arXiv:2512.14147v1 [math.GR] 16 Dec 2025

剩余有限群等距作用的有限局部逼近

瓦迪姆·阿列克谢耶夫和 ANDREAS THOM

Abstract. 我们证明，剩余有限群的任意等距作用都存在近似局部有限模型。因此，如果 G 是剩余有限的，那么每个等距 G-作用都可等距嵌入有限等距G-作用的度量超积中。

1. 引言

设 G 是一个群，且 $\pi\colon F \to G$ 是从一个自由群出发的满射。若同态序列 $\varphi_n\colon F \to \mathrm{Sym}(k_n)$满足以下条件，则称其为 G 的 sofic逼近：

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{k_n}(\varphi_n(w)) = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi(w) = 1_G, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，对于 $\sigma \in \mathrm{Sym}(k_n)$，$\ell_{k_n}(\sigma) := k_n^{-1}|\{i \mid \sigma(i) \neq i\}|$ 是归一化汉明长度，详情见 [**6**] 。sofic逼近产生一个由左右乘法给出的等距作用序列$F \times F \curvearrowright (\mathrm{Sym}(k_n),\ d_{k_n})$，其中 $1_{k_n} \in \mathrm{Sym}(k_n)$满足

$$\lim_{n\to\infty} d_{k_n}(\psi_{(g,h)}(1_{k_n}), 1_{k_n}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi(g) = \pi(h), \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $d_{k_n}(\sigma,\ \tau) := \ell_{k_n}(\sigma^{-1}\tau)$ 是归一化汉明度量。因此，我们可以将这一序列视为带有取值为0-1的度量 δ. 的典范等距左右作用$F \times F \curvearrowright (G,\ \delta)$ 的局部有限逼近。本文的一个动机是弄清楚，仅仅存在这样的有限等距作用局部逼近，是否已经接近于对 G. 的 sofic 性的刻画。我们认为这并非不可能，因为例如众所周知，$F \times F$ 在 $\ell^2 G$ 上的相应酉表示弱包含于$F \times F$ 的有限维酉表示，当且仅当群 G 是超线性的，参见 [**3**, 定理 6.2.7、练习6.2.4]。然而，与我们的预期相反，我们证明事实并非如此：每个剩余有限群的等距作用都存在近似局部有限模型。特别是，对于所有 $\pi\colon\ F \to G$，左—右作用 $F \times F \curvearrowright (G,\ \delta)$ 都存在这样的模型，而这与 G的 sofic 性无关。如何对逼近所用的有限度量空间施加额外条件，从而确实推出该群是 sofic 群，仍是一个有待攻克的有趣难题

G。目前正在进行一项工作，旨在沿着类似思路，以与 Kirchberg 的工作非常相似的方式刻画 sofic 群 [**1**]。

我们的主要结果如下定理所述：

THEOREM 1.1. 设 G 是一个剩余有限群，并设 $G \curvearrowright_\varphi (X,d)$ 是一个等距作用。对于所有 $X_0 \subset X$ 有限、 $A \subset G$ 有限且满足 $\varepsilon > 0$的情形，都存在一个有限度量空间(Y, η)，其上有一个等距作用 $G \curvearrowright_\psi (Y,\eta)$，以及一个映射 $f\colon X_0 \to Y$，使得

$$\left|d(\varphi_g(x),\varphi_h(y)) - \eta(\psi_g(f(x)),\psi_h(f(y)))\right| \leq \varepsilon, \quad \forall g,h \in A,\ x,y \in X_0.$$

作为定理 **1.1** 的推论，若 G 是剩余有限的，则每个带有等距 G-作用的度量空间都可等距嵌入到有限等距G-作用的度量超积中。

我们的局部有限逼近概念使人联想到 Rosendal 关于有限可逼近群与作用的理论。在 [**5**] 中，他为离散群 G 引入了 Ribes–Zalesskii 性质（RZ），并证明一个群具有此性质，当且仅当它在度量空间上的每个等距作用都允许不带 的有限逼近，也就是说，有限构型可以在有限 G-空间中精确实现。

与此相反，定理 **1.1** 表明，对于剩余有限群，任意等距作用总是存在近似的局部有限模型，但在预先指定的有限构形上允许存在一个小误差 ε 。特别是，剩余有限性足以保证此类 ε模型的存在，而 Rosendal 的精确有限可逼近性则刻画了具有性质 (RZ) 的严格更小的群类。

2. 主要结果的证明

以下定理是主要结果。回忆一下，若对每个 $g \in G \setminus \{e\}$，都存在一个有限群 Q 以及一个同态 $\psi\colon G \to Q$，使得 $\psi(g) \neq e$，则称群 G 为剩余有限。证明受到 Doucha 关于拓扑群度量逼近的工作的启发，特别参见 [**4**,命题 3.9]。

PROOF OF THEOREM 1.1. 不失一般性，我们可以假设 $A = A^{-1}$且 $e \in A$。令 $X_0 \subset X$ 为有限集，并设 $Z := G \times X_0$. 在 Z上定义伪度量κ： $\kappa((g,x),(h,y)) := d(\varphi_g($ $x)$ $\varphi_h(y))$。由于该作用是等距的， κ 在第一坐标上左 G不变，即对所有$k,g,h \in G$, x, $y \in X_0$, 均有 $\kappa((kg,x),(kh,y)) = \kappa((g,x),(h,y))$。令 $d_{\mathrm{st}}\colon Z \times Z \to \{0,1\}$ 为离散度量

$$d_{\mathrm{st}}((g,x),(h,y)) = \begin{cases} 0 & \text{if } (g,x) = (h,y), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义

$$d_\varepsilon((g,x),(h,y)) := \kappa((g,x),(h,y)) + \varepsilon d_{\mathrm{st}}((g,x),(h,y)).$$

那么， d_ε 是 Z上的一个真正的度量，并且在第一坐标上仍然左不变。特别地，对于 $(g,$ $x)$ $\neq (h,y)$，我们有 $d_\varepsilon((g,x),(h,y)) \geq \varepsilon$。令 $m := \max\{d_\varepsilon((g,x),(h,y)) \mid x,y \in X_0,\ g,$ $h \in A\}$，并选取满足 $k \geq 2\varepsilon^{-1}m$. 的 $k \in \mathbb{N}$。现在，利用 G 是剩余有限的这一事实，

取一个有限商群 $\pi\colon G \to H$，使得 π 在有限集 $B := A^k$ 上是单射。令$H_0 := \langle \pi(A) \rangle \leq H$ 为由 $\pi(A)$ 生成的子群。

我们令 $Y_0 := H_0 \times X_0$，并在 Y_0 上定义如下加权图结构：对于 $q \in H_0$,$g,\ h \in A$, $x,\ y \in X_0$，我们规定顶点 $(q\pi(g),\ x)$ 与 $(q\pi(h),\ y)$ 之间存在一条边，其边权为 $w\big((q\pi(g),\ x),\ (q\pi(h),\ y)\big) := d_\varepsilon((g,\ x),\ (h,\ y))$。

令 η 为 Y_0 上的诱导路径度量：对于任意两个顶点，η 是连接它们的所有有限路径的边权之和的下确界。根据构造，在第一坐标上左乘 H_0 中的元素会置换顶点并保持边权不变，因此作用 $H_0 \curvearrowright Y_0$, $h\cdot(q,x) := (hq,x)$ 是等距变换。我们可以将此度量以 H-不变的方式扩展到 $Y := H \times X_0$，将所有不受 H-不变性固定的距离设为一个较大的常数。这样，我们得到G 在 (Y,η) 上的等距作用 $\psi_g(q,x) := (\pi(g)q,x)$。最后，定义 $f\colon X_0 \to Y$，其中 $e \in H$ 是单位元，且 $f(x) := (e,x)$。

我们需要比较 η 和 d_ε 在 $A \times X_0$上。现在证明，对于所有 $g,\ h \in A$,$x,\ y \in X_0$,

$$\eta\big(\psi_g(f(x)), \psi_h(f(y))\big) = d_\varepsilon((g,x),(h,y)). \tag{2.1}$$

这相当于证明

$$\eta\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) = d_\varepsilon((g,x),(h,y)).$$

对于 $g,\ h \in A$和 $x,\ y \in X_0$，$(\pi(g),\ x)$ 与 $(\pi(h),\ y)$ 之间有一条对应于 $q = e$ 的边，因此

$$\eta\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) \leq w\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) = d_\varepsilon((g,x),(h,y)).$$

我们用矛盾法证明反向不等式。固定 $g,\ h \in A$, $x,\ y \in X_0$，并假设

$$\eta\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) < d_\varepsilon((g,x),(h,y)). \tag{2.2}$$

Let

$$(\pi(g),x) = (v_0,x_0),(v_1,x_1),\ldots,(v_n,x_n) = (\pi(h),y)$$

是 Y 中边数为 n 且满足条件的最短路径

$$\eta\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) = \sum_{j=1}^{n} w_j,$$

其中 w_j 是第 j 条边的权重。每条边都来自某个三元组 $q_j \in H_0,\ g_j,\ h_j \in A$，其形式为

$$(v_{j-1},x_{j-1}) = (q_j\pi(g_j),x_{j-1}), \qquad (v_j,x_j) = (q_j\pi(h_j),x_j),$$

其中 $w_j = d_\varepsilon((g_j,x_{j-1}),(h_j,x_j))$。由于没有边是平凡的，因此有 $w_j \geq \varepsilon$，从而

$$\varepsilon n \leq \sum_{j=1}^{n} w_j = \eta\big((\pi(g),x),(\pi(h),y)\big) < d_\varepsilon((g,x),(h,y)) \leq m,$$

因此 $n < \varepsilon^{-1}m \leq k/2$。接下来，考虑这些元素

$$u := g^{-1}h, \qquad u' := \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1}h_j \in G.$$

我们断言

$$\pi(u) = \pi(u'). \tag{2.3}$$

I确实，由 $v_{j-1} = q_j\pi(g_j)$ 和 $v_j = q_j\pi(h_j)$ 可得 $v_{j-1}^{-1}v_j = \pi(g_j^{-1}h_j)$，因此

$$v_n = v_0 \prod_{j=1}^{n} v_{j-1}^{-1}v_j = \pi(g) \prod_{j=1}^{n} \pi(g_j^{-1}h_j) = \pi\Big(g \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1}h_j\Big) = \pi(gu').$$

由于 $v_n = \pi(h)$，这给出 $\pi(gu') = \pi(h)$，即 $\pi(u') = \pi(g^{-1}h) = \pi(u)$。

现在注意到 $u = g^{-1}h \in A^2 \subset A^k = B$，且每个$g_j^{-1}h_j \in A^2$，因此 $u' = \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1}h_j$ 都属于 $A^{2n} \subset A^k = B$，因为 $n \leq k/2$。于是 $u,\ u' \in B$ 并且，由于 π 在 B 上是单射，(2.3) 蕴含 $u' = u$，即

$$g \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1}h_j = h. \tag{2.4}$$

递归地定义元素 b_0，.....，$b_n \in G$，使得 $b_0 := g,\ b_j := b_{j-1}g_j^{-1}h_j (1 \leq j \leq n)$。由构造可知

$$b_n = g \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1}h_j = h$$

根据 (2.4)。现在我们沿着序列 $(b_j,\ x_j)$ 比较 w_j 和 d_ε。对于每个 j，我们有 $b_{j-1}^{-1}b_j = g_j^{-1}h_j$.。利用 d_ε 的左不变性，我们得到

$$\begin{aligned} d_\varepsilon((b_{j-1}, x_{j-1}), (b_j, x_j)) &= d_\varepsilon\big((e, x_{j-1}), (b_{j-1}^{-1}b_j, x_j)\big) \\ &= d_\varepsilon\big((e, x_{j-1}), (g_j^{-1}h_j, x_j)\big) \\ &= d_\varepsilon((g_j, x_{j-1}), (h_j, x_j)) \\ &= w_j. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} d_\varepsilon((b_{j-1}, x_{j-1}), (b_j, x_j)).$$

由 d_ε 的三角不等式，以及以下事实：$(b_0,\ x_0) = (g,\ x)$ 且 $(b_n,\ x_n) = (h,\ y)$，我们得到

$$d_\varepsilon((g, x), (h, y)) \leq \sum_{j=1}^{n} d_\varepsilon((b_{j-1}, x_{j-1}), (b_j, x_j)) = \sum_{j=1}^{n} w_j = \eta\big((\pi(g), x), (\pi(h), y)\big),$$

这与我们的假设 (2.2) 矛盾。因此不存在这样的路径，我们必须有

$$\eta\big((\pi(g), x), (\pi(h), y)\big) = d_\varepsilon((g, x), (h, y)).$$

最后，对于 $g,\ h \in A$和 $x,\ y \in X_0$，我们有

$$\eta(\psi_g(f(x)), \psi_h(f(y))) = d_\varepsilon((g, x), (h, y)) = d(\varphi_g(x), \varphi_h(y)) + \varepsilon\, d_{\mathrm{st}}((g, x), (h, y)),$$

以及 $d_{\mathrm{st}} \in \{0,1\}$，因此

$$\left|\eta(\psi_g(f(x)),\psi_h(f(y))) - d(\varphi_g(x),\varphi_h(y))\right| \le \varepsilon.$$

证明至此完成。 □

在 G 上的一个半范数 是一个函数 $s\colon G \to [0,\infty)$，满足 $s(e) = 0$, $s(g^{-1}) = s(g)$, 且对所有 $g,h \in G$，有$s(gh) \le s(g) + s(h)$。如果 $s(g) = 0$ 意味着$g = e$，则称半范数 s 为范数 。赋予范数的群称为赋范群。定义标准 范数$n_{\mathrm{std}}\colon G \to \{0,1\}$ 为

$$n_{\mathrm{std}}(g) := \begin{cases} 0 & g = e, \\ 1 & g \neq e. \end{cases}$$

G 上的左-G-不变度量与 G上的范数之间存在众所周知的对应关系。因此，下面的推论显然成立。

Corollary 2.1. 设 G 是一个剩余有限群，且 $s\colon G \to [0,\infty)$ 是一个半范数。那么，对于每个有限的 $A \subset G$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个有限赋范群(H,ρ)以及一个满同态 $\varphi\colon G \to H$，使得

$$|\rho(\varphi(g)) - s(g)| \le \varepsilon \qquad \textit{for all } g \in A.$$

[**4**] 中的命题 3.9 从精神上阐述了针对自由群的上述推论，而其证明并未使用自由性。此处不展开细节，例如参见 [**2**], ；我们还记录如下推论：

Corollary 2.2. 设 G 为剩余有限群。每个等距作用 $G \curvearrowright (X,\ d)$ 都能等距嵌入有限 G-作用的度量超积中。

致谢

第二作者感谢艾萨克·牛顿研究所在2025年11月举办稳定性与概率方法 研讨会期间给予的热情接待。ChatGPT 曾协助起草本稿的部分内容。所有内容均由作者审阅并进行了实质性修改，最终文本由作者负责。我们感谢 Michal Doucha 对本文初稿提出的有益意见。

参考文献

[1] V. Alekseev 和 A. Thom， *On Kirchberg-type characterizations of sofic groups*，即将出版。[2] I. Ben Yaacov、A. Berenstein、C. W. Henson 和 A. Usvyatsov， *Model theory for metric structures*，载于：Z. Chatzidakis、D. Macpherson、A. Pillay 和 A. Wilkie（编），《模型论及其在代数与分析中的应用》第 2 卷，伦敦数学学会讲义丛书第 350 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008 年，第 315–427 页。[3] N. P. Brown 和 N. Ozawa， *C^*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*，数学研究生教程第 88 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。[4] M. Doucha，
Metric topological groups: their metric approximation and metric ultraproducts，《Groups Geom. Dyn.》**12** （2018），第 2 期，615–636。[5] C. Rosendal，
Finitely approximable groups and actions. Part I: The Ribes–Zalesskii property，《符号逻辑杂志》**76** （2011），第 4 期，1297–1306。

[6] V. G. Pestov, *Hyperlinear and sofic groups: a brief guide*, 《符号逻辑通报》**14** （2008），第 4 期, 449–480。

Vadim Alekseev, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany
Email address: vadim.alekseev@tu-dresden.de

Andreas Thom, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany
Email address: andreas.thom@tu-dresden.de