $\phi(q^{\frac{1}{2}}\beta) = v^{-1}\phi(\beta)$， $\phi(\sigma_i) = vT_i$且 $\phi(\tau_j) = X_j$。显然，定义 4.1 中的关系 (1)-(4) 均得以保持。对于定义 4.1 中的关系 (5)，可以将其改写为

$$\sigma_i \tau_i \sigma_i = \tau_{i+1}.$$

Then

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_i \tau_i \sigma_i) &= \phi(\sigma_i)\phi(\tau_i)\phi(\sigma_i) \\ &= vT_i X_i (vT_i) \\ &= vT_i X_i T_i \\ &= v^2 (v^{-2} X_{i+1}) \\ &= X_{i+1} = \phi(\tau_{i+1}). \end{aligned}$$

对于方程（4.1），

$$\begin{aligned} \phi((\sigma_i - q^{\frac{1}{2}})(\sigma + q^{-\frac{1}{2}})) &= (vT_i - v^{-1})(vT_i + v) \\ &= v^2 (T_i - v^{-2})(T_i + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此， ϕ 是良定义的。反过来，若我们定义一个映射，将 $v \mapsto q^{-\frac{1}{2}}$、$T_i \mapsto q^{\frac{1}{2}}\sigma_i$、$X_j \mapsto \tau_j$对应起来，那么它就是 ϕ 的逆映射，因此证明完成。□

因此，我们可以通过 dl-辫得到仿射 Hecke 代数 $\mathcal{H}_n$ 的几何描述。这意味着 $\mathcal{H}_n$ 的表示与 $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$之间存在一一对应关系。特别地，我们可以通过辫子的闭合为 $\mathcal{H}_n$ 找到一个迹映射。

5. Skein module and a trace map on $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$

定义 5.1。 设 M 是一个定向三维流形， R 是一个含幺交换环， $q^{\frac{1}{4}} \in R$ 是一个固定的可逆元素。考虑 M中无向带框架链环（包括空链环 $\varnothing$）的环境同痕类集合，记作 $\mathcal{L}^{fr}$；再考虑以 $\mathcal{L}^{fr}$为基的自由 R-模，记作 $R\mathcal{L}^{fr}$。令 $S_2^{sub}{}_{,\infty}$为 $R\mathcal{L}^{fr}$ 的子模，由以下表达式生成：

(1) 考夫曼括号 skein 表达式： $L_+ - q^{\frac{1}{4}} L_0 - q^{-\frac{1}{4}} L_\infty$，(2) 平凡分支表达式： $L \sqcup \bigcirc + (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})L$,

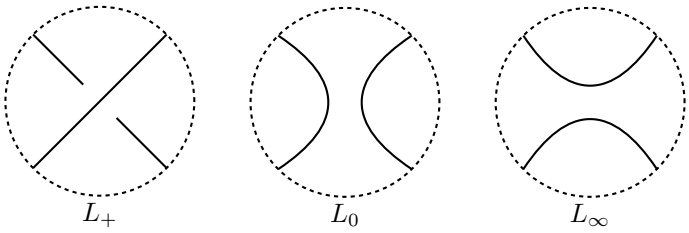


FIGURE 10. Kauffman 括号 skein 模的缠结三元组。

其中， ◯ 表示 M 中的平凡带框架结，而缠结三元组（L_+， L_0， L_∞）表示 M中的三个带框架链环。它们除 M中的一个小3维球内有所不同（如图10所示）外，完全相同。

Kauffman 括号 skein 模由 M 的商定义：

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(M;R,A)=\frac{R\mathcal{L}^{fr}}{S^{sub}_{2,\infty}}.$$

特别地，当 $M=S^2\times S^1$时，我们知道 $S^2\times S^1$ 中的链环可以用 S^2 上的带双线的图示表示，模去局部变换。因此，对于 $M=S^2\times S^1$，定义 M的 skein 模时，可以将“ M中的链环的同痕类”替换为“ S^2 上的带双线的图示，模去相应的变换”。

现在可以通过将 L_1和L_2 互不相交地放置在 S^2上，在$S_{2\text{中}\infty}(S^2\times S^1)$上定义乘法 $L_1\cdot L_2$。该乘法使$S_{2\text{中}\infty}(S^2\times S^1)$成为交换代数。

定理5.2。定义 tr_n： $\mathcal{H}[B^{dl}_n]\to S_{2,\ \infty}(S^2\times S^1)$ 如下：

$$tr_n(\beta)=(-q^{\frac{1}{4}})^{-wr(\beta)}[\hat{\beta}],$$

其中 wr（β） 是辫图的扭度。于是它满足

- $tr_n(xy)=tr_n(yx)$
- $tr_{n+1}(\beta\sigma_n^{\pm1})=-q\cdot tr_n(\beta)\ for\ \beta\in B^{dl}_n\subset B^{dl}_{n+1}$.

证明。要证明 tr_n 对每个 n都有良好定义，只需证明方程（4.1）保持不变。由方程 4.1 可得

$$\sigma_i^2+(-q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})\sigma_i-1=0.$$

Then

$$\begin{aligned} tr_n((LHS)) &= (-q^{\frac{1}{4}})^2\hat{\sigma_i^2}-(-q^{\frac{1}{4}})^0 1+(-q^{\frac{1}{4}})^1(-q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})\hat{\sigma_i}\\ &= -(-q^{\frac{1}{4}})(q^{\frac{1}{4}}\hat{\sigma_i^2}-q^{-\frac{1}{4}}1+(-q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})\hat{\sigma_i}). \end{aligned}$$

注意，由考夫曼括号 skein 表达式可知

$$q^{\frac{1}{4}}\ -\ q^{-\frac{1}{4}}\ =(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})\ .$$

因此，

$$tr_n((LHS))=0=tr_n((RHS)).$$

由于我们将辫闭合，因此可得 $tr_n(xy) = tr_n(yx)$。对于第二个性质

$$\begin{aligned} tr_{n+1}(\beta\sigma_n) &= (-q^{\frac{1}{4}})^{wr(\beta)+1}\beta\hat{\sigma}_n \\ &= (-q^{\frac{1}{4}})^{wr(\beta)+1}(-q^{\frac{1}{4}})^3\hat{\beta} \\ &= (-q)(-q^{\frac{1}{4}})^{wr(\beta)}\hat{\beta} \\ &= (-q)tr_n(\beta). \end{aligned}$$

□

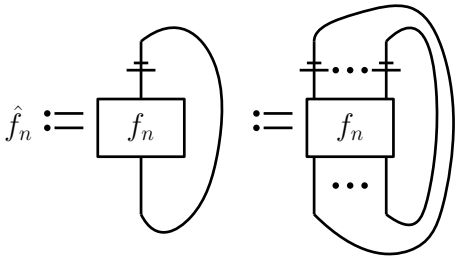
也就是说，存在一个取值于 $S^2 \times S^1$ 的 Kauffman 括号 skein 模的仿射 Hecke 代数的未归一化马尔可夫迹。

关于 $S^2 \times S^1$ 的 Kauffman 括号 skein 模，以下事实众所周知。

命题 5.3 ([2])。

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{4}}] \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{4}}]/(1 - q^{\frac{2i+4}{4}}),$$

在 [2] 中，这种分解的生成元由递推关系给出。特别是，在构造生成元时，变量为 x 的切比雪夫多项式（它表示某个点 $* \in S^2$ 对应的 $\{*\} \times S^1$ ）起着重要作用。在我们的表达式中， x 是 $\hat{}\tau_1$，这是一个带有一条双线的平凡图示。$\hat{}$ 因此， tr_n 的值是图示 f_n 的线性组合，如图 11 所示。



$\hat{}$FIGURE 11. f_n ，其中 f_n 是琼斯–温茨尔幂等元

注记 5.4。类似地，可以证明存在一个从tr_n 到 $\mathcal{H}[B_n^{dl}] \to S_{Homflypt}(S^2 \times S^1)$的迹映射，其中 $S_{Homflypt}(S^2 \times S^1)$是具有以下性质的 Homflypt 缀 skein 模:

- $tr_n(xy) = tr_n(yx)$
- $tr_{n+1}(\beta\sigma_n^{\pm 1}) = tr_n(\beta)$，其中 $\beta \in B_n^{dl} \subset B_{n+1}^{dl}$。

理论上，我们可以定义取值于任意 skein 模的仿射 Hecke 代数迹映射。

6. FURTHER RESEARCH

第一个问题是寻找并分类迹映射。如注释 5.4 中所述，可以构造取值于 skein 模中的仿射 Hecke 代数迹映射。这有助于我们理解仿射 Hecke 代数的结构。另一方面，

从 $\mathcal{H}[B_n^{dl}]$ 与 $\hat{}\mathcal{H}_n$ 之间的关系出发，另一个自然问题是寻找一种与 $\mathcal{H}[VB_n^{dl}]$ 同构的仿射 Hecke 代数。这必然与虚拟辫群和考克斯特群之间的关系有关。值得注意的是，经典辫群是虚拟辫群的子群。这意味着可以预期， B_n^{dl} 是 VB_n^{dl} 的子群，因此 $\hat{}\,\mathcal{H}_n$ 是 $\mathcal{H}[VB_n^{dl}]$ 的子代数。我们将在另一篇论文中讨论这一问题。

结合 $\mathcal{H}[VB_n^{dl}]$ 的结构，可以预期存在一个从 $\mathcal{H}[VB_n^{dl}]$ 到 $S_g \times S^1$ 的 KBSM 的迹映射。答案是否定的，因为对于 VB_n^{dl}，必须对底层曲面进行稳定化和去稳定化。也可以考虑在带边界的固定定向曲面上放置双线的辫子群。这样一来，它或许与仿射 Hecke 代数相关，并由此产生仿射 Hecke 代数到 $S_g \times S^1$ 的 KBSM 的表示。

7. Appendix : Alexander and Markov theorems for links in $S_g \times S^1$

本节证明 $S_g \times S^1$ 中链环的 Alexander 定理和马尔可夫定理。证明紧随 [17] 中关于扭结辫和链环的证明，并采用其中使用的记号。

对于带双线的虚拟图 D ,

- 令 $V(D)$ 为 D 的所有经典交叉点的集合。
- 令 $S(D)$ 为从 $V_R(D)$ 到集合 $\{\pm 1\}$ 的映射，用于为经典交叉赋予符号。

- 令 $d\mathbb{L}(D)$ 为 D 上的双线集合。
- 令 $N(v)$ 为 v 的正则邻域，其中 $v \in V(D) \cup d\mathbb{L}(D)$。
- 对于 $c \in V(D)$，我们将 $c_{(1)}\, c_{(2)}\, c_{(3)}\, c_{(4)}$ 称为 $\partial N(c)$ 的四个点， $\cap D$如图 12 所示。

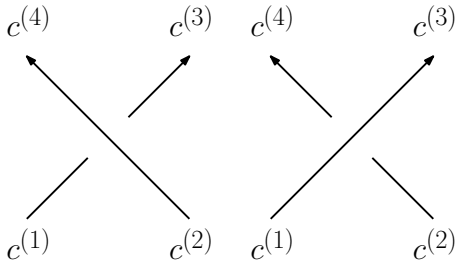


Figure 12. 交叉的边界点

- 对于 $d \in d\mathbb{L}(D)$，我们将 $d_{(1)}$ 和 $d_{(2)}$ 称为 $\partial N(d)$ 的两个点， $\cap D$ 如图 13 所示。

- 令 $W(D) = cl(\mathbb{R}^2 - \cup_{v \in V(D) \cup d\mathbb{L}(D)} N(v))$ ，其中 cl 是闭包。
- 令 $V^{\partial}(D) = \{c_{(j)} |\ c \in V(D)\ 1 \leq j \leq 4\}$，并令 $d\mathbb{L}^{\partial}(D) = \{d_{(j)} |\ d \in d\mathbb{L}(D)$ $j = 1, 2\}$。
- 令 $D|_{W(D)}$ 为 D 在 $W(D)$上的限制；后者由在 $W(D)$中一般位置浸入的定向弧和闭环组成，使得双重点是 D的虚交叉，且边界点集合为 $V^{\partial}(D) \cup d\mathbb{L}^{\partial}(D)$。

- 令 $\mu(K)$ 表示 K的分支数。

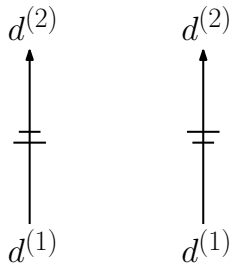


FIGURE 13. 双线的边界点

• 定义 $(V(D)^{\partial} \cup d\mathbb{L}^{\partial}(D))^2$ 的一个子集 $E(D)$，使得 (a,b) 当且仅当 $K|_W$ 存在一条有向弧从 a 出发，并以 b 为端点时，满足 $\in E(D)$。图 D （带有双线）的高斯数据为五元组

$$(V(D), S(D), d\mathbb{L}(D), E(D), \mu(D)).$$

我们称两个带有双线的图 D 和 D' 具有相同的高斯数据，如果 $\mu(D) = \mu(D')$，且存在一个双射 $g\colon V(D) \cup d\mathbb{L}(D) \to V(D') \cup d\mathbb{L}(D')$，满足以下条件：

- $g(V(D)) = V(D')$，且 $g(d\mathbb{L}(D)) = d\mathbb{L}(D')$。
- g 保持经典交叉的符号； $S(D)(c) = S(D')(g(c))$
- $(a, b) \in E(D)$ 当且仅当 $(g^{\partial}(a)\ g^{\partial}(b)) \in E(D')$，其中 $g^{\partial}\colon V^{\partial}(D) \cup d\mathbb{L}^{\partial}(D) \to V^{\partial}(D') \cup d\mathbb{L}^{\partial}(D')$ 是由 g 诱导的双射。

假设 D' 是一个带有双线、且具有与 D 相同的高斯数据的图。那么通过对 $\mathbb{R}^2$ 进行同痕，我们可以移动 D'，使得

- D 和 D' 在每个 $v \in V$（D）$\cup d\mathbb{L}$（D）中均相同于 N（v）。
- D' 在 W（D）中没有经典交叉和双线，
- 的 $D|_{W(D)}$ 的弧/环与 $D'|_{W(D')}$ 的弧/环之间存在一个关于弧的端点的双射。

在这种情况下，我们称 D' 是通过替换 $D|_{W(D)}$ 从 D 得到的。

引理 7.1。设 D 和 D' 是带有双线的图。设 $W = W$（D） $= cl$（$\mathbb{R}^2 - \cup_{v \in V(D) \cup d\mathbb{L}(D)} N$（$v$）） 。

(1) 如果通过替换 $D|_W$ 得到 D'，那么它们之间可以通过有限序列的 $\mathbb{R}^2$ 同伦（其支集为 W）以及图 4 中的变换 *(1')*、*(2')*、*(3')*、*(3")*、*(4')* 相互关联。

(2) 如果两个带双线的图 D 和 D' 具有相同的高斯数据，那么 D 等价于 D'。

证明。证明与 [17] 中引理 3.3 的证明几乎相同。其思路是， D_W 的替换可以表示为有限序列的绕行变换，如图 14 所示。每个绕行变换都可以表示为图 4 中变换 (1')、(2')、(3')、(3")、(4') 的有限序列。□

7.1. 编辫过程。令 O 为 $\mathbb{R}^2$ 的原点。那么，按极坐标， $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ 具有开书分解 $\mathbb{R}_+ \times S^1$，其中 $\mathbb{R}_+$ 为正实数集合。令 $\pi\colon \mathbb{R}_+ \times S^1 \to S^1$ 表示第二坐标投影。

对于带有双线的图 D，我们将 $d\mathbb{L}(D)$ 视为放置双线的点集。

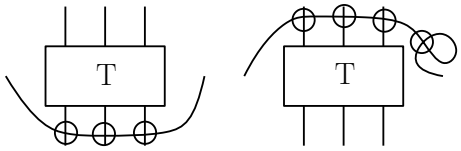


FIGURE 14. 绕行变换：仅含虚交叉的弧可以穿过经典交叉和双线。

定义 7.2. 带有双线的图 D 称为闭合 *dl*-辫图，如果它满足以下条件：

(1) 它包含在 $\mathbb{R}^2 - \{O\} \cong \mathbb{R}_+ \times S^1$ 中。(2) 令 $K: \sqcup S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$ 为 D 的底层浸入。则 $\pi \circ K$ 是 S^1 的一个覆盖映射，其度为 n，相对于 $\sqcup S^1$ 和 S^1 的定向而言。

若闭合 dl-辫图满足以下条件，则称其为良好：

(3) 令 N_1、.....、N_m 为 D 的经典交叉和双线的正则邻域。则对于 $i \neq j$， $\pi(N_i) \cap \pi(N_j) = \emptyset$。

命题7.3。每个含双线的图 D 都等价于一个良好的闭合 *dl*-辫图 D'，使得 D 和 D' 具有相同的高斯数据。

证明。证明与 [17] 中命题3.5的证明类似。思路是，首先移动 D，使得 D 置于 $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ 中，并且 N_1、.....、N_m 满足：对于 $i \neq j$，$\pi(N_i) \cap \pi(N_j) = \emptyset$。其次，移动 D，使得 N_i 中的弧与 $\mathbb{R}^2 - \{O\} \cong \mathbb{R}_+ \times S^1$的 S^1 定向一致。然后在 $W(D)$ 中替换 D 的弧，使结果成为良好的闭合 dl-辫图。这是可行的，因为可以应用绕行变换。□

我们将命题7.3证明中的过程称为编辫过程。

定理7.4。 任意链环都可以表示为某个虚拟双线辫图的闭包。

7.2. **虚拟 dl-辫的马尔可夫定理**。 *0* 型 *dl-Markov* 变换或*dl-M0* 变换是图6所示的虚拟 dl-辫变换。

1 型 *dl-Markov* 变换或*dl-M1* 变换是用另一个虚拟 dl-辫对一个虚拟 dl-辫作共轭，也就是说，$\beta \sim \beta_1^{-1}\beta\beta_1$。

我们通过在β 左侧添加 s 条辫股、在 β右侧添加 t 条辫股，定义映射 $l_s^t(\beta)$: $VB_n^{dl} \to VB_{n+s+t}^{dl}$。 *2* 型 *dl-Markov* 变换或*dl-M2* 变换是正型稳定化 $\beta \sim l_0^1(\beta)\sigma_n$、负型稳定化 $\beta \sim l_0^1(\beta)\sigma_n^1$或虚型稳定化 $\beta \sim l_0^1(\beta)\rho_n$，或它们的逆操作。

类型为 3 的 dl-Markov 变换或*dl-M3* 变换是左、右虚拟交换 e 变换，即，

$$l_1^0(\beta_1)\sigma_1^{-1}l_1^0(\beta_2)\sigma_1 \sim l_1^0(\beta_1)\rho_1^{-1}l_1^0(\beta_2)\rho_1,$$

and

$$l_0^1(\beta_1)\sigma_n^{-1}l_0^1(\beta_2)\sigma_n \sim l_0^1(\beta_1)\rho_n^{-1}l_0^1(\beta_2)\rho_n.$$

定义 7.5。 若两个虚拟 dl-辫图示 β_1 和 β_2 可以通过有限次 dl-M0、dl-M1、dl-M2 和 dl-M3 变换中的变换相互得到，则称它们 dl-Markov 等价。

定理 7.6。 两个虚拟 *dl*-辫的闭包作为 $S_g \times S^1$ 中的纽结等价，当且仅当它们 *dl-Markov* 等价。

上述概念可以从闭合虚拟 dl-辫的角度重新表述。设 D 和 D' 为闭合虚拟 dl-辫图， β 和 β' 为分别沿着 $\pi^{-1}(\theta)$和 $\pi^{-1}(\theta')$切开 D 和 D' 得到的虚拟双线辫图，其中θ， $\theta' \in [0, 2\pi)$。若 β' 可由 β 经过有限次 dl-M0 变换和 dl-M1 变换得到，则称 D'可由 D通过类型为0 的 dl-Markov 变换，或*dl-M0* 变换得到。若 β' 可由 β 经过有限次 dl-M2 变换和 dl-M1 变换得到，则称 D' 可由 D 通过类型为2 的 dl-Markov 变换，或*dl-M2* 变换得到。若 β' 可由 β 经过有限次 dl-M3 变换和 dl-M1 变换得到，则称 D' 可由 D 通过类型为3 的 dl-Markov 变换，或*dl-M3* 变换得到。

定义 7.7. 如果一个闭合虚拟 dl-辫图 D 可以通过有限次 dl-M0、dl-M2、dl-M3 变换得到另一个闭合虚拟 dl-辫图 D' ，则称二者 *dl-Markov* 等价 。

引理 7.8. 两个闭合虚拟 *dl*-辫图 D 和 D' 是 *dl-Markov* 等价的，当且仅当 β 和 β' 是 *dl-Markov* 等价的，其中 β 和 β' 分别是沿着 $\pi^{-1}(\theta)$ 和 $\pi^{-1}(\theta')$切开 D 和 D' 得到的虚拟双线辫图。

证明. 由定义显然可知。 □

由引理 7.8 可知，定理 7.6 等价于下面的定理。

定理 7.9. 两个闭合虚拟 *dl*-辫图作为$S_g \times S^1$ 中的纽结等价，当且仅当它们 *dl-Markov* 等价。

证明定理 7.9 需要以下引理。

引理 7.10。 具有相同高斯数据的两个闭合虚拟 *dl*-辫图是 *dl-Markov* 等价的。

证明。 证明与 [17] 中引理 4.7 的证明完全相同。思路如下：假设 D 和 D' 具有相同的高斯数据。那么，在 D 的交叉点和双线的正则邻域 $\{N(v_1)\ldots, N(v_m)\}$ 与 D' 的交叉点和双线的正则邻域 $\{N(v'_1)\ldots, N(v'_m)\}$ 之间存在一一对应关系。通过 dl-M0 变换和 dl-M2 变换，可以对它们进行变形，使得 $\{N(v_1)\ldots, N(v_m)\}$ 和 $\{N(v'_1)\ldots, N(v'_m)\}$ 按相同的循环次序排列。注意，在这一步中我们主要使用了虚型稳定化和绕行变换。因此，与双线相关的特殊变换 (4)、(4') 和 (5) 不会影响这一过程。然后，我们通过使用 dl-M0 变换和 dl-M2 变换对 $W(D)$ 和 $W(D')$ 上的弧进行变形，使它们具有相同的形式。再次强调，我们主要使用的是绕行变换。 □

定理 *7.9* 的证明。 显然，如果两个闭合虚拟 dl-辫图 dl-Markov 等价，那么它们作为 $S_g \times S^1$ 中的纽结也等价。反过来，假设 D 和 D' 是 $S_g \times S^1$ 中等价的闭合虚拟 dl-辫图。存在一个由带双线的图组成的有限序列

$$D = D_0 \to D_1 \to \cdots \to D_m = D',$$

˜，使得 D_{i+1} 由 D_i 经过图 4 中的某个变换得到。设 D_i 是由 D_i 经过编辫过程得到的闭合虚拟 dl-辫图。由于 D_i 和 ˜ ˜D_i 具有相同的高斯数据，只需证明 D_i 和 D_{i+1} dl-Markov 等价。文献 [4] 已证明，如果 D_{i+1} 由 D_i 经过图 4 中的变换 (1)、(2)、(3)、(4)、(1')、(2')、(3') 和 (3") 得到，也就是说，经过广义 Reidemeister˜ ˜变换，那么 D_i 和 D_{i+1} dl-Markov 等价。对于图 4 中的变换 (5) 和 (4')，其情形与扭结虚链环的变换 TM1 和 TM2 相同。假设 D_{i+1} 由 D_i 经过变换 (4) 得到。设˜$\{N(v_1)\ldots,N(v_l)\}$ 是 D_i˜中交叉点和双线的正则邻域，$\{N(v_1')\ldots,N(v_l')\}$ 是 D_{i+1}中交叉点和双线的正则邻域。设 v_1 和 v_2˜分别是变换 (4) 中包含于 D_i 的交叉点和双线，v_1' 和 v_2'˜分别是变换 (4) 中包含于 D_{i+1} 的交叉点和双线。由于 $N(v_1)$ 和 ˆ$N(v_2)$ 彼此靠近，我们取邻域 $N(v_1,2) = N(v_1)\cup N(v_2)\cup N(\alpha)$，其中 $N(\alpha)$ 是连接 v_1 和 v_2的弧 α 的正则邻域。我们可以将编辫过程应用于 D_i，使得 $\{N(v_1,2)\ N(v_3)\ldots,N(v_l)\}$按˜ ˜ ˜循环次序排列，并得到新的闭合虚拟 dl-辫图 D_i。由于 D_i 和 D_i具有相同的高斯数据，根据引理 7.10，它们 Markov 等价。类似地，˜˜ ˆ可以得到 D_{i+1}，使得 $\{N(v_1',2)\ N(v_3')\ldots,N(v_l')\}$ 按此循环˜ ˜次序排列。于是 D_{i+1} 和 D_{i+1} 具有相同的高斯数据，因此它们 dl-Markov 等价。由于 D_i 和 D_{i+1} 的图示相同，只有 ˆ$N(v_1,2)$ 和 ˜ ˜ˆ˜ ˜ ˆ$N(v_1',2)$ 除外，因此可以假设 D_i 和 D_{i+1} 的图示相同，只有 $N(v_1,2)$˜和 ˆ$N(v_1',2)$ 除外。由于 ˆ$N(v_1',2)\cap\tilde{D}_{i+1}$ 可由 ˜ ˜ ˜ˆ˜ ˜ ˜ ˜ ˜$N(v_1,2)\cap D_i$经过变换 (4) 得到，D_i 和 D_{i+1} dl-Markov 等价，因此 D_i 和 D_{i+1} dl-Markov 等价。□

References

[1] S. Carter、S. Kamada、M. Saito, *Stable Equivalence of Knots on Surfaces and Virtual Knot cobordisms* 311 322，结理论及其分支期刊，第 11 卷，第 03 期，第 - 页（2002）。[2] J. Hoste、J.H. Przytycki, *The Kauffman bracket skein module of $S^1\times S^2$,* 《数学杂志》220（1995），第 1 期，65–73。[3] N. Kamada 和 S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots,* J. Knot Theory Ramifications，第 09 卷，第 01 期，第 93–106 页（2000）。[4] S. Kamada, *Braid presentation of virtual knots and welded knots,* 《大阪数学杂志》44（2007），第 2 期，441–458。[5] S. Kim, *The Groups G_n^k with additional structures,* 《数学札记》第 103 卷，第 4 期（2018），第 549–567 页。[6] S. Kim, *Knots in $S_g\times S^1$ and winding parities,* 结理论及其分支期刊，第 34 卷，第 6 期（2025），2550018（33 页）[7] S. Kim, *Knots in $S_g\times S^1$ their essential diagrams and virtual knots* 2512 06300，，[ ] arXiv: . math.GT[8] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory,* 《欧洲组合学杂志》20（1999），663–690。[9] M. K. Dabkowski、M. Mroczkowski: *KBSM of the product of a disk with two holes and S^1,* 《拓扑学及其应用》，第 156 卷，第 10 期，2009 年 6 月 1 日，第 1831–1849 页[10] M. Geck, S. Lambropoulou, *Markov traces and knot invariants related to Iwahori-Hecke algebras of type B* ˜ 482, 1997, ，《纯粹与应用数学杂志》，第 页 191–214[11] D.P. Ilyutko、V.O. Manturov、I.M. Nikonov: *Virtual Knot Invariants Arising From Parities,* arXiv:1102.5081 [math.GT]

[12] V.F.R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials,* 《数学年刊》126，335–388（1987）。[13] L.H. Kauffman, 《虚结理论》, 《欧洲组合学杂志》20, 7，1999 年，第 663–690 页。[14] L. H. Kauffman, 《虚结理论综述》, 载于《希腊结研讨会 '98 论文集》, 世界科技出版社，2000 年，第 143–202 页。[15] L.H. Kauffman 和 S. Lambropoulou：虚拟辫, 《基础数学》184（2004）, 159–186。[16] V.O. Manturov、D.P. Ilyutko：《虚纽结：现状》, 世界科技出版公司，2012。[17] K. Negi、M. Prabhakar、S. Kamada, *Twisted virtual braids and twisted links,* 《大阪数学杂志》61(4)：569–590（2024年10月）。[18] O. Schiffmann, *On the center of affine Hecke algebras of type A,* 《代数杂志》第 253 卷, 392–416（2000）

Seongjeong Kim, Jilin university
Email address: kimseongjeong@jlu.edu.cn