arXiv:2512.14038v1 [math.GR] 16 Dec 2025

非整数指数的雪花群与共轭子长度函数

M. R. BRIDSON 和 T. R. RILEY

Abstract. 我们展示了离散群共轭问题研究中的新颖几何现象。我们证明，由正整数对 $p > q$ 索引的雪花群 B_{pq}，其共轭长度函数为 $\mathrm{CL}(n) \simeq n$，环形 Dehn 函数为 $\mathrm{Ann}(n) \simeq n^{2\alpha}$，其中 $\alpha = \log_2(2p/q)$。接着，在 B_{pq} 的基础上，我们构造出群 $\tilde{B}^+_{pq}$，使得 $\mathrm{CL}(n) \simeq n^{\alpha+1}$。因此，共轭元长度谱和环形 Dehn 函数的指数谱在区间 $[2, \infty)$ 内都稠密。

1. Introduction

共轭元长度函数为有限生成群中的共轭问题难度提供了几何性质的界，而环形 Dehn 函数则在有限表示群的情形下提供了另一种界。本文旨在说明这些函数呈现出丰富多样的行为。我们聚焦于有限表示群以及形如$n \mapsto n^\alpha$的函数，并将证明，在这两种情形下，出现的指数谱 α 在区间 $[2, \infty)$内稠密。这与关于***Dehn*** 函数的一项奠基性结果相呼应。Dehn 函数是一类与有限表示群的字问题密切相关、已得到深入研究的函数。根据定义，有限表示群的 Dehn 函数 $G = \langle A \mid R \rangle$ 为

$$\mathrm{Dehn}_G(n) = \max\{\mathrm{Area}(u) \mid |u| \le n,\ u = 1 \text{ in } G\},$$

其中，u 是由字母 $A^{\pm 1}$ 构成、表示 $1 \in G$ 的一个字，$\mathrm{Area}(u)$ 是满足以下条件的最小整数 N：u 在自由群 $F(A)$ 中等于 N 个定义关系的共轭元之积。用更几何的语言来说，N 是 u 的最小范坎彭图中的组合面积（即 2-胞腔的数量）。等周谱 **IP** 是满足以下条件的数 $e \ge 1$ 所组成的可数集合：

Date：2025年12月15日。第一作者感谢斯坦福大学数学系在其2025年春季休假期间给予的款待。第二作者衷心感谢美国国家科学基金会（NSF GCR-2428489）提供的经费支持。ORCID：0000-0002-0080-9059（MRB）和0009-0004-3699-0322（TRR）。

存在一个有限表示群，其 Dehn 函数为 $\simeq n^e$，其中，$\simeq$ 是几何群论中的标准等价关系（见第2节）。Gromov 证明了**IP** 在1 和2之间存在一个间隔；参见 [Gro93、Ol′91、Bow95、Pap95]。Brady 和 Bridson [BB00] 证明这是唯一的间隔；换言之，**IP** 的闭包为 $\{1\} \cup [2, \infty)$。

有限生成群的共轭元长度函数共轭长度：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$\mathrm{CL}_G(n) = \max\{\mathrm{CL}(u, v) \mid |u| + |v| \leq n,\ u \sim v\}$$

其中，u 和 v 是由生成元构成的字，共轭长度$(u,\ v)$ 是将 u 共轭到 v 中的最短元素的长度；在 $\simeq$ 等价意义下，它与生成集的选择无关。满足对于某个有限表示群 G 有 $n^e \simeq$ 共轭长度$_G(n)$ 的数 e 的集合是 $[1, \infty)$的一个可数子集，我们称之为共轭元长度谱**共轭长度**。在 [BR25b、BR25a] 中，我们证明了 $\mathbb{N} \subset$ **共轭长度**，但在本研究之前还没有已知的整数指数。下述定理中的非整数指数是超越数的。

定理1.1。对于每一对正整数 $p > q$，都存在一个有限表示群 G，使得共轭长度$_G(n) \simeq n^{\alpha+1}$，其中 $\alpha = \log_2(2p/q)$。

推论1.2。**共轭长度** 在取值范围 $[2, \infty)$中稠密。

我们不知道**共轭长度** $\cap\, [1, 2]$中是否存在间隙。

有限表示群 G的环面***Dehn***函数 由 Brick 和 Corson 在 [BC98] 中定义，最近又由 Gillis 和 Riley 在 [GR25], 中重新探讨。它是函数$\mathrm{Ann}_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，定义如下：

$$\mathrm{Ann}_G(n) = \max\{\mathrm{Ann}(u, v) \mid |u| + |v| \leq n,\ u \sim v\}$$

其中，u 和 v 是生成元中字，并且$\mathrm{Ann}(u, v)$ 是满足以下条件的最小值：存在一个字 w，使得 $uw = wv$ 在 G 中且面积$_G(w^{-1}uwv^{-1}) = N$；或者等价地，存在一个环形图 展示共轭关系 $u \sim v$，且其组合面积为 N。正如 [BC98], 中所观察到的，对于任意有限表示群 G,

$$\mathrm{Dehn}_G(n) \ \leq\ \mathrm{Ann}_G(n) \ \leq\ \mathrm{Dehn}_G(2\mathrm{CL}(n) + n). \tag{1}$$

这里的第一个不等式来自专门考虑共轭关系 $u \sim v$ 其中 v是空字，而第二个不等式成立是因为，如果 $|u| + |v| = n$ 和$u \sim v$，那么存在一个 w，使得 $w^{-1}uwv^{-1}$ 的长度至多为2共轭长度$(n) + n$，并且在 G中表示单位元。

定理 1.3。 对于每一对正整数 $p > q$，存在一个有限表示群 G，满足$\mathrm{Ann}_G(n) \simeq n^{2\alpha}$，其中 $\alpha = $ 对数$_2(2p/q)$。

该定理表明，Ann 在区间 $(2,\infty)$ 中稠密，且包含所有大于 2 的整数。观察到 $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}^2}(n) \simeq n^2$ 增加了指数 2。若 $\mathrm{Ann}_G(n) \lesssim n^e$ 对于 $e < 2$，则不等式 (1) 中的第一个不等式告诉我们 $\mathrm{Dehn}_G(n) \lesssim n^e$，因此 $\mathrm{Dehn}_G(n) \simeq n$，并且 G 是双曲 Gro87]。对于双曲群，$\mathrm{CL}_G(n) \simeq n$，因此由不等式 (1) 中的第二个不等式可知 $\mathrm{Ann}_G(n) \simeq n$。

推论 1.4。 $\mathbb{N} \subset$ **Ann** 与 **Ann** 的闭包为 $\{1\} \cup [2,\infty)$。

我们用于证明这些结果的构造始于雪花群，Brady 和 Bridson 曾用它们证明 **IP** 的闭包为 $\{1\}\cup[2,\infty)$：

$$B_{pq} = \left\langle a, b, s, t \mid [a,b] = 1,\ s^{-1}a^q s = a^p b,\ t^{-1}a^q t = a^p b^{-1} \right\rangle. \tag{2}$$

若 $p > q$，则 $\mathrm{Dehn}^{B_{pq}}(n) \simeq n^{2\alpha}$，其中 $\alpha = \log_2(2p/q)$。这是一族管状群： B_{pq} 是如下 2-复形的基本群：该复形由基本群为 $\langle a,b\rangle \cong \mathbb{Z}^2$ 的环面出发，附加两个圆柱构成；每个圆柱的一端都绕环路 a 缠绕 q 次，另一端则分别绕环路 $a^p b$ 和 $a^p b^{-1}$ 缠绕。

B_{pq} 的共轭元长度函数并不特殊，事实上它是线性的（定理 5.2）。这个平淡无奇的结论或许会令人失望，但结合（1）来看，它立即导出定理 1.3 的证明。

定理 1.5。 若 $p > q$，则 $\mathrm{Ann}^{B_{pq}}(n) \simeq n^{2\alpha}$，其中 $\alpha = \log_2(2p/q)$。

我们继续寻找更有趣的共轭元长度函数，考察这样一族管状群：在 B_{pq} 的 2-复形上再添加一个圆柱，并且这次圆柱的两端都绕环路 b 缠绕。该复形的基本群是通过添加一个与 b 交换的新稳定字母 θ，从 B_{pq} 得到的 HNN 扩张：

$$B^+_{pq} = \left\langle a, b, s, t, \theta \mid [a,b] = 1,\ [b,\theta] = 1,\ s^{-1}a^q s = a^p b,\ t^{-1}a^q t = a^p b^{-1} \right\rangle. \tag{3}$$

这些群也具有线性的共轭元长度函数（定理 5.2），但当我们取以下中心扩张时，会出现更为奇特的情况：

$$\tilde{B}^+_{pq} = \left\langle a, b, s, t, \theta, z \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ central},\ [b,\theta] = z,\ [a,b] = 1, \\ s^{-1}a^q s = a^p b,\ t^{-1}a^q t = a^p b^{-1} \end{array} \right\rangle. \tag{4}$$

˜可以将 B_{pq}^+ 视为 $B_{pq}\times\mathbb{Z}$ 的 HNN 扩张，其中带有 $\mathbb{Z}=\langle z\rangle$，该扩张的稳定字母为 θ，通过同构$[z\mapsto z,\ b\mapsto bz]$将 $\langle b、z\rangle$ 共轭到自身。或者，注意到 $H=\langle b、\theta、z\rangle < B_{pq}^+$是三维海森堡群的一个副本˜，也可以将 B_{pq}^+ 视为 $B_{pq}\times\mathbb{Z}$ 与 H的合并自由积，其中通过记号中隐含的同构，将 $\langle b$的两个副本、$z\rangle$ 合并。在这两种描述中，都显然可见中心 $\langle z\rangle$ 是无限的。

定理 1.6. 若 $p>q$，则 共轭长度 $\tilde{B}_{pq}^+(n)\simeq n^{\alpha+1}$，其中 $\alpha=$对数$_2(2p/q)$。

由此得出定理1.1。我们还将证明以下辅助结果（见第3、5和6节）。

定理 1.7. 对于所有正整数 $p>q$，记 $\alpha=$对数$_2(2p/q)$，则有：

(i) *The Dehn function of* B_{pq}^+ *is* $\simeq n^{2\alpha}$.
(ii) $\mathrm{CL}_{B_{pq}}(n)\simeq\mathrm{CL}_{B_{pq}^+}(n)\simeq n$.
(iii)
(iv) *The distortion of* $Z=\langle z\rangle < \tilde{B}_{pq}^+$ *is* $\mathrm{dist}_Z(n)\simeq n^{\alpha+1}$.

概要。 在第2节中，我们规定符号，并介绍关于 van Kampen（圆盘）图及其共轭问题类似物——环形图的一些基本事实。在第3节简要讨论 B_{pq}^+ 的 Dehn 函数后，我们开始本文的主要工作，即证明定理 1.6 和 1.7。

证明 [BB00] 的 Dehn 函数为 $n^{2\alpha}$ 的过程中， B_{pq} 研究了一类具有分形性质的“雪花”字 w_k （本文定义 4.1）。这些字被用于证明自由阿贝尔子群 $\mathbb{T}=\langle a,\ b\rangle < B_{pq}$ 的扭曲为 $\simeq n^{\alpha}$。我们对定理 1.6 的证明很大程度上依赖于这一结果的一个更精细版本，因此必须重新考察 B_{pq} 中雪花词与测地线的几何性质——这将在第 4 节完成。

在第 5 节中，我们证明 B_{pq} 和 B_{pq}^+ 的共轭长度函数是线性的。为此，我们采用一种几何论证，该论证适用于任意多个自由阿贝尔群的 HNN 扩张，其中被合并的子群都是循环群，并且构成一个适当斜交的族（定理 5.2）。

在第6节中，我们建立了下界 共轭长度 $\tilde{B}_{pq}^+(n)\succeq n^{\alpha+1}$ （引理 6.5）。首先注意，在 $\tilde{B}_{pq}^+$ 中，将 b 共轭到 bz^M 的最短字是 θ^M，因为˜在海森堡群 $\langle b,\ \theta,\ z\mid z$ 中心的 $[\theta,b]=z\rangle$ 上也是如此，而 B_{pq}^+ 收缩到该群。第二个关键点是，当 $M\approx n^{\alpha+1}$时， $d_{\tilde{B}_{pq}^+}(1,\ bz^M)\approx n$，这 ˜ 反映了 B_{pq}^+ 中中心 $\langle z\rangle$ 的扭曲。这种扭曲可以通过统计 B_{pq}^+ 上的 van Kampen图中标记为 $[b,\theta]$ 的胞腔来估计，而这又可以借助我们在 B_{pq} 中的扭曲估计加以界定。

本文余下部分致力于证明 CL $_{\tilde{B}^+_{pq}}(n) \preceq n^{\alpha+1}$。我们首先在第7节和第8节中聚焦于共轭元素的特殊情形$g \sim gz^N$，其中 $N \in \mathbb{Z}$。由于 $\tilde{B}^+_{pq}$ 是由 $\langle z\rangle \cong \mathbb{Z}$ 对 B^+_{pq} 作的中心扩张，使得 $g \sim gz^N$ 在 $\tilde{B}^+_{pq}$ 中成立的整数集合 N，是从中心化子 $C_{B^+_{pq}}(g)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的一个同态ζ_g 的像，我们称之为 ζ映射。我们逐个情形确定（见命题 8.3） $C_{B^+_{pq}}(g)$ 和 ζ_g 关于 g 的具体形式。给定 $C_{B^+_{pq}}(g)$ 的生成元，它们在 ζ_g 下的像 m_1、……、m_r 的某个 $\mathbb{Z}$-线性组合等于 N；换言之，线性丢番图方程 $a_1m_1 + \cdots + a_rm_t = N$ 有解 a_1、……、$a_r \in \mathbb{Z}$。我们论证（见引理 7.2 ），通过考察其他整数解，可以控制整数 a_i 的绝对值，从而使我们能够按预期控制共轭元的长度。

在第 11 节中，为了对一般的 $u \sim v$ in$_{\sim B^+_{pq}}$ 的共轭元长度给出上界，我们将采用以下策略：不直接将 u 共轭到 v，而是取它们在 B^+_{pq} 中的像 $\bar{u} \sim \bar{v}$，并利用这样一个事实：共轭长度$_{B^+_{pq}}(n) \simeq n$ （定理 5.2），将它们分别共轭到其共轭类的优选代表元 u_0，所用共轭元的长度均可给出上界。将这些共轭关系提升到 $\tilde{B}^+_{pq}$，便得到一个共轭关系 $u \sim vz^N$，其中偏差 z^N 位于中心。但此时 $u_0 \sim u_0z^N$，我们可以利用第7节和第8节所分析的特殊情形所提供的另一个共轭字来消除这一偏差

为了实施这一策略，我们需要谨慎选择 u_0，不仅要控制其长度，还要控制其中心化子和 ζ映射 ζ_{u_0}；这一选择在第9节中作出。在证明的这一阶段，为那些共轭元的长度给出上界，需要依赖子群 $\langle a,\ b,\ \theta\rangle$ 在 B^+_{pq} 中度量的一些精细性质。我们在第10节中证明所需的估计，并以我们对 $\langle a,\ b\rangle$ 在 B_{pq} 中几何性质的理解为基础，正如命题 4.3 所述。

注记1.8（其他指数族）。我们在定理1.1中证明，对于每一对整数 $p > q > 0$，且对于 $\alpha = \log_2(2p/q)$，都存在一个有限表示群，其共轭长度$(n) \simeq n^{1+\alpha}$。我们将在后续文章中说明，通过取 B_{pq} 的一个中心扩张，并将其中心与三维海森堡群的中心作 amalgamated product，可以构造出一个有限表示群，其共轭长度$(n) \simeq n^{2\alpha}$。这给出了一组不同的指数，在$(2,\infty)$中稠密。更一般地，通过取 B_{pq} 的一个中心扩张，并将其中心与 G_m 的中心作 amalgamated product，其中 G_m 是 [BR25b], 中构造的二步幂零群，我们得到具有共轭长度$(n) \simeq n^{m-1+2\alpha}$的有限表示群。

2. Preliminaries

给定函数 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，若存在常数$C > 0$ 使得对所有 n，都有 $f \lesssim g$ 和 $f(n) \leq Cg(Cn + n) + Cn + C$，并且若 $f \lesssim g$ 且$g \lesssim f$，则记作 $f \simeq g$。在这种标准等价关系下，共轭长度$_G(n)$ 不依赖于群 G 的有限生成集的选取，而 $\mathrm{Ann}_G(n)$ 和$\mathrm{Dehn}_G(n)$ 不依赖于有限表示的选取。

我们用 $=$ 表示两个字在群中表示同一个元素，用 $\equiv$ 表示两个字逐字母完全相同。我们用 $[x, y]$表示交换子 $x^{-1}y^{-1}xy$。

设 G 是由有限表示 $\langle A \mid R\rangle$给出的一个群。字 w （由生成元 A组成）的范坎彭图是一个有限、平面、可缩的 2-复形，其边界上有一个基顶点，边均带有方向并标记为 A 中的元素；标记方式须保证每个 2-胞腔的边界圈都标记为 $R^{\pm 1}$中的一个关系，而从基点出发读取图的边界圈所得的标记为 w。

范坎彭图的重要性由范坎彭引理概括，该引理指出，字 w 在 G 中表示单位元，当且仅当它有一个范坎彭图。字 w的面积记作$\mathrm{Area}(w)$，定义为以 w为边界字的范坎彭图中面（2-胞腔）的最少数量。

由一对字 u 和 v 确定的环形图是一个有限的平面组合 2-复形，它同伦等价于一个圆；在退化情形下，则等价于一个点。它的边带有方向，并标记为来自 A 的生成元。沿每个面的边界读取，可得到 $R^{\pm 1}$中的一个关系。字 u 和 v 标记图的两个边界圈，从圈上的某个顶点开始，按顺时针方向读取。

环形图的范坎彭引理类似结论如下：若存在一个由 u 和 v确定的环形图，则 u 和 v 在 G 中共轭（记作 $u \sim v$）；反过来，若 $u \sim v$ 和 $u \neq 1$ 在 G中共轭，则存在一个由 u 和 v确定的环形图。

我们最近与 Andrew Sale 合著的文章 [BRS25]综述了共轭元长度函数，并对这些预备知识作了细致的阐述。

3. The Dehn function of B^+_{pq}

我们将仔细证明定理 1.7 的断言 (2)–(4)，但由于 (1) 与我们对共轭元长度函数的研究没有直接关系，因此我们只简要概述其证明。界 $n^{2\alpha} \preceq \delta_{B^+_{pq}}(n)$ 可直接由以下事实推出：消去 θ 会将 B^+_{pq} 收缩到 B_{pq}，且 $n^{2\alpha} \simeq \delta_{B_{pq}}(n)$。互补的界 $\delta_{B^+_{pq}}(n) \preceq n^{2\alpha}$ 可通过仿照命题 3.2 的证明建立

在 [BB00] 中。根据命题 4.3 得到的 $\langle b\rangle$ 在 B_{pq} （因而也在B_{pq}^{+}）中的扭曲估计，只需对证明稍作调整并改变常数即可完成转换。

4. Snowflake words and the distortion of $\mathbb{T}=\langle a,\ b\rangle$ in $B=B_{pq}$

我们固定正整数 $p>q$，并在本节中用 B 代替 B_{pq}，以避免符号过于繁杂。我们保留记号 $\alpha=$对数$_2(2p/q)$，并注意到 $\alpha>1$。

定义 4.1 （雪花词）。对于每个正整数 N，我们希望定义一个由字母 $\{a,b^{\pm1},s^{\pm1},t^{\pm1}\}$ 构成的雪花词 w_N，使得 $w_N=a^N$ 属于 B，且w_N 相对较短（其精确含义见引理 4.1）。这些字是通过简单的递归构造出来的，其几何结构如图 1 所示。为了使递归的早期步骤简洁明了，若 $N<2p$，我们定义 $w_N\equiv a^N$。然后，对于$N\geq 2p$，在已为 $n<N$定义了 w_n 之后，我们将 $N=2pN_0+\epsilon_0$ 写成 $0\leq\epsilon_0<2p$，并定义

$$w_N\equiv a^{\epsilon_0}(s^{-1}w_{qN_0}s)(t^{-1}w_{qN_0}t).$$

由归纳法，$w_{qN_0}=a^{qN_0}$ 属于 B，因此 $s^{-1}w_{qN_0}s=(s^{-1}a^qs)^{N_0}=(a^pb)^{N_0}$ 且$t^{-1}w_{qN_0}t=(t^{-1}a^qt)^{N_0}=(a^pb^{-1})^{N_0}$。因此

$$w_N=a^{\epsilon_0}(a^pb)^{N_0}(a^pb^{-1})^{N_0}=a^{2pN_0+\epsilon_0}=a^N,$$

如要求。

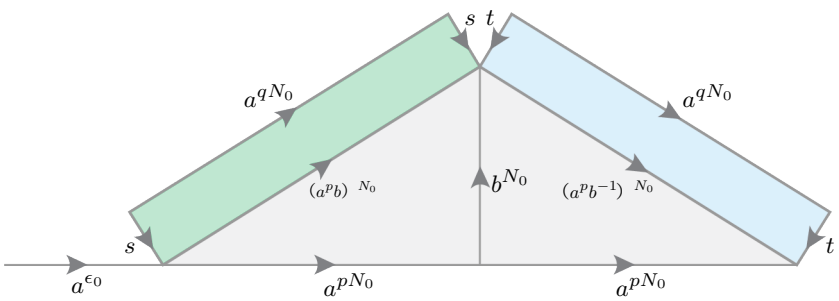

Figure 1. 构造雪花词的递归

引理 4.1。对于所有正整数 d，若 $N\leq(2p/q)^d$ 且 $C\geq 2p+3$，则 $|w_N|\leq C(2^d-1)$。

证明。固定 d 和 C 后，我们对 N 进行归纳法。若 $N \le 2p$，则 $w_N \equiv a^N$，因此 $|w_N| = N \le 2p$，对于所有 $d \ge 1$，它小于 $C(2^d - 1)$ 。对于归纳步骤，我们回顾如果

$$N = 2pN_0 + \epsilon_0 \tag{5}$$

若满足 $0 \le \epsilon_0 < 2p$，则

$$w_N \equiv a^{\epsilon_0}(s^{-1}w_{qN_0}s)(t^{-1}w_{qN_0}t)$$

因此

$$|w_N| \le \epsilon_0 + 4 + 2|w_{qN_0}| < 2p + 4 + 2|w_{qN_0}|. \tag{6}$$

由 (5) 得 $qN_0 \le (q/2p)N$，因此 $N \le (2p/q)^d$ 蕴含 $qN_0 \le (2p/q)^{d-1}$。因此，根据归纳法，由 (6) 得

$$|w_N| < 2p + 4 + 2C(2^{d-1} - 1) = C(2^d - 1) + (2p + 4 - C).$$

由于 $C \ge 2p + 3$，归纳过程至此完成。 □

引理 4.2。设 $r = 2p/q$，且令 $\alpha = \log_2 r$。存在正数常量$k_i, K_i\,(i = 0, 1, 2)$，使得对所有整数 $N > 0$,

(i) $k_0 N^{1/\alpha} \le d_B(1,\ a^N) \le K_0 N^{1/\alpha}$(ii)

$k_1 N^{1/\alpha} \le d_B(1,\ (a^p b)^N) \le K_1 N^{1/\alpha}$(iii)

$k_2 N^{1/\alpha} \le d_B(1,\ (a^p b^{-1})^N) \le K_2 N^{1/\alpha}$。

证明。由于 $a^p b = s^{-1}a^q s$ 和 $a^p b^{-1} = t^{-1}a^q t$，(ii) 和 (iii) 可由 (i) 轻易推出，因此我们集中证明 (i)。首先给出上界。

给定 N，令 $d > 0$ 为满足 $r^{d-1} \le N < r^d$的整数。那么

$$d - 1 \le \log_r N = \frac{\log_2 N}{\log_2 r} = \frac{1}{\alpha}\log_2 N = \log_2 N^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Fro根据引理 4.1，对于雪花词 w_N，取 $C = 2p + 3$，有

$$d_B(1, a^N) \le |w_N| \le C(2^d - 1) < C2^d = (4p + 6)2^{d-1}. \tag{8}$$

结合 (7) 和 (8)，我们得出

$$d_B(1, a^N) \le (4p + 6)2^{\log_2 N^{1/\alpha}} = (4p + 6)N^{1/\alpha},$$

因此，只需令 $K_1 = 4p + 6$。

这些常数 k_0, k_1, k_2 的存在性是 [BB00 命题 2.1] 的内容。□

下面的命题强化了[BB00]中的主要子群畸变结果。该论证的独特之处在于 B，它最显著地依赖于顶点群 $\mathbb{T}$的阿贝尔性质，这使我们能够借助一个置换 σ重新排列 $v_1 \cdots v_m$。

命题 4.3. 存在一个常数 $\kappa > 1$，使得对于所有 $g \in \mathbb{T} = \langle a,b \rangle$，在 $B = B_{pq}$ 中都有

$$\frac{1}{\kappa}\, d_{\mathbb{T}}(1,g)^{1/\alpha} \leq d_B(1,g) \leq \kappa\, d_{\mathbb{T}}(1,g)^{1/\alpha}.$$

证明. 只需证明存在正数常量 k, K，使得

$$k\, d_{\mathbb{T}}(1,g)^{1/\alpha} \leq d_B(1,g) \leq K\, d_{\mathbb{T}}(1,g)^{1/\alpha},$$

这正是我们要做的。于是可以定义 $\kappa =$ 最大值$\{K, 1/k\}$。

常数 k 和 K 的存在性（但其具体取值并非如此）与 B 和 $\mathbb{T}$ 所选取的有限生成集无关。对于最右边的不等式，使用 $\mathbb{T}$ 的生成集 $\{a, a^p b\}$ 会更方便。于是，给定$g = a^N (a^p b)^M$，有 $d_{\mathbb{T}}(1,g) = |M| + |N|$。另一方面，利用三角不等式和引理 4.2，有

$$d_B(1,g) \leq d_B(1,a^N) + d_B(1,(a^p b)^M) \leq K_0 |N|^{1/\alpha} + K_1 |M|^{1/\alpha},$$

因此，根据闵可夫斯基不等式，

$$d_B(1,g)^\alpha \leq K^\alpha (|N| + |M|) = K^\alpha\, d_{\mathbb{T}}(1,g),$$

其中 $K = \max\{K_0, K_1\}$。将两边同时提升到 $1/\alpha$ 次幂，便得到 $d_B(1,g)$ 的所需上界。

为了证明 $d_B(1,g)$ 的相应下界，我们考察 g 在 B 中的测地代表元的性质，并使用标准生成集 $\{a, b, s, t\}$。下面的论证完全可以用代数方法进行，但借助 van Kampen 图来考察会更有启发性。

令 $g = a^N b^M$，令 ω 为 g 的一个测地代表，并考虑一个最小面积范坎彭图，其边界标记为 $\omega (a^N b^M)^{-1}$，如图 2 所示。Δ 中所有 s-走廊和 t-走廊的端点都位于标记为 ω 的 $\partial\Delta$ 弧上。删除所有走廊的内部后，我们将 Δ 切分为若干互不相交的可缩子图 $\Delta_0, \ldots, \Delta_l$，其中一个子图 Δ_0 包含原先标记为 $a^N b^M$ 的边界弧。Δ_0 的边界圈上的标记具有 $u_1 u_2 \ldots u_m (a^N b^M)^{-1}$ 的形式，其中每个 u_i 都是自由群（其生成元为 $\{a, b\}$）中的一个字，它或者是某个 s-走廊或 t-走廊侧边上的标记，或者是边界圈 $\partial\Delta$ 上某一段的标记。标记走廊侧边的字 u_i

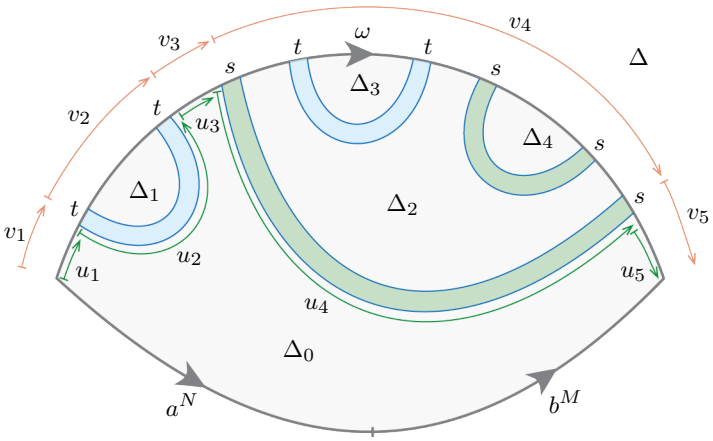

FIGURE 2. 用于说明命题 4.3 的证明

分为三种类型： 的幂、 的幂或 的幂。我们将其余的u_i（即来自 的那些）视为第四种类型。令 v_i 为 ω 中标记连接 u_i 两端点的弧的（测地）子词，并注意，由于$u_i = v_i$ 属于阿贝尔子群 $\mathbb{T} = \langle a,\ b\rangle$对每个置换 $\sigma \in \mathsf{sym}(m)$

$$v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(m)}$$

也是 B 中 g 的一个测地代表。

我们应用一个置换 σ，将四种类型各自的所有 u_i 放在一起，从而得到一个由字母 a, b 构成的新字，表示 g

$$g = u_0 a^{qN_1} (a^p b)^{N_2} (a^p b^{-1})^{N_3}$$

其中

$$d_B(1,g) = |\omega| = |u_0| + d_B(1, a^{qN_1}) + d_B(1, (a^p b)^{N_2}) + d_B(1, (a^p b^{-1})^{N_3}).$$

利用引理 4.2，并取 $k_3 := \min\{1, k_0, k_1, k_2\}$，可得

$$\frac{1}{k_3}\, d_B(1,g) \geq |u_0| + (qN_1)^{1/\alpha} + N_2^{1/\alpha} + N_3^{1/\alpha}. \tag{9}$$

另一方面， $\mathbb{T}$ 中的三角不等式告诉我们

$$d_{\mathbb{T}}(1,g) \leq |u_0| + q|N_1| + (p+1)|N_2| + (p+1)|N_3| \leq (p+1)(|u_0| + q|N_1| + |N_2| + |N_3|).$$

因此，

$$\frac{1}{4(p+1)}\, d_{\mathbb{T}}(1,g) \leq \max\{|u_0|,\ q|N_1|,\ |N_2|,\ |N_3|\} =: \mu. \tag{10}$$

由（9）可得 $d_B(1,g) \geq k_3 \mu^{1/\alpha}$，因此由（10）可知

$$d_B(1,g) \geq \frac{k_3}{(4(p+1))^{1/\alpha}}\, d_{\mathbb{T}}(1,g)^{1/\alpha}.$$

令 $k = k_3/(4(p+1))^{1/\alpha}$，证明即告完成。 □

5. Skew slabs, annular diagrams, and conjugacy in B_{pq}

假设 $A \cong \mathbb{Z}^r$ 是一个带有字度量 d 的自由阿贝尔群。

定义 5.1. A 中的循环子群对 L, L' 称为斜交的，若它们各自都是无限的，且$L \cap L' = 1$。A 中的循环子群族 $L_1, \dots, L_m$ 称为斜交的，若每一对L_i, L_j 满足 $L_i \neq L_j$ 时都是斜交的。

引理5.1. 对于 A 中任意一对斜交的循环子群 L, L'，存在一个常数 $\eta > 0$，使得若 $x, y \in A$, $\ell \in L$ 和 $\ell' \in L'$ 满足 $x\ell = \ell' y$，则

$$\max\{d(1,\ell),\, d(1,\ell')\} \leq \eta \, \max\{d(1,x),\, d(1,y)\}.$$

证明。这是由欧氏空间中斜交直线线性发散这一事实，以及当 $\mathbb{Z}^r$赋予字度量 d 时，标准嵌入 $\mathbb{Z}^r \hookrightarrow \mathbb{E}^r$ 是双利普希茨的这一事实立即得出的。□

我们将用这个引理证明：

定理 5.2。共轭长度$_{B_{pq}}(n) \simeq$共轭长度$_{B^+_{pq}}(n) \simeq n$。

事实上，我们证明下面这个更一般的定理，它同时适用于$G = B_{pq}$ 和 $G = B^+_{pq}$。在下述表述中，默认 A是由 $a_1, \dots, a_r$生成的群，并且 c_i和 c_i'是由这些生成元构成的字。

定理 5.3。考虑一个由 $A = \langle a_1, \dots, a_r \rangle \cong \mathbb{Z}^r$ 的 ***HNN*** 扩张 G，其中有 m个稳定字母，

$$G = \left\langle a_1, \dots, a_r, t_1, \dots, t_m \mid [a_j, a_{j'}] = 1, \;\; t_i^{-1} c_i t_i = c_i' \;\; \forall i, j, j' \right\rangle,$$

其中 t_i 将无限循环子群 $L_i = \langle c_i \rangle$ 共轭到 $L_i' = \langle c_i' \rangle$，且族 $L_1, L_1', \dots, L_m, L_m' \leq A$ 是斜交的。假设存在常数 $\alpha > 1$和 $k > 1$，使得对所有 $x \in A$,

$$\frac{1}{k} d_G(1,x)^{1/\alpha} \leq d_A(1,x) \leq k\, d_G(1,x)^{1/\alpha}.$$

那么 共轭长度$_G(n) \simeq n$。

证明。根据假设， A 的任何循环子群在 G中都没有指数扭曲。因此，如果 A 的某个非平凡元素 x 的幂 x^λ 和 x^μ 在 G中共轭，那么$\lambda = \pm\mu$。

考虑一个最小面积环形图 Δ，它表示从v 到 u的共轭，其中 v 是内边界圈上的标记， u 是外边界圈上的标记。我们考察此图中的 t_i-走廊和环形图。一般性考量（详见 [BRS25]）告诉我们，可以假设 Δ中不存在非本质的 t_i-环形图。

假设存在一个本质的 t_i-环形图。我们将论证，对于每个 i， Δ 至多有两个 t_i- 环形图；若确有两个，则一个环形图中的 t_i- 边指向内边界圈，另一个环形图中的 t_i-边则指向外侧。为说明这一点，注意若有两个t_i-环形图，那么它们的边界圈分别标记为 c_i^λ、 $c_i'^\lambda$、 c_i^μ 和 $c_i'^\mu$，其中λ， $\mu \in \mathbb{Z}$，且这四个字在 G中表示共轭元素，因此如上所述，$\lambda = \pm\mu$。若情况是 $\lambda = \mu$，我们可以从 Δ 中删去由标记为 c_i^λ和 c_i^μ 的圈围成的子图内部，或删去由标记为 $c_i'^\lambda$ 和 $c_i'^\mu$ 的圈围成的子图，然后将这些圈识别起来；这两种操作至少有一种会减少面积，这与我们关于Δ 具有最小面积的假设矛盾。这一分析排除了存在三个本质的 t_i-环形图的可能性，因为任意三个中必有一对会导致我们刚才描述的面积缩减（但仍允许存在两个 t_i-环形图，条件是 $\lambda = -\mu$）。

我们已经论证， Δ中至多存在 $2m$ 个本质 t_i-环形图。接下来要注意的是，这些环形图必定构成一个单独的堆叠，如图 4 左侧所示。要理解这一点，请注意：如果径向顺序中两个相邻走廊之间存在非空子图，那么这个子图就会展示 A 中某个 t_i-环形图外边界圈上的标记与下一个环形图内边界边界圈上的标记之间的共轭关系；由于 A 是阿贝尔群，这些标记作为群元素（从任意基点读取）必定相等；事实上，由于每个标记都是 c_i 或 c_i' 的幂，且合并循环子群的族是斜交的（这排除了 $c_i^{n_1} = c_j^{n_2}$ 和 $c_i^{n_1} = c_j'^{n_2}$ 与 $|n_1| \neq |n_2|$ 的情形），这些标记（从合适的基点读取）必定相等，因此我们可以删除该子图的内部，得到一个面积更小的图，从而与 Δ 的假定极小性矛盾。

假设 t_i-环带堆非空，并考虑两个互补的子图（它们可能退化）。若其中一个子图（比如内侧的那个 Δ_0）中没有 t_i-走廊，那么它就刻画了 A 中从 v 到标记走廊堆内边界圈的字的一个共轭。由于 A 是阿贝尔群，后一个字（它是某个 c_i 或 c_i' 的幂）在 A 中等于 v。

（注意，没有从标记为 v 的圈发出的 t_i-走廊，意味着 v 必须是 A 的生成元 a_j 中的一个字。）现在，我们通过用一个刻画这一等式的范坎彭图替换 Δ_0 来修改 Δ 。这个范坎彭图的基点是边界上标记 v 开始的点，该基点也位于环带堆的内边界圈上。

这一论证表明，如果环带堆两侧与其互补的两个子图中都没有 t_i-走廊，那么 u 和 v 是 A 的生成元上的字。经过修改后，我们可以假设存在一条位于 Δ 的 1-骨架中的路径，从 Δ 的外边界圈通向内边界圈，并且恰好穿过每个 t_i-环形图一次。因此，u 和 v 存在循环置换，可由某个字 $W = w_0 t_{i_1}^{\varepsilon_1} w_1 \cdots t_{i_k}^{\varepsilon_k} w_k$ 共轭为彼此，其中 w_0、……、w_k 是由 A、$k \leq 2m$、i_1、……、$i_k \in \{1, \ldots, m\}$ 的生成元构成的字，而 ε_1、……、$\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ 也是如此。对于 W 的每个前缀 W_0，都有 $W_0^{-1} u W_0 \in A$；因此，由于 A 是阿贝尔群，$T = t_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{i_k}^{\varepsilon_k}$ 将 u 共轭为 v。T 的长度为 $k \leq 2m$，所以在这种情况下，我们有 $\mathsf{CL}(u, v) \leq 2m + (|u| + |v|)/2$。

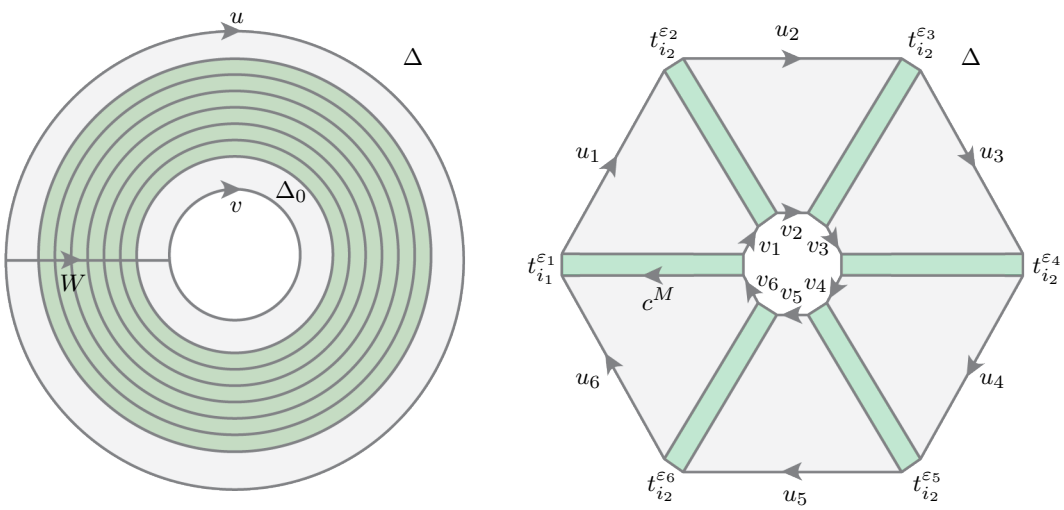

FIGURE 3. 定理 5.3 的证明示意图

如果其中一个互补子图中存在 t_i-走廊，不妨设为 Δ_0，那么这个论证只需稍作调整。现在我们聚焦于 Δ_0 的子图：它包含 ρ 个 t_i-环堆叠的内边界圈，并且是从 Δ_0 中删除所有 t_i-走廊的内部后所得图的一个连通分支。该子图边界上与 ρ 共同围成边界的路径，是若干 t_i-走廊的侧边（其标签是由 A 的生成元构成的字 c_i、和 c_i' 的幂）与 v 的子词交错组成的

这些子词只含有 A 的生成元。从一个位于 t_i-走廊末端的顶点读起，这条路径上的标签 v^* 作为 A 的元素等于 v，因为这两个字共同围成一个圆盘图。我们对与 Δ 的外边界圈相邻的子图作类似处理；一旦经由循环置换从元素 $u \sim v$ 转到元素 $u^* \sim v^*$，就归结为前一种情形（即不存在 t_i-走廊）。这一次我们得到 共轭长度$(u,\ v) \leq 2m + (|u| + |v|)$。

剩下需要考虑的是不含 t_i-环的极小环形图 Δ。如果没有径向 t_i-走廊，那么 $u,\ v \in A$ 和 Δ 表明它们在 A中共轭，因此相等。因此，假设 Δ中存在径向走廊。这些径向走廊对应于元素 u 和 v的 HNN 标准形中的稳定字母。现在我们将 u 和 v 写成形式乘积（HNN 标准形），其中稳定字母的出现由 A 中的元素隔开（因此，图表边界上走廊之间的弧现在标记为 A 中的元素，而非字）。注意，尽管 $d_G(1,\ u) \leq n$，但我们能给出的、表示这些元素中每一个的测地词在 A 中的长度上界显然是 $k^\alpha n^\alpha$，这是因为 A 在 G中的扭曲。

按照图 4 右侧所示绘制环形图后，我们考察径向走廊之间的板状区域。需要注意的关键一点是：如果一对边界走廊的侧边标记为来自交集平凡的循环群的字，那么 $\mathbb{E}^r$ 中对应的直线便是斜交的。因此，由于板状区域顶部和底部内圈与外圈上的字（以 A的生成元表示）的长度至多为 $k^\alpha n^\alpha$，走廊的侧边在 A中的长度至多为 Kn^α，其中 $K > 0$ 是一个常数，其存在性由引理5.1保证。再考虑到 A 的已知扭曲，这说明走廊两端之间（也即环形图内圈与外圈之间）在 G 中的距离有一个以 n为倍数的常数上界。这就是我们在此情形下所需的上界。

唯一剩下的情形是每个薄片的边彼此平行，也就是说，限定该薄片的两条走廊的边都标记为来自 A 的同一个循环子群的元素。我们将说明，在这种情形下，u 和 v 存在循环置换，它们作为 G 的元素相等，因此它们共轭于一个长度小于 $(|u|+|v|)/2$ 的元素。这里所说的循环置换，是从一条径向 t_i 走廊一侧的两端读出的；若 $u^* = t_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} u_1 \cdots t_{i_r}^{\varepsilon_{i_r}} u_r$ 和 $v^* = t_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} v_1 \cdots t_{i_r}^{\varepsilon_{i_r}} v_r$ 是这些循环置换，其中 Δ 中的径向 t_i 走廊将 u^* 中的 $t_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ 与 v^* 中的 $t_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ 相连，那么 $c^M u^* c^{-M} = v^*$，其中 c 是 t_{i_1} 的某个关联子群的生成元。（具体而言，若 $\varepsilon_{i_1} = 1$，则 $c = c_{i_1}$；若 $\varepsilon_{i_1} = -1$，则 $c = c'_{i_1}$。）每个薄片的边彼此平行这一假设，等价于如下代数条件：若（径向）走廊的稳定字母出现在 u 中，且 v 按循环顺序 $t_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$、……、$t_{i_r}^{\varepsilon_{i_r}}$ 出现，

则连续的关联子群按如下意义相同：下标模 r 计算，若 $\varepsilon_{i_j} = \varepsilon_{i_{j+1}} = 1$，则 $L'_{i_j} = L_{i_{j+1}}$，因而 $c'_{i_j} = c^{\pm 1}_{i_{j+1}}$；关于 ε_{i_j}、$\varepsilon_{i_{j+1}} \in \{\pm 1\}$ 的其他三种可能情形类似。

由此可知 c 确实与 u^*对易，因此也与 $u^* = v^*$对易，正如所声称的那样。更具体地说，$c^{\pm M} u^* c^{\mp M} = u^*$，因为 $c_{i_j}^{\pm M} t_{i_j} c'^{\mp M}_{i_j} = t_{i_j}$，且 $c'^{\pm M}_{i_j} t_{i_j}^{-1} c_{i_j}^{\mp M} = t_{i_j}^{-1}$，并且 $c_{i_j}^{\pm M} u_j c_{i_j}^{\mp M} = c'^{\pm M}_{i_j} u_j c'^{\mp M}_{i_j} = u_j$；我们得到了上述连续等式，它们连接了 c_{i_j} 或 c'_{i_j} 与 $c_{i_{j+1}}$ 或 $c'_{i_{j+1}}$。□

6. The distortion of the centre in $\tilde{B}^+_{pq}$

˜全文中，我们使用引言中给出的 B^+_{pq} 和 B^+_{pq} 的表示。

引理 6.1. 设 w 是由 B^+_{pq}的生成元构成的一个字。假设 $w = 1$ 属于B^+_{pq}，并且存在一个边界标记为 w 的范坎彭图，其中恰好包含 M 2个标记为 $[b, \theta]^{\pm 1}$的胞格。那么 $w = z^m$属于 $\tilde{B}^+_{pq}$，且 $|m| \leq M$。

证明。范坎彭引理的标准证明会将一个边界标记为 w 的范坎彭图 Δ 转化为生成元所生成的自由群中的一个等式，

$$w = \prod_{i=1}^{A} u_i^{-1} \rho_i u_i, \tag{11}$$

其中每一项都是一个定义关系或其逆；整数 A 表示 Δ 中 2-胞腔的数量，而列表 ρ_1，……，ρ_A 记录这些 2-胞腔上的边界标记。˜在 B^+_{pq} 中，每个既不是 $[b, \theta]$ 也不是其逆的 ρ_i 都等于单位元，而 $[b, \theta] = z$。因此，在 B^+_{pq} 中，等式 (11) 中乘积的每个因子都化简为单位元，或者化简为 $z^{\pm 1}$（后一种情况下有 $u_i^{-1} z u_i = z$，因为 z 是中心的）。恰有 M 个因子化简为 $z^{\pm 1}$，因此，当我们用z^{-1}约去 z 的副本后，剩下 $w = z^m$，其中 $|m| \leq M$。□

命题 6.2. 对于所有 $w \in F(a,\ b,\ s,\ t,\ \theta)$,

$$w = 1 \text{ in } B^+_{pq} \iff w = z^N \text{ in } \tilde{B}^+_{pq} \text{ with } |N| \leq \kappa^\alpha |w|^{\alpha+1},$$

其中 $\kappa > 1$ 是命题 *4.3* 中的常数。

证明。蕴含关系 (⇐) 显然。对于蕴含关系 (⇒)，设 $|w| = n$和 $w = 1$ 属于 B^+_{pq}，因此 $w = z^N$ 属于 $\tilde{B}^+_{pq}$；我们必须给 $|N|$ 找到上界。考虑关于固定表示 (3) 的 B^+_{pq} 的一个最小面积范坎彭图 Δ，其边界为 w。

唯一涉及 θ 的关系是 $[\theta, b] = 1$，且所有带有此标记的 2-胞腔都包含在 θ-走廊中。每条这样的走廊都从图表边界出发并终止于图表边界，因此这类走廊的数量至多为 $|w|/2$。一条 θ-走廊的每一侧都是一条标记为字 b^R 的路径，其中 R 是该走廊的面积；在 B^+_{pq} 中，这个字表示的元素与 Δ 边界圈上端点和该路径相同的两条弧之一所表示的元素相同。这两条弧的长度都小于 n，因此 $d(1, b^R) < n$ 属于 B^+_{pq}。此外，由于 b 属于通过消去 θ 得到的收缩 B_{pq}，我们有 $d(1, b^R) < n$ 属于 B_{pq}（采用我们固定的生成元选取）。因此，由命题 4.3 可得 $|R| \le \kappa^\alpha n^\alpha$。于是，$\Delta$ 中每条 θ-走廊的面积至多为 $\kappa^\alpha n^\alpha$。走廊数量少于 n，所以图中标记为 $[b, \theta]^{\pm 1}$ 的 2-胞腔数量少于$\kappa^\alpha n^{\alpha+1}$。引理 6.1 告诉我们，$|N|$ 的上界就是这个数量。□

命题 6.3. 中心的扭曲为 $\mathrm{dist}_Z(n) \simeq n^{\alpha+1}$。

证明。命题 6.2 表明 $\mathrm{dist}_Z(n) \preceq n^{\alpha+1}$。为了得到相应的下界，我们选取一个表示 $b^{\lfloor n^\alpha \rfloor}$ 的测地词 ω，其中 $b^{\lfloor n^\alpha \rfloor}$ 属于 B_{pq}。命题 4.3 告诉我们 $|\omega| \le \kappa n$。因此，$W_n := \omega^{-1}\theta^{-n}\omega\theta^n$ 的长度至多为$2n(\kappa+1)$。等式 $\omega = b^{\lfloor n^\alpha \rfloor}$ 在 B_{pq} 中仍然成立，因为 B_{pq} 的定义关系全部包含在 B^+_{pq} 的定义关系中。因此，在 B^+_{pq} 中我们有

$$W_n = [b^{\lfloor n^\alpha \rfloor}, \theta^n] = z^{n\lfloor n^\alpha \rfloor}.$$

由于 $|W_n| \le 2n(\kappa+1)$，这就得到了所需的下界 $\mathrm{dist}_Z(n) \succeq n^{\alpha+1}$。 □

注 6.4。前一个证明末尾出现的整数 $n\lfloor n^\alpha \rfloor$，现在记作 M_0，介于 $n^{\alpha+1} - n$ 和 $\lceil n^{\alpha+1} \rceil$之间。如果 M 是该范围内的任意另一个整数，那么 $M = M_0 + \epsilon$ 满足 $|\epsilon| \le n$，因此 Wz^ϵ 是一个长度小于$2n(\kappa+2)$ 的字，并且在 $\tilde{B}^+_{pq}$中等于 z^M。

引理 6.5。共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(n) \succeq n^{\alpha+1}$。

证明。由注 6.4可知，如果 $M = \lceil n^{\alpha+1} \rceil$，那么在 $\tilde{B}^+_{pq}$中 $d(1, z^M) < 2n(\kappa+2)$，因此 $d(1, bz^M) \le 2n(\kappa+2)$。在海森堡群 $H = \langle b$中，将 b 共轭到 bz^M的唯一最短字为 θ^M，其中 θ、$z \mid z$是中心的。由于消去a、b 和 s 会使 $\tilde{B}^+_{pq}$ 收缩到 H，所以字 θ^M 也是 $\tilde{B}^+_{pq}$中的唯一最短共轭字。此外，由于消去其他生成元˜会使 B^+_{pq} 收缩到 $\langle\theta\rangle$，因此 $d(1, \theta^M) = M$在 $\tilde{B}^+_{pq}$中成立。□

证明共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(n) \preceq n^{\alpha+1}$ 的过程复杂得多，将占据本文余下的篇幅。

7. Conjugacies of the form $g \sim gz^N$

为了证明共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(n) \preceq n^{\alpha+1}$，我们的策略是将问题归结为分析 $\tilde{B}^+_{pq}$ 中的共轭关系 $\gamma \sim \gamma z^N$。在本节和下一节中，我们考察这些共轭关系与 B^+_{pq} 中中心化子的结构之间的密切联系。我们讨论的第一部分适用于任意中心扩张

$$1 \to Z \to \widetilde{G} \to G \to 1,$$

其中 $Z \cong \mathbb{Z}$。我们为 Z 固定一个生成元 z。

定义 7.1。 [映射 ζ_g] 设 $g \in G$。对于中心化子中的每个元素 $\widetilde{x} \in C_G(g)$ 以及所有原像 $\tilde{x}, \tilde{g} \in G$，我们有 $\tilde{x}^{-1}\tilde{g}\tilde{x} = \tilde{g}z^m$ 属于 G，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 与 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{g}$ 的选择无关，因为不同的选择相差 z 的一个幂，而它是中心的。定义

$$\zeta_g : C_G(g) \to \mathbb{Z}$$

作者：$\zeta_g(x) := m$。

以下基本事实很容易验证。

引理 7.1。 对于所有 g、$x \in G$ 以及 $h \in C_G(g)$，

(i) ζ_g 是一个同态；(ii) $\zeta_g(g) = 0$；(iii) 如果 $C_G(g)$ 是循环的，那么 ζ_g 是零映射；(iv) $\zeta_g(h) = -\zeta_h(g)$；(v) $\zeta_{x^{-1}gx}(x^{-1}hx) = \zeta_g(h)$。

当由 x_0 生成的循环子群存在严重畸变时，下面的引理非常有用，因为在这种情况下，为了最小化 $d_{\widetilde{G}}(\mathbf{1}, W)$，可以将共轭元 $W = \widetilde{x}_0^{\lambda}\widetilde{x}_1^{\mu_1}\dots\widetilde{x}_r^{\mu_r}$ 的词长集中在音节 $\widetilde{x}_0^{\lambda}$ 上。

引理 7.2。 如果 $\widetilde{g} \in G$ 的像为 $g \in G$，且 $C_G(g)$ 由 $\widetilde{\{x_0, \dots, x_r\}}$ 生成，其中 $\zeta_g(x_i) = m_i$，并且 $m_0 \neq 0$，那么对于所有 $N \in \mathbb{Z}$ 以及所有原像 $\widetilde{x}_i \in G$，如果 $\widetilde{g} \sim \widetilde{g}z^N$，则

$$(\widetilde{x}_0^{\lambda}\widetilde{x}_1^{\mu_1}\cdots\widetilde{x}_r^{\mu_r})^{-1}\,\widetilde{g}\,(\widetilde{x}_0^{\lambda}\widetilde{x}_1^{\mu_1}\cdots\widetilde{x}_r^{\mu_r}) = \widetilde{g}z^N \tag{12}$$

对某些 λ，μ_1，…，$\mu_r \in \mathbb{Z}$，满足 $|\lambda| < |N/m_0| + \sum_{i=1}^r |m_i|$ 且 $|\mu_i| < |m_0|$，对于$i = 1$，…，r。

证明。若 $\widetilde{g} \sim \widetilde{g}z^N$，则 $N \in$ 像ζ_g，它由 $m_0, \ldots, m_r$（作为 $\mathbb{Z}$ 的加法子群）生成，因此存在整数 a_i 使得

$$a_0 m_0 + \cdots + a_r m_r = N.$$

对于 $i = 1,\ldots,r$，我们记作 $a_i = \eta_i m_0 + \mu_i$（整数），其中 $0 \le \mu_i < |m_0|$。于是，

$$\left(a_0 + \sum_{i=1}^{r} \eta_i m_i\right) m_0 + \sum_{i=1}^{r} \mu_i m_i = N,$$

and

$$\left|a_0 + \sum_{i=1}^{r} \eta_i m_i\right| \le |N/m_0| + \sum_{i=1}^{r} |\mu_i m_i/m_0| < |N/m_0| + \sum_{i=1}^{r} |m_i|.$$

为完成证明，我们定义 $\lambda = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \eta_i m_i$，并注意到通过 $\widetilde{x}_i^j$ 共轭会将 $\widetilde{g}$ 送到 $\widetilde{g}z^{jm_i}$。□

8. Centralisers and zeta-maps for B_{pq}^+

为了阐明我们关于 B_{pq}^+ 中中心化子的讨论的关键要点，我们先从一个更一般的情形开始。

引理 8.1。设 $G = H*_A$ 是一个 *HNN* 扩张，其中稳定字母 τ 与关联子群 $A < H$ 对易。假设 A 是阿贝尔群，并且对于所有 $h \in H \smallsetminus C_H(A)$，都有 $h^{-1}Ah \cap A = \{1\}$。

(i) 若 $g \in H$ 不与 A 中的元素共轭，则 $C_G(g) = C_H(g)$。*(ii)* 若 $g \in A \smallsetminus \{1\}$，则 $C_G(g) = \langle C_H(A)\ \tau\rangle = C_H(A) *_A$。*(iii)* 若 $g \in \langle C_H(A)\ \tau\rangle$ 不与 $C_H(A)$ 中的元素共轭，则 $C_G(g) \cong A \times \mathbb{Z}$，其中 $1 \times \mathbb{Z}$ 由某个 $a \in A$ 的 ga 的最大根生成。*(iv)* 若 g 不与 $H \cup \langle C_H(A)\ \tau\rangle$ 中的元素共轭，则 $C_G(g)$ 是循环群。*(v)* 在 G 中，若 $x^{-1}Ax \cap A \ne \{1\}$，则 $x \in C_G(A) = \langle C_H(A)\ \tau\rangle$。

证明。考虑 G 对分裂 $G = H*_A$ 的 Bass-Serre 树 T 的作用。条目 (i) 和 (ii) 涵盖了该分裂中的椭圆元素（至共轭为止）。在情形 (i) 中，g 的不动点集是单个顶点 $H \in G/H = \mathrm{Vert}(T)$，因此 g 的中心化子必然包含于该顶点的稳定子中，即 H。

情况 (ii) 涵盖了边稳定子，它们是 A 的共轭元。在这种情况下，我们进行代数论证。显然，如果 $x \in \langle C_H(A)\ t\rangle$，那么 $[g,x] = 1$，因此只要我们能证明以下<strong? claim：$x^{-1}gx \in A$ 当且仅当 $x \in \langle C_H(A)\ \tau\rangle$，即可完成证明。该论断还将证明条目 (v)。

我们对 x 的 HNN 长度进行归纳法证明该论断；将 x 写成约化 HNN 形式时，其中出现的稳定字母 $\tau^{\pm 1}$ 的数量就是 HNN 长度。

$$x = h_0\tau^{e_1}h_1\tau^{e_2}\cdots h_{m-1}\tau^{e_m}h_m,$$

其中 $h_i \in H \smallsetminus A$ 适用于 $0 < i < m$，且对所有 $e_i \neq 0$ 均成立。归纳法从情形 $m = 0$ 开始，这由假设 $h^{-1}Ah \cap A = 1$ if$h \in H \smallsetminus C_H(A)$ 涵盖。归纳步骤中，我们考虑将$x^{-1}gx$ 化为约化形式时发生的消去。若朴素乘积中的中间项 $h_0^{-1}gh_0$ 不表示 A 的一个元素，那么 $x^{-1}gx$ 已经是约化形式，且它不是 A 的一个元素。若 $h_0^{-1}gh_0 \in A$，则 $h_0^{-1}Ah_0 \cap A \neq 1$，因此根据假设，$h_0 \in C_H(A)$。在这种情况下，$x^{-1}gx = x_0^{-1}gx_0$，其中 $x_0 := h_1\tau^{e_2}\ldots h_{m-1}\tau^{e_m}h_m$ 由归纳假设涵盖。至此，(ii) 和 (v) 得证。

(iii) 和 (iv) 两项涵盖了 T 的双曲等距变换。若 $g \in G$ 的作用是非平凡的双曲等距变换，那么它有唯一的平移轴，其中心化子 $C_G(g)$ 必须保持这条轴，并在其上作平移。(iv) 是 $C_G(g)$ 的作用忠实的情形，这迫使 $C_G(g)$ 为循环群。(iii) 是 $C_G(g)$ 的作用存在非平凡核的情形：该核固定轴上的每条边，因此共轭之后，我们可以假设它包含于 A 中。于是 (v) 表明 g 中心化 A，所以该核就是整个 A。再次应用 (v) 可知，由于 A 是 $C_G(g)$ 的正规子群，它必定是中心的。因此，我们得到一个中心扩张 $1 \to A \to C_G(g) \to \mathbb{Z} \to 1$，从而$C_G(g) \cong A \times \mathbb{Z}$，其中第二个因子由一个元素生成，该元素在轴上作最小位移的平移；对某个 $a \in A$ 而言，这个元素将是ga 的一个 m 次根，且 m 最大。□

以下关于我们的表示（3） B_{pq}^{+} 和（4）˜（用于 B_{pq}^{+}）的观察对于接下来的命题很重要。

˜**引理 8.2.** 对于所有字 $u, v \in F(a, b, s, t)$，若 $u = v$ 属于 B_{pq}^{+}，则 $u = v$ 属于 B_{pq}^{+}。

引理 7.1(v) 确保了以下对 B_{pq}^{+} 的 ζ 映射的描述是完整的。

命题 8.3. 在 B_{pq}^{+} 中，我们有 $C_{B_{pq}^{+}}(b) = \langle b\rangle \times F$，其中 $F = \langle a, \theta\rangle$ 是秩为2的自由群。此外，

(i) 若没有 γ 的共轭属于 $C_{B_{pq}^{+}}(b)$，则 $\zeta_\gamma\colon C_{B_{pq}^{+}}(\gamma) \to \mathbb{Z}$ 是零映射；*(ii)* 若对某个非零 $l \in \mathbb{Z}$ 有 $\gamma = b^l$，则 $C_{B_{pq}^{+}}(\gamma) = \langle b\rangle \times F \to \mathbb{Z}$，且 ζ_γ 的像由 $\zeta_\gamma(\theta) = l$ 生成；*(iii)* 若 $\gamma = b^l\omega$ 且 $\omega \in F \smallsetminus \{1\}$，则 $C_{B_{pq}^{+}}(\gamma)$ $= \langle b\rangle \times \langle\omega_0\rangle$，其中 ω_0 是 $F = \langle a$ 中 ω 的最大根，$\theta\rangle$，且 ζ_γ 的像由

$\zeta_\gamma(b) = -j$ and $\zeta_\gamma(\omega_0) = lj_0$, where j (resp. j_0) is the exponent sum of θ in ω (resp. ω_0).

证明。 我们将对 $G = B^+_{pq}$, $H = B_{pq}$, $A = \langle b\rangle$ 和 $\tau = \theta$ 运用引理 8.1 的分析。这是成立的，因为 $x \in B_{pq}$ 满足 $x^{-1}\langle b\rangle x \cap \langle b\rangle \neq \{1\}$ 当且仅当 $x \in \langle a, b\rangle = C_{B_{pq}}(b)$。为说明这一点，注意到 b 属于定义 B_{pq} 的二边分裂的顶点群 $\mathbb{Z}^2 = \langle a,b\rangle$，并且 $\langle b\rangle$ 与边群 $\langle a^q\rangle, \langle a^p b\rangle, \langle a^p b^{-1}\rangle$ 的交平凡；由此可知，b 在该分裂的 Bass-Serre 树中的不动点集是唯一一个稳定子为 $\langle a,b\rangle$ 的顶点，而 $C_{B_{pq}}(b)$ 必须保持这个不动点。现在， $C_{B^+_{pq}}(b) = \langle b\rangle \times F$ 是引理 8.1(ii) 的一个特例。

对于 (i)，注意，如果 γ 不与 $C_{B^+_{pq}}(b)$ 中的任何元素共轭，那么要么引理 8.1(iv) 适用，且 $C_{B^+_{pq}}(\gamma)$ 是循环的；要么 γ 与某个元素$\gamma' \in B_{pq} \setminus \langle b\rangle$共轭。在前一种情况下，引理 7.1(iii) 适用，并告诉我们 ζ_γ 是零映射。在后一种情况下，根据引理 8.1(i)， $C_{B^+_{pq}}(\gamma') < B_{pq}$，而引理 8.2 告诉我们，在这种情况下 $\zeta_{\gamma'}$ 是零映射，因此根据引理 7.1(v)， ζ_γ也是零映射。

对于 (ii)，在 $\gamma = b^l$的情况下，我们有 $C_{B^+_{pq}}(\gamma) = \langle a,\ b,\ \theta\rangle$ 以及 $\zeta_\gamma(a) = \zeta_\gamma(b) = 0$，而 $\zeta_\gamma(\theta) = l$。

对于 (iii)，在 $\gamma = b^l\omega$ 的情形下，引理 8.1(iii) 告诉我们， $C_{B^+_{pq}}(\gamma) = \langle b\rangle \times \widetilde{\langle \omega_0\rangle}$，其中 ω_0 是 ω 在 $F = \langle a,\theta\rangle$ 中的最大根。由于 ω_0 仍是 ω 在 B^+_{pq} 中的一个根，它与 ω 的任意原像交换，因此 $\zeta_\gamma(\omega_0) = \zeta_{b^l}(\omega_0) = lj_0$，其中 j_0 是 θ 在 ω_0 中的指数和。（这里我们用到了这样一个事实： $\zeta_{b^l}(a) = 0$，且 $\zeta_{b^l}(\theta) = l$。）类似地， $\zeta_\gamma(b) = \zeta_\omega(b) = -j$。
□

9. Preferred representatives of conjugacy classes in B^+_{pq}

命题 9.1。 如果 $\gamma \in B^+_{pq}$ 的共轭类 $[\gamma]$ 与 $C_{B^+_{pq}}(b)$ 相交，那么存在一个字 $u_0 \in F(a, b, s, t, \theta)$，它表示 $[\gamma] \cap C_{B^+_{pq}}(b)$ 中的一个元素，并满足

$$|u_0| \leq d_{B^+_{pq}}(1, \gamma). \tag{13}$$

证明。 命题 8.3 告诉我们， $C_{B^+_{pq}}(b)$ 是 $\langle b\rangle \times F(a,\theta)$。因此，根据我们的假设， $\gamma \sim v$ 属于 B^+_{pq}，其中某个字 v由 a， b， θ 上的字母组成。考虑一个字 $u \in F(a, b, s, t, \theta)$，它在所有表示 $[\gamma]$ 中元素的字中长度最小。 u 未必表示 $C_{B^+_{pq}}(b)$中的元素，但我们将证明， u 的某个循环共轭 u_0 确实如此。于是我们将得到 $|u_0| = |u| \leq d_{B^+_{pq}}(1, \gamma)$，如所要求。

设 Δ 为表示从 u 到 v的共轭的环形图，如图 4 所示。 Δ 中的任何 s走廊或 t走廊，其两端都必须

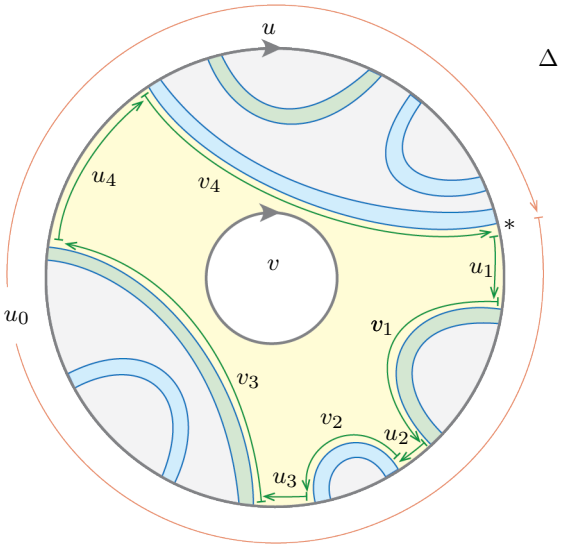

FIGURE 4. 命题 9.1 的证明示意图

位于标记为 u 的边界分支上，因为v中没有 s字或 t字。（ Δ中也可能存在 s 环带和 t环带。）令 Δ_0 为 Δ 的最小环带子图，它与 Δ 具有相同的外圈，并包含所有s走廊和 t走廊。从某条 s走廊或 t走廊一端的终端顶点 $*$ 开始读取内边界圈周围的字，它将是一个连接

$$U = u_1 v_1 \cdots u_m v_m$$

其中每个 u_i 都是 u 的子词（因此只包含字母 a、 b 和 θ），而每个v_i 标记一个 s-或 t-走廊的侧边（因此只包含字母 a 和 b）。因此， U 是由 a、 b 和 θ 组成的一个字，并表示 $C_{B^+_{pq}}(b)$中的一个元素。而 Δ_0表明，从 $*$ 读出的 u 的循环共轭 u_0 在 B^+_{pq}中等于 U ，正如所要求的那样。□

10. ESTIMATING THE WORD METRIC IN B^+_{pq}

$C_{B^+_{pq}}(b) = \langle b \rangle \times \langle a, \ \theta \rangle$ 中的每个元素都由唯一一个如下形式的字表示

$$\sigma \equiv b^l a^{n_0} \theta^{e_1} a^{n_1} \cdots \theta^{e_r} a^{n_r} \tag{14}$$

其中，对所有 i，都有 $e_i \in \{-1, 1\}$ 和 l， $n_i \in \mathbb{Z}$，且当 $e_i = -e_{i+1}$时满足 $n_i \neq 0$。命题 4.3 让我们了解了 B_{pq} 中 $\langle a, \ b \rangle$ 的元素长度。鉴于

B_{pq} 中 $\langle a,\ b\rangle$ 的元素之间的距离与 B_{pq}^{+} 中的距离相等（因为消去 θ 会将 B_{pq}^{+} 收缩到 B_{pq} 上），下述命题结合由三角不等式给出的反向界，将这一认识扩展为对 B_{pq}^{+} 中 $C_{B_{pq}^{+}}(b) = \langle a,\ b,\ \theta\rangle$ 的元素长度的理解。

命题 10.1. 存在 $C \geq 1$，使得对于所有满足 (14) 的 σ，

$$d_{B_{pq}}(1, b^l) + r + \sum_{i=0}^{r} d_{B_{pq}}(1, a^{n_i}) \leq C d_{B_{pq}^{+}}(1, \sigma). \tag{15}$$

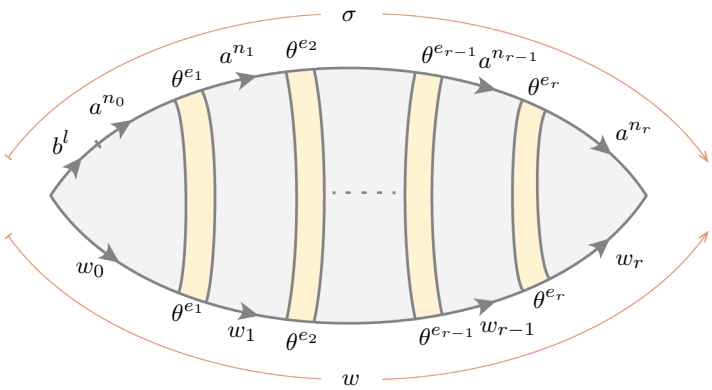

FIGURE 5. 命题 10.1 证明示意图

证明。取一个在 B_{pq}^{+} 中等于 σ 的测地词 w，并考虑一个范坎彭图（见图 5），它展示了 $w = \sigma$ 在 B_{pq}^{+} 中成立。回忆一下，B_{pq}^{+} 是一个以 θ 为稳定字母的 B_{pq} 的 HNN 扩张。边界弧上每条标记为 σ 的 θ 边都会发出一条 θ-走廊，而这些走廊的另一端全都落在标记为 w 的边界弧上。（一条走廊的两端不可能都落在标记为 σ 的弧上，因为那样一来，最内侧的这类走廊及其围成的区域中就会有一个圆盘子图，而它的存在意味着 σ 的某个子词定义了 $\langle b\rangle$ 中的一个元素，因为 θ-走廊的边标记为 b 的幂，而 σ 的定义形式排除了这种情况。）θ-走廊端点之间子弧上的标记是 w 的子词 w_i，满足

$$w \equiv w_0 \theta^{e_1} w_1 \cdots \theta^{e_r} w_r.$$

值得注意的一点是，作为群元素，$w_i = a^{n_i} b^{l_i}$ 对于某个 $l_i \in \mathbb{Z}$ 成立，因为相邻走廊之间的子图（可能是退化的）是范坎彭图，其边界标记具有 $w_i b^* a^{n_i} b^*$ 的形式，其中

b 的幂是走廊边上的标记。由此分解可得

$$d_{B^+_{pq}}(1,\sigma) = |w| = r + \sum_{i=0}^{r} |w_i| = r + \sum_{i=0}^{r} d_{B^+_{pq}}(1, a^{n_i} b^{l_i}). \tag{16}$$

现在， $\sum_{i=0}^{r} l_i = l$ 因为消去 θ 会将 B^+_{pq} 收缩到 B_{pq}，而 σ 的像是$b^l a^{\sum n_i}$，同时（确实相等！） w的像在 $\langle a, b\rangle \cong \mathbb{Z}^2$中是 $b^{\sim l_i} a^{\sum n_i}$。因此，

$$d_{B_{pq}}(1, b^l) \le \sum_{i=0}^{r} d_{B_{pq}}(1, b^{l_i}). \tag{17}$$

由于 $d_{B_{pq}}$和 $d_{B^+_{pq}}$上的字度量在 $\langle a,b\rangle$上一致，我们可以使用命题 4.3 来比较

$$d_{\mathbb{T}}(1, a^{n_i}) + d_{\mathbb{T}}(1, b^{l_i}) = d_{\mathbb{T}}(1, a^{n_i} b^{l_i}) \tag{18}$$

与 B^+_{pq}中的相应距离。为此，我们先利用 $f(x) = x^{1/\alpha}$ 的凹性推导出

$$d_{\mathbb{T}}(1, a^{n_i})^{1/\alpha} + d_{\mathbb{T}}(1, b^{l_i})^{1/\alpha} \le 2^{1-\frac{1}{\alpha}} d_{\mathbb{T}}(1, a^{n_i} b^{l_i})^{1/\alpha}, \tag{19}$$

然后我们使用命题 4.3 来给上面左侧各项以及下面右侧一项设定上界，从而得出

$$d_{B^+_{pq}}(1, a^{n_i}) + d_{B^+_{pq}}(1, b^{l_i}) \le \kappa^2 2^{1-\frac{1}{\alpha}}\, d_{B^+_{pq}}(1, a^{n_i} b^{l_i}) \tag{20}$$

对于 $i = 0, \dots, r$。求和后再利用 (16) 和 (17)，即可得到 (15)，其中常数 $C \ge 1$取适当值。□

我们将在第 11 节中证明定理 1.6 的最后阶段使用命题 10.1。更具体地说，我们需要：

推论 10.2。 存在一个常数 $C > 0$，使得如果 $\sigma = b^l \omega$ 属于 B^+_{pq}，其中$l \in \mathbb{Z}$ 且 $\omega \in F(a, \theta)$，那么

$$d_{B^+_{pq}}(1, b^l) \le C d_{B^+_{pq}}(1, \sigma). \tag{21}$$

并且如果, f 此外， $\omega = \omega_0^m$对于某个 $m \ge 1$ 以及某个约化的 $\omega_0 \in F(a, \theta)$，则

$$d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0) \le C d_{B^+_{pq}}(1, \sigma). \tag{22}$$

证明。 不等式 (21) 直接由 (15) 得出。为证明 (22)，我们假设 ω_0 和 ω 写成自由约化词，这特别意味着 ω 是分解 (14) 中跟在 b^l 后面的 σ 的后缀。令 u 为 ω_0 的最大前缀，使得 $\omega_0 \equiv u\pi u^{-1}$，且 π 是循环约化的。于是$\omega \equiv u\pi^m u^{-1}$。现在，对于某个 r'、某个 $f_i \in \{-1, 1\}$ 以及某个 $n_i' \in \mathbb{Z}$，有 $\pi \equiv a^{n_0'}\theta^{f_1}a^{n_1'}\cdots\theta^{f_{r'}}a^{n_{r'}'}$；若 $f_i = -f_{i+1}$，则 $n_i \neq 0$。又因为 $u\pi^m u^{-1}$ 是约化的，若删去从第一个 m 个 θ^{f_1} 实例开始、到最后一个 θ^{f_1}实例之前结束的子词，就得到 ω_0。因此，从 (14) 的右侧删去b^l 以及完整的音节 θ^{e_j} 和 a^{n_j}，便得到约化字 ω_0。因此，由三角不等式，

$$d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0) \leq r'' + \sum_{i\in S} d_{B^+_{pq}}(1, a^{n_i}) \tag{23}$$

对于某个 $r'' < r$ 以及子集 $S \subset \{0, \ldots, r\}$。命题 10.1 告诉我们，这个最后的量至多为 $Cd_{B^+_{pq}}(1, \sigma)$。□

11. Proof of Theorem 1.6

假设字 $u, v \in F(a, b, s, t, \theta, z)$ 总长度为 $|u| + |v| = n$，表示 B^+_{pq} 中的共轭元素。我们不在 B^+_{pq} 中直接将 u 共轭到 v，而是删去它们包含的字母 $z^{\pm 1}$，并考察它们在 B^+_{pq} 中的像 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$。我们固定一个约化字 $u_0 \in F(a, b, s, t, \theta)$，它表示 B^+_{pq} 中共轭类$[\bar{u}] = [\bar{v}]$ 的一个元素，并满足

$$|u_0| \leq \min\{d_{B^+_{pq}}(1, u),\ d_{B^+_{pq}}(1, v)\}. \tag{24}$$

若 $[\bar{u}]$ 与 $C_{B^+_{pq}}(b)$ 相交，则调用命题 9.1，据此我们可以进一步假设 u_0 表示 $C_{B^+_{pq}}(b)$ 中的一个元素。

定理 5.2 告诉我们，共轭长度$^{B^+_{pq}}(n) \simeq n$。因此，存在一个常数 C_1和一些字 x_u、$x_v \in F$（a、b、s、t、θ），使得 $x_u^{-1}\bar{u}x_u = x_v^{-1}\bar{u}x_v = u_0$属于 B^+_{pq}，并且

$$\max\{|x_u|, |x_v|\} \leq C_1 n. \tag{25}$$

那么，对某些整数 N_u、N_v，有 $x_u^{-1}ux_u = u_0 z^{N_u}$ 和 $x_v^{-1}vx_v = u_0 z^{N_v}$ 属于 $\tilde{B}^+_{pq}$。现在，$x_u^{-1}ux_u u_0^{-1}$和 $x_v^{-1}vx_v u_0^{-1}$是长度至多为 $(2C_1 + 2)n$ 的字，因此命题 6.2 告诉我们

$$\max\{|N_u|, |N_v|\} \leq C_2 n^{\alpha+1}, \tag{26}$$

其中 $C_2 = \kappa^\alpha(2C_1 + 2)^{\alpha+1}$。

令 $N = N_v - N_u$。则

$$|N| \le 2C_2 n^{\alpha+1}. \tag{27}$$

在 $\tilde{B}^+_{pq}$ 中，我们有 $u_0 z^{N_u} \sim u_0 z^{N_v}$，因此 $u_0 \sim u_0 z^N$，因为 z 是中心的。因此，N 属于 ζ_{u_0} : $C_{B^+_{pq}}(u_0) \to \mathbb{Z}$ （即 7.1 中定义的 ζ 映射）的像。而且，如果 $y^{-1}u_0 y = u_0 z^N$ 在 $\tilde{B}^+_{pq}$中，那么 $x_u y x_v^{-1}$将 u 共轭为 $\tilde{B}^+_{pq}$中的 v。所以，由 (25) 可知

$$\mathrm{CL}_{\tilde{B}^+_{pq}}(u, v) \le \mathrm{CL}_{\tilde{B}^+_{pq}}(u_0, u_0 z^N) + 2C_1 n.$$

因此，只要我们能为满足 (27) 的$N \in \operatorname{im}\zeta_{u_0}$ 建立共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(u_0,\ u_0 z^N)$的一个上界，就大功告成了。

若 $[\bar{u}] = [u_0]$ 与 $C_{B^+_{pq}}(b)$ 在 B^+_{pq}中不相交，则命题 8.3(i) 使这项任务变得简单：ζ_{u_0} 是零映射，因此 $N = 0$，且共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(u_0,\ u_0 z^N) = 0$。$[u_0] = \{1\}$的情形也很简单，并且有$N = 0$。

另一方面，如果 $[u_0]$ 与 $C_{B^+_{pq}}(b) \setminus \{1\}$ 在 B^+_{pq} 中相交，那么以下命题适用于 $\gamma = u_0$。（这里我们用到了命题 9.1 所允许的假设，即 $u_0 \in C_{B^+_{pq}}(b)$。）命题 11.1 给出的元素 g 的任意提升 $\tilde{g}$ 都会将 u_0 共轭为 $u_0 z^N$ 于 $\tilde{B}^+_{pq}$ 中。若选择测地提升，则结合 (28) 和 (27) 可得，对于某个适当的常数 E，有 $d_{\tilde{B}^+_{pq}}(1, g) = d_{B^+_{pq}}(1, g) \le E\, n^{\alpha+1}$；这里我们利用了 $\alpha > 1$ 这一事实，以吸收 (28) 中的二次项。

由此得到的共轭长度上界 共轭长度 $\tilde{B}^+_{pq}(n) \preceq n^{\alpha+1}$ 与引理 6.5 给出的下界一致，因此完成了定理 1.6 的证明。

命题 11.1. 存在 $K \ge 1$，使得对于所有 $\gamma \in C_{B^+_{pq}}(b)$ 以及所有 $N \in \operatorname{im}\zeta_\gamma$，都存在 $g \in C_{B^+_{pq}}(\gamma)$，使得 $N = \zeta_\gamma(g)$ 并且

$$d_{B^+_{pq}}(1, g) \le K \left(|N| + d_{B^+_{pq}}(1, \gamma)^2 \right). \tag{28}$$

证明。由命题 8.3，$C_{B^+_{pq}}(b) = \langle b \rangle \times F(a,\ \theta)$。

先假设对于某个 $l \ne 0$，有 $\gamma = b^l$。命题 8.3(ii) 告诉我们，在这种情况下，$\operatorname{im}\zeta_\gamma$ 由 $l = \zeta_\gamma(\theta)$生成。因此 $N \in l\mathbb{Z}$，并且对于 $g = \theta^{N/l}$，我们有$d_{B^+_{pq}}(1,\ g) = |N/l| \le |N|$。

现在假设 $\gamma \in C_{B^+_{pq}}(b) \setminus \langle b \rangle$。因此 $\gamma = b^l \omega$ 属于 B^+_{pq}，其中 $l \in \mathbb{Z}$ 且$\omega = \omega_0^m$，对某个 $\omega_0 \in F(a, \theta) \setminus \{1\}$ 而言，该元素不是真幂。令 j_0 和 j 分别为 θ 在 ω_0 和 ω中的指数和。因此 $j = m j_0$。

命题 8.3(iii) 告诉我们，在这种情况下，ζ_γ 的像由$\zeta_\gamma(b) = j$ 和 $\zeta_\gamma(\omega_0) = j_0 l$ 生成。因此，对某个 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$，有 $N = \lambda j + \mu j_0 l$。将引理 7.2 应用于 b（充当 x_0）、ω_0（充当 x_1）以及 γ（充当 g），我们可以假设 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ 满足

$$|\lambda| < |N/j| + |j_0 l|, \text{ and} \tag{29}$$

$$|\mu| \le |j|. \tag{30}$$

定义 $g := b^\lambda \omega_0^\mu$，并注意到 $\zeta_\gamma(g) = N$。

我们还需要两个估计。首先，推论 10.2 给出了一个常数$C > 0$，使得

$$\max\{d_{B^+_{pq}}(1, b^l), d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0)\} \le C d_{B^+_{pq}}(1, \gamma). \tag{31}$$

其次，由于消去其他生成元会将 B^+_{pq} 收缩到 $\langle\theta\rangle$，且 γ 在此收缩下的像为 θ^j，因此我们有

$$|j| \le d_{B^+_{pq}}(1, \gamma). \tag{32}$$

现在，结合 (30)–(32)，得到

$$d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0^\mu) \le |\mu|\, d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0) \le C\, d_{B^+_{pq}}(1, \gamma)^2. \tag{33}$$

利用命题 4.3 得到该不等式，并利用消去θ 的收缩 $B^+_{pq} \twoheadrightarrow B_{pq}$ 得到第二个等式，我们还有

$$|l| = d_{\mathbb{T}}(1, b^l) \le \kappa^\alpha d_{B_{pq}}(1, b^l)^\alpha = \kappa^\alpha d_{B^+_{pq}}(1, b^l)^\alpha. \tag{34}$$

然后，第一步不等式使用 (29)，第三步则结合 (31)、(32) 和 (34)，可得

$$|\lambda| < |N/j| + |j_0 l| \le |N| + |j|.|l| \le |N| + \kappa^\alpha C^\alpha d_{B^+_{pq}}(1, \gamma)^{\alpha+1}. \tag{35}$$

使用命题 4.3，再应用 (35)，得到

$$d_{B^+_{pq}}(1, b^\lambda) = d_{B_{pq}}(1, b^\lambda) \le \kappa |\lambda|^{1/\alpha} \le \kappa \left(|N| + \kappa^\alpha C^\alpha d_{B^+_{pq}}(1, \gamma)^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}. \tag{36}$$

最后，对 $g = b^\lambda \omega_0^\mu$ 应用三角不等式可得

$$d_{B^+_{pq}}(1, g) \le d_{B^+_{pq}}(1, b^\lambda) + d_{B^+_{pq}}(1, \omega_0^\mu),$$

然后，对于适当的 $K \ge 1$，(33) 和 (36) 推出 (28)，正如所要求的那样，因为 $\alpha > 1$，从而 $(\alpha + 1)/\alpha < 2$。□

References

[BB00] N. Brady 和 M. R. Bridson。等周谱中只有一个间隙。

Geom. Funct., （）：–。[BC98]

Anal. 10 5 1053 1070, 2000

S. G. Brick 和 J. M. Corson。群的环形德恩函数。 *Bull. Austral. Math. Soc.*，58 3 453 464，1998（）：–。[Bow95] B. H. Bowditch。次二次等周不等式蕴含线性等周不等式的一个简短证明。*Michigan Math. J.*，42(1):103–107，1995。[BR25a] M. R. Bridson 和 T. R. Riley。模型丝状群中共轭元的长度。预印本，arXiv:2506.01235，2025。[BR25b] M. R. Bridson 和 T. R. Riley。线性丢番图方程与二步幂零群中的共轭元长度。预印本， arXiv:2506.01239，2025。[BRS25] M. R. Bridson、T. R. Riley 和 A. Sale。有限表示群中的共轭元长度。准备中，2025。[GR25] C. Gillis 和 T.R. Riley。区分群中与共轭相关的填充不变量，2025。预印本， arXiv:2506.19264。[Gro87] M. Gromov。双曲群。载于 S. M. Gersten 编， *Essays in group theory*, 《*MSRI publications*》第 8 卷，第 75–263 页。Springer–Verlag，1987。[Gro93] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于 G. Niblo 和 M. Roller 编， *Geometric group theory II* 182 1993 ，LMS 讲义中的编号。

剑桥大学出版社，。[Ol′91] A. Yu. Ol

′

Internat. shanskii。具有次二

J. Algebra Comput. 1 3 281 289, 1991

次等周不等式的群的双曲性。[， （）：–。95] P. Papasoglu。论次二次等周不等式，载于 *Geometric group theory (Columbus, OH, 1992)* 3 *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* 149 157 ，第 卷，第 – 页。德古意特，柏林，1995。

Martin R. Bridson，数学研究所，Andrew Wiles 大楼，牛津 OX2 6GG，英国，bridson@maths.ox.ac.uk，people.maths.ox.ac.uk/bridson/

Timothy R. Riley，数学系，Malott Hall 310室，康奈尔大学，伊萨卡，纽约州 14853，美国，tim.riley@math.cornell.edu，math.cornell.edu/∼riley/