arXiv:2512.14183v1 [math.GT] 16 Dec 2025

Bauer–Furuta 不变量的简单类型概念

TSUYOSHI KATO、DAISUKE KISHIMOTO、NOBUHIRO NAKAMURA 和 KOUICHIYASUI

Abstract. 通过扩展四维流形的 Seiberg–Witten 不变量的简单型概念，我们为 Bauer–Furuta 不变量引入 BF 爆破简单型和 BF 齐次型的概念，并研究其应用。具体而言，我们证明，满足某个条件的浸入 2-球面的存在性可以保证 BF 爆破简单型。作为应用，我们确定了沿鱼尾邻域中的环面进行对数变换所得到的四维流形的 Bauer–Furuta 不变量。我们还利用 BF 齐次型对四维流形的粘合分解给出限制。为证明这些结果，我们还给出了 Bauer–Furuta 不变量的粘合公式和浸入伴随不等式。

1. Introduction

过去三十年来，光滑 4-流形的 Seiberg-Witten不变量 [27] 在 4 维流形研究中发挥了关键作用，为低维拓扑带来了许多重要应用。20 世纪 90 年代提出的简单型猜想，对该不变量施加了一项基本约束（例如 [22, §2.3.3]）。

猜想 1.1（简单型猜想）。每个满足 $b_2^+ > 1$ 的闭、连通、定向光滑四维流形都具有 Seiberg–Witten 简单型。

这里，若一个满足 $b_2^+ > 1$ 的闭、连通、定向光滑四维流形 X 具有如下性质，则称其为 Seiberg–Witten 简单型：对于其上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，只要 $\mathfrak{s}$ 对应的 Seiberg–Witten 模空间的虚维数 $d(\mathfrak{s})$ 非零，其（取值于整数的）Seiberg–Witten 不变量 $\mathrm{SW}(X,\mathfrak{s})$ 就为零。

Bauer–Furuta 不变量 [2–4] 是 Seiberg–Witten 不变量的稳定上同伦精化。Bauer [2] 证明，通过展示一类四维流形（例如若干 $K3$ 曲面的连通和）具有这样的性质，即 Seiberg–Witten 不变量平凡而 Bauer–Furuta 不变量非平凡，表明 Bauer–Furuta 不变量严格强于 Seiberg–Witten 不变量。

本文针对 Bauer–Furuta 不变量引入了两个概念：BF 爆破简单型和 BF 齐次型，从而拓展了 Seiberg–Witten 简单型的概念。前一个概念拓展了 Seiberg–Witten 简单型四维流形关于爆破公式的一种性质。后一个概念则根据模空间的虚维数，自然地拓展了 Seiberg–Witten 简单型的定义。此外，我们还给出了它们在 4 维拓扑中的应用。

Date: 2025年12月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 57K41，次要分类 55Q55。1

1.1. 广义爆破公式。为了定义爆破简单型的概念，我们给出 Bauer–Furuta 不变量的爆破公式的一种广义形式。除非另有说明，本文始终假设每个流形都是连通、有向且光滑的。

设 Y 是一个闭三维流形，满足 $b_1(Y) = 0$，并且其上存在正标量曲率度量。设 X、N_1、N_2 是紧致定向四维流形，满足 $\partial X = Y = -\partial N_i$，其中 $i = 1$ 为 2。注意，我们也可以讨论 $N_1 = N_2$ 的情形。假设 $b_1(N_i) = b_2^+(N_i) = 0$，其中 $i = 1$ 为 2。设 $X_i = X \cup_Y N_i$。那么 $b_1(X_1) = b_1(X_2)$，且 $b_2^+(X_1) = b_2^+(X_2)$。例如，我们可以将这一设定应用于闭 4-流形 X_1 及其爆破 $X_2 = X_1 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$。

设 X_i 上有一个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_i$。假设 $\mathfrak{s}_1|_X = \mathfrak{s}_2|_X$。对于 $(X_i, \mathfrak{s}_i)$，塞伯格–维滕模空间的虚维数为

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{s}_i) &:= \frac{1}{4}(c_1(L_i)^2 - \sigma(X_i)) - (1 - b_1(X_i) + b_2^+(X_i)) \\ &= \frac{1}{4}(c_1(L_i)^2 - 2\chi(X_i) - 3\sigma(X_i)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$\mathfrak{s}_i$ 的行列式线丛为 L_i，而 $\chi(X_i)$ 和 $\sigma(X_i)$ 分别表示 X_i 的欧拉示性数和签名。对于线丛 L，上述针对 L 的量记为 $d(L)$。

Bauer–Furuta 不变量 $\mathrm{BF}(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 定义为 $(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 的 U(1) 稳定上同伦群 $\pi^0_{S^1}(Pic(X_i);\ \lambda_i)$ 中的一个类。（关于其定义，参见 [3, 4] 以及第 2.1 小节。）首先，我们研究 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1)$ 与 $\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 之间的关系。

我们将看到，如果 $\delta = d(\mathfrak{s}_2) - d(\mathfrak{s}_1) \geq 0$，那么存在一个同态 I_δ：$\pi^0_{S^1}(Pic(X_2);\ \lambda_2) \to \pi^0_{S^1}(Pic(X_1);\ \lambda_1)$，并且下列公式成立（定理 2.11）：

$$\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = I_\delta \mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2).$$

该公式可视为 Bauer[2, 推论 4.2], 中的爆破公式的一种推广，并推出下一个定理。

定理 1.2。

(1) 若 $d(\mathfrak{s}_1) \leq d(\mathfrak{s}_2)$ 且 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) \neq 0$，则 $\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2) \neq 0$。(2)

若 $d(\mathfrak{s}_1) = d(\mathfrak{s}_2)$，则 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = \mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2)$。

对于带有 ^{c} 结构 $\mathfrak{s}$ 的闭定向四维流形 Z，其中 $\mathfrak{s}$ 定义在 Z 上，我们将考虑以下条件。

条件 $(*)$：$b_1(Z) = 0$，$b_2^+(Z) \geq 2$ 且 $d(\mathfrak{s}) \leq 3$。若 $d(\mathfrak{s}) > 0$，则 $\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s})$ 是一个挠元。

据我们所知，所有已知满足 $b_1(Z) = 0$、$b_2^+(Z) \geq 2$ 且 $\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s}) \neq 0$ 的 $(Z, \mathfrak{s})$ 示例，都满足条件 $(*)$。通过对若干个具有非零 Seiberg-Witten不变量的 4 维流形取连通和，可得到一个这样的 $(Z, \mathfrak{s})$ 示例，其中 $\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s}) \neq 0$ 且 $d(\mathfrak{s}) > 0$。见定理 2.6。

注1.3. 假设 $b_1(Z) = 0$ 且 $b_2^+(Z) \geq 2$。若 $d(\mathfrak{s}) = 0$，则由定理2.3（[4, 定理 1.1]），$\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s})$ 可与 Seiberg–Witten 不变量 $\mathrm{SW}(Z, \mathfrak{s})$ 等同。若 $d(\mathfrak{s})$ 为奇数，则 $\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s})$ 是一个挠元。若 Z 是 Seiberg–Witten 简单型且 $d(\mathfrak{s}) > 0$，则由定理2.3，$\mathrm{BF}(Z, \mathfrak{s})$ 是一个挠元。

定理 1.4。假设 $(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 满足条件 $(*)$。若 $d(\mathfrak{s}_1) < d(\mathfrak{s}_2)$，则 BF不变量$(X_1, \mathfrak{s}_1) = 0$。

注 1.5。在定理 1.2 中，可能出现 $d(\mathfrak{s}_1) < d(\mathfrak{s}_2)$、BF不变量$(X_1, \mathfrak{s}_1) \neq 0$ 以及 BF不变量$(X_2, \mathfrak{s}_2) \neq 0$ 的情况。定理 1.4 表明，若 $(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 满足条件 $(*)$，则不会出现这种情况。

定理 1.2 和定理 1.4 有两个推论。第一个是爆破公式。令 $E \in H^2(\overline{\mathbb{CP}}^2; \mathbb{Z})$ 为 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的例外球面的 Poincar´e 对偶。对每个整数 r，存在一个 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_{(2r+1)E}$，它在同构意义下唯一，使得 $c_1(\mathfrak{s}_{(2r+1)E}) = (2r+1)E$。令 X 为一个带有自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$ 的闭定向光滑 4-流形。对于每个整数 r，考虑 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_r = \mathfrak{s}\#\mathfrak{s}_{(2r+1)E}$。那么我们有

$$d(\mathfrak{s}_r) = d(\mathfrak{s}) - r(r+1).$$

定理 1.6（参见 $[2,$ 推论 4.2$]$）。若 $\mathrm{BF}(X\#\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathfrak{s}_r) \neq 0$，则 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) \neq 0$。此外

$$\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) = \mathrm{BF}(X\#\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathfrak{s}_0) = \mathrm{BF}(X\#\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathfrak{s}_{-1}).$$

进一步假设 $(X, \mathfrak{s})$ 满足条件 $(*)$。那么

$$\mathrm{BF}(X\#\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathfrak{s}_r) = 0 \ \textit{if}\ r \neq 0, -1. \tag{1.2}$$

第二个是关于有理吹降的公式。设 C_p 和 B_p 是由 Fintushel–Stern $[6]$ 定义的 4-流形。流形 C_p 由某些 $(p-1)$ 二维球面上的圆盘丛管道拼接而成，而 B_p 是一个有理同调四维球，使得 $\partial B_p = \partial C_p$ 和 $C_p \cup (-B_p) = (p-1)\overline{\mathbb{CP}}^2$。假设 C_p 是

。嵌入在一个闭定向光滑 4-流形 X 中。那么 $X_p = (X \setminus C_p) \cup B_p$ 称为有理吹降 [6]。设 $\mathfrak{s}_p$ 是 X_p 上的一个自旋^c 结构。X 上的一个自旋^c 结构$\mathfrak{s}$ 称为 $\mathfrak{s}_p$ 的提升，如果 $\mathfrak{s}|_{(X \setminus \mathring{C}_p)} = \mathfrak{s}_p|_{(X_p \setminus \mathring{B}_p)}$。事实 $d(\mathfrak{s}) \leq d(\mathfrak{s}_p)$ 已在 $[6]$ 中证明。

定理 1.7. 设 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{s}_p$的一个提升。

(1) 若 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) \neq 0$，则 $\mathrm{BF}(X_p, \mathfrak{s}_p) \neq 0$。(2) 若 $d(\mathfrak{s}) = d(\mathfrak{s}_p)$，则 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) = \mathrm{BF}(X_p, \mathfrak{s}_p)$。(3) 设$(X_p, \mathfrak{s}_p)$满足条件（$*$）。若 $d(\mathfrak{s}) < d(\mathfrak{s}_p)$，则 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) = 0$。

¯文献 $[6]$ 还证明了，X_p 上的每个特征线丛 L 都有一个 X 上的提升$\bot L$，该提升也是特征线丛，并且满足 $d(L) = d(L)$。由此，在某些情况下，可以根据 X 的 Bauer–Furuta 不变量确定 X_p 的 Bauer–Furuta 不变量。例如，我们得到以下推论。

推论 1.8. 设 $H_1(X; \mathbb{Z})$和 $H_1(X_p; \mathbb{Z})$都没有 2-挠元。对于 X_p上的每个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_p$，在 X 上存在 $\mathfrak{s}_p$ 的唯一提升 $\mathfrak{s}$，使得$d(\mathfrak{s}_p) = d(\mathfrak{s})$，因此 $\mathrm{BF}(X_p, \mathfrak{s}_p) = \mathrm{BF}(X, \mathfrak{s})$。

1.2. 浸入伴随不等式与 BF 爆破简单型。这里给出 Bauer–Furuta 基本类的定义。

定义 1.9. 对于闭定向四维流形 X，如果存在一个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，使得在 X 上 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) \neq 0$ 且 $c_1(\mathfrak{s}) = c$，则称二阶上同调类$c \in H^2(X; \mathbb{Z})$为 Bauer–Furuta 基本类。令 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X的 Bauer–Furuta 基本类集合。

下面的定理是 Fintushel–Stern [5, Theorem1.3] 所给浸入邻接不等式的一个变体。

定理 1.10。设 X 为一个闭定向光滑 4-流形。设 K 为一个 Bauer–Furuta 基本类。若 $\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z})$ 可由具有 p个正双点的浸入球面表示，则以下两者必居其一

$$2p-2 \geq |\langle K,\alpha\rangle| + \alpha\cdot\alpha,$$

or

$$\begin{cases} \mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}+\alpha^*) \neq 0 & \text{if } \langle K,\alpha\rangle \geq 0 \\ \mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}-\alpha^*) \neq 0 & \text{if } \langle K,\alpha\rangle \leq 0, \end{cases}$$

其中 α^* 是 α的 Poincar´é 对偶。

注 1.11。定理 1.10 形式上对具有任意 b_2^+的 4 维流形成立。然而，这并不意味着当 $b_2^+ = 0$时我们能够得到关于 p 的非平凡估计。事实上，若 $b_2^+ = 0$，则 BF(*X*, $\mathfrak{s}\pm\alpha^*$) $\neq 0$ 为总是真的（定理 2.9），因而无法得到关于 p 的任何估计。

受定理 1.6 的启发，我们引入 BF 爆破简单型这一概念（定理 4.2），即对每个自旋^c 结构，(1.2) 均成立。这个概念可视为 Seiberg–Witten 简单型的推广。利用嵌入曲面的伴随不等式（定理 2.21），我们得到以下命题，它将嵌入曲面的存在性与具有 BF 爆破简单型这一性质联系起来。

命题 1.12. 若 X 存在一个亏格为 $g>1$ 、自交数为 $2g-2$ 的光滑嵌入闭定向曲面，则 X 是 BF 爆破简单型。

定理 1.10 和定理 1.12 用于证明下面的定理，该定理以浸入球面为条件，给出了一个类似的 BF 爆破简单型充分条件，并涵盖自交数为零的情形。

定理 1.13. 假设 X 存在一个浸入 2-球面，它有 p 个正双点，也可能有负双点，并代表一个自交数为 $2p-2\geq 0$ 的非挠第二同调类。那么， X 是 BF 爆破简单型。

1.3. 对数变换公式。作为定理 1.8 和定理 1.13 的应用，我们确定沿嵌入鱼尾邻域中的环面进行对数变换时的 Bauer–Furuta 不变量。众所周知，这类对数变换在四维拓扑中有多种应用。设 X 是一个连通闭定向四维流形。假设 X 包含一个浸入 2-球面 F，且恰有一个双重点，使得其同调类 $\alpha=[F]\in H_2(X;\ \mathbb{Z})$ 是非挠类并满足 $\alpha\cdot\alpha=0$。于是， Q 的一个邻域 F 是鱼尾邻域。沿鱼尾邻域 Q 中的环面进行重数为 p 的对数变换（以及 [9, 定理 8.5.9 和注 8.5.10(b) 中给出的某些辅助数据]），我们得到一个四维流形 $X_{(p)}$。注意，在环面是尖点邻域的正则纤维的情况下， $X_{(p)}$ 的微分同胚类型由重数 p 唯一确定（见 [9]）。设 $\beta\in H_2(X_{(p)};\ \mathbb{Z})$ 为多重纤维的同调类，设 $f\in H^2(X_{(p)};\ \mathbb{Z})$ 为 β 的庞加莱对偶，其中 ´。注意， $\alpha=p\beta$ 成立。

定理 1.14。假设 $H_1(X;\mathbb{Z})$ 和 $H_1(X_{(p)};\mathbb{Z})$ 均不含 2-挠元。那么，$X_{(p)}$ 的基本类集合为

$$\mathcal{B}(X_{(p)}) = \{L_k = L + (2k-(p-1))f \mid L \in \mathcal{B}(X), k \in \{0,1,\dots,p-1\}\},$$

并且 Bauer–Furuta 不变量满足关系

$$\mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}_L) = \mathrm{BF}(X_{(p)},\mathfrak{s}_{L_k})$$

其中 $\mathfrak{s}_L$（分别地，$\mathfrak{s}_{L_k}$）是与类 L（分别地，L_k）对应的唯一自旋^c 结构。

注 1.15. Khandhawit–Lin–Sasahira [13] 给出了通过沿带有 $b_1 > 0$ 的三维流形粘合而得到的四维流形的 Bauer–Furuta 不变量粘合公式。但我们不清楚他们的公式是否能够完全确定 $X_{(p)}$ 的 Bauer–Furuta 不变量。

1.4. 粘合分解与 BF 齐次型的约束。我们讨论 4 维流形的连通和分解及其推广。下文考虑具有特殊边界的紧致 4-流形。

若一个闭连通 3 维流形 Y 具有 $b_1(Y) = 0$，则称其对于 Y 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_Y$ 是 SWF 球型的，若 $(Y,\mathfrak{s}_Y)$ 的 Seiberg–Witten Floer 同伦型具有最简单的形式，也就是说，它由一个球面表示（定理 2.1）。若紧致 4-流形 X 的边界 $Y = \partial X$（可能不连通）满足 $b_1(Y) = 0$，且其每个分支对于该分支上的每个自旋^c 结构都是 SWF 球型的，则称其为 SWF 球型边界（定理 2.2）。如果闭 3 维流形 Y 具有 $b_1(Y) = 0$，并且存在正标量曲率度量，那么对于 Y [20, 21]上的每个自旋^c 结构，Y 都是 SWF 球型的。已知闭 3 维流形存在正标量曲率度量，当且仅当它是球面空间形式与若干个 $S^1 \times S^2$ 的连通和。（见 [19, 定理 1.29]。）

从规范理论的角度来看，具有 SWF 球型边界的紧致 4-流形 X 看起来就像一个闭 4- 流形。虽然相对 Seiberg– Witten 不变量通常定义为单极 Floer 同调群中的一个类，但具有 SWF 球型边界的 X 的相对 Seiberg–Witten 不变量可以假定取值于 $\mathbb{Z}$。此外，如果每个边界分支都是 S^3，那么 X 的相对 Seiberg–Witten 不变量与沿边界的 3-球面对 X 粘合四维球后所得闭流形的 Seiberg–Witten 不变量一致。

注 1.16. 前述定理（从定理 1.2 到定理 1.14）可推广为具有 SWF 球型边界的 4 维流形的类似结果。

设 X 是一个紧致连通四维流形，可以有边界，且边界不一定连通。设 X_1、$\cdots$、X_m 是边界属于 SWF 球型的紧 4 维流形。每个流形 X_i 都可以有两个或更多边界分支。我们假设这些流形按以下方式依次粘合。设 $X_1 = X_1$。对于 X_i，假设 X_i 的一个边界分支 Y_i 与 X_{i+1} 的一个边界分支 Y_{i+1} 之间存在反定向微分同胚。设 X_{i+1} 为沿着 $Y_i \cong -Y_{i+1}$ 将 X_{i+1} 与 X_i 粘合得到的流形。最后，我们得到一个粘合的连通四维流形 X_m。流形 X_m 记作 $X_1 \cup_{Y_1} X_2 \cup_{Y_2} \cdots \cup_{Y_{m-1}} X_m$。如果四维流形 X 与 $X_1 \cup_{Y_1} X_2 \cup_{Y_2} \cdots \cup_{Y_{m-1}} X_m$ 微分同胚，我们称之为沿 SWF 球型有理同调三维球面的粘合分解。如果 $m = 1$，则我们假设 $X = X_1$。

众所周知，具有 $b_2^+ \geq 2$ 的辛 4 维流形无法分解为两个或更多辛四维流形的连通和。下一个定理是这一事实的推广。该定理通过使用下文陈述的定理 2.6 得到证明，而定理 2.6 是 Bauer 非消失结果 [2，命题 4.5] 的直接延拓。

定理 1.17。假设 $X = X_1 \cup_{Y_1} \cdots \cup_{Y_{k-1}} X_k (1 \leq k \leq 4)$ 是沿有理同调三维球面的 SWF 球型粘合分解，且具有满足以下条件的自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}$：

- $b_1(X) = 0$, $b_2^+(X_i) \equiv 3$ 对每个 i 均模 4。
- $d(\mathfrak{s}_i) = 0$ 且对每个 i，$\mathrm{SW}(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 均为奇数，其中 $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}|_{X_i}$。
- 若 $k = 4$，则 $b_2^+(X) \equiv 4$ 模 8。

若 X 存在另一种粘合分解 $X_1' \cup_{Y_1'} \cdots \cup_{Y_{l-1}'} X_l'$，沿着具有 SWF 球型的有理同调 3-球面进行粘合，并且 $b_2^+(X_j') \geq 1 (j = 1, \ldots, l)$，则对于每个 j，都有 $k \geq l$，且 $b_2^+(X_j') \geq 2$。

在第 3 节中，我们引入 BF 齐次型的概念，这是 Seiberg–Witten 简单型的另一种推广。若一个闭 4-流形或一个带边界的紧致 4-流形 X 具有 SWF 球型，且 $b_2^+(X) \geq 1$，则称其为d维 BF 齐次型；当 $d(\mathfrak{s}) \neq d$ 时，$\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) = 0$（定理 3.7）。

带有$b_2^+ \geq 2$的辛四维流形的连通和属于 BF 齐次型（定理 3.14）。当沿 SWF 球型有理同调三维球面进行粘合分解时，若各组成部分均属于零维 BF 齐性类型，则定理 1.17 可细化为下一个定理。

定理 1.18. 假设 $X = X_1 \cup_{Y_1} \cdots \cup_{Y_{k-1}} X_k$（$1 \leq k \leq 4$）是沿 SWF 球型有理同调三维球面进行的粘合分解，并带有一个自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}$，满足以下条件：

(1) 对每个 i，$b_1(X_i) = 0$，$b_2^+(X_i) \equiv 3$ 模 4。(2) 对每个 i，$d(\mathfrak{s}_i) = 0$，且 $\mathrm{SW}(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 为奇数，其中 $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}|_{X_i}$。(3) 对每个 i，X_i 属于零维 BF 齐性类型。(4) 若 $k = 4$，则 $b_2^+(X) \equiv 4$ 模 8。

如果 X 存在另一种沿着 SWF 球型有理同调三维球面的粘合分解 $X' = X_1' \cup_{Y_1'} \cdots \cup_{Y_{l-1}'} X_l'$，使得 $b_2^+(X_j') \geq 1$，且对于每个 j，X_j' 都属于零维 BF 齐性类型，那么 $k = l$ 和 X' 满足条件 (1) 和 (4)。此外，X' 上存在一个自旋^{c}结构，满足条件 (2)。

下面的推论是定理 1.18 的一个特例。

推论 1.19. 假设闭四维流形 $X_1, \ldots, X_k$ 及其连通和 $X = X_1 \# \cdots \# X_k (1 \leq k \leq 4)$ 满足以下条件：

(1) 对每个 i，$b_1(X_i) = 0$，$b_2^+(X_i) \equiv 3$ 模 4。(2) 存在一个自旋^{c}结构 $\mathfrak{s}_i$，使得 $d(\mathfrak{s}_i) = 0$，且对每个 i，$\mathrm{SW}(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 为奇数。(3) 对每个 i，X_i 都属于零维 BF 齐性类型。(4) 如果 $k = 4$，则 $b_2^+(X) \equiv 4$ 模 8。

如果 X 与另一个连通和 $X' = X_1' \# \cdots \# X_l'$ 微分同胚，使得 $b_2^+(X_j') \geq 1$，并且对于每个 j，X_j' 都属于零维 BF 齐性类型，那么 $k = l$ 和 X' 满足条件 (1)、(2) 和 (4)。

注 1.20. 根据 Taubes 非消失定理 [24] 和定理 3.12，满足 $b_2^+ \geq 2$ 的闭辛四维流形满足条件 (2) 和 (3)。

推论 1.21。设闭辛四维流形 $X_1, \ldots, X_k$ 及其连通和 $X = X_1\# \cdots \# X_k (1 \leq k \leq 4)$ 满足以下条件：

(1) 对每个 i， $b_1(X_i) = 0, b_2^+(X_i) \equiv 3 \mod 4$。

(2) 若 $k = 4$，则 $b_2^+(X) \equiv 4 \mod 8$。

若 X 微分同胚于另一个连通和 $X' = X_1'\# \cdots \# X_l'$，其中辛流形为 $X_1', \ldots X_l'$，则满足 $k = l$ 以及条件 (1)、(2)。

我们提出一个猜想，它推广了简单型猜想。

猜想 1.22. 设 X 是一个闭光滑定向四维流形，且满足$b_2^+ \geq 2$。那么，

(1) X 是 BF 爆破简单型。(2) X 是 BF 齐次型。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾 Bauer–Furuta 不变量，并证明定理 1.2、1.4、1.6、1.7 和 1.10。第 3 节介绍 BF 维数和 BF 齐次型的概念，并证明定理 1.17 和 1.18。第 4 节介绍 BF 爆破简单型的概念，并证明定理 1.13 和 1.14。第 5 节讨论复射影空间的稳定余同伦群，并证明定理 1.4 的证明中用到的一些结果。此外，我们还给出一个不同的证明来证明 [4, 引理 3.5]，该引理刻画了 Hurewicz 映射。

致谢。作者部分受 JSPS KAKENHI 基金编号 23K22394（Kato）、22K03284（Kishimoto）、24K06716（Nakamura）和 23K03090（Yasui）的资助。

2. A generalization of the blowup formula and its applications

2.1. Bauer–Furuta 不变量回顾。设 Y 是一个带有自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_Y$的闭三维流形。若 $b_1(Y) = 0$，则 Seiberg–Witten Floer 同伦型 SWF$(Y, \mathfrak{s}_Y)$ 定义为某个 U(1)-等变 Spanier–Whitehead 范畴 $\mathfrak{C}$ [20, 21]中一个对象的同构类。

定义 2.1（参见[16, 定义 3.34]）。若对于某个 n， SWF$(Y, \mathfrak{s}_Y)$ 可由球面$S^{n\mathbb{C}}$ 表示，则称闭三维流形 Y 对于自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_Y$是 SWF球形的。

对于 SWF球形（$Y, \mathfrak{s}_Y$），我们可以将 SWF$(Y, \mathfrak{s}_Y)$ 表示为

$$\mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s}_Y) = S^{-n(Y, \mathfrak{s}_Y, g_Y)\mathbb{C}},$$

其中

$$n(Y, \mathfrak{s}_Y, g_Y) = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\, D(X, \mathfrak{s}) - \frac{1}{8}(c_1(\mathfrak{s})^2 - \mathrm{sign}(X)),$$

X 是一个带有 $\partial X = Y$的紧致 4-流形， $D(X, \mathfrak{s})$ 是定义在 X 上的 spin^{c}结构上的狄拉克算子，且具有 $\mathfrak{s}|_{\partial X} = \mathfrak{s}_Y$； $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\, D(X, \mathfrak{s})$ 是 $D(X, \mathfrak{s})$ 在 Atiyah-Patodi-Singer [1]意义下采用谱边界条件时的指标。

定义 2.2. 设 X 是一个边界可能不连通的紧致 4-流形 $Y = \partial X$。如果 Y 满足 $b_1(Y) = 0$，且对于该分量上的每个自旋 ^{c} 结构， Y 的每个分量都是 SWF 球型的，我们就称边界 Y 为 SWF 球型。

设 X 是一个边界为 SWF 球型的紧致定向四维流形。设 $Y = \partial X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的自旋^c 结构，且 $\mathfrak{s}_Y = \mathfrak{s}|_Y$。那么 SWF$(Y, \mathfrak{s}_Y) = \bigwedge_{i=1}^k$ SWF$(Y_i, \mathfrak{s}|_{Y_i})$。与 $\mathfrak{s}$ 相关联的狄拉克算子定义了一个虚指标丛 Ind D，其定义在环面 $Pic(X) = H^1(X; \mathbb{R})/H^1(X; \mathbb{Z})$ 上。设 λ 为由下式给出的 KO-群的类

$$\lambda = \operatorname{Ind} D - \left[\underline{H^+(X;\mathbb{R})}\right] \in KO_{S^1}(Pic(X)),$$

其中，$\underline{H^+(X; \mathbb{R})}$ 是定义在 $Pic(X)$ 上、纤维为 $H^+(X; \mathbb{R})$ 的平凡丛。$(X, \mathfrak{s})$ 的相对 Bauer–Furuta 不变量 BF$(X, \mathfrak{s})$ 定义为范畴 $\mathfrak{C}$中对象之间的 U(1)-等变稳定态射，并由一个 U(1)-映射表示，

$$\Psi_{(X,\mathfrak{s})} \colon TF \to S^V \wedge \Sigma^* \mathrm{SWF}(Y, \mathfrak{s}_Y),$$

其中，TF是定义在 $Pic(X)$ 上的向量丛的托姆空间，V是一个满足 $\lambda = F - \underline{V}$. 的向量空间。$\Psi_{(X,\mathfrak{s})}$ 的一个重要性质是，$\Psi_{(X,\mathfrak{s})}$ 在 U(1)-不动点集上的限制由一个纤维线性嵌入诱导。（见[20, 21]。）由于在此情形下 SWF$(Y, \mathfrak{s}_Y)$ 是一个球面，BF$(X, \mathfrak{s})$ 可视为 U(1)-等变稳定上同伦群 $\pi^0_{\mathrm{U}(1)}(Pic(X); \lambda)$ 中的一个类。因此，Bauer 和 Furuta [2–4] 关于闭四维流形的许多结果，都可以直接推广到上述 $(X, \mathfrak{s})$ 的相对 Bauer–Furuta 不变量情形。

定理2.3（[4, 定理 1.1]）。若 $b_2^+(X) > b_1(X) + 1$，则同调定向确定一个同态 $\pi^0_{\mathrm{U}(1)}(Pic(X); \lambda) \to \mathbb{Z}$，它将 BF$(X, \mathfrak{s}) = [\Psi_{(X,\mathfrak{s})}]$ 映到取整数值的相对 Seiberg–Witten 不变量 SW$(X, \mathfrak{s})$。

定理 2.4（[4, 命题 3.4]）。若 $b_1(X) = 0$ 且 $b_2^+(X) \geq 2$，则 BF$(X, \mathfrak{s})$ 可视为（非等变）稳定余同伦群$\pi^{b_2^+(X)-1}(\mathbb{CP}^{l-1})$的一个元素，其中 $l = \operatorname{ind}_{\mathbb{C}} D(X, \mathfrak{s})$。

注 2.5。上同伦群 $\pi^i(\mathbb{CP}^{l-1})$ 在 [4, 引理 3.5] 中进行了计算。[4, 引理 3.5] 的一个初等证明见第 5 节。

Let

$$d(\mathfrak{s}) = 2 \operatorname{ind}_{\mathbb{C}} D(X, \mathfrak{s}) - (1 - b_1(X) + b_2^+(X)).$$

当 X闭合时，这等于（1.1）中的 $d(\mathfrak{s})$。设 $X = X_1 \cup_{Y_1} X_2 \cup_{Y_2} \cdots \cup_{Y_{m-1}} X_m$ 是沿 SWF 球型有理同调三维球面的一个粘合分解。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 和 $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}|_{X_i}$ 上的自旋^c 结构。那么，根据 Manolescu [21] 给出的粘合公式（另见 [12, 13, 23]），$(X, \mathfrak{s})$ 的 Bauer–Furuta 不变量为

$$\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) = [\Psi_{(X_1,\mathfrak{s}_1)} \wedge \cdots \wedge \Psi_{(X_m,\mathfrak{s}_m)}]. \tag{2.1}$$

Bauer 关于连通和的结果 [2, 命题 4.5] 可以直接推广到沿 SWF 球型有理同调三维球面的粘合分解。

定理 2.6（[2, 命题 4.5]）。对于如上所述的 $(X, \mathfrak{s})$，设 $m \geq 2$, $b_1(X_i) = 0$ 且 $d(\mathfrak{s}_i) = 0$ 对于 $i = 1, \ldots, m$ 成立。那么，BF$(X, \mathfrak{s}) \neq 0$ 当且仅当满足以下条件：

- $b_2^+(X_i)$ 对每个 i 都模 4 $\equiv 3$。
  对每个 i, • Seiberg–Witten$(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 都是奇数。
- $m \leq 4$。此外，若 $m = 4$，则 $b_2^+(X) \equiv 4$ 模 8。

此外，$(X, \mathfrak{s})$ 满足条件 $(*)$。

推论 2.7. 对于上述 $X = X_1 \cup_{Y_1} \cdots \cup_{Y_{m-1}} X_m$，假设每个 X_i 都是 Seiberg–Witten 简单型，且 $b_1(X_i) = 0$。那么，对于每个满足 BF$(X, \mathfrak{s}) \neq 0$ 的 spin^c 结构$\mathfrak{s}$，$(X, \mathfrak{s})$ 满足条件 (∗)。

设 N 是一个紧致定向四维流形，其 $b_1(N) = 0$，且 $b_+(N) = 0$，边界为 SWF 球型。对于 N 上的一个 spin^c 结构，相对 Bauer–Furuta 不变量在 $(N, \mathfrak{s})$ 上由一个 U(1)-等变映射表示

$$\Psi_{(N,\mathfrak{s})} \colon (\mathbb{C}^{m+l} \oplus \mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{R}^n)^+,$$

其中 $l = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} D(N, \mathfrak{s})$，且 m、n 是一些整数。如上所述，$\Psi_{(N_i,\mathfrak{s})}$ 在 U(1)-不动点集上的限制由一个线性包含映射诱导，因此是一个次数为一的映射。于是，根据下面的引理，我们可以假设 $\Psi_{(N_i,\mathfrak{s})}$ 本身由一个包含映射诱导。

引理 2.8（[2, 命题 4.1]）。设 f: $(\mathbb{C}^{m+k} \oplus \mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{R}^n)^+$ 是一个 U(1)-等变映射，且其在不动点集上诱导的映射次数为 1。则 $k \leq 0$，且 f 与包含映射 U(1)-同伦。

此外，具有 $b_2^+ = 0$ 的 4 维流形的 Bauer–Furuta 不变量总是非平凡的。

命题 2.9. 设 N 是一个闭定向四维流形，或是一个紧致定向四维流形，其边界为 SWF 球型，且具有 $b_2^+(N) = 0$，并且可能具有正的 $b_1(N)$。那么，对于任意 spin^c 结构 $\mathfrak{s}$，BF$(N, \mathfrak{s})$ 都是非平凡的。

¯证明。注意，BF$(N, \mathfrak{s})$ 是由一个 U(1)-映射 Ψ: $F \to V$ 诱导的，该映射满足以下性质。

(1) $V \cong \mathbb{R}^n$ 和 $F = F_0 \oplus \underline{V}$，其中 F_0 是 $Pic(N)$ 上的复向量丛，而 $\underline{V}$ 是 $Pic(N)$ 上纤维为 V 的平凡丛。¯(2) Ψ 在不动点集上的限制是纤维逐点线性同构。

于是，BF$(N, \mathfrak{s})$ 是 $\bar{\Psi}$ 的延拓 Ψ: $TF \to S^V$ 的类。若 Ψ 与 0 U(1)-同伦，那么 Ψ 在不动点集上的限制与 0 同伦。但这与 (2) 矛盾。□

另一方面，具有 $b_2^+ = 1$ 和 $b_1 = 0$ 的四维流形具有平凡的 Bauer–Furuta 不变量。

命题 2.10（[2,§4.2]）。设 X 是闭定向四维流形，或是边界为 SWF 球型且满足 $b_2^+(X) = 1$ 和$b_1(X) = 0$的紧致定向四维流形。那么，对于任意自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，BF$(X, \mathfrak{s})$ 都是平凡的。

证明。$(X, \mathfrak{s})$ 的 Bauer–Furuta 不变量由一个 U(1)-等变零伦映射 $(\mathbb{C}^l)^+ \to (\mathbb{R})^+$ 表示。□

2.2. 定理 1.2 的证明。在本小节中，我们通过给出 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1)$ 与 BF$(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 之间的关系来证明定理 1.2。

设 ι: $S^0 \to (\mathbb{C}^\delta)^+$ 是非负整数 δ 对应的 U(1)-等变包含映射。定义同态 I_δ: $\pi^0_{S^1}(Pic(X);\ \lambda) \to \pi^0_{S^1}(Pic(X);\ \lambda - [\underline{\mathbb{C}}^\delta])$，其定义为 $[\Phi] \mapsto [\Phi \wedge \iota]$。注意，$I_0$ 是恒等映射。现在，BF$(X_1, \mathfrak{s}_1)$ 与 BF$(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 之间的关系如下所示。

定理 2.11. 如果 $d(\mathfrak{s}_1) \leq d(\mathfrak{s}_2)$，那么 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1) = I_\delta$BF$(X_2, \mathfrak{s}_2)$，其中 $\delta = d(\mathfrak{s}_2) - d(\mathfrak{s}_1)$。

证明. 对于 $i = 1, 2$，令 k_i =ind $D(X_i, \mathfrak{s}_i)$ 和 l_i =ind $D(N_i, \mathfrak{s}_i|_N)$。假设$d(\mathfrak{s}_1) \leq d(\mathfrak{s}_2)$。那么 $l_1 \leq l_2 \leq 0$ 和 $\delta = k_2 - k_1 = l_2 - l_1 = |l_1| - |l_2|$。令$\Phi_i = \Psi_{(X,\mathfrak{s})} \wedge \Psi_{(N_i,\mathfrak{s}_i|_{N_i})}$。令 $\iota\colon S^0 \to (\mathbb{C}^\delta)^+$ 为包含映射。于是我们可以¯ ¯假设 $\Psi_{(N_1,\mathfrak{s}_i|_{N_1})} = \Psi_{(N_2,\mathfrak{s}_i|_{N_2})} \wedge \iota$，由定理 2.8 可知，因此

$$\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = [\Phi_1] = [\Phi_2 \wedge \iota] = I_\delta \mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2).$$

□

定理 1.2 的证明。若 $d(\mathfrak{s}_1) \leq d(\mathfrak{s}_2)$ 且 BF$(X_2, \mathfrak{s}_2) = 0$，则 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1)$ $=I_\delta$BF$(X_2, \mathfrak{s}_2) = 0$。若 $d(\mathfrak{s}_1) = d(\mathfrak{s}_2)$，则 $\delta = 0$ 和 I_0 是恒等映射，因此 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1)$ = BF$(X_2, \mathfrak{s}_2)$ □

注记 2.12。若 $b_1(X_i) = 0$，则 $Pic(X_i) = *$ 和 $\lambda = k_i[\mathbb{C}] - b[\mathbb{R}]$，其中 $b = b^2_+(X_i)$。此外，若 $k_i > 0$，则 $\pi^0_{S^1}(*, \lambda) = \pi^b_{S^1}(*, \mathbb{C}^{k_i})$ 同构于稳定余同伦群 $\pi^{b-1}(\mathbb{CP}^{k_i-1})$，由 [4, 命题 3.4] 给出。映射 $I_\delta\colon \pi^0_{S^1}(*; \lambda) \to \pi^0_{S^1}(*; \lambda - [\underline{\mathbb{C}}^\delta])$ 可识别为由包含映射 $\mathbb{C}P^{k_2-\delta-1} \to \mathbb{C}P^{k_2-1}$ 诱导的映射 $\pi^{b-1}(\mathbb{C}P^{k_2-1}) \to \pi^{b-1}(\mathbb{C}P^{k_2-\delta-1})$，这将在第 5.4 小节中研究。

2.3. 定理 1.4 的证明。对于 $i = 1,2$，设 X_i 是一个边界具有 SWF 球型的紧致定向四维流形。（我们假设 $b^+_2(X_i)$ 对于 $i = 1,2$ 是任意的。在下面的定理 2.16 之前，$b_1(X_i)$ 可能非零。）假设我们有沿 Y（其具有 SWF 球型）的粘合分解 $X = X_1 \cup_Y X_2$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的一个 spin^{c}结构，且 $\mathfrak{s}_i := \mathfrak{s}|_{X_i}$。粘合公式 (2.1) 立即推出以下命题及其推论。

命题 2.13。如果 BF$(X, \mathfrak{s}) \neq 0$，则 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1) \neq 0$，且 BF$(X_2, \mathfrak{s}_2) \neq 0$。

令 $\mathcal{B}^{\mathbb{Q}}(X)$ 为 Bauer–Furuta 有理基本类的集合，即在有理上同调群 $H^2(X; \mathbb{Q})$ 中考察的 Bauer–Furuta 基本类的集合。

推论 2.14. 包含映射 $\mathcal{B}^{\mathbb{Q}}(X_1 \cup_Y X_2) \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Q}}(X_1) \oplus \mathcal{B}^{\mathbb{Q}}(X_2)$ 成立。进一步假设 Y 是一个整系数同调 3-球面。那么 $\mathcal{B}(X_1 \cup_Y X_2) \subset \mathcal{B}(X_1) \oplus \mathcal{B}(X_2)$。

以下两个推论是定理 2.13 和定理 2.14 的特例。

推论 2.15（[3, 定理 8.5]）。设 X_1、X_2 是闭的定向光滑 4-流形。对每个 i，设 $\mathfrak{s}_i$ 是 X_i 上的一个自旋^c 结构。若 BF$(X_1\#X_2, \mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2) \neq 0$，则 BF$(X_1, \mathfrak{s}_1) \neq 0$ 且 BF$(X_2, \mathfrak{s}_2) \neq 0$。

推论 2.16. 包含映射 $\mathcal{B}(X_1\#X_2) \subset \mathcal{B}(X_1) \oplus \mathcal{B}(X_2)$ 成立。

设 $X = X_0 \cup_Y N$ 是沿着 Y 的 SWF 球型粘合分解。假设 $b_1(X_0) = 0$、$b^+_2(X_0) \geq 2$、$b_1(N) = 0$ 且 $b^+_2(N) = 0$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X上的自旋^{c}结构。

命题 2.17. 若 $d(\mathfrak{s}) = 1$ 且 ind $D(N, \mathfrak{s}|_N) < 0$，则 BF$(X, \mathfrak{s}) = 0$。

证明。假设 BF$(X, \mathfrak{s}) \neq 0$。那么 $b^+_2(X) \equiv 2$ 模 4，且 BF$(X, \mathfrak{s})$ 是上同伦群 $\pi^{2k-3}(\mathbb{CP}^{k-1})$ 的一个生成元，其中 $k = \frac{1}{2}(b^+_2(X) + 2)$ 由霍普夫映射的平方表示（[4, 引理 3.5], 另见第 5 节）。设 K 是一个 $K3$ 曲面，$\mathfrak{s}_0$ 是 K 上的典范自旋^c 结构。根据定理 2.6 或 [2, 命题 4.5], ，我们得到 BF$(X\#K, \mathfrak{s}\#\mathfrak{s}_0) \neq 0$。假设

$X\#K = X_0 \cup_Y (N\#K)$，那么根据定理 2.13，$\mathrm{BF}(N\#K, \mathfrak{s}|_N\#\mathfrak{s}_0) \neq 0$。另一方面，假设 $\mathrm{ind}\, D(N, \mathfrak{s}|_N) < 0$，则意味着 $d(\mathfrak{s}|_N\#\mathfrak{s}_0) < 0$，因此 $\mathrm{BF}(N\#K, \mathfrak{s}|_N\#\mathfrak{s}_0) = 0$。这是一个矛盾。□

定理 1.4 的证明。若 $d(\mathfrak{s}_2) \leq 1$，则 $d(\mathfrak{s}_1) \leq -1$。因此 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = 0$。若 $d(\mathfrak{s}_2) = 2$，则 $d(\mathfrak{s}_1) = 0$ 或 $d(\mathfrak{s}_1) \leq -2$。在后一种情况下，我们有 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = 0$。若 $d(\mathfrak{s}_2) = 2$ 且 $d(\mathfrak{s}_1) = 0$，则 $k_2 - k_1 = 1$ 且 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = I_2\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2)$，其中 $k_i = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\, D(X_i, \mathfrak{s}_i)$。如定理 2.12 中所述，$I_2$ 可识别为映射

$$I_2 \colon \pi^{2k_2-4}(\mathbb{CP}^{k_2-1}) \to \pi^{2k_2-4}(\mathbb{CP}^{k_2-2}).$$

由于 $\pi^{2k_2-4}(\mathbb{CP}^{k_2-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m$ ($m = \gcd(2, k_2)$) 且 $\pi^{2k_2-4}(\mathbb{CP}^{k_2-2}) = \mathbb{Z}$ 根据[4, 引理 3.5]（另见第 5 节），并且根据假设 $\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2)$ 是挠元，我们有 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = I_2\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2) = 0$。若 $d(\mathfrak{s}_2) = 3$，则 $d(\mathfrak{s}_1) = 1$ 或 $d(\mathfrak{s}_1) \leq -1$。在后一种情况下，我们有 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = 0$。若 $d(\mathfrak{s}_2) = 3$ 且 $d(\mathfrak{s}_1) = 1$，则根据命题 5.11，映射 $I_2\colon \pi^{2k_2-5}(\mathbb{CP}^{k_2-1}) \to \pi^{2k_2-5}(\mathbb{CP}^{k_2-2})$ 是平凡的，因此 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = I_2\mathrm{BF}(X_2, \mathfrak{s}_2) = 0$。根据定理 2.17 也可得到 $\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1)$ 的消失，因为 $l_1 < l_2 \leq 0$，其中 $l_i = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\, D(N_i, \mathfrak{s}_i|_{N_i})$。□

定理 1.6 和定理 1.7 的证明。这些结论直接由定理 1.2 和定理 1.4 得出。□

设 X 是一个闭定向四维流形，满足 $b_1(X) = 0$, $b_2^+(X) \geq 2$。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的一个自旋^c 结构。由于 $k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 是单连通的，$k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的自旋^c 结构由其第一陈类刻画。对于 $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_k)$，若每个 c_i 都是奇数，设 $\mathfrak{s}_{\mathbf{c}}$ 为 $k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上满足 $c_1(\mathfrak{s}_{\mathbf{c}}) = \sum_{i=1}^k c_i E_i$ 的自旋^c 结构，其中 E_i 是例外类。

命题 2.18。假设 $(X, \mathfrak{s})$ 满足条件 $(*)$，且 $\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}) \neq 0$。那么，$\mathrm{BF}(X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2, \mathfrak{s}\#\mathfrak{s}_{\mathbf{c}}) \neq 0$ 当且仅当对每个 i 都有 $c_i = \pm 1$。

证明。这由定理 1.6 通过归纳法证明。□

为便于后文使用，我们回顾 Kronheimer 伴随不等式 [18]。设 Σ 是光滑 4-流形 X中的一个光滑嵌入曲面，则令

$$\chi_-(\Sigma) = \sum_{g_i > 0} (2g_i - 2),$$

其中 g_i 是分支 Σ_i 的亏格，Σ。

定义 2.19. 若类 $K \in H^2(X; \mathbb{Z})$ 满足以下条件，则称其为单极子类：K 是某个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$ 在 X 上的第一陈类 $c_1(\mathfrak{s})$，且对 X上的任意黎曼度量，$\mathfrak{s}$ 上的 Seiberg–Witten 方程都有解。

定理 2.20（Kronheimer [18]）。设 X 是一个闭定向光滑 4-流形。假设 Σ 是代表类 $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ 的嵌入曲面，且其自交数非负 $m = \alpha \cdot \alpha$。对于 $X_m = X\# m\overline{\mathbb{CP}}^2$，令 $K_m = K + E_1 + \cdots + E_m$。若$K_m$ 是 X_m上的单极子类，则

$$\chi_-(\Sigma) \geq \alpha \cdot \alpha + |\alpha \cdot K|. \tag{2.2}$$

推论 2.21. 设 X 和 Σ 如定理 2.20 中所述。若 K 是一个 Bauer–Furuta 基本类，则不等式 (2.2) 成立。

证明。证明可由下文的定理 2.20 和定理 2.22 得出。□

命题 2.22. 若 K 是 Bauer–Furuta 基本类，则对每个非负的 m， K_m 都是单极子类。

证明。如果对于某个黎曼度量，Seiberg–Witten 方程没有解，那么 $\Psi^{-1}(0)$ 为空，其中 Ψ 是表示 Bauer–Furuta 不变量的 U(1)-映射。这意味着 Ψ 与平凡映射 U(1)-同伦，因此 Bauer–Furuta 不变量是平凡的。因此，Bauer–Furuta 基本类是单极子类。由定理 1.6， K_m 对每个 m 都是 Bauer–Furuta 基本类，因而它是单极子类。□

2.4. 定理 1.10 的证明。

命题 2.23。设 X 是一个光滑闭 4-流形，其中含有一个自交数为 $-r < 0$ 的嵌入球面 S。设 $\mathfrak{s}$ 是一个 spin^c 结构，且 BF$(X, \mathfrak{s}) \neq 0$。如果 $|\langle c_1(\mathfrak{s})\ [S]\rangle| + [S] \cdot [S] \geq 0$，则

$$\begin{aligned} &\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s} + \alpha^*) \neq 0 \quad \textit{if } \langle c_1(\mathfrak{s}), [S]\rangle > 0 \\ &\mathrm{BF}(X, \mathfrak{s} - \alpha^*) \neq 0 \quad \textit{if } \langle c_1(\mathfrak{s}), [S]\rangle < 0, \end{aligned}$$

其中 α^* 是 $[S]$的庞加莱对偶。

证明。设 $\langle c_1(\mathfrak{s})\ [S]\rangle > 0$。令 N 为 S的管状邻域。注意， N 的边界是一个透镜空间，它承认正标量曲率度量。将 X 分解为

$$X = X_0 \cup N,$$

其中 $X_0 = \overline{X \setminus N}$。注意， $\mathfrak{s}|_{X_0} = (\mathfrak{s} + \alpha^*)|_{X_0}$，并且

$$d(\mathfrak{s} + \alpha^*) = d(\mathfrak{s}) + \langle c_1(\mathfrak{s}), [S]\rangle + [S] \cdot [S] \geq d(\mathfrak{s}).$$

由定理 1.2，我们得到 BF不变量$(X, \mathfrak{s} + \alpha^*) \neq 0$。当$\langle c_1(\mathfrak{s})\ [S]\rangle < 0$ 时的证明类似。□

定理 1.10 的证明。设 x 由一个浸入球面表示，该球面有p 个正双重点和 n 个负双重点。设 $\langle K, \alpha\rangle = \langle c_1(\mathfrak{s})\ \alpha\rangle \geq 0$。那么，在 $\overline{X} = X\#(p+n)\overline{\mathbb{CP}}^2$中， $\bar{\alpha} = \alpha - 2\sum_{j=1}^{p} e_j$ 由一个嵌入球面表示，其中 e_j 是第 j个 $\overline{\mathbb{CP}}^2$中的例外因子的同调类。令 E_j为 e_j 的庞加莱对偶， $\bar{\mathfrak{s}}$ 为具有 $c_1(\bar{\mathfrak{s}}) = c_1(\mathfrak{s}) + \sum_{j=1}^{p+n} E_j$的自旋^c 结构。根据定理 2.23，要么 $\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} + \langle c_1(\bar{\mathfrak{s}})\ \bar{\alpha}\rangle \leq -2$，要么 BF不变量$(\overline{X}, \bar{\mathfrak{s}}) \neq 0$。现在

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = \alpha \cdot \alpha - 4p, \quad \langle c_1(\bar{\mathfrak{s}}), \bar{\alpha}\rangle = \langle c_1(\mathfrak{s}), \alpha\rangle + 2p.$$

因此，在第一种情况下，

$$\alpha \cdot \alpha + \langle c_1(\mathfrak{s}), \alpha\rangle \leq 2p - 2.$$

否则

$$\mathrm{BF}(\overline{X}, \bar{\mathfrak{s}}) \neq 0.$$

此外，由定理 1.6 可得

$$\mathrm{BF}(\overline{X}, \bar{\mathfrak{s}}) = \mathrm{BF}(X, \mathfrak{s}).$$

当 $\langle K、\ \alpha\rangle \leq 0$ 时的证明类似。 □

3. BF dimension and BF homogeneous type

我们引入一个微分同胚不变量——BF 维数。它远弱于 Bauer–Furuta 不变量，但可能更容易处理。

定义 3.1. 设 X 是一个 SWF 球型的闭 4-流形，或边界具有 SWF 球型的紧致 4-流形。（这里 $b_2^+(X)$ 是任意的。）定义 $\Delta(X)$ 为

$$\Delta(X) = \{d(\mathfrak{s}) \mid \mathfrak{s} \text{ is a spin}^c \text{ structure on } X \text{ with } \mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}) \neq 0\}.$$

于是我们定义，

$$\dim_{\mathrm{BF}}(X) = \begin{cases} \min \Delta(X), & \text{if } \Delta(X) \text{ has a minimum element,} \\ -\infty, & \text{if } \Delta(X) \neq \emptyset \text{ and } \Delta(X) \text{ has no lower bound,} \\ \infty, & \text{if } \Delta(X) = \emptyset. \end{cases}$$

命题 3.2. 设 X 是定理 3.1 中的一个四维流形。那么 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = -\infty$ 或 $-1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X) \leq \infty$。更准确地说，以下结论成立。

(1) 若 $b_2^+(X) = 0$ 且 $b_2^-(X) \neq 0$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = -\infty$。若 $b_2^+(X) = 0$ 且 $b_2^-(X) = 0$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = b_1(X) - 1$。(2) 若 $b_2^+(X) \geq 1$，则 $0 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X) \leq +\infty$。特别地，若 $b_2^+(X) = 1$ 且 $b_1(X) = 0$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = +\infty$。

证明. (1) 若 $b_2^+(X) = 0$，则对每个定义在 X 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，$\mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}) \neq 0$（定理 2.9）。若 $b_2^-(X) \neq 0$，则 $\Delta(X)$ 没有下界。若 $b_2^-(X) = 0$，则对每个 $\mathfrak{s}$，$d(\mathfrak{s}) = b_1(X) - 1$。

(2) 设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的自旋^c 结构。若 $b_2^+(X) \geq 1$ 且 $d(\mathfrak{s}) < 0$，则 $(X,\mathfrak{s})$ 的单极映射在 U(1)- 等变意义下是零伦的，因此 $\mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}) = 0$。这意味着 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) \geq 0$。若 $b_2^+(X) = 1$ 且 $b_1(X) = 0$，则由定理 2.10 可知 $\Delta(X) = \emptyset$。□

命题 3.3. 设 $X = X_1 \cup_Y X_2$ 是沿 Y 的 SWF-球面型粘合分解。假设对 $i = 1, 2$，有 $\dim_{\mathrm{BF}}(X_i) = d_i$。那么

(1) 若 d_1 和 d_2 都是有限的，则 $d_1 + d_2 + 1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X) \leq +\infty$。

(2) 若 d_i 中有一个是 $+\infty$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = +\infty$。

证明。(1) 对于 X 上的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，令 $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}|_{X_i}$ 满足 $i = 1, 2$。则 $d(\mathfrak{s}) = d(\mathfrak{s}_1) + d(\mathfrak{s}_2) + 1$。若 $d(\mathfrak{s}) \leq d_1 + d_2$ 对于 X 上的某个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$ 成立，则 $d(\mathfrak{s}_i) < d_i$ 至少对 $i = 1, 2$ 中的一个成立，因此 $\mathrm{BF}(X_i, \mathfrak{s}_i) = 0$。由定理 2.13，$\mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}) = 0$。

(2) 若 d_1 是 $+\infty$，则对于 X_1 上的每个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_1$，$\mathrm{BF}(X_1, \mathfrak{s}_1) = 0$。定理 2.13 意味着，对于 X 上的每个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，$\mathrm{BF}(X,\mathfrak{s}) = 0$，因此 X 的 BF 维数为 $+\infty$。□

推论 3.4。对于每个 $i = 1,2$，设 X_i 是一个闭 4-流形，且 $\dim_{\mathrm{BF}}(X_i) = d_i$。那么

(1) 如果 d_1 和 d_2 是有限的，则 $d_1 + d_2 + 1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X_1 \# X_2) \leq +\infty$。

(2) 如果 d_i 中有一个是 $+\infty$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X_1 \# X_2) = +\infty$。

定理 3.3 和定理 3.2 蕴含以下推论。

推论 3.5. 设 $X = X_1 \cup_{Y_1} \cdots \cup_{Y_{l-1}} X_l$ 是沿 SWF 球型有理同调三维球面进行的粘合分解。若对每个 i，都有 $b_2^+(X_i) \geq 1$，则 $l - 1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X) \leq +\infty$。

推论 3.6. 设闭定向光滑 4-流形 $X_1, \ldots, X_l$ 具有正的 b_2^+。则 $l-1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(\#_{i=1}^l X) \leq +\infty$。

定理 1.17 的证明。由定理 3.5，我们有 $k-1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X) \leq +\infty$ 且$l-1 \leq \dim_{\mathrm{BF}}(X') \leq +\infty$。由定理 2.6，$X$ 具有一个自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$，使得 BF$(X,\mathfrak{s}) \neq 0$ 且 $d(\mathfrak{s}) = k-1$。因此 $\dim_{\mathrm{BF}}(X) = k-1$。若 $l > k$，则 $\dim_{\mathrm{BF}}(X') > \dim_{\mathrm{BF}}(X)$，因此 X 与 X'不微分同胚。

由于 $b_1(X) = 0$，对于每个 j，我们都有 $b_1(X_j') = 0$。假设对于某个j，$b_2^+(X_j') = 1$。根据定理 2.10，BF$(X_j', \mathfrak{s}|_{X_j'}) = 0$，因此 BF$(X,\mathfrak{s}) \neq 0$。这就产生了矛盾。因此，对于每个 j，都有 $b_2^+(X_j') \geq 2$。□

接下来，我们引入 BF 齐次型的概念，它是 Seiberg–Witten简单型的推广。

定义 3.7. 设 X 是 SWF 球型的闭 4-流形或带边界的紧致 4-流形，且具有 $b_2^+(X) \geq 1$。若对于任意满足 $d(\mathfrak{s}) \neq d$ 的情形，BF$(X,\mathfrak{s}) = 0$，则称 X 具有 d 维 BF 齐次型。

注 3.8. 根据定义，以下条件 (1)、(2) 和 (3) 等价：

(1) 对于多于两个 d，X 具有 d 维 BF 齐次型。(2) 对每个 d，X 都具有 d 维 BF 齐次型。(3) X 不存在满足 BF$(X,\mathfrak{s}) \neq 0$ 的自旋^c 结构 $\mathfrak{s}$。

定义 3.9. 若四维流形 X 满足定理 3.8 中等价条件 (1)(2)(3) 之一，则称其为 BF 平凡型。

注记 3.10. 在 $b_2^+ - b_1 \geq 2$ 的情况下，如果 X 属于零维 BF 齐性类型，那么 X 属于 Seiberg–Witten 简单型。探讨逆命题是否成立将会很有意思。

注记 3.11. 如果对于某个 $\mathfrak{s}$，X 属于 d 维 BF 齐次非平凡型，那么 X 的 BF维数为 d。

Taubes 证明了辛 4 维流形属于 Seiberg–Witten 简单型 [25, 定理0.2(6)]。这一结论推广如下。

命题3.12. 具有 $b_2^+ \geq 2$ 的闭辛四维流形 X 属于零维 BF 齐性类型。此外，如果 $b_2^+ - b_1 \geq 2$，那么 X 不属于 BF 平凡型。

证明. [25, 定理0.2(6)] 的证明在此情形下同样适用。辛流形 X 上存在唯一的典范自旋^c 结构 $\mathfrak{s}_0$，并且 X 上的每个自旋^c 结构都可写成 $\mathfrak{s}_0 + E$，其中 $E \in H^2(X;\mathbb{Z})$。若 BF$(X,\mathfrak{s}_0+E) \neq 0$，则根据 [25] 的定理0.1的证明，我们可以找到一条嵌入辛曲线，其表示 E 的庞加莱对偶。其余证明与 [25, 定理0.2(6)] 的证明相同。此外，若 $b_2^+ - b_1 \geq 2$，则根据定理2.3以及 Taubes 的 Seiberg–Witten 不变量非消失定理 [24]，BF$(X,\mathfrak{s}_0) \neq 0$。□

下一个命题是定理 2.15 的推论。

命题3.13. 设 $X = X_1 \cup_Y X_2$ 是沿 Y 的SWF 球型粘合分解。对于每个 $i = 1, 2$，假设 X_i 具有 d_i维的 BF 齐次型。那么，X 具有 $(d_1 + d_2 + 1)$ 维的 BF 齐次型。

证明。设 $\mathfrak{s}$ 是 X 上的自旋^c 结构，并且对每个 $i = 1$，2，在 $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}|_{X_i}$ 上也有此结构。根据定理2.15，如果 BF($X_i, \mathfrak{s}_i$) 中有一个为零，那么 BF($X, \mathfrak{s}$) 也为零。注意到$d(\mathfrak{s}) = d(\mathfrak{s}_1) + d(\mathfrak{s}_2) + 1$。因此，只有维数为$d_1 + d_2 + 1$ 的 Bauer–Furuta 不变量可能非零。□

推论 3.14。设 X_1、.....、 X_k 是满足 $b_2^+(X_i) \geq 2$ 的闭辛四维流形。那么 $X_1\#\cdots\#X_k$ 具有 $(k-1)$ 维 BF 齐次型。

定理 1.18 的证明。由定理 2.6，BF($X, \mathfrak{s}$) $\neq 0$。这一事实结合定理 3.13 表明， X 属于 $(k-1)$ 维 BF 齐次非平凡型。由于 X' 具有相同的性质，我们有 $k = l$，且 X' 满足定理 2.6 中的条件。□

4. 爆破简单型

我们引入爆破简单型的概念，从爆破公式的角度推广 Seiberg–Witten 简单型。这一性质对于确定通过在鱼尾邻域中进行对数变换而得到的 4 维流形的 Bauer–Furuta 不变量起着重要作用。

我们首先回顾相关定义。

定义 4.1. 假设 $b_2^+(X) \geq 2$。(1) 若存在 X 上的自旋 ^{c} 结构 $\mathfrak{s}$，使得 $c_1(\mathfrak{s}) = K$ 且 $\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}) \neq 0$，则称 X 的二阶上同调类 K 为 Seiberg–Witten 基本类，其中 $\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s})$ 表示 $\mathfrak{s}$ 的（取整数值的）Seiberg–Witten 不变量。此外，若 $\mathrm{SW}_X(\mathfrak{s}) \neq 0$ (模 2)，则称 K 为模 2 Seiberg–Witten 基本类。

(2) 若每个 Seiberg–Witten（分别地，模 2 Seiberg–Witten）基本类 K 都满足 $d_X(K) = 0$，则称四维流形 X 具有 Seiberg–Witten（分别地，模 2 Seiberg–Witten）简单型；其中 $d_X(K) = \frac{1}{4}(K^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X))$，而 $\chi(X)$ 和 $\sigma(X)$ 分别表示 X 的欧拉示性数和签名。

在本节余下部分，对于正整数 k，令 $e_1, \ldots, e_k$ 为 $H_2(k\overline{\mathbb{CP}}^2) = \oplus_k H_2(\overline{\mathbb{CP}}^2)$ 的标准正交基，并令每个 $E_i \in H^2(k\overline{\mathbb{CP}}^2)$ 为 e_i 的庞加莱对偶。在 $k = 1$ 的情形下，我们常分别用 e 和 E 表示 e_1 和 E_1。这里我们引入爆破简单型的概念。

定义 4.2. (1) X 的 Bauer–Furuta（分别为 Seiberg–Witten）基本类 K 称为 BF（分别为 SW）简单类，若对于任意整数 $l \neq \pm 1$， $K + lE$ 都不是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta（分别为 Seiberg–Witten）基本类。在 X 中，它常被称为 BF（分别为 SW）简单类，以强调 K 是 X 的基本类。

(2) 若每个 Bauer–Furuta（分别地，Seiberg–Witten）基本类都是 BF（分别地，Seiberg–Witten）简单型的，则称四维流形 X 具有 BF（分别地，Seiberg–Witten）爆破简单型。

注 4.3. (1) 若 $(X, \mathfrak{s})$ 满足第 1 节中的条件 $(*)$，且 $K = c_1(\mathfrak{s})$ 是 Bauer–Furuta 基本类，则根据定理 1.6， K 是 BF 简单的。(2) 若 $b_2^+ = 0$，则每个 Bauer–Furuta 基本类都不是 BF 简单的。这可由定理 2.9 得出。

下面的引理可由 Seiberg–Witten 不变量的爆破公式 [5, 定理 1.4] 轻易推出。

引理 4.4. 设 K 是 X 的一个 Seiberg–Witten 基本类。考虑以下条件：

(i) $d_X(K) = 0$。(ii) K 是 Seiberg–Witten 简单的。
(iii) K 是 BF 简单的。

则以下 (1) 和 (2) 成立。

(1) 如果 $b_2^+ > 1$，则条件 (i) 和 (ii) 等价。(2) 如果 $b_2^+ - b_1 > 1$，则 K 是 Bauer–Furuta 基本类，并且 (i)、(ii) 和 (iii) 等价。

证明。根据 Bauer 和 Furuta 的结果 $[4,$ 命题 3.3$]$，，如果 $b_2^+ - b_1 > 1$，则每个 Seiberg–Witten 基本类都是 Bauer–Furuta 基本类，因此 K 是 Bauer–Furuta 基本类。此外，Fintushel 和 Stern 的结果 $[5,$ 定理 1.4$]$表明，当 $b_2^+ > 1$时，条件 (i) 与 (ii) 等价。断言 (i) $\Rightarrow$ (iii) 可由以下事实轻易得到：任意四维流形的 Bauer–Furuta 基本类 L ，若该四维流形 Z具有正的 b_2^+，则都满足 $d_Z(L) \geq 0$。断言 (iii) $\Rightarrow$ (ii) 源于以下事实：每个 Seiberg–Witten 基本类都是 Bauer–Furuta 基本类。□

推论 4.5. 四维流形 X 是 Seiberg–Witten 简单型，当且仅当 X是 SW 爆破简单型。

由此推论可知，BF 爆破简单型为 Bauer–Furuta 不变量提供了另一种自然的简单型定义。我们将展示许多具有 BF 爆破简单型的 4 维流形实例。辛四维流形是基本例子。

命题 4.6（参见 Bauer $[3]$）。每个具有$b_2^+ - b_1 > 1$ 的闭定向辛 4 维流形都是 BF 爆破简单型。

证明。由定理 3.12，具有 $b_2^+ > 1$ 的闭定向辛 4 维流形具有零维 BF 齐性类型，因此每个 Bauer–Furuta 基本类 K 都满足 $d_X(K) = 0$。若 $b_2^+ - b_1 > 1$，则根据定理2.3， K 也是 Seiberg–Witten 基本类。由此，结论可由定理 4.4 得出。□

我们注意到，爆破操作保持 BF 和 Seiberg–Witten 简单性。

引理 4.7. 假设 K的 X 的 Bauer–Furuta（分别为 Seiberg–Witten）基本类是 BF（分别为 SW）简单的。那么在 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中， $K + E$ 和 $K - E$ 都是 BF 简单的。

证明. SW 情形可利用 $d_X(K) = 0$这一事实轻易证明，因此我们证明 BF 情形。设 E' 表示 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$中最后一个连通和项 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的第二上同调群的生成元。假设 $K+E+lE'$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$的一个 Bauer–Furuta 基本类。显然，存在 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的一个保定向自微分同胚，其诱导同构将 $K+E+lE'$ 映射到 $K+lE+E'$。因此， $K+lE+E'$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$的一个 Bauer–Furuta 基本类。由此，定理 1.6 表明 $K+lE$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$的一个 Bauer–Furuta 基本类。由于 K 是 BF 简单的，我们可知 $l = \pm 1$，这表明 $K + E$是 BF 简单的。同样的论证也证明了 $K - E$ 的情形。□

在本节余下部分，设 X_1 和 X_2 是闭连通定向光滑 4-流形。我们注意到下面的引理。

引理 4.8. 设 K_1 和 K_2 分别是 X_1 和 X_2的第二上同调类。若对于某个整数 $l \neq \pm 1$, $K_1 + K_2 + lE$ 是 $X_1\#X_2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta 基本类，则每个 K_i 都是 X_i 的 Bauer–Furuta 基本类，而 X_i 并非 BF 简单。

证明。由于 $X_1\#X_2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 与 $(X_1\#\overline{\mathbb{CP}}^2)\#X_2$ 微分同胚，定理 2.15 表明， $K_1 + lE$ 和 K_1 分别是 $X_1\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 和 X_1 的 Bauer–Furuta 基本类。因此，假设 $l \neq \pm 1$ 表明 K_1 在 X_1 中不是 BF 简单。此外，同样的论证也表明 K_2 满足该结论。□

下面的命题可由此引理直接得出，而此命题与命题 4.6 可立即推出下面的推论。

命题 4.9。若 X_1 和 X_2 中至少有一个是 BF 爆破简单型，则连通和 $X_1\#X_2$ 是 BF 爆破简单型。

推论 4.10. 如果 X_1 具有辛结构并满足 $b_2^+(X_1) - b_1(X_1) > 1$，那么连通和 $X_1\#X_2$ 是 BF 爆破简单型。

该推论以及 Bauer [2] 、Ishida 和 Sasahira [10] 关于 Bauer–Furuta 不变量的连通和公式，产生了许多具有 BF 爆破简单型的光滑 4-流形的例子；这些流形的 Seiberg–Witten 不变量为零，但 Bauer–Furuta 不变量不为零。

现在我们证明定理 1.12 和 1.13。

定理 1.12 的证明。令 α 为由给定曲面表示的 X 的第二同调类。由于 $\alpha \cdot \alpha = 2g - 2 > 0$, α 是一个非挠类，且 $b_2^+(X) \geq 1$。令 K 为 X 的一个 Bauer–Furuta 基本类。假设对于某个整数 $l \neq \pm 1$, $K + lE$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的一个 Bauer–Furuta 基本类。由于 $K + lE$ 是特征类，我们看到 l 为奇数，从而得到 $|l| > 1$。如有必要，通过反转曲面的定向，我们可以假设 $\langle K, \alpha \rangle \geq 0$ 。由于 $\alpha - e$ 在 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中由一个亏格为 g、自交数为 $2g - 3 > 0$ 的光滑嵌入曲面表示，定理 2.21 蕴含

$$\langle K + lE, \alpha - e \rangle + (\alpha - e) \cdot (\alpha - e) \leq 2g - 2.$$

左侧等于 $\langle K, \alpha \rangle + l + 2g - 3$。当 $l > 1$ 时，该值大于 $2g - 2$，从而与上述不等式矛盾。当 $l < -1$ 时，将伴随不等式应用于 $\alpha + e$，我们得到矛盾。因此，结论成立。□

定理 1.13 的证明。在 $p > 1$ 的情形下，由定理 1.12 可得结论，因为 X 存在一个亏格为 p、自交数为 $2p - 2$ 的光滑嵌入闭定向曲面代表。因此我们假设 $p = 1$。令 K 为 X 的一个 Bauer–Furuta 基本类。我们将证明 K 是 BF 简单。反之，假设对于某个满足 $l \neq \pm 1$ 的整数 l， $K + lE_1$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的一个 Bauer–Furuta 基本类。那么，我们容易看出 $|l| > 1$。令 α 为由浸入 2-球面代表的 X 的一个第二同调类。必要时，通过吹起消除负双点，我们可以假设 α 在某个正整数 k 下的 $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中由一个只有一个正双点的浸入 2-球面代表。我们还可以进一步假设 $\langle K, \alpha \rangle \geq 0$。根据定理 1.2，类 $K + lE_1 + E_2 + \cdots + E_k$ 是 $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的一个 Bauer–Furuta 基本类。根据定理 4.11

如下，对于任意正整数 n， $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的第二同调类 $n\alpha - e_1$ 由一个有一个正双点的浸入 2-球面代表。在 $l > 1$ 的情形下，不等式

$$\langle K + lE_1 + E_2 + \cdots + E_k,\, n\alpha - e_1\rangle \,+\, (n\alpha - e_1)\cdot(n\alpha - e_1) \,>\, 2\cdot 1 - 2$$

成立，因为左侧等于 $n\langle K, \alpha\rangle + l - 1$。因此，定理 1.10 表明，对于任意正整数 n，$K+lE_1+E_2+\cdots+E_k+2PD(n\alpha-e_1)$ 是 $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta 基本类，其中 PD 表示庞加莱对偶。这表明，$X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 有无穷多个虚维数大于 $K + lE_1 + E_2 + \cdots + E_k$ 的 Bauer–Furuta 基本类，这与此类基本类的有限性相矛盾（[17, 引理 2.4]）。在 $l < -1$ 的情形下，对 $n\alpha + e_1$ 应用相同的论证，也会得到矛盾。□

定理 1.14 的证明。如定理 1.14 前一段所述，我们可以在 $X\#(p-1)\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中找到子流形 C_p，并且 $X_{(p)}$ 与该 C_p 的有理吹降微分同胚。由于鱼尾类 α 满足定理 1.13 的条件， $X\#(p-1)\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta 基本类具有如下形式L_J: $= L + \sum J_i E_i$，其中 $L \in \mathcal{B}(X)$，且 $J_i = \pm 1\,(i = 1, \cdots, p-1)$。令 X_0 为 C_p 内部的补集。则 $L + (\sum J_i)\ f \in H^2(X_{(p)}; \mathbb{Z})$ 是 $L_J|X_0$ 的唯一延拓。由定理 1.7，$X_{(p)}$ 的 Bauer–Furuta 基本类具有如下形式 $L + (\sum J_i)\, f$，其中 $L \in \mathcal{B}(X)$，且 $J_i = \pm 1\,(i = 1, \cdots, p-1)$。□

引理 4.11. 设连通定向光滑四维流形 Z 的第二同调类 α （其中 $\alpha \cdot \alpha = 0$ ）由一个恰有一个正双点的浸入 2-球面表示。那么，对于任意整数 n，类 $n\alpha$ 也由一个恰有一个正双点的浸入 2-球面表示。

证明. 由于四维球包含一个恰有一个正双点的浸入 2-球面， $n = 0$ 情形成立。因此，我们可以假设 $n > 0$。表示 α 的浸入 2-球面的加厚邻域是一个二维球面的自纤维和。因此，该邻域就是图1第一幅图所示把手体图中的鱼尾邻域（见 [15, 第 240], [9, 页第 202] 页）。在此图中，同调类表示相应 2-柄所给出的类；我们通过与 [28, 图12–17], 中类似的把手变换来改变鱼尾邻域的把手分解，同时不改变其微分同胚类型。我们建立一对消去的 2-柄和 3-柄，并将由此产生的 2-柄滑过表示 α 的 2-柄，如第二幅图所示。接着，按第三幅和第四幅图所示滑动 2-柄。重复这些把手滑动并使用一次同痕后，我们得到第五幅图。将 2-柄 $n\alpha$ 在带 -1 框架的 2-柄上滑动两次，并删除显然的一对消去的 1-柄和 2-柄后，我们得到最后一幅图。下面讨论鱼尾邻域的这个子把手体。如图2所示，通过一次正交叉变换，表示 $n\alpha$ 的 2-柄的附着圆在 1-把手体 $S^1 \times D^3$ 的边界中变成一个平凡纽结。因此我们看到，该附着圆在 1-把手体边界的领圈邻域中围成一个浸入圆盘。因此，类 $n\alpha$ 在 Z 中由一个恰有一个正双点的浸入 2- 球面表示。□

我们指出，定理 1.12 和 1.13 与 Bauer–Furuta 不变量的连通和公式结合起来，可以构造出许多光滑 4-流形的例子。

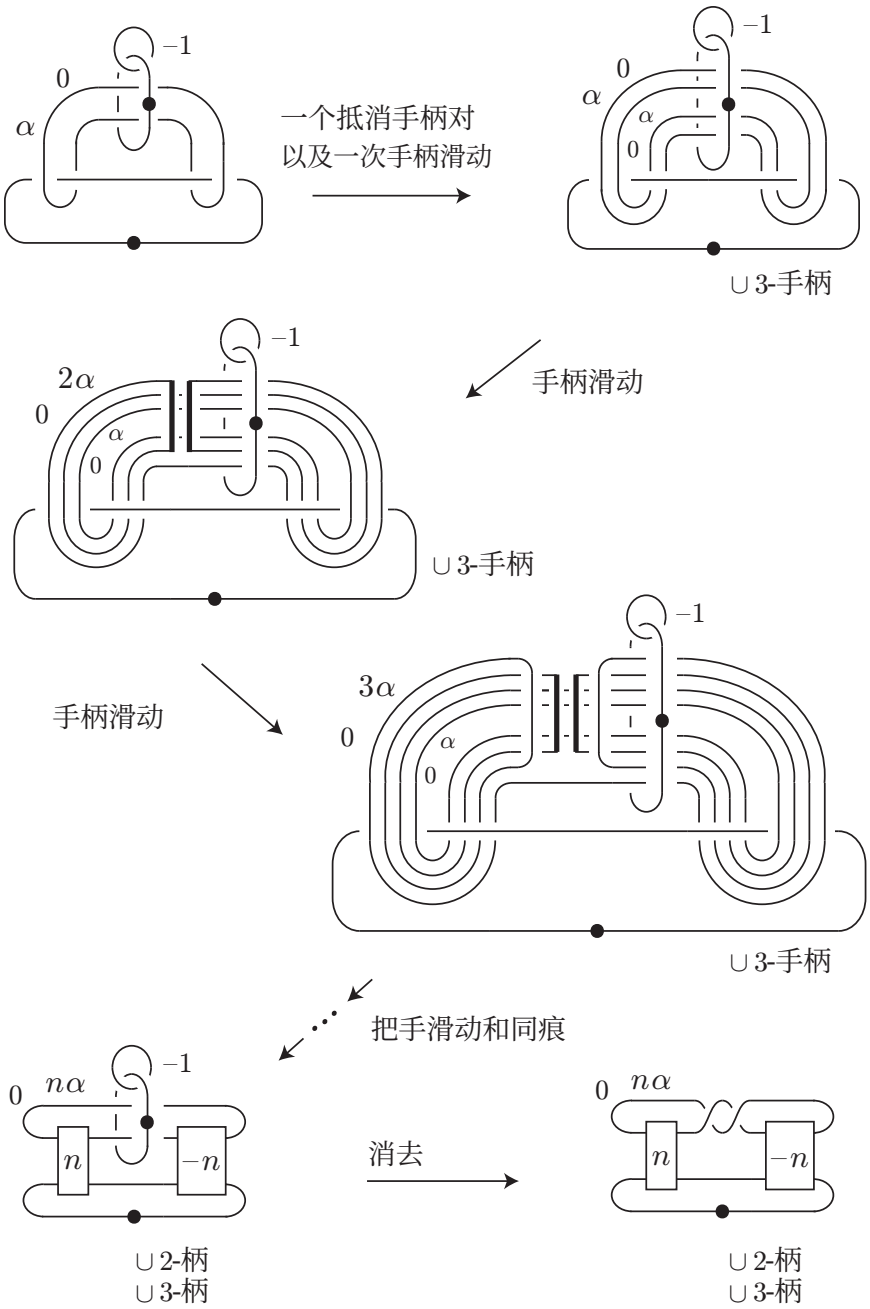

FIGURE 1. 鱼尾邻域的柄分解

具有消失的 Seiberg–Witten 不变量，却属于 BF 爆破简单型的一个

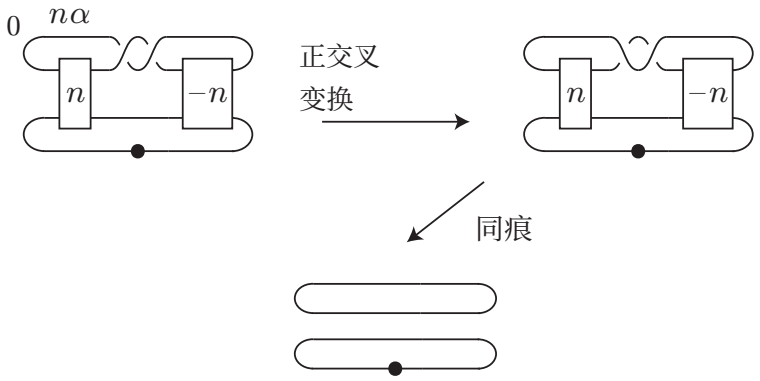

FIGURE 2. 附着圆的同伦

非零的 Bauer–Furuta 不变量，这些不变量并非（至少不是直接）由定理 4.10 得到。

作为爆破简单型的一个应用，我们在此给出下述定理的另一种证明。该定理表明，对于一大类拓扑 4-流形，其所有光滑结构都具有模 2 Seiberg–Witten 简单型。Kato、Nakamura 和 Yasui 早先已在 [14] 中得到这一结果。尽管其核心思想与原证明相似，但该证明简化了论证，尤其是不像原证明那样使用伴随不等式。

定理 4.12（[14]）。设 X 满足 $b_2^+ - b_1 > 1$，且 $b_2^+ - b_1 \equiv 3$（模 4），并设 $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$ 是 H^1（X）的一个生成集。若每个杯积 $\delta_i \cup \delta_j$ 或为挠元，或可被 2 整除，则 X 具有模 2 Seiberg–Witten 简单型。

证明。反之，假设 X 不是模 2 Seiberg–Witten 简单型。那么，我们看到 X 有一个模 2 Seiberg–Witten 基本类 K，满足 $d_X(K) = 2n$，其中 n为某个正整数。根据爆破公式（[5, 定理 1.4]），$K + 3E_1 + \cdots + 3E_n$ 是 $X\#n\overline{\mathbb{CP}}^2$的模 2 Seiberg–Witten 基本类。设 X' 为一个闭连通定向光滑 4-流形，满足 $b_2^+ \equiv 3$ (模 4)以及 $b_1 = 0$，且它有一个模 2 Seiberg–Witten 基本类 K'，满足 $d_{X'}(K') = 0$。注意，根据定理 4.4，K' 在 X' 中是 BF 简单的。此外，还有许多 X' 的例子，例如 $K3$曲面。由 Ishida 和 Sasahira 的一个结果 [10], 可知，$K + 3E_1 + \cdots + 3E_n + K'$是 $X\#n\overline{\mathbb{CP}}^2\#X'$的 Bauer–Furuta 基本类。因此，定理 4.8 表明 K' 不是 BF 简单的，这就产生了矛盾。□

作为定理 1.10 的一个应用，我们得到以下浸入伴随不等式。

定理 4.13. 设 α 是 X 的一个第二同调类，由一个具有 p个正双点且可能具有负双点的浸入 2-球面表示，其中p 是一个正整数。若 X 具有 BF 爆破简单型，则对 X的任意 Bauer–Furuta 基本类 K，以下不等式成立。

$$|\langle K, \alpha \rangle| + \alpha \cdot \alpha \leq 2p - 2.$$

证明. 反过来，假设上述不等式不成立。我们可以假设不等式

$$\langle K,\, \alpha\rangle \,+\, \alpha\cdot\alpha \,>\, 2p-2$$

成立；必要时可用 $-\alpha$ 替换 α 。此外，必要时可通过吹起消解双重点，我们可以假设 $\alpha - 2e_1$ 由一个浸入 2-球面表示，该球面在 $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中只有 $p-1$ 个正双点，其中 k 是某个正整数。在 $X\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 中，不等式

$$\langle K+E_1+\cdots+E_k,\, \alpha-2e_1\rangle \,+\, (\alpha-2e_1)\cdot(\alpha-2e_1) \,>\, 2(p-1)-2.$$

成立，因为左边的滑动是 $\langle K,\, \alpha\rangle + \alpha\cdot\alpha - 2$。因此，定理 1.10 表明 $K+E_1+\cdots+E_k+2PD(\alpha-2e_1)$ 是 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta 基本类。由于这个类等于 $K+2PD(\alpha)\ -3E_1+E_2+\cdots+E_k$，由定理 1.6 可知， $K+2PD(\alpha)$ 和 $K+2PD(\alpha)\ -3E_1$ 分别是 X 和 $X\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的 Bauer–Furuta 基本类。因此， X 不是 BF 爆破简单型，这就产生了矛盾。□

注4.14。Bauer [3, §4] 引入了 Bauer–Furuta 不变量的一种更精细的版本。通过使用这一精细不变量，Bauer 将定理2.3（该定理给出了 Seiberg–Witten 不变量与 Bauer–Furuta 不变量之间的关系）推广到了 $b_2^+ \geq 2$ 的情形。此外，正如 [3, §8]，中提到的，连通和公式对这一版本的不变量也成立。于是，本节中的若干结果可以推广到 $b_2^+ \geq 2$ 的情形，前提是我们使用 Bauer–Furuta 不变量的精细版本来定义 Bauer–Furuta 基本类、BF 简单和 BF 爆破简单型这些概念。事实上，定理 4.4、定理4.6 和定理 4.10 都推广到了 $b_2^+ \geq 2$ 的情形。

5. The stable cohomotopy groups of complex projective spaces

5.1. 预备知识。

5.1.1. 长正合序列。回顾一下，若 A 是带基点CW复形 X 的子复形，则对任意带基点空间 Y，存在一个带基点集合的正合列

$$[X/A, Y] \to [X, Y] \to [A, Y].$$

于是，由于直接极限保持正合列，我们得到一个长正合序列

$$\cdots \to \{\Sigma(X/A), Y\} \to \{\Sigma X, Y\} \to \{\Sigma A, Y\} \to \{X/A, Y\} \to \{X, Y\} \to \{A, Y\} \to \cdots,$$

其中 $\{Z, W\}$ 表示稳定同伦集 $\lim_{n\to\infty}[\Sigma^n Z, \Sigma^n W]$。另一方面，根据 Freudenthal悬挂定理和 Blakers–Massey定理，还存在一个正合列

$$\cdots\{Z, A\} \to \{Z, X\} \to \{Z, X/A\} \to \{Z, \Sigma A\} \to \{Z, \Sigma X\} \to \{Z, \Sigma(X/A)\} \to \cdots.$$

5.1.2. 球面的稳定同伦群。令 π_n^S 表示 S^0的第 n个稳定同伦群。那么如 [26], 中所述，对 $*<0$ 有 $\pi_*^S = 0$ ，并且

$$\pi_0^S = \mathbb{Z}\{\iota\},\quad \pi_1^S = \mathbb{Z}/2\{\eta\},\quad \pi_2^S = \mathbb{Z}/2\{\eta^2\},\quad \pi_3^3 = \mathbb{Z}/24\{\nu\},\quad \pi_4^S = \pi_5^S = 0,$$

其中 $\mathbb{Z}/n\{a\}$ 表示一个循环群 $\mathbb{Z}/n$ ，其生成元为 a。此外，我们有

$$\eta^3 = 12\nu.$$

5.2. 截短射影空间。设 $\mathbb{C}P^n_k = \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-k}$和 $\mathbb{H}P^n_k = \mathbb{H}P^n/\mathbb{H}P^{n-k}$。则

$\mathbb{C}P^n_k = S^{2(n-k+1)} \cup e^{2(n-k+2)} \cup \cdots \cup e^{2n}$和 $\mathbb{H}P^n_k = S^{4(n-k+1)} \cup e^{4(n-k+2)} \cup \cdots \cup e^{4n}$.

引理 5.1. 对于 $n \geq 3$，我们有

$$\mathbb{C}P^n_{n-2} = S^{2n-2} \cup_{(n-1)\eta} e^{2n}.$$

证明。考察 Sq^2 在 $\mathbb{C}P^n_{n-2}$的模 2 上同调上的作用。 □

在 [11], 中定义了拟射影空间；在四元数情形下，我们有

$$Q^n = S^3 \cup e^7 \cup \cdots \cup e^{4n-1}.$$

设 $Q^n_k = Q^n/Q^{n-k}$。以下结果由 James [11] 证明。

引理 5.2。对于 $n \geq 3$，我们有

$$\mathbb{H}P^n_{n-2} = S^{4n-4} \cup_{(n-1)\nu} e^{4n} \quad and \quad Q^n_{n-2} = S^{4n-5} \cup_{n\nu} e^{4n-1}.$$

对于 $n \geq 4$，考虑胞腔分解

$$\mathbb{C}P^n_{n-3} = S^{2n-4} \cup_\alpha e^{2n-2} \cup_\beta e^{2n} \quad \text{and} \quad \mathbb{C}P^n_{n-2} = S^{2n-2} \cup_{\bar{\beta}} e^{2n},$$

¯其中 β 是以下映射的复合

$$S^{2n-1} \xrightarrow{\beta} S^{2n-4} \cup_\alpha e^{2n-2} \to (S^{2n-4} \cup_\alpha e^{2n-2})/S^{2n-4} = S^{2n-2}.$$

¯由引理 5.1 可得， $\alpha = (n-2)\eta$ 且 $\beta = (n-1)\eta$。因此，当 n 为奇数时，

$$\mathbb{C}P^n_{n-3} = S^{2n-4} \cup_\eta e^{2n-2} \cup_{d_n\nu} e^{2n}$$

而当 n 为偶数时，

$$\mathbb{C}P^n_{n-3} = (S^{2n-4} \vee S^{2n-2}) \cup_{d_n\nu+\eta} e^{2n},$$

对于某个整数 d_n。我们来确定整数 d_n。由于维数的原因， $\Sigma\mathbb{C}P^n_{n-3}$ 是斯蒂费尔流形 $U(n+1)/U(n-2)$的$(2n+1)$-骨架，而 Q^n_{n-3}是 $Sp(n)/Sp(n-3)$的$(4n-1)$-骨架。自然包含映射 $Sp(n) \to U(2n)$诱导出映射 $Sp(n)/Sp(n-3) \to U(2n)/U(2n-6)$，因此由胞腔逼近定理，同伦交换图中存在一条虚线箭头 f，

$$\begin{array}{ccc} Q^n_{n-3} & \overset{f}{\nearrow} & \Sigma\mathbb{C}P^{2n-1}_{2n-4} \\ \vee & & \vee \\ Sp(n)/Sp(n-3) & \nearrow & U(2n)/U(2n-3) \end{array}$$

使得 f 可识别为包含映射

$$S^{4n-5} \cup_{d_{2n-1}\nu} e^{4n-1} \to S^{4n-5} \cup_\eta e^{4n-3} \cup_{d_{2n-1}\nu} e^{4n-1}.$$

由引理 5.2 可得， $d_{2n-1} = n$。另一方面，自然映射 $\mathbb{C}P^{2n}_{2n-3} \to \mathbb{H}P^n_{n-2}$ 可识别为捏映射

$$(S^{4n-4} \vee S^{4n-2}) \cup_{d_{2n}\nu+\eta} e^{4n} \to S^{4n-4} \cup_{d_{2n}\nu} e^{4n}$$

因此根据引理 5.2， $d_{2n} = n-1$。综上，我们得到:

命题 5.3。设 $n \geq 4$。对于奇数 n，

$$\mathbb{C}P^n_{n-3} = S^{2n-4} \cup_\eta e^{2n-2} \cup_{\frac{n+1}{2}\nu} e^{2n}$$

且当 n 为偶数时，

$$\mathbb{C}P^n_{n-3} = (S^{2n-4} \vee S^{2n-2}) \cup_{\frac{n-2}{2}\nu+\eta} e^{2n}.$$

5.3. 稳定余同伦群。令 $\pi^*(X)$ 表示稳定余同伦群。那么存在一个自然变换

$$h^*\colon \pi^*(X) \to H^*(X)$$

称为 Hurewicz 同态。我们确定 Hurewicz 同态 $h^{2n-k}\colon \pi^{2n-k}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2n-k}(\mathbb{C}P^n)$ 对于 $0 \le k \le 6$ 的核与余核。

命题 5.4。Hurewicz 同态 $h^{2n}\colon \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ 是一个同构。

证明。存在一个正合列

$$\pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n_{n-1}) \to \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}).$$

显然，对于 $* = 2n-1, 2n$， $\pi^*(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$，因此映射 $\pi^{2n}(\mathbb{C}P^n_{n-1}) \to \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ 是同构。还有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n_{n-1}) & \overset{\cong}{\succ} & \pi^{2n}(\mathbb{C}P^n) \\ {\scriptstyle h^{2n}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h^{2n}} \\ H^{2n}(\mathbb{C}P^n_{n-1}) & \overset{\cong}{\succ} & H^{2n}(\mathbb{C}P^n). \end{array}$$

由于左侧的垂直映射是同构，证明完毕。 □

命题 5.5. Ker $h^{2n-1} \cong \mathbb{Z}/(2, n+1)$ 和 Coker $h^{2n-1} = 0$。

证明。由于 $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$，Ker $h^{2n-1} = \pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n)$ 且 Coker $h^{2n-1} = 0$。仿照命题 5.4 的证明，

$$\pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n_{n-2}).$$

当 n 为奇数时，由引理 5.1 可得 $\mathbb{C}P^n_{n-2} = S^{2n-2} \vee S^{2n}$，因此 $\pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) \cong \pi^S_{-1} \oplus \pi^S_1 \cong \mathbb{Z}/2$。当 n 为偶数时，由引理 5.1 可得 $\mathbb{C}P^n_{n-2} = S^{2n-2} \cup_\eta e^{2n}$，于是有一个正合列

$$\pi^S_0 \xrightarrow{\eta^*} \pi^S_1 \to \pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) \to \pi^S_{-1}.$$

于是 $\pi^{2n-1}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) = 0$，证明完毕。 □

命题 5.6. 核 $h^{2n-2} \cong \mathbb{Z}/(2, n-1)$ 和余核 $h^{2n-2} = \mathbb{Z}/(2, n)$。

证明。与命题 5.4 的证明一样，我们可以看出映射 $\pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) \to \pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$ 是一个同构。考虑底胞腔 $S^{2n-2} \to \mathbb{C}P^n_{n-2}$ 的包含映射。于是得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{2n-2}(S^{2n-2}) & \prec & \pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) & \overset{\cong}{\succ} & \pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n) \\ {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle h^{2n-2}} & & \big\downarrow{\scriptstyle h^{2n-2}} & & \big\downarrow{\scriptstyle h^{2n-2}} \\ H^{2n-2}(S^{2n-2}) & \prec^{\cong} & H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) & \overset{\cong}{\succ} & H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n). \end{array}$$

于是，只需计算映射 $\pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) \to \pi^{2n-2}(S^{2n-2}) = \pi^S_0$ 的核和余核。由引理 5.1，存在一个正合列

$$\pi^S_1 \xrightarrow{(n-1)\eta^*} \pi^S_2 \to \pi^{2n-2}(\mathbb{C}P^n_{n-2}) \to \pi^S_0 \xrightarrow{(n-1)\eta^*} \pi^S_1.$$

因此，证明完成。 □

命题 5.7。余核 $h^{2n-3}=0$ 和

$$\operatorname{Ker} h^{2n-3} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(24,n+1) & n\ odd \\ \mathbb{Z}/\frac{(24,n-2)}{2} & n\ even. \end{cases}$$

证明。与命题 5.5 的证明一样，我们可以看出 $\operatorname{Coker} h^{2n-3}=0$ 和 $\operatorname{Ker} h^{2n-3} \cong \pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n_{n-3})$。对于奇数 n，由命题 5.3 可知存在一个正合列

$$\pi_0^S \xrightarrow{\eta^*+\frac{n+1}{2}\nu^*} \pi_1^S \oplus \pi_3^S \to \pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_{-1}^S.$$

那么 $\pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \cong (\mathbb{Z}/2\{\eta\} \oplus \mathbb{Z}/24\{\nu\})/(\eta+\frac{n+1}{2}\nu) \cong \mathbb{Z}/(24,n+1)$。对于偶数 n，由命题5.3 可知存在一个正合列

$$\pi_0^S \oplus \pi_2^S \xrightarrow{\frac{n-2}{2}\nu^*\oplus\eta^*} \pi_3^S \to \pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_{-1}^S \oplus \pi_1^S \xrightarrow{\frac{n-2}{2}\nu^*\oplus\eta^*} \pi_2^S.$$

于是 $\pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \cong (\mathbb{Z}/24\{\nu\})/(\frac{n-2}{2}, 12)\nu \cong \mathbb{Z}/\frac{(24,n-2)2}{}$，证明得证。□

命题 5.8. 核 $h^{2n-4}=0$ 和

$$\operatorname{Coker} h^{2n-4} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\frac{48}{(24,n+1)} & n\ odd \\ \mathbb{Z}/\frac{24}{(24,n-2)} & n\ even. \end{cases}$$

证明. 与命题 5.6 的证明一样，我们可以看到，Hurewicz 映射h^{2n-4}：$\pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2n-4}(\mathbb{C}P^n)$ 可识别为由底胞腔包含映射诱导的映射 $\pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n) \to \pi_0^S$。对于奇数 n，由引理 5.3，有一个正合列

$$\pi_1^S \xrightarrow{\eta^*+\frac{n+1}{2}\nu^*} \pi_2^S \oplus \pi_4^S \to \pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_0^S \xrightarrow{\eta^*+\frac{n+1}{2}\nu^*} \pi_1^S \oplus \pi_3^S.$$

于是通过简单观察，我们可以看到映射$\pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_0^S$ 的核和余核如陈述所示。对于偶数 n，由引理 5.3，有一个正合列

$$\pi_4^S \to \pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_0^S \oplus \pi_2^S \xrightarrow{\frac{n-2}{2}\nu^*+\eta^*} \pi_3^S.$$

由此可见，映射 $\pi^{2n-4}(\mathbb{C}P^n_{n-3}) \to \pi_0^S$的核和余核也如命题所述，证明完毕。□

命题 5.9. 余核 $h^{2n-5}=0$ 和

$$\operatorname{Ker} h^{2n-5} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(24,n) & n\ even \\ \mathbb{Z}/\frac{(24,n-3)}{2} & n\ odd. \end{cases}$$

证明。与命题 5.7 的证明相同，余核 $h^{2n-5}=0$ 和核 $h^{2n-5} \cong \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^n_{n-4})$。由于存在正合列

$$0=\pi_5^S=\pi^{2n-5}(S^{2n}) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}) \to \pi^{2n-5}(S^{2n-1})=\pi_4^S=0,$$

映射 $\pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4})$ 是一个同构。于是根据命题 5.7，证明完毕。□

命题 5.10. 核 $h^{2n-6}=0$ 和

$$\operatorname{Coker} h^{2n-6} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\frac{48}{(24,n)} & n\ even \\ \mathbb{Z}/\frac{24}{(24,n-3)} & n\ odd. \end{cases}$$

证明. 与命题 5.6 的证明一样，Hurewicz 映射 $h^{2n-6}\colon \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n) \to H^{2n-6}(\mathbb{C}P^n)$ 被识别为由底胞腔包含映射诱导的映射 $\pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi_0^S$。考虑一个正合列

$$\pi^{2n-7}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}) \to \pi_6^S \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}) \to \pi_5^S = 0.$$

由于 $\eta\nu = 0$，存在一个映射 $\bar{\nu}\colon S^{2n-4} \cup_\eta e^{2n-2} \to S^{2n-7}$，它在底胞腔上的限制为 ν。对于 n 为奇数的情形，根据命题 5.3，我们可以考虑以下映射的复合

$$S^{2n-1} \xrightarrow{\nu} S^{2n-4} \to \mathbb{C}P^{n-1}_{n-4} \to S^{2n-4} \cup_\eta e^{2n-2} \xrightarrow{\bar{\nu}} S^{2n-7}$$

它与 ν^* 一致。于是，映射 $\pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4})$ 是一个同构。对于 n 为偶数的情形，根据命题 5.3，存在一个正合列

$$0 = \pi_5^S \to \pi_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}) \to \pi_3^S \oplus \pi_1^S \to \pi_4^S = 0,$$

这意味着存在一个映射 $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}$，使得复合 $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}_{n-4} \to S^{2n-4}$ 与 ν 一致。于是我们得到，映射 $\pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4})$ 是一个同构，因此存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n_{n-4}) & \xrightarrow{\cong} & \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}_{n-4}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0^S & & \pi_0^S. \end{array}$$

因此，由命题 5.8 即可完成证明。 □

5.4. 自然性。我们考虑由包含映射 $\mathbb{C}P^{n-j} \to \mathbb{C}P^n$ 诱导的映射 $\pi^{2n-i}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-i}(\mathbb{C}P^{n-j})$，其中 $i = 5$ 为 6，$j = 1$ 为 2。

命题 5.11。映射 $\pi^{2n-i}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-i}(\mathbb{C}P^{n-1})$ 在 $i = 3$ 时为平凡映射，而在 $i = 5$ 时为同构，其中 $i = 5$ 为 6。

证明。为证明 $i = 3$ 的情形，根据命题 5.5，我们只需证明当 n 为奇数时此映射为平凡映射。存在一个正合列

$$\pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-3}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \pi_2^S$$

使得如命题 5.5 的证明中那样，最后一个映射可识别为映射

$$\eta^*\colon \pi_1^S \to \pi_2^S$$

该映射非平凡，因而是同构。$i = 5$ 的情形已在命题 5.9 的证明中证明。根据命题 5.8 和 5.10，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n) & \to & H^{2n-6}(\mathbb{C}P^n) & \to & A & \to & 0 \\ & & & & \downarrow \cong & & & & \\ 0 & \to & \downarrow & \to & \downarrow & \to & \downarrow & \to & 0 \\ & & \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}) & & H^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1}) & & A & & \end{array}$$

对于某个有限循环群 A。由此可知，图中的映射 $A \to A$ 是同构，因此映射 $\pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-1})$ 也是同构，证明至此完成。□

命题 5.12。映射 $\pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^{n-2})$ 是平凡的。

证明。该映射是以下映射的复合

$$\pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \pi^{2n-5}(\mathbb{C}P^{n-2}).$$

根据命题 5.11，后一个映射是平凡的。 □

命题5.13。映射 $\pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^n) \to \pi^{2n-6}(\mathbb{C}P^{n-2})$ 与映射相对应

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \frac{24}{(24,n)}x$$

当 n 为偶数且

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \quad x \mapsto \left(\frac{24}{(24,n-3)}x, 0\right)$$

当 n 为奇数时。

证明。证明过程与 $i = 6$ 情形下命题 5.11 的证明基本相同。 □

References

[1] Michael F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer,*Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I* **77** 1975 43 69 ，《剑桥哲学学会数学论文集》（），–。[2] Stefan Bauer， *A stable cohomotopy refinement of Seiberg–Witten invariants. II*，《数学发明》155（2004），第1期，21–40。[3] *Refined Seiberg–Witten invariants*，《几何的不同面貌》，2004年，第1–46页。[4] Stefan Bauer 和 Mikio Furuta，*A stable cohomotopy refinement of Seiberg–Witten invari-* ，《数学发明》*ants. I* **155** 2004 19（），第1期，1–。[5] Ronald Fintushel 和 Ronald J. Stern，*Immersed spheres in 4-manifolds and the immersed Thom conjecture* **19** 1995 2, 145 157 ，《土耳其数学杂志》（），第–期。[6] *Rational blowdowns of smooth 4-manifolds*，《微分几何杂志》46（1997），第2期，181–235。[7] Kim A. Frøyshov， *Compactness and gluing theory for monopoles*，《几何与拓扑专刊》15（2008），viii + 198。[8] M. Furuta， *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*，《数学研究快报》8（2001），第3期，279–291。[9] R. E. Gompf 和 A. I. Stipsicz， *4-manifolds and Kirby calculus*，《研究生数学丛书》第20卷，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1999年。[10] Masashi Ishida 和 Hirofumi Sasahira，*Stable cohomotopy Seiberg–Witten invariants of con-* ，《国际数学杂志》26（2015），第6期，23。文章编号/编号1541004。[11] I. M. James，*nected sums of four-manifolds with positive first Betti number. I: Non-vanishing theorem* *Spaces associated with Stiefel manifolds*，《伦敦数学学会会刊》（第3辑）9（1959），115–140，DOI 10.1112/plms/s3-9.1.115。[12] T. Khandhawit， *A new gauge slice for the relative Bauer-Furuta invariants*，《几何与拓扑》19（2015），第3期，1631–1655，DOI 10.2140/gt.2015.19.1631。[13] T. Khandhawit、J. Lin 和 H. Sasahira，*Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra II: Rela-* ，，《微分几何杂志》（），第–期，DOI 10.4310/jdg/1686931602。[14] T. Kato、N. Nakamura 和 K. Yasui，*tive invariants and the gluing theorem* **124** 2023 2, 231 316，*The simple type conjecture for mod 2 Seiberg–Witten* ，《欧洲数学学会杂志》（），第–期，DOI . /JEMS/ 。[15] R. Kirby 和 P. Melvin， *invariants* **25** 2023 12, 4869 4877， 10 4171 1297 *The E_8-manifold singular fibers and handlebody decompositions*，《Kirbyfest论文集》，美国加利福尼亚州伯克利，1998年6月22日至26日，1999年，第233–258页。[16] H. Konno、J. Miyazawa 和 M. Taniguchi， *Involutions knots and Floer K-theory*，预印本，arXiv:2110.09258。[17] D. Kotschick，*Monopole classes and Einstein metrics*，《国际数学研究通报》2004（2004），第12期，593–609。[18] P. B. Kronheimer， *Minimal genus in $S^1 \times M^3$*，《数学发明》135（1999），第1期，45–61。[19] Dan A. Lee，*Geometric relativity*，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2019年。

[20] Ciprian Manolescu,
Seiberg–Witten Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 =$, 《几何与拓扑》
0 **7** 2003 889 932
（）, –。[21] *A gluing theorem for the relative Bauer–Furuta invariants*, 《微分几何杂志》76（2007）,
第1期, 117–153。[22] L. I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg–Witten theory*, 《研究生数学丛书》第28卷, 罗得
岛州普罗维登斯：美国数学会, 2000年。[23] H. Sasahira,
Gluing formula for the stable cohomotopy version of Seiberg-Witten invariants
along 3-manifolds with $b_1 > 0$ 1408 2623 , 预印本,
arXiv: 。。[24] Clifford Henry Taubes, *The Seiberg–Witten invariants and symplectic forms*, 《数学研
究快报》1（1994）, 第6期, 809–822。[25] Clifford H. Taubes,
SW ⇒ Gr: From the Seiberg–Witten equations to pseudo-holomorphic , 《美国数学会
curves **9** 1996 3, 845 918
杂志》（）, 第–期。[26] Hirosi Toda, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, 第49卷, 普
林斯顿大学出版社, 普林斯顿（新泽西州）, 1962年。[27] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*,
《数学研究快报》1（1994）, 第6期, 769–796。[28] Kouichi Yasui,
Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles, 《代数与几何拓扑》8（2008）, 第2期, 971–996。

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan
Email address: tkato@math.kyoto-u.ac.jp

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, Japan
Email address: kishimoto@math.kyushu-u.ac.jp

Center for Integrated Sciences and Humanities, Fukushima Medical University,
1Hikariga-oka, Fukushima City 960-1295, Japan*Email address*: nnaka@fmu.ac.jp

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Sci-
ence and Technology, The University of Osaka, 1-5 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871,Japan

Email address: kyasui@ist.osaka-u.ac.jp