arXiv:2512.14101v1 [math.GT] 16 Dec 2025

# 通过随机简单闭曲线研究 Teichmüller 理论

Curtis T. McMullen 和 Tina Torkaman

2025年11月14日

**摘要**

我们证明，将紧致双曲曲面 $X$ 映射为 $X$ 上的随机简单闭测地线的映射 $\sigma : \mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g$ 确定了一个从 Teichmüller 空间到测地流空间的真嵌入。证明依赖于一对多重曲线的交数公式 $i(C,\ C')$，该公式用 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$上的德恩坐标表示。

## 目录

1 引言.1 2 绕数.5 3 短测地线.7 4 德恩坐标.9 5 交数.14 6 长度.17 7 随机简单闭曲线.19 8 $\mathcal{T}_g$ 的嵌入.21 9 紧化.23

本研究部分由美国国家科学基金会资助。排版日期：2025年12月17日。

# 1 引言

令 $\mathcal{T}_g$ 和 $\mathcal{C}_g$ 分别表示带标记黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间，以及附属于亏格为 $g$的定向拓扑曲面$\Sigma_g$ 的测地流空间。回顾一下， $\mathcal{C}_g$ 是一个锥：它在加法以及乘以正实数的运算下封闭。我们用 $i(C,\ C')$表示一对流之间的（几何）交数，用 $\ell_X(C)$表示 $C$ 在 $X \in \mathcal{T}_g$上的双曲长度。

本注记旨在描述一种新的嵌入

$$\sigma : \mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g,$$

基于随机简单闭测地线。映射 $\sigma$ 可与传统嵌入进行比较

$$\lambda : \mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g,$$

该嵌入基于随机闭测地线。我们将看到， $\sigma$ 和 $\lambda$ 通过 $\mathbb{P}\mathcal{ML}_g$对 $\mathcal{T}_g$ 确定了相似但不同的紧化。与此同时，我们在 $\mathcal{ML}_g$（$\mathbb{Z}$）上的德恩坐标中，获得了关于长度、交数和体积的具体估计，这些结果本身也颇具意义。

**随机简单曲线**。满足 $i$（$C,\ C$） $= 0$ 的流构成了测度层理 $\mathcal{ML}_g \subset \mathcal{C}_g$空间。其整数点 $\mathcal{ML}_g$（$\mathbb{Z}$）是多重曲线：由互不相交的简单闭曲线组成的系统，并带有正整数权重。

我们用 $S_X$ 表示描述 $X$上的一条随机简单闭曲线的流。它可以用两种等价方式定义；首先，作为一个极限

$$S_X = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum S_X(T)}{T\,|S_X(T)|},\ \text{ where }\ \ S_X(T) = \{C \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z}) \,:\, \ell_X(C) < T\};$$

其次，作为一个积分

$$S_X = \int_{B_X} C\, dV(C),\ \text{ where }\ \ B_X = \{C \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{R}) \,:\, \ell_X(C) \le 1\}.$$

其中， $|S_X(T)| \asymp T^{6g-6}$是有限集 $S_X(T)$ 中元素的数量，而 $dV$ 是 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{R})$ 上的自然（Thurston）测度，经过归一化，使得$\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$的密度为 1（见下文方程 (4.3)）。

我们的主要结果（§8）如下：

**定理 1.1** 映射 $\sigma$： $\mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g$ 定义为

$$\sigma(X) = S_X / i(S_X, S_X)^{1/2}$$

给出了从 *Teichm¨uller* 空间到测地流空间 $C$ 的真嵌入，其中 $i(C,C) = 1$。

**随机闭测地线**。 作为比较，我们回顾一下，每个 $X \in \mathcal{T}_g$也决定了一条"随机闭测地线" $L_X \in \mathcal{C}_g$，即其刘维尔流，其特征为

$$i(C, L_X) = \ell_X(C)$$

对于所有流 $C$均成立；而映射 $\lambda(X) = L_X$ （见 [Bon]）也给出了一个真嵌入

$$\lambda : \mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g.$$

这一次，像位于轨迹 $i(C,C) = \pi^2(2g-2)$ 上。通过此嵌入可以恢复 Teichm¨uller 空间的某些特征；例如，Weil–Petersson度量可以表示为沿对角线 [Wol 上 $i(L_X, L_Y)$ 的海森矩阵。

**和在中的像之闭包产生了通过对进行的紧化。在§9中，我们比较这些空间，并证明：$\mathcal{T}_9$的边界。**

**定理 1.2** 如果 $[C] \in \mathbb{P}\mathcal{ML}_g$ 是一个填充的唯一遍历层状结构，且$\lambda(X_n) \to [C]$，那么 $\sigma(X_n) \to [C]$。

**定理 1.3** 另一方面，若 $C = \sum_1^{3g-3} C_i$ 是一个填充多曲线，且 $a_i > 0$ 是实数，则存在一个序列 $X_n \in \mathcal{T}_g$，使得

$$\lambda(X_n) \to \left[\sum C_i\right] \quad while \quad \sigma(X_n) \to \left[\sum a_i C_i\right].$$

换言之， $\sigma(X_n)$ 可以收敛到由 $[C_i]$ 张成的开单形中的任意一点。（通过对角化，可以推出闭单纯形也有相同结论。）

因此， $\sigma$ 确定了 $\mathcal{T}_g$ 的一种紧化，它与 Thurston 最初的紧化相似，但并不相同（见 [FLP], [Ot] 和 [Bon]）。

**德恩坐标中的交数**。 现在转而概述定理 1.1 的证明。

为了研究流 $S_X$，引入德恩坐标$(m_i, t_i)_1^{3g-3}$ 来描述多重曲线空间 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$颇为有用。这些坐标记录了相对于 $\Sigma_g$ 的增强裤子分解，简单曲线如何相交和扭转（§4）。

证明中的一个关键要素是以下这一具有独立意义的新拓扑结果（§5）：

**定理 1.4** 设 $C$、$C' \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$ 是德恩坐标分别为$(m_i, t_i)$和$(m'_i, t'_i)$的多重曲线。则

$$i(C, C') = \sum_{i=1}^{3g-3} \left| \det \begin{pmatrix} m_i & t_i \\ m'_i & t'_i \end{pmatrix} \right| + E,$$

其中 $|E| \leq N \sum_{i,\ j} m_i m'_j$ 对于某个普适常数 $N$。

证明将表明可以取 $N = 23$。该结论同样适用于 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{R})$ 中的流。

**记号与约定**。在下文中，我们采用以下约定：

$$\mathrm{Log}(x) = \max(1, \log x);$$

记号 $A = O(B)$ 或 $A \ll B$ 表示 $A < CB$ 对于某个未明确指定的常数 $C$，该常数仅依赖于亏格 $g$；若 $A \ll B \ll A$，则记作 $A \asymp B$ 。

令 $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\mathrm{Mod}_g$ 表示亏格为 $g$ 的黎曼曲面的模空间。$X \in \mathcal{T}_g$ 的短 *systole*定义如下：

$$\mathrm{sys}(X) = \inf\{\ell_X(\alpha) \,:\, \alpha \subset X \text{ is a closed geodesic}\}.$$

众所周知，当且仅当 $\mathrm{sys}(X_n) \to 0$ 时，$[X_n] \to \infty$ 属于 $\mathcal{M}_g$。

**随机简单曲线的行为**。我们将在第 5 节证明定理 1.4 的一个更精确版本，并在第 6 节回顾关于德恩坐标中 $\ell_X(C)$ 的一个估计。结合这两项结果可得：

**推论 1.5** 对于所有 $X, Y \in \mathcal{T}_g$，我们有：

$$i(S_X, S_X) \asymp \frac{\mathrm{Vol}(B_X)^2}{\mathrm{sys}(X)\,\mathrm{Log}(1/\mathrm{sys}(X))}, \text{ and}$$

$$i(S_X, L_Y) \gg C(Y)\,\mathrm{Vol}(B_X)/\mathrm{sys}(X),$$

其中 $C(Y) > 0$。

为完整起见，我们还回顾：

$$\mathrm{vol}(B_X) \gg 1/\mathrm{sys}(X)^{1-\epsilon},$$

这是我们将在第 6 节回顾并加以改进的一个估计；并注意到

$$i(S_X, L_X) = \frac{6g-6}{6g-5}\,\mathrm{vol}(B_X) \tag{1.1}$$

通过一个简单的论证（对 $B_X$ 积分 $\ell_X(C)$）。

**推论 1.6 </style}映射 (**$X) = S_X$和 $\sigma_2(X) = S_X/\mathrm{Vol}(B_X)$也给出了从 $\mathcal{T}_g$ 到 $\mathcal{C}_g$ 的真嵌入。

**证明**。 根据上述界，我们有

$$i(S_X, S_X)^{1/2} \gg \mathrm{Vol}(B_X) \gg 1$$

在 $\mathcal{M}_g$ 上一致成立，因此， $\sigma$ 的真性——它以以上最大的项为归一化——蕴含另外两种归一化也是真映射。连续性和单射性由 $\sigma$ 的相同结论立即得到；事实上，这三个映射都给出了 $\mathcal{T}_g$ 到 $\mathbb{P}\mathcal{C}_g$ 的同一个嵌入。 ∎

**的真性**。为了结束对定理 1.1 证明的概述，我们简述 $\sigma$ 是真映射的证明。

设 $X_n \to \infty$ 属于 $\mathcal{T}_g$。如果 $[X_n]$ 始终处于 $\mathcal{M}_g$ 的某个紧子集中，那么由 $\lambda$ 的真性可得 $\sigma(X_n) \asymp \lambda(X_n) \to \infty$ ，于是结论成立。另一方面，如果 $X_n \to \infty$ 属于 $\mathcal{M}_g$，那么短周期$(X_n) \to 0$，而推论 1.5 中的估计合起来给出：对任意固定的基点 $Y \in \mathcal{T}_g$,

$$i(\sigma(X_n), L_Y)^2 = \frac{i(S_X, L_Y)^2}{i(S_X, S_X)} \gg \frac{C(Y)^2 \,\mathrm{Log}(1/\,\mathrm{sys}(X_n))}{\mathrm{sys}(X_n)} \to \infty. \qquad (1.2)$$

因此，这种情况下 $\sigma(X_n) \to \infty$ 也成立。

更多细节请参见 §8。

**问题**。

1. $i(S_X, S_Y)$作为 $\mathcal{T}_g \times \mathcal{T}_g$上的函数有多光滑?

2. 能否在 $\mathcal{T}_g$ 上定义一种与嵌入 $\sigma$： $\mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g$相适配的度量?

3. 对每个 $X \in \mathcal{T}_g$ ，我们都有一个自然双射 $\mathcal{F}$： $Q(X) \to \mathcal{ML}_g$，它将全纯二次微分 $q$ 映射到其水平测度叶状结构 $\mathcal{F}(q)$。因此， $\mu$ $(X)$上的任意概率测度 $\mu$ 都会给出一个流 $S_X(\mu) = \int \mathcal{F}(q) \cdot \mu$。

   例如，当 $\mu$是Teichm¨uller度量下单位球 $B \subset Q(X)$上的归一化体积测度时，这些流会如何表现? 对于Weil–Petersson度量呢?

**注释与参考文献**。 我们对德恩坐标的处理采用了分数德恩扭转理论，该理论见于 [LS]。最大伸长测地线是简单曲线这一事实 [Th2] 也影响了本文的讨论。文献 [GM]讨论了另一种通过极值长度得到的 $\mathcal{T}_g$紧化。

## 2 绕数

设 $X$ 为一个双曲曲面，并用 $L(\delta)$ 表示曲面 $X$ 上一条测地线的双曲长度（该测地线可以是浸入弧、嵌入弧或闭路）。

本节将定义与简单闭测地线 $\alpha$ 恰好相交一次的测地弧 $\gamma$ 的绕数 $w(\gamma,\ \alpha)$，并证明:

**定理 2.1** 对于连接领圈邻域 $A = B(\alpha, r)$两条边界分支的任意一对弧 $\gamma, \gamma'$，有:

$$L(\gamma) = 2r + |w(\gamma, \alpha)|L(\alpha) + O(1), \tag{2.1}$$

*and*

$$|\gamma \cap \gamma'| = |w(\gamma, \alpha) - w(\gamma', \alpha)| + E \tag{2.2}$$

其中 $|E| \leq 1$。

我们还将证明:

**命题 2.2** 当 $r = d(\alpha, \partial A)$ 很大时，$\gamma$ 几乎与 $\partial A$ 垂直。

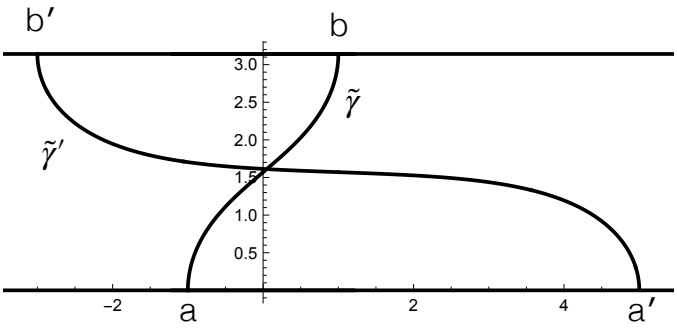


图 1。两条在 $S$ 中相交的测地线。

**几何绕数**。 关于一条简单闭测地线$\alpha \subset X$ 的领圈 是形如

$$A = B(\alpha, r) = \{x \in X \ : \ d(x, \alpha) < r\}.$$

我们允许 $r = \infty$，此时 $A = X \cong S/\mathbb{Z}$，其中

$$S = \{z = x + iy \ : \ 0 < y < \pi\}, \ \mathbb{Z} = \langle g \rangle, \quad \text{and} \quad g(z) = z + L. \tag{2.3}$$

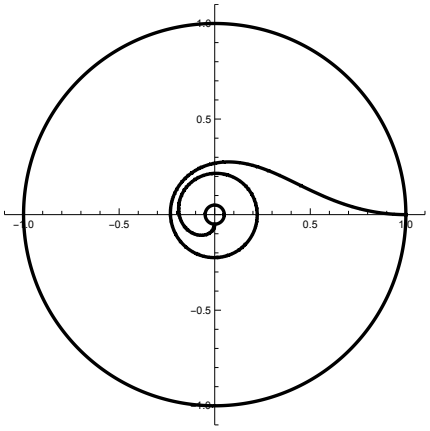


图 2. 一条绕数为 $7/4$ 的测地线 $\gamma \subset A$ 。

测地线 $y = \pi/2$ 在 $S$ 中覆盖 $\alpha$。

在这种情况下，任何穿过 $\alpha$ 的完整测地线 $\gamma \subset A$ 都是嵌入的。它在测地线 $\tilde{\gamma} \subset S$ 上的提升连接了 $\partial S$ 中形如 $a$ 和 $b + \pi i$ 的一对点，我们将其几何绕数 定义为

$$w(\gamma, \alpha) = (b - a)/L.$$

这个实数与提升的选择无关，也不依赖于 $\alpha$ 或 $\gamma$ 的定向选择。参见图 1（其中我们使用对数映射 $\log : \mathbb{H} \to S$ 来绘制 $S$ 中的测地线）。

另一种定义是，令 $\pi : A \to \alpha$ 表示最近点投影，其纤维是与 $\alpha$ 正交的测地线。则 $w(\gamma, \alpha)$ 是 $\pi(\gamma) \subset \alpha$ 的浸入长度与其自身长度 $\alpha$ 的比值。关于环带 $A = \{z : 1/20 < |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ 上庞加莱度量中绕数为分数的例子，参见图 2。

**一般绕数**。 对于任意 测地线段 $\gamma$ 在任意双曲曲面 $X$上于唯一一点 $p$ 与 $\alpha$ 相交的情形，第二种定义同样适用。事实上，正交投影 $\pi : \gamma \to \alpha$经规范化，使得$\pi(p) = p$，可以相当一般地定义（例如，通过转到 $X$的覆盖空间 $A = \mathbb{H}/\pi_1(\alpha)$），于是绕数可定义为:

$$w(\gamma, \alpha) = \pm \frac{L(\pi(\gamma))}{L(\alpha)}$$

采用与上文相同的符号约定。

**领圈与交叉**。特别地，对于形如 $A = B(\alpha,\ r) \subset X$ 且满足 $r < \infty$ 的有限领圈，任意连接 $\partial A$ 的两个分支的测地弧 $\gamma \subset A$ 都有定义绕数 $w(\gamma,\ \alpha)$。

**定理 2.1 的证明**。测地线 $\alpha$ 将 $\gamma$ 分成两段等长的线段 $c$。提升到万有覆盖后，每一段都是一个直角三角形的斜边，其两条直角边的长度分别为 $a = r$ 和 $b = w(\gamma)/2$。众所周知，这种三角形的边长满足 $c = a + b + O(1)$ [Bus，定理 2.2.2(i)]，，由此可得（2.1）。

为证明方程（2.2），先考虑 $r = \infty$ 和 $A = X$ 的情形。将 $A = S/\mathbb{Z}$ 写成方程（2.3）中的形式，并设 $\widetilde{\gamma}$ 和 $\widetilde{\gamma}'$ 分别是 $\gamma$ 和 $\gamma'$ 到 $S$ 的提升，它们连接 $\partial S$ 上的点（$a,\ b + \pi i$）和（$a',\ b' + \pi i$），如图 1 所示。当（$a,\ b$）和（$a',\ b'$）相交时，我们有 $|\widetilde{\gamma} \cap \widetilde{\gamma}'| = 1$；也就是说，当 $(a - a')\ (b - b') < 0$ 时成立；否则，交数为零。因此，$I = |\gamma \cap \gamma'|$ 等于满足 $(n + a - a')\ (b - b') < 0$ 的 $n \in \mathbb{Z}$ 的个数。

现在很容易验证，对于任意区间 $I = (x, x')$，都有 $|I \cap \mathbb{Z}| = |x - x'| + E$，其中 $|E| \leq 1$。由于 $w(\gamma) = b - a$ 且 $w(\widetilde{\gamma}') = b' - a'$，方程（2.2）得证。∎

**命题 2.2 的证明**。我们再次参见图 1，其中展示了 $\gamma$ 在由 $\pi_1(\alpha) \subset \pi_1(X)$ 定义的 $X$ 的覆盖空间 $S$ 中，提升为测地线 $\widetilde{\gamma}$ 的情形。由 $y = \pi/2$ 定义的测地线 $\widetilde{\alpha} \subset S$ $y = \pi/2$ 覆盖 $\alpha$，而将 $\partial A$ 提升到 $S$ 后，距离 $a$ 最近的是水平直线 $L$，它由 $y = \exp(-s)$ 定义，其中 $s = r + O(1)$。

注意，$\gamma$ 与 $\partial A$ 之间的角和 $L$ 与 $\widetilde{\gamma}$ 之间的角相同。当 $b \to \infty$ 时，这个角逐渐变小，而 $\widetilde{\gamma}$ 收敛到唯一一条以 $a$ 为起点且渐近于 $\widetilde{\alpha}$ 的测地线 $\delta$。由于 $\delta$ 与 $\mathbb{R}$ 正交，当 $r$ 很大时，它几乎与 $L$ 正交，因此 $\gamma$ 也几乎与 $\partial A$ 正交。∎

## 3 短测地线

本节将证明：

**命题 3.1** 设 $A \subset X \in \mathcal{M}_g$ 是一条紧黎曼曲面的薄部，该曲面有 $3g - 3$ 条短测地线 $(\alpha_i)$。设 $G$ 和 $G'$ 是 $X$ 上的一对简单闭测地线，$\gamma$ 和 $\gamma'$ 分别是 $G - A$ 和 $G' - A$ 的连通分支。那么：

$$L(\gamma) = O(1) \quad and \quad |\gamma \cap \gamma'| \leq 2,$$

若提供的最大值 $L(\alpha_i)$ 足够小。

**领圈与薄部**。 如果闭测地线 $\alpha_0 \subset X$ 满足$L = L（\alpha）\leq 1$, 则称其为短的。所有短测地线都是简单的。短测地线周围的标准领圈 定义为

$$A_0 = B(\alpha_0, r), \text{ where } \cosh(r) = 1/L.$$

$A_0$ 的每个连通分支长度均为 1。对 $r$ 作此选择可保证 $A_0$是一个嵌入圆柱, 并且不同短测地线周围的标准领圈彼此不相交。关于这些基本结论的证明, 参见 [Bus, 第 4 章。1]。（为简化上述表述, 我们用到了以下事实：对于 $L \leq 1$ , $1 < 2\sinh^{-1}(1)$ 和 $\cosh^{-1}(1/L) < \sinh^{-1}(1/\sinh(L/2))$.）

紧黎曼曲面 $X \in \mathcal{M}_g$ 的薄部定义为其短测地线 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 周围的标准领圈之并

$$A = \bigcup_1^n A_i = \bigcup_1^n B(\alpha_i, r_i),$$

其中 $\cosh(r_i) = 1/L(\alpha_i)$。 $n$ 的最大可能值为 $3g-3$, 且当且仅当曲线 $\alpha_i$ 将 $X$ 切割成 $2g-2$ 个裤子曲面时取到。

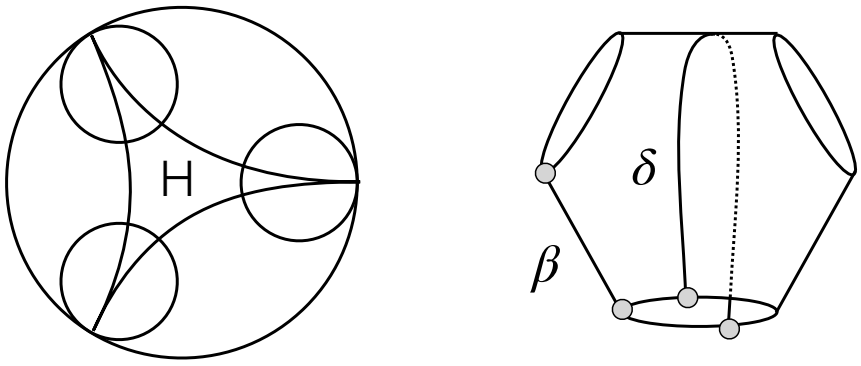


图3. 理想三角形的厚部 $H$ , 以及裤子曲面厚部中的两类测地线弧。

**命题 3.1 的证明**。 设 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$, 并令 $P$ 表示包含 $\gamma$的 $X - \alpha$ 的连通分支。那么 $T = P - A$ 是裤子曲面w $P$的厚部, 而 $\gamma \subset T$是一条连接 $\partial T$上两点的弧。

现在假设 $\max L(\alpha_i)$ 非常小。由于 $P$ 的三个边界分支都包含在 $\alpha$中，它们都非常短，因此 $P$ 本身可以很好地近似为一个三穿孔球面。由此可知，$T$ 接近理想三角形厚部 $H$ 的双重，见图3左侧。（ $H$ 的三个边界分支是长度为$1/2$的 horocycles。）

根据命题 2.2，$\gamma$ 几乎垂直于 $\partial T \subset \partial A$。因此，$\gamma$ 要么接近连接 $\partial T$中一对不同连通分支的最短测地线 $\beta$，要么接近将一个连通分支与其自身相连的最短测地线 $\delta$ （见右侧的图3）。由此立即可得，$L(\gamma) = O(1)$。这类测地线弧中的两条在 $T$中至多相交于两点，因此 $|\gamma \cap \gamma'| \leq 2$。 ∎

## 4 德恩坐标

本节回顾 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$上德恩坐标的定义。

我们首先定义 $\Sigma_g$的六边形分解 $(\alpha, \beta, H)$。这是由多重曲线 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$定义的裤子分解的扩展，使得能够测量扭转。由裤子分解产生的奇偶条件确定了一个格 $L \subset (\mathbb{Z}^2)^{3g-3}$，其坐标为$(m_i, t_i)$，$i = 1, \ldots, 3g-3$。点$(m_i, t_i) \in L$若对所有 $i$，均有 $m_i > 0$ 或 $m_i = 0$ 和 $t_i \geq 0$，则称其为正的 。令 $L_0 \subset L$ 表示正参数的集合，随后我们为每个满足 $\in L_0$的点$(m_i, t_i)$定义一个多重曲线 $C = D(m_i, t_i)$。

这些定义为以下内容提供了基础：

**定理 4.1（Dehn）**映射 $D : L_0 \to \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$ 在正格点与 $\Sigma_g$ 上的多重曲线同痕类之间给出一个双射。

证明见 Dehn 1922 年未发表讲义的译文，刊载于 [Dehn]；另见 [FLP]，[HP] 和 [LS]。文献中有时会回避这样一个事实：裤子分解必须经过增强，才能定义德恩坐标。

**简单曲线与（分数）德恩扭转**。令 $\mathcal{S}_g$ 表示无向本质简单闭曲线 $\alpha \subset \Sigma_g$ 的同痕类集合。为方便起见，我们在 $\Sigma_g$ 上固定一个双曲度量，并将 $\alpha$ 与其唯一的测地代表相对应。由于测地线对相交方式最为有效，我们有

$$i(\alpha, \beta) = |\alpha \cap \beta|.$$

对所有 $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_g$。

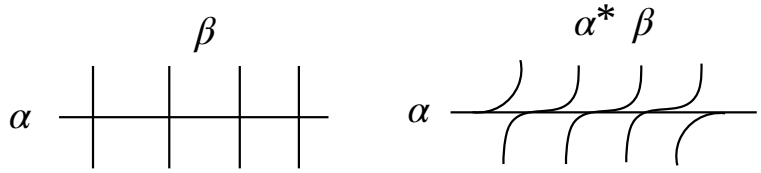


图4. 扭转 $\beta$ 由 $\alpha$。

每个 $\alpha \in \mathcal{S}_g$ 都确定了 $\Sigma_g$ 的映射类群 $\mathrm{Mod}_g$ 中的一个右德恩扭转 $\mathrm{tw}_\alpha$。按照 [LS], ，我们在 $\mathcal{S}_g$ 上定义如下乘积：若 $n = i(\alpha, \beta) > 0$，我们通过修改 $\beta$ 来定义 $\beta' = \alpha * \beta$，使其穿过 $\alpha$的领圈邻域时，与 $\alpha$ 的交点向右移动一步（见图4）。将这一操作迭代 $n$次后，所得结果满足 $(n\alpha) * \beta = \mathrm{tw}_\alpha(\beta)$，因此可以将 $\alpha * \beta$ 视为分数德恩扭转 $\mathrm{tw}_\alpha^{1/n}$ 的结果。

如果 $i(\alpha, \beta) = 0$，则设 $\alpha * \beta = \beta$。

**六边形分解**。在 $\mathcal{ML}_g$ 上定义德恩坐标，取决于拓扑数据 $(\alpha, \beta, H)$ 的选择，其中：

1. $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$ 是极大互不相交简单闭曲线系$\alpha_i \in \mathcal{S}_g$；2. $\beta = \bigcup_1^n \beta_i$ 是另一组互不相交的简单闭曲线，其中对每个 $i$，$i(\beta, \alpha_i) = 2$，且 $\Sigma_g - \beta$ 不连通；3. $H$ 是 $\Sigma_g - \beta$ 的两个连通分支之一。另一个连通分支记作 $H^*$。

**裤子曲面**。多重曲线 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$ 确定一个 裤子分解

$$\Sigma_g - \alpha = \bigsqcup_{s=1}^{2g-2} P_s.$$

每个 $P_s$ 在拓扑上都是一个挖去了 3 个互不相交圆盘的球面。它在 $\Sigma_g$ 中的边界有 3 个或 2 个边界分支。前一种情况下，$P_s$ 是一个嵌入的裤子曲面；后一种情况下，两个裤口粘合在一起。无论哪种情况，我们都记作

$$\partial P_s = \alpha_i \cup \alpha_j \cup \alpha_k, \tag{4.1}$$

当 $P_s$ 的亏格为一时，允许出现重复指标。

**奇偶性**。 $\alpha$ 的选择决定了格 $L$：它是整数 $(m_i, t_i)$ 的集合，满足

$$m_i + m_j + m_k = 0 \bmod 2$$

对于方程 (4.1) 的每一种情形。给定多重曲线 $C$ 后，很容易求出其重数 ( $m_i$)；它们由 $i(C, \alpha_i) = m_i$ 决定，而奇偶性条件反映了每条弧在 $C \cap P_s$ 中都有两个端点这一事实。扭转 $t_i$ 则更为微妙，需要使用曲线 $\beta$。

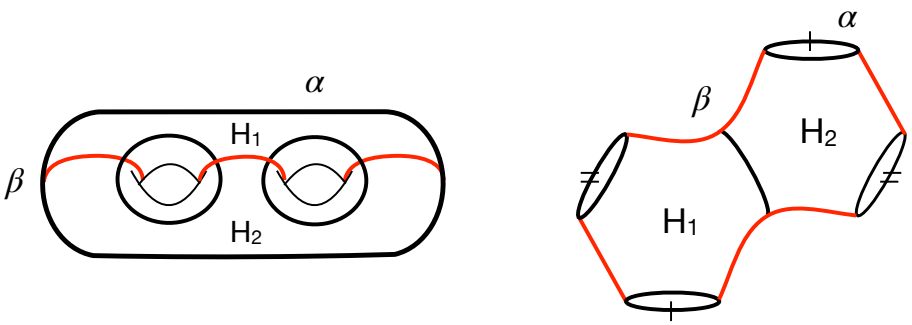


图5. $\Sigma_g$, $g = 2$ 的两种六边形分解（$\alpha, \beta, H$）。左侧示例中的曲线 $\beta$ 有 3 个连通分支，右侧则只有 1 个。

**六边形**。 每个裤子曲面都被 $\beta$ 切分为两个六边形：我们有

$$P_s - \beta = H_s \sqcup H_s^*,$$

其中 $H_s = P_s \cap H$。每个六边形的边在 $\alpha$ 和 $\beta$ 之间交替。根据构造，只要 $P_s$ 和 $P_t$ 以 $\alpha_i$ 为公共边界分支，$H_s$ 和 $H_t$ 就共享边 $\alpha_i \cap H$。

**例子**。 图5展示了 $g = 2$ 的两种六边形分解。注意，一般而言， $\Sigma_g$ 存在一个定向反转对合 $\iota$，它逐点固定 $\beta$，并满足 $\iota(H) = H^*$。

**弧系**。 现在，我们将注意力集中在一个单独的抽象裤子曲面 $P_0$ 上。它被分解为两个六边形 $H_0$ 和 $H_0^*$，二者沿着三条边 $b_1, b_2$ 和 $b_3$相交。剩余的边 $a_1, a_2$ 和 $a_3$ 属于 $H_0$，分别位于 $\partial P_0$的三个连通分支上。索引的选取使得边 $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$ 按逆时针顺序环绕 $H_0$ 排列（见图 6）。

令 $m = (m_1, m_2, m_3)$ 为一个满足 $m_i \geq 0$ and $m_1 + m_2 + m_3$ 为偶数的整数三元组。我们将 $m$ 与具有以下性质的互不相交的适当嵌入弧系 $A(m) \subset P_0$ 相关联：

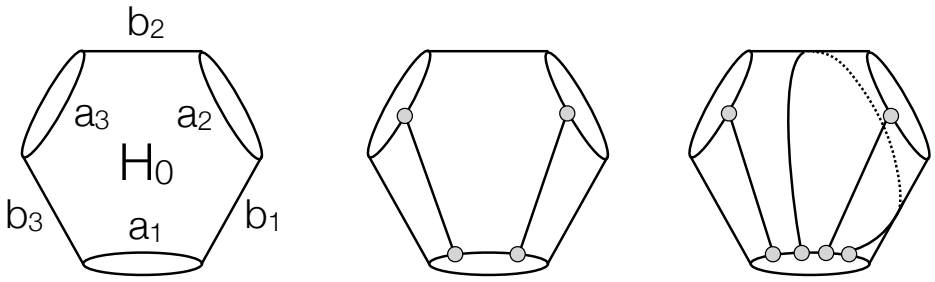


图6. $P$中的弧系 $A(m)$，其中 $(m_1, m_2, m_3) = (2,1,1)$ 和 $(4,1,1)$。

- 弧 $A(m)$ 在 $a_i \subset \partial H_0$ 上有 $m_i$ 个端点，且没有其他端点。

- 如果 $A(m)$ 中的一条弧连接了 $\partial P_0$ 的两个不同分支，那么它包含在 $H_0$ 中。

- 如果 $A(m)$ 中的一条弧与自身相连，那么其内部恰好与 $\partial H_0$ 相交两次——一次在 $b_i$，另一次在 $b_{i+1}$。（这里的指标按模 3 计算。）

容易证明这样的弧系存在。事实上，如果对 (123) 的每一种排列 $(ijk)$，三角不等式 $m_i + m_j \geq m_k$ 都成立，那么每条弧都会连接 $\partial P_0$ 的一对不同分支，并且有 $A(m) \subset H_0$。

另一方面，如果 $m_i + m_j < m_k$，那么每条弧至少有一个端点位于 $a_k$ 上。任何两个端点都在 $a_k$ 上的弧，都会先经过 $H_0^*$ 一次再返回；我们采用了约定（见上文第三个项目），认为它在此过程中环绕 $a_{k+1}$。（必须打破对称性，以确保 $A(m)$ 的端点不仅位于 $\partial P_0$ ——圆的并集——而且位于 $\partial P_0 \cap \partial H_0$ ——弧的并集。）

利用 $H_0$ 和 $H_0^*$ 均为单连通这一事实，可以验证：

> 满足上述条件的弧系 $A(m)$ 在对偶 $(P_0, H_0)$进行同伦变形的意义下是唯一的。

**组装与扭转**。现在可以直接定义多重曲线$C = D(m_i, t_i)$。

首先，假设 $C = D(m_i, 0)$；也就是说，假设对所有 $i$ 都有 $t_i = 0$。选取一个有限集 $B \subset \alpha \cap H$，使得对所有 $i$ 都有 $|B \cap \alpha_i| = m_i$。接下来，对每一对 of 具有边界分支（$\alpha_i$，$\alpha_j$，$\alpha_k$）的裤子 $P_s$，按逆时针顺序排列

围绕 $H_s$，如上所述构造弧系 $C_s = A(m_i, m_j, m_k) \subset P_s$，通过同伦变形进行调整，使得 $\partial C_s \subset B$。最后，我们令

$$C = D(m_i, 0) = \bigcup C_s.$$

这就完成了在所有 $t_i = 0$ 时 $D(m_i, t_i)$ 的定义。

对于一般坐标 $(m_i, t_i) \in L_0$，我们只需定义

$$C = D(m_i, t_i) = \alpha_1^{t_1} * \alpha_2^{t_2} * \cdots * \alpha_{3g-3}^{t_{3g-3}} * D(m_i, 0) + \sum_{m_j=0} t_j \alpha_j.$$

最后一项求和计入了 $C$ 中不与 $\alpha$ 相交的部分，即与 $\bigcup \partial P_j$ 平行的曲线。这就完成了定理 4.1 中映射 $D$ 的定义。

**备注**。

1. 可以将 $D$ 的定义扩展到整个格 $L$，只需要求对于任意序列 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$，有 $D(\epsilon_i m_i, \epsilon_i t_i) = D(m_i, t_i)$。

2. 它还可以扩展为一个连续映射

$$D : (\mathbb{R}^2)^{3g-3} \to \mathcal{ML}_g(\mathbb{R}),$$

一般而言，度为 $2^{3g-3}$。

3. 在德恩坐标中，$\mathcal{ML}_g(\mathbb{R})$ 上的自然（瑟斯顿）测度局部由下式给出

$$dV = (1/V_g)\, dm_1\, dt_1 \cdots dm_{3g-3}\, dt_{3g-3}, \tag{4.2}$$

其中 $V_g = [\mathbb{Z}^{6g-6} : L] = 2^{2g-2}$。对于任意光滑边界开集$U \subset \mathcal{ML}_g$，有

$$\mathrm{Vol}(U) = \lim_{T\to\infty} |T \cdot U \cap \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})|/T^{6g-6}. \tag{4.3}$$

4. 对 $\beta \cup \alpha$ 进行平滑处理，并可能添加新的分支以适应图6右侧所示的情况，从而得到一组局部图表覆盖整个空间 $\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$ 的轨道。

## 5 交数

本节将证明并改进定理 1.4 给出的、关于德恩坐标中 $i(C,\ C')$ 的估计。我们将证明:

**定理 5.1** 设 $(m_i, t_i)$ 和$(m_i', t_i')$ 表示相对于给定的六边形分解$(\alpha, \beta, H)$，$C, C' \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$ 的德恩坐标。则有:

$$i(C, C') = E + \sum_{i=1}^{3g-3} \max(0, |m_i t_i' - m_i' t_i| - 11 m_i m_i'),$$

其中

$$0 \le E \le 22 \sum m_i m_i' + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2g-2} (m_i + m_j + m_k)(m_i' + m_j' + m_k').$$

这里，$i$、$j$、$k$和 $s$通过 $\partial P_s = \alpha_i \cup \alpha_j \cup \alpha_k$相关。

当$P_s$是带边界环面时，我们允许两个指标（$i$、$j$、$k$）重合。常数 11 和 13 仅用于说明这些界与 $g$无关。

证明的思路是将 $C$ 和 $C'$ 实现为双曲曲面 $X$ 上的测地线，其中 $\alpha \perp \beta$ 和 $L(\alpha)$ 很小。正如我们将在下文看到的，这一选择迫使所有绕行行为都集中在 $X$的薄部中。

**来自（$\alpha$，$\beta$）的芬切尔–尼尔森坐标**。取 $\Sigma_g$ 的一个六边形分解（$\alpha$，$\beta$，$H$），其中 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$。这些信息不仅确定了德恩坐标，还确定了 $\mathcal{T}_g$ 上的一组芬切尔–尼尔森坐标（$\ell_i$，$\tau_i$）（例如参见 [Th1，第 4 章.6]）。这些坐标经过归一化，使得

$$\ell_i = L(\alpha_i)$$

对所有 $X \in \mathcal{T}_g$，以及 $\tau_i = 0$ 对所有 $i$，当且仅当 $\alpha \perp \beta$ 在 $X$ 上——这意味着这些曲线的测地代表在它们相交的每个 $6g-6$点处都彼此正交。

**简单测地线的行为**。我们首先描述 $X$ 上（所有）简单测地线的近似几何性质，至少在 $\max \ell_i$ 较小时如此。

**定理 5.2** 假设 $X \in \mathcal{T}_g$ 的芬切尔–尼尔森坐标满足 $\tau_i = 0$ 和 $0 < \ell_i \ll 1$。令

$$A = \bigcup A_i = \bigcup B(\alpha_i, r_i)$$

$X$ 为薄部，并令 $G = G(m_i,\ t_i)$ 为多重曲线 $D(m_i,\ t_i)$ 的测地代表。那么，$G \cap A_i$ 的每个连通分支 $\gamma$ 的绕数满足

$$|w(\gamma, \alpha_i) - t_i/m_i| \leq 5, \tag{5.1}$$

给定 $m_i \neq 0$。

**证明**。我们只需重复 §4 中 $C = D(m_i, t_i)$ 的构造，这次改用 $X$上的分段测地曲线。

首先假设对所有 $i$，$t_i = 0$ 成立。对每个 $i$，在弧 $\alpha_i \cap H$上选取 $m_i$ 个不同的点。然后，对每个裤子曲面 $P_s$，按照图6所示的模式，用简单测地线连接这些点。这些弧的并集是一条分段测地曲线 $G'$，代表 $D(m_i,0) \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$。

注意，$G' \cap A_i$ 的每个连通分支 $\gamma$ 都连接两个连通分支 o f $\partial A_i$，且与 $\beta$ 相交至多一次。因此它与 $\alpha_i$近乎正交，并且我们有

$$|w(\gamma, \alpha_i)| \leq 1. \tag{5.2}$$

整体而言，$G'$ 是有限多个多边形闭环的并集。每个闭环每次穿过 $\alpha$ 时都可能稍微转折一下；除此之外，它都是直的，而且 $G'$ 中的每条极大测地弧都很长（因为 $\alpha$ 的领圈邻域很宽）。双曲几何中有一条一般原理：这样的分段线性曲线与其测地代表 $G$ 的距离 $C^1$ 很近。

特别地，$G'$ 与 $\partial A$相交的点非常接近 $G$ 与之相交的点。由于 $\partial A$的每个连通分支的长度均为 1，当我们用 $G$替换 $G'$ 时，$A$ 中线段的绕数只会发生微小变化（$\ll 1$）。将这一变化向上取整为 1，再利用方程（5.2），并考虑到 $A_i - \alpha_i$ 有两个连通分支，我们得到

$$|w(\gamma, \alpha_i)| \leq 3 \tag{5.3}$$

对 $G \cap A_i$的每个连通分支 $\gamma$ 均成立。当所有 $t_i = 0$都满足这一条件时，定理 5.2 的证明即告完成。

现在让我们加入扭转。令 $G_0 = G(m_i,\ 0)$ 为上文分析过的测地线。再次遵循 §4 中的讨论，我们通过如下方式修改 $G_0$ 在 $A_i$ 内的部分，构造分段测地曲线 $G'$：首先，在 $\alpha_i$ 的一个小邻域内使用图4所示的操作，将 $G_0$ 替换为 $\alpha_i^{t_i} * G_0$；然后，将得到的弧拉直为 $A_i$ 中的测地线，同时固定其端点在 $\partial A_i$ 上的位置。对所有 $i$ 执行此操作后，我们得到一条分段测地多重曲线 $G'$，满足：

1. $G'$ represents $D(m_i, t_i)$ in $\mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$;

2. $G' = G_0$ 位于 $A$ 外部；并且

3. $G'$ 是一条分段线性曲线，在点 $G' \cap \partial A$ =$G_0 \cap \partial A$处有轻微弯折。

最后一点由命题 2.2 得出。此外，显然，如果$t_i = nm_i$，那么将 $G_0$ 替换为 $G'$ 会使绕数 $w(\gamma,\ \alpha_i)$ 改变整数 $n$，因为 $\alpha_i^{nm_i} * G_0 = \mathsf{tw}_{\alpha_i}^n(G_0)$。由于每条线段的绕数关于 $t_i$单调，因此（利用等式（5.3））可知， $G' \cap A_i$ 的每个连通分支 $\gamma$ 都满足

$$|w(\gamma) - t_i/m_i| \leq 4.$$

再次利用 $G'$ 与 $G$相距 $C^1$ 近这一事实，可知将 $G'$替换为 $G$ 后同一不等式仍成立，只需将上面的界放宽至 5。

■

**定理 5.1 的证明**。选取足够小的 $\ell_i = L$ ，使命题 3.1 和定理 5.2 均适用于 $X$。设 $G$ 和 $G'$ 分别是 $C$ 和 $C'$ 在 $X$ 上的测地代表。只需考虑这样的情形： $G$和 $G'$ 彼此横截，并且也与 $\alpha$横截，因此特别有

$$i(C, C') = |G \cap G'|.$$

为完成证明，我们将估计 $G' \cap G$ 在 $X$的厚部和薄部中的点数，然后求和。

令 $T_s = P_s - A$为裤子曲面 $P_s$的厚部。令 $\gamma$和 $\gamma'$为 $G \cap T_s$和 $G' \cap T_s$ 的分支。由命题 2.2，得到 $|\gamma \cap \gamma'| \leq 2$。对所有裤子曲面求和，并利用 $G \cap T_s$ 的分支数为 $(m_i + m_j + m_k)/2$这一事实，可得上界

$$|G \cap G' - A| \leq (1/2) \sum_s (m_i + m_j + m_k)(m_i' + m_j' + m_k'), \tag{5.4}$$

其中 $\partial P_s = \alpha_i \cup \alpha_j \cup \alpha_k$。

现在转而考察薄部 $A = \bigcup A_i$。结合等式（2.2）和（5.1），可知 $G \cap A_i$ 和 $G \cap A_i'$的任意一对分支 $\gamma$ 和 $\gamma'$ 都满足：

$$|\gamma \cap \gamma'| = \max(0, |t_i/m_i - t_i'/m_i'| + E),$$

其中 $|E| \leq 11$。此类配对的数量为 $m_i m_i'$；乘以这个因子，对 $i$ 求和，并利用介值定理，得到

$$|G \cap G' \cap A| = \sum_i \max(0, |m_i' t_i - m_i t_i'| + E m_i m_i'), \tag{5.5}$$

且 $E$ 满足相同的界。将方程 (5.4) 和 (5.5) 相加，即得定理的陈述。

■

**备注**。 利用特定的双曲结构来证明关于曲面的拓扑定理，这种策略也用于例如 [CMP]中。关于长度和交数的更多估计，参见 [Tor]。

# 6 长度

本节将给出德恩坐标中双曲长度的一个估计，类似于 [Mir] 中命题 3.5 的陈述。随后，我们将利用这一估计，对 $S_X$ 在德恩坐标中给出一个良好的定性图景。

**长度**。 固定 $\Sigma_g$的一个六边形分解（$\alpha$， $\beta$， $H$），其中 $\alpha = \bigcup \alpha_i$，并令 $D(m_i,\ t_i)$表示 $\mathcal{ML}_g$上的相应德恩坐标。我们将证明：

**定理 6.1（Mirzakhani）**对于所有 $X \in \mathcal{T}_g$，都存在 $\Sigma_g$的一个六边形分解$(\alpha, \beta, H)$，使得在德恩坐标中，

$$\ell_X(D(m_i, t_i)) \asymp \sum_1^{3g-3} 2m_i \operatorname{Log}(1/\ell_i) + |t_i|\ell_i, \tag{6.1}$$

其中 $\ell_i = \ell_X(\alpha_i)$。

我们给出的证明还得出以下补充结论：

**定理 6.2** 假设 $X \in \mathcal{T}_g$ 相对于 $(\alpha, \beta, H)$具有芬切尔–尼尔森坐标 $(\ell_i, \tau_i)$，且对所有 $i$都有 $\tau_i = 0$。那么，方程 *(6.1)* 中的隐常数在 $\max \ell_i \to 0$时趋于1 。

**适配**。 当六边形分解 $(\alpha, \beta, H)$ 的选取使定理 6.1 成立时，我们称相应的德恩坐标是对 $X$适配的。正如我们将在证明中看到的，总可以假设 $\alpha$ 包含 $X$上的所有短测地线， $L(\alpha) = O(1)$，并且在 $\alpha$ 与 $\beta$ 相交的每一点处，它们之间都有确定角度。在定理 6.2 中， $\beta$ 与 $\alpha$ 在 $X$上正交。

**逼近 $B_X$ 一个立方体**。定理 6.1 表明， $B_X$ 近似为一个立方体。更确切地说，如果我们令

$$C_X = \prod_1^{3g-3} \left[0, \frac{1}{\operatorname{Log}(1/\ell_i)}\right] \times \left[\frac{-1}{\ell_i}, \frac{1}{\ell_i}\right] \subset \mathcal{ML}_g, \tag{6.2}$$

其中 $\ell_i = \ell_X(\alpha_i)$，则有：

**推论 6.3** 存在常数 $k \asymp 1$，使得对所有 $X \in \mathcal{T}_g$，我们都有

$$(1/k)C_X \subset B_X \subset kC_X$$

在适用于 $X$的德恩坐标中。

**推论 6.4** 我们有 $\mathrm{Vol}(B_X) \asymp \prod_1^{3g-3} (\ell_i \operatorname{Log}(1/\ell_i))^{-1}$。特别地，$\mathrm{Vol}(B_X) \to \infty$ 当 $[X] \to \infty$ 在 $\mathcal{M}_g$ 中时。

定理 6.1 的这个推论也见于 [AA，定理 1.5]。

**定理 6.1 和 6.2 的证明**。令 $G \subset X$ 表示 $C$的几何代表元，其双曲长度为 $L(G)$。我们可以假设 $G$ 的每个连通分支的重数均为一，因此 $L(G) = \ell_X(C)$。

首先假设 $X$ 的芬切尔–尼尔森坐标为 $(\ell_i, \tau_i)$，其中 $\tau_i = 0$ 且 $\epsilon = \max \ell_i$ 非常小——特别是小到足以满足命题 3.1 的适用条件。若 $a/b \to 1$ 为 $\epsilon \to 0$，我们记作 $a \sim b$。

令 $A = \bigcup A_i = \bigcup B(\alpha_i, r_i)$ 为 $X$ 的薄部。于是 $\cosh(r_i) = 1/\ell_i$，因此 $r_i \sim \operatorname{Log}(1/\ell_i)$。结合关于长度的定理 2.1 与关于绕数的定理 5.2，我们得到

$$L(G \cap A) = \sum 2m_i \operatorname{Log}(1/\ell_i) + |t_i|\ell_i + O(m_i).$$

定理 5.2 还表明，$G - A$ 的分支数为 $O(\sum m_i)$。根据命题 3.1，$G - A$ 的每个连通分支长度为 $O(1)$，因此

$$L(G - A) = O\left(\sum m_i\right)$$

同样成立。由于当 $\ell_i \to 0$ 时 $\operatorname{Log}(1/\ell_i) \to \infty$，我们可以忽略大小为 $O(1)$ 的项，因此

$$L(G) \sim \sum 2m_i \operatorname{Log}(1/\ell_i) + |t_i|\ell_i$$

如所需。

这就完成了定理 6.2 的证明。它表明存在一个 $\epsilon_0 > 0$，使得定理 6.1 对 $X$ 成立，前提是其芬切尔–尼尔森坐标对所有 $i$ 都满足 $\tau_i = 0$，并且 $\max \ell_i < \epsilon_0$。

为处理亏格为 $g$ 的一般黎曼曲面的情形，首先回顾一下，任意 $X \in \mathcal{T}_g$ 都有一个由 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i$ 定义的裤子分解，且 $\max L(\alpha_i) = O(1)$。（参见 [Bus 第 5] 章中关于 Bers 常数的讨论。隐含常数依赖于 $g$，这符合我们的约定

自 §1 起。）随后，我们可以将 $\alpha$ 补全为 $X$ 的一个六边形分解（$\alpha$，$\beta$，$H$）。

设 $(\ell_i,\ \tau_i)$ 是与 $(\alpha,\ \beta,\ H)$ 相容的 $X$ 的芬切尔–尼尔森坐标。则 $\ell_i = O(1)$，并且我们可以沿着 $\alpha$ 的各个连通分支对 $\beta$ 施加德恩扭转，从而使得 $\tau_i = O(\ell_i)$。

现在令 $X' \in \mathcal{T}_g$ 为坐标为芬切尔–尼尔森坐标 $(\ell'_i,\ \tau'_i)$ 的唯一黎曼曲面，其中 $\ell'_i = \min(\epsilon_0,\ \ell_i)$ 且 $\tau'_i = 0$。由于对所有 $i$ 都有 $\ell'_i \le \epsilon_0$，方程 (6.1) 对 $X'$ 成立。另一方面，$X$ 和 $X'$ 的芬切尔–尼尔森坐标足够接近，因此存在一个 $K$–双利普希茨映射 $\phi : X \to X'$，它与标记相容，且满足 $K = O(1)$。此映射使方程 (6.1) 的两边至多改变一个有界因子。由于我们已经证明了定理 6.1 对 $X'$ 成立，这表明对于一般的 $X \in \mathcal{T}_g$，该定理也成立（常数至多发生有界变化）。

■

**备注**。Mir，第 3] 节的讨论省略了有关扭转的一些重要细节。

## 7 随机简单闭曲线

本节将使用第 5 节和第 6 节中关于 $i(C,\ C')$ 和 $\ell_X(C)$ 的估计来证明推论 1.5，该推论指出，对于所有 $X,\ Y \in \mathcal{T}_g$，我们有

$$\begin{aligned} i(S_X, S_X) &\asymp \operatorname{Vol}(B_X)^2 (\operatorname{sys}(X) \operatorname{Log}(1/\operatorname{sys}(X)))^{-1}, \text{ and} \\ i(S_X, L_Y) &\gg C(Y) \operatorname{Vol}(B_X)/\operatorname{sys}(X). \end{aligned}$$

为了证明这些结果，我们研究在 $B_X$ 中随机选取的简单闭曲线之间的相互作用。

**随机简单闭曲线对**。有限测度空间 $(M,\ \mu)$ 上的随机变量 $V$，就是一个可测函数 $V\colon M \to \mathbb{R}$；其期望 $E(V)$ 定义为 $(1/\mu(M)) \int_M V\, d\mu$。

给定 $X \in \mathcal{T}_g$，我们将关注相对于 $B_X$ 上由方程 (4.2) 定义的自然体积元 $dV$ 随机选取的流 $C$。根据推论 6.3，$C_X$ 是对 $B_X$ 的良好近似。其优势在于，根据方程 (6.2) 给出的 $C_X$ 上的乘积结构，随机流 $C \in C_X$ 的坐标 $(m_i,\ t_i)$ 是独立随机变量，且每个变量都在相应区间内均匀分布：

$$m_i \in [0, 1/\operatorname{Log}(1/\ell_i)] \quad \text{and} \quad t_i \in [-1/\ell_i, 1/\ell_i]. \tag{7.1}$$

利用这一思路，以下两个估计可用于证明推论 1.5。

**定理 7.1** 对于随机选取的 $C, C' \in B_X$，我们有

$$E(i(C, C')) \asymp (\operatorname{sys}(X) \operatorname{Log} 1/\operatorname{sys}(X))^{-1}.$$

**证明**。由紧致性，只需证明当 sys($X$) 较小时该结论成立。我们将在适配于 $X$ 的六边形分解 ($\alpha, \beta, H$) 所给出的坐标中进行论证。我们可以假设 $\alpha_1$ 是 $X$ 上最短的闭测地线，因此 $X$ 的芬切尔 – 尼尔森坐标 ($\ell_i, \tau_i$) 满足 $\ell_1 =$ sys($X$)。此外，根据推论 6.3，在定理的表述中，我们可以用 $C_X$ 替换 $B_X$。由于随机选取的一对点 $C, C' \in C_X$ 的坐标是独立随机变量，且在方程 (7.1) 给出的区间内均匀选取，因此我们有

$$E\left|\det \begin{pmatrix} m_i & t_i \\ m_i' & t_i' \end{pmatrix}\right| \asymp E(m_i)E(|t_i'|) \asymp \frac{1}{\ell_i \operatorname{Log}(1/\ell_i)}.$$

对于 $i = 1$，这个最终量为 (sys($X$) Log $1$/sys($X$))$^{-1}$)；而对于 $i$ 的其他取值，该量只会更小。利用定理 1.4，我们得到

$$E(i(C, C')) \asymp (\operatorname{sys}(X) \operatorname{Log} 1/\operatorname{sys}(X))^{-1} + E,$$

其中 $|E| \ll$ (Log($1$/sys($X$)))$^{-2}$。当 sys($X$) 较小时，误差项 $E$ 远小于主项，因此定理得证。 ∎

**定理 7.2** 固定 $Y \in \mathcal{T}_g$，并随机选取 $C \in B_X$。于是我们有

$$E(i(C, L_Y)) \gg C(Y)/\operatorname{sys}(X). \tag{7.2}$$

**证明**。只需在 sys($X$) 较小时证明这个不等式。否则，我们有 $i(S_X, L_Y) \asymp i(L_X, L_Y) \geq i(L_Y, L_Y) \asymp 1$。（当 $X$ 接近 $Y$ 时，由 [Wol，式（0.1）], 可得不等式$i(L_X, L_Y) \geq i(L_Y, L_Y)$；随后对所有 $X$ 和 $Y$，由地震路径上的长度的凸性可得 [Ker，定理 1]。）

根据推论 6.3，只需证明将 $B_X$ 替换为 $C_X$ 后的命题。选取一组简单闭测地线 $\gamma = \bigcup_1^n \gamma_i$，使其填满曲面 $Y$，即 $Y - \gamma$ 的每个连通分支都是一个拓扑圆盘。流 $L_Y$ 可由 $\sum \gamma_i$ 良好逼近；特别地，存在常数 $C(Y) > 0$，使得

$$i(C, L_Y) \geq C(Y) \max_i i(\gamma_i, C) \tag{7.3}$$

对所有 $C \in \mathcal{C}_g$ 均成立。

让我们考察曲线（$\gamma_i$）与在 $X$ 上给出德恩坐标的环路（$\alpha_i$）之间的相互作用，并按 $\ell_1 = \ell_X(\alpha_1) =$ 短周期$(X)$ 的顺序排列。由于 $\gamma$ 填充了 $Y$，我们有 $i(\gamma_i, \alpha_1) \geq 1$，其中某个 $i$；我们不妨假设 $i = 1$。因此，在由（$\alpha$, $\beta$, $H$）确定的德恩坐标中，我们有 $\gamma_1 = (m_i', t_i')$，其中 $m_i' \geq 1$。

由于定理 5.1 中出现的求和里的每一项都是正的，对于所有 $C = (m_i, t_i) \in C_X$，我们有

$$i(C, \gamma_1) \geq |t_1 m_1' - t_1' m_1| - 11 m_1 m_1'.$$

再次利用随机点 $C \in C_X$ 的坐标（$m_1$, $t_1$）是独立随机变量这一事实，我们得到:

$$E[|t_1 m_1' - t_1' m_1|] \gg m_1'(1/\ell_1),$$

而

$$E(m_1 m_1') \leq m_1' / \operatorname{Log}(1/\ell_1).$$

一旦 $\ell_1 =$短周期$(X)$ 足够小，第一个表达式便占主导地位；由于 $m_1' \geq 1$，我们得到

$$E(i(C, \gamma_1)) \gg 1/\operatorname{sys}(X).$$

定理现在由方程 (7.3) 得出。 ∎

**推论 1.5 的证明**。所需的估计由上述定理 7.1 和 7.2 得出，利用以下事实: 对于在 $B_X$ 中随机选取的 $C$ 和任意 $C' \in \mathcal{C}_g$，我们有

$$E(i(C, C')) = i(S_X, C') / \operatorname{Vol}(B_X).$$

∎

# 8 $\mathcal{T}_g$ 的嵌入

本节证明定理 1.1，该定理指出映射

$$\sigma : \mathcal{T}_g \to \mathcal{C}_g$$

由 $\sigma(X) = S_X / i(S_X, S_X)^{1/2}$ 给出的是一个真嵌入。

**引理 8.1** 对于任意紧子集 $K \subset \mathcal{M}_g$，存在一个常数$C(K) > 0$ 使得

$$i(\sigma(X), C) \geq C(K)\, i(\lambda(X), C)$$

对所有 $X \in K$ 和 $C \in \mathcal{C}_g$。

**证明**。 注意，函数

$$f(X, C) = \frac{i(\sigma(X), C)}{i(\lambda(X), C)} = \frac{i(\sigma(X), C)}{\ell_X(C)}$$

是连续的 $\mathcal{T}_g \times \mathbb{P}\mathcal{C}_g$，并且它在 $\mathcal{C}_g$ 上的下确界诱导出 $\mathcal{M}_g$上关于 $[X]$ 的连续函数。由 $K$的紧致性即可得到结论。 ∎

**定理 1.1 的证明**。 $\sigma$ 的连续性由 $\ell$ 的连续性推出： $\mathcal{T}_g \times \mathcal{C}_g \to \mathbb{R}$；单射性则由 [ES，定理 1.4] 得出。（简言之，从流 $S_X$ 的遍历分解可以恢复 $B_X$ 至一个标量因子，而根据 [Th2，命题 3.5]，这些信息唯一确定 $X$ 。）剩下只需证明 $\sigma$ 是真映射。

固定一个基点 $Y \in \mathcal{T}_g$，并设 $X_n \to \infty$属于 $\mathcal{T}_g$。我们分两种情况讨论。

首先，设 $[X_n]$ 取值于紧子集 $K \subset \mathcal{M}_g$。那么由引理 8.1（取 $C = L_Y$），可得

$$i(\sigma(X_n), L_Y) \geq C(K) i(\lambda(X_n), L_Y) \to \infty$$

由 $\lambda$ 的真性。因此， $\sigma(X_n) \to \infty$ ，如所求。

其次，设 $[X_n] \to \infty$ 属于 $\mathcal{M}_g$。那么，$\mathrm{sys}(X_n) \to 0$。将推论 1.5 中第二个界平方，再除以第一个界，并取 $X = X_n$，我们得到

$$i(\sigma(X_n), L_Y)^2 \gg \frac{\mathrm{Log}(1/\,\mathrm{sys}(X_n))}{\mathrm{sys}(X_n)} \to \infty,$$

因此，在这种情况下， $\sigma(X_n) \to \infty$ 也成立（参见引言中的方程 (1.2)）。

由于我们总可以取一个子列，使得 $[X_n]$在 $\mathcal{M}_g$ 或 $[X_n] \to \infty$ 中有界，证明便完成了。 ∎

# 9 紧化

本节证明定理 1.2 和定理 1.3，描述由 $\lambda$ 和 $\sigma$ 确定的 $\mathcal{T}_g$ 的两种紧化在给定的 $[C] \in \mathbb{P}\mathcal{ML}_g$ 附近的行为。

**引理 9.1** 若 $\lambda(X_n) \to [C] \in \mathbb{P}\mathcal{ML}_g$，且 $\sigma(X_n) \to [C']$，则 $i(C, C') = 0$。

**证明**。固定一个基点 $Y \in \mathcal{T}_g$，并令 $U \subset \mathcal{C}_g$ 为由 $i(C, L_Y) = 1$ 定义的流的紧集。我们有自然映射

$$\mathcal{C}_g - \{0\} \to \mathbb{P}\mathcal{C}_g \cong U$$

其复合映射由 $C \mapsto C^u = C/i(C, L_Y)$ 给出。利用短周期 $\mathrm{sys}(X) = O(1)$ 在 $\mathcal{M}_g$ 上这一事实，方程 (1.1) 和推论 1.5 给出 $i(S_X, L_X) \asymp \mathrm{vol}(B_X)$ 且 $\mathrm{vol}(B_X) \ll C(Y) i(S_X, L_Y)$。由此可得

$$i(S_X^u, L_X^u) \ll C(Y)/i(L_X, L_Y).$$

由于 $X \to \infty$ 属于 $\mathcal{T}_g$，我们有 $i(L_X, L_Y) \to \infty$，因此 $i(S_X^u, L_X^u) \to 0$，这意味着上述极限层状结构满足 $i(C, C') = 0$。 ∎

**定理 1.2 的证明**。若 $C$ 是填充且唯一遍历的，则条件 $i(C, C') 蕴含 [C] = [C'] \in \mathbb{P}\mathcal{ML}_g$。 ∎

下面的陈述是初等的。

**命题 9.2** 对于在由 $\sum(x_i/A_i) \le 1$ 定义的单形 $\Delta \subset \mathbb{R}^n_+$ 中随机选取的点 $x$，有 $E(x_i) = A_i/(n+1)$。

**定理 1.3 的证明**。设 $\sum_1^{3g-3} C_i \in \mathcal{ML}_g(\mathbb{Z})$ 是与一组极大不相交简单闭合 $\alpha = \bigcup_1^{3g-3} \alpha_i \subset \Sigma_g$相关联的流。

将 $\alpha$ 扩展为六边形分解（$\alpha$，$\beta$，$H$），我们在 $\mathcal{ML}_g$ 上得到相容的德恩坐标（$m_i$，$t_i$），并在 $\mathcal{T}_g$上得到芬切尔–尼尔森坐标（$\ell_i$，$\tau_i$）。

选择权重 $a_i > 0$，并令 $X_n$ 为 $\mathcal{T}_g$ 中具有 Fenchel– Nielsen 坐标的点

$$(\ell_i, \tau_i) = (1/(na_i), 0)$$

对于 $i = 1$，2，.....，$3g-3$。众所周知，

$$[\lambda(X_n)] \to \left[\sum_1^{3g-3} C_i\right]$$

因为 $n \to \infty$，毕竟 $X_n$ 上关于 $\alpha_i$ 的标准领圈宽度渐近于 $2\log n$，且与 $i$ 无关。

现在考虑 $\sigma(X_n)$。根据定理 6.2，当 $n$ 足够大时，单位球 $B_X \subset \mathcal{ML}_g$ 在德恩坐标下可由满足以下条件的区域很好地近似：

$$\sum |t_i|\ell_i + 2m_i \operatorname{Log}(1/\ell_i) \le 1.$$

将命题 9.2 应用于这个单形，我们得到随机点 $C = D(m_i,\ t_i) \in B_X$ 的坐标满足

$$E(|t_i|) \sim n a_i \quad \text{and} \quad E(m_i) \sim 1/\log(n).$$

由定理 1.4 可知，对于任意固定的多重曲线 $C'$，其德恩坐标为 $(m_i',\ t_i')$，有

$$E(i(C, C')) \sim E\left(\sum m_i' |t_i|\right) \sim n \sum a_i m_i'$$

当 $n \to \infty$ 时（除非所有 $m_i' = 0$，此时 $i(C,\ C') \to 0$）。由于 $i(\sum a_i C_i,\ C') = \sum a_i m_i'$ 同样成立，我们有

$$[\sigma(X_n)] \to \left[\sum a_i C_i\right] \ \text{ in } \mathbb{P}\mathcal{C}_g,$$

至此证明完成。 ∎

## 参考文献

[AA] F. Arana-Herrera 和 J. S. Athreya. Mirzakhani 函数的平方可积性及双曲曲面上简单闭测地线的统计性质。*Forum Math. Sigma* **8**(2020年)，论文编号 e9，共 33 页。[Bon] F. Bonahon. 通过测地流研究 Teichmüller 空间的几何。*Invent. math.* **92**(1988年)，139–162。[Bus] P. Buser. 《紧黎曼曲面的几何与谱》。Birkhäuser Boston，1992年。[CMP] M. Chas、C. McMullen 和 A. Phillips. 三穿孔球面上的几乎简单测地线。*Math. Z.* **291**(2019年)，1175–1196。

[Dehn] M. Dehn. 关于双侧曲面上的曲线系及其在映射问题中的应用。载于《群论与拓扑论文集》，第 234–252 页。Springer–Verlag，1987年。[ES] V. Erlandsson 和 J. Souto. 给定类型测地线在单位切丛中的分布。《遍历理论与动力系统》43 (2023)，887–903。[FLP] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po´enaru.《瑟斯顿关于曲面的著作》。Ast´erisque，第 66–67 卷，1979年。[GM] F. P. Gardner 和 H. Masur. Teichmüller 空间的极值长度几何。《复变函数理论与应用》16 (1991)，209–237。[HP] J. L. Harer 和 R. C. Penner.《轨道组合学》，《数学年刊研究》第 125 卷。普林斯顿大学出版社，1992年。[Ker] S. Kerckhoff. Nielsen实现问题。《数学年刊》177 (1983)，235–265。[LS] F. Luo 和 R. Stong. 曲面上曲线的 Dehn–Thurston坐标。《分析与几何通讯》12 (2004)，1–41。[Mir] M. Mirzakhani. 双曲曲面上简单闭测地线数量的增长。《数学年刊》168 (2008)，97–125。[Ot] J.-P. Otal. 三维纤维丛流形的双曲化定理。Ast´erisque，第 235 卷，1996年。[Th1] W. P. Thurston.《三维几何与拓扑》，第 1 卷。普林斯顿大学出版社，1997年。[Th2] W. P. Thurston. 双曲曲面之间的极小伸缩映射。载于《William P. Thurston文集》，第 I 卷，第 533–585 页。美国数学会，2022年。[Tor] T. Torkaman. 紧双曲曲面上的交数、长度与短 systole。《献给几何学》219 (2025)，论文编号 80。[Wol] S. Wolpert. Thurston 的 Teichmüller 空间黎曼度量。《微分几何杂志》23 (1986)，143–174。

Mathematics Department, Harvard University, 1 Oxford St, Cambridge, MA 02138

Mathematics Department, University of Chicago, 5734 S University Ave, Chicago, IL 60637